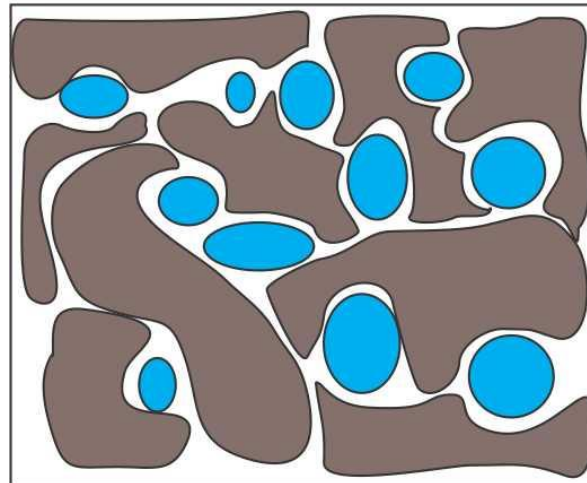




РЕПУБЛИКА СЕВЕРНА МАКЕДОНИЈА
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ - Скопје
Институт за земјотресно инженерство и инженерска
сеизмологија (ИЗИИС) - Скопје



Трифазно моделирање на почвата



ПРАКТИКУМ ПО ПРЕДМЕТОТ НАПРЕДНО ГЕОТЕХНИЧКО ИНЖЕНЕРСТВО

од

Вонр. проф. д-р Кемал Едип, дипл. град. инж.

Скопје, март 2023 година

Издавач:

Институт за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија при универзитетот “Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:

проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:

Кемал Едип, Институт за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија, Скопје

Печатница: Институт за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија при универзитетот “Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

Тираж : 100

Кемал Едип, Институт за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија, Скопје

Рецензенти:

1. Проф. д-р Влатко Шешов, редовен професор на Институт за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија, Скопје
2. Вонр. проф. д-р Јован Бр. Папик, вонреден професор на Градежен факултет, Скопје

Лектура на македонски јазик:

Виолета Јовановска-Никовска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

624.131.5.042(075.8)(076)

ЕДИП, Кемал

Трифазно моделирање на почвата : практикум по предметот напредно геотехничко инженерство / Кемал Едип. - Скопје : Институт за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија, 2023. - 83 стр. : илустр. ; 30 см

Библиографија: стр. 66-67. - Содржи и: Анекс

ISBN 978-9989-9718-5-3

а) Геотехника -- Порозивни почви -- Математичко моделирање -- Вискошколски учебници -- Вежби

COBISS.MK-ID 59931141

Предговор

Овој практикум по предметот Напредно геотехничко инженерство е наменет првенствено за студентите од третиот циклус на студии на Институтот за земјотресно инженерство и инженерска сеизмологија (ИЗИИС) – Скопје кои во своите наставни програми ги унапредуваат знаењата во областа на современото геотехничко инженерство.

Улогата на овој практикум е претставување напредни формулации за почвениот медиум како трифазен медиум при користење софистицирани нумерички софтвери во нивната едукација. Теоријата на трифазното моделирање на почвата се основа на Теоријата на порозните средини и е сложена бидејќи вклучува парцијални диференцијални равенки преку кои се толкуваат однесувањата на сите три составни фази во почвениот медиум. Со цел ефективно решавање на диференцијалните равенки користен е методот на конечни елементи и истиот е верифициран со споредени решени примери од литературата.

Овој практикум се состои од шест глави и Анекс со содржини од програмските субрутини напишани во компјутерскиот јазик FORTRAN.

Во првата глава е даден генерален преглед за трифазното моделирање на почвата и придобивките зошто трифазното моделирање игра важна улога во напредното геотехничко инженерство.

Втората глава ги опишува основните поими на теоријата на порозни средини.

Во третата глава е приложено моделирањето на трифазниот модел со конечни елементи.

Во четвртата глава е дадена нумеричката имплементација на трифазниот модел со опис на сите елементи кои имаат улога во нумериката.

Петтата глава обработува различни решени задачи од други автори со цел верификација на трифазниот модел.

Заклучокот е даден во шестата глава.

Во Анекс А се дадени најважните субрутини од нумеричкиот модел кои може да се користат за понатамошно унапредување на трифазниот модел.

Авторот сака да изрази посебна благодарност на рецензентите кои со своите совети и корекции дадоа придонес во подобрувањето на содржината.

Содржина

1. ВОВЕД	1
2. ТЕОРИЈА НА ПОРОЗНИ СРЕДИНИ	3
2.1 ПОЧВАТА КАКО ПОРОЗНА СРЕДИНА – КОНЦЕПТ НА ВОЛУМЕНСКИ ФРАКЦИИ	4
2.2 РАВЕНКИ НА РАМНОТЕЖА.....	5
2.2.1 Равенки на рамнотежа на маса.....	5
2.2.2 Равенки на рамнотежа на моментум	7
2.3 КОНСТИТУТИВНИ ОДНОСИ МЕЃУ КАПИЛАРНОСТ И ЗАСИТЕНОСТ	7
2.4 ВОДОСПРОВОДЛИВОСТ	9
2.5 ФУНКЦИИ НА ХИДРАУЛИЧКА СПРОВОДЛИВОСТ	11
2.5.1 Равенки на спроводливост според Брукс и Кори (Brooks and Corey)	12
2.5.2 Равенки на спроводливост според Ван Генухтен	12
2.6 КОНЦЕПТ НА ЕФЕКТИВНИ НАПРЕГАЊА.....	13
2.7 ОСНОВИ НА ПРОТОК	15
2.7.1 Механички равенки за воздушна и водена фаза	18
2.7.2 Механички равенки на цврстата фаза	19
3. МОДЕЛИРАЊЕ СО КОНЕЧНИ ЕЛЕМЕНТИ	20
3.1 ДИСКРЕТИЗАЦИЈА НА ВОДЕНАТА ФАЗА	21
3.2 ДИСКРЕТИЗАЦИЈА НА ВОЗДУШНАТА ФАЗА	22
3.3 ДИСКРЕТИЗАЦИЈА НА ЦВРСТАТА ФАЗА.....	23
3.4 СУМИРАЊЕ НА ЦЕЛИОТ СИСТЕМ	25
3.5 ГРАНИЧНИ УСЛОВИ	25
4. НУМЕРИЧКА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА НА ТРИФАЗНИОТ МОДЕЛ	27
4.1 ПРОСТОРНА ДИСКРЕТИЗАЦИЈА СО КОНЕЧНИ ЕЛЕМЕНТИ	27
4.2 НУМЕРИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА	27
4.3 РЕШЕНИЕ НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА	28
4.4 ЊУМАРКОВ МЕТОД НА ИНТЕГРАЦИЈА	28
4.5 ТРАПЕЗОИДЕН МЕТОД НА ИНТЕГРАЦИЈА	30
4.6 ПРИМЕНЛИВОСТ НА ТРИФАЗНИОТ МОДЕЛ.....	30
4.7 ПРОГРАМИРАЊЕ ВО ANSYS	33
5. ВЕРИФИКАЦИЈА НА ТРИФАЗНИОТ МОДЕЛ	37
5.1 ДРЕНАЖА НА ПОЧВЕН СТОЛБ	37
5.2 КОНСОЛИДАЦИЈА НА ПАРЦИЈАЛНО ЗАСИТЕН ПОЧВЕН СТОЛБ	44
5.3 КОНСОЛИДИРАЊЕ НА ЦЕЛОСНО ЗАСИТЕН ПОЧВЕН СТОЛБ	51
5.4 СИМУЛАЦИЈА НА РЕЗЕРВОАР.....	57
6. ЗАКЛУЧОК	64
ЛИТЕРАТУРА	66
АНЕКС А	68
SUBROUTINE UEL_100.....	68
SUBROUTINE UEC101	72
SUBROUTINE COUPLING	74
SUBROUTINE MMATRIX	77
SUBROUTINE KMATRIX	80
SUBROUTINE USERMAT3D.....	81

Листа на користени симболи

A	Површина на макроскопскиот домен на интерес
E	Модул на еластичност
e	Коефициент на порозност
\mathbf{E}	Матрица на еластичност
F	Сила
\mathbf{g}	Земјино забрзување
\mathbf{I}	Единечна матрица
k	Спроводливост
\mathbf{k}	Матрица на спроводливост
k_a	Спроводливост на воздушна фаза
k_w	Спроводливост на водена фаза
k_{ra}	Релативна спроводливост на воздушната фаза
k_{rw}	Релативна спроводливост на водената фаза
K_a	Модул на компресибилност на воздушната фаза
K_w	Модул на компресибилност на водената фаза
K_s	Модул на компресибилност на цврстата фаза
L^T	Диференцијален оператор
m^T	Оператор на матрица
m	Параметар во равенката на заситување
μ	Динамичка вискозност
n	Порозност
n	Параметар во равенката на заситување
n_a	Порозност на воздушната фаза
n_w	Порозност на водената фаза
\mathbf{N}	Матрица на функциите на форма

N^U	Матрица на функциите на форма за цврстата фаза
N^P	Матрица на функциите на форма за порните притисоци
p_c	Капиларен притисок
p_a	Воздушен притисок
p_w	Воден притисок
\bar{p}_w	Вектор на воден притисок
\bar{p}_a	Вектор на воздушен притисок
$\dot{\bar{p}}_w$	Временски диференцијал на водениот притисок
$\dot{\bar{p}}_a$	Временски диференцијал на воздушниот притисок
S_e	Нормирана заситеност
S_a	Заситеност со воздух
S_{irr}	Минимална заситеност
S_m	Максимална заситеност
S_w	Заситеност со вода
\mathbf{u}	Вектор на поместување
$\bar{\mathbf{u}}$	Вектор на поместување во јазлите од конечниот елемент
$\dot{\bar{\mathbf{u}}}$	Вектор на брзина во јазлите од конечниот елемент
$\ddot{\bar{\mathbf{u}}}$	Вектор на забрзување во јазлите од конечниот елемент

1. ВОВЕД

Во текот на последниве децении, со развојот на технологијата, нумеричките методи и нивната имплементација во софтверски пакети доминираат во полето на пресметковните симулации. Тоа соодветно се одразува и кај оние поврзани со геотехничкото инженерство, особено од аспект на однесувањето на почвата и интеракцијата со конструкциите. Воедно, знаејќи дека почвата најчесто ја сочинуваат три медиуми: цврсти честици, вода и воздух, нејзиното моделирање игра важна улога бидејќи, освен напрегањата, се добива претстава и за порните притисоци кои се резултат на заемното дејство на водата и воздухот во порите (во корелација со надворешни дејства). Моделирањето на почвата како трифазен медиум игра важна улога во геотехничкото инженерство бидејќи, освен напрегањата, се добива претстава и за порните притисоци кои се основаат на заемното влијание на водата и воздухот во празнините на порите. Оттука, феномените како капиларност, внатрешен негативен притисок (сукција), парцијална сатурација и др. може коректно да се симулираат, при што финалниот дизајн на геотехничките градби добива оптимизирани геометрии.

Исто така, со коректна симулација на трифазните почвени медиуми, феномените како стабилност на косини, истекување вода во почвениот медиум и промената на порните притисоци во почвата може коректно да се симулираат имајќи предвид дека парцијалната сатурација на почвениот медиум додава дополнителни формулации на напрегањата во почвената средина. Познавањето на теоријата на порозни материјали овозможува прифатливо разбирање на улогата на порите во трифазниот модел и потребните предуслови за протокот на флуидите низ порните средини бидејќи за проток е потребно да се има потенцијално поголеми притисоци во флуидите во споредба со постојните во порите.

Од друга страна, конститутивното моделирање на повеќефазните почвени материјали и нумеричките методи за предвидување на нивното однесување бара основни знаења за механиката на континуумот и конститутивните релации.

Со развојот на моќните компјутери и софтверските алатки, нумеричките симулации се достапни за решавање на сложените повеќефазни проблеми. Денес, симулацијата на повеќефазните медиуми, како трите фази на почвениот медиум, има широк спектар на користење и зема предвид голем број напредни геотехнички проблеми. Симулацијата на почвената средина како мултифазен медиум е од голема важност за реален опис на конкретната состојба во која напрегањата, порните притисоци и слегнувањата се директно поврзани со порозноста на анализираниот трифазен медиум.

Презентируваниот нумерички модел се состои од деформабилна почвена структура (цврсти почвени честитки) која во порите има два компресибилни флуиди: водата и воздухот. Конститутивните односи се резултат на равенките за рамнотежа на масата и линеарниот моментум според теоријата на порозните средини која овозможува симулирање на почвената средина како трифазен модел. Основите за нумеричкото моделирање на повеќефазните почвени медиуми даваат можност за примена на теоријата на порозност со помош на програмските алатки за симулација.

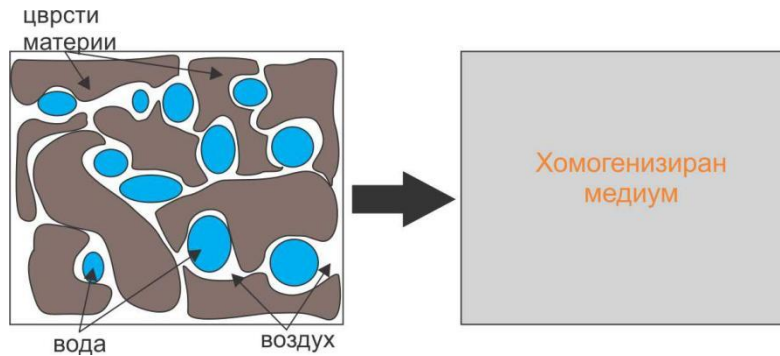
2. ТЕОРИЈА НА ПОРОЗНИ СРЕДИНИ

За разлика од проблемите поврзани со механиката на цврсти тела, геотехничките апликации не опфаќаат само еден цврст материјал, туку влијаат и врз притисоците на порните материји. Од друга страна порните материји имаат карактеристики на флуиди и играат улога во поврзувањето на цврстите почвени честички што води кон заемна деформација на сите фази во порозниот медиум. Повеќефазните материјали можат соодветно да се опишат со користење на теоријата на порозни средини во рамките на макроскопскиот пристап [1]. Оваа теорија се засновува врз формулирање на равенките на рамнотежа и проток на флуидите со што парцијално заситената средина може нумерички да се симулира. При следење на протекувањата кај насипи, на подземни води при градење на тунели, процеси на инјектирање како и при производство на нафта [2], повеќефазното симулирање добива во значење.

Во овој дел, се дава краток преглед на основните концепти на Теоријата на порозни средини, вклучувајќи го концептот на волуменски фракции, основните закони за рамнотежа, конститутивните модели и принципите на проток на флуидите.

Теоријата на порозни средини опишува сложена средина која се состои од различни материјали вклучувајќи ги внатрешните интеракции на составните материјали [3] со концептот на волуменски фракции со што се обезбедува одлична алатка за макроскопски опис на општите цврсто-течни материји. Поконкретно, се претпоставува дека сите составни материјали се статистички дистрибуирани во рамките на разгледуваниот домен во смисла на суперпонирани и интерактивни континууми, каде микроструктурната информација се зема предвид само преку волуменски фракции со следење на соодветниот концепт на волуменски фракции. Во трудовите на различни автори [4-7] дадени се дополнителни информации за теориите на порозни средини, особено за следење на Биотовите идеи за протокот на водата во почвени средини. Традиционалната примена на теоријата на порозни средини има голема важност во развојот на материјални модели за цврстите честички кои можат реално да ги опишат состојбите на напрегања во заситени и парцијално заситени почви [8]. Механичкото однесување на трифазниот почвен медиум зависи од

флуидните фази кои се содржат во порите на почвените материјали. Освен статичката интеракција меѓу цврстите почвени честички и флуидните фази, протокот на флуидите игра важна улога кај проблемите поврзани со ефектот на капиларните притисоци. За целите на макроскопската формулација, не е можно да се добијат точни предвидувања за локацијата на индивидуалните фази кои го сочинуваат трифазниот модел. Тие се хомогенизирани преку целосната површина како што е прикажано на Слика 2.1.



Слика 2.1. Хомогенизирање на трите фази во почвената средина.

Со ова деталниот опис на почвената средина ги содржи цврстите почвени честички, водата и воздухот во порите преку волуменски фракции. Се претпоставува дека матрицата на цврстите почвени честички има константен волумен преку контролната површина, додека порниот волумен може да ги содржи флуидните фази во границите на контролираната површина.

2.1 Почвата како порозна средина – концепт на волуменски фракции

Со цел опис на локалниот состав на почвата, се воведуваат локални волуметриски соодноси според концептот на волуменски фракции [1]. Волуменот V на целокупната средина произлегува од збирот на парцијалните волумени на составните фази:

$$V = \int_B dv = \sum_{\alpha} V^{\alpha} \quad (2.1)$$

Почвената средина е моделирана во три фази и претставува сооднос на цврстите почвени честички и фазите на вода и воздух преку волуменската фракција. Волуменската

фракција на цврстите материји во однос на порниот волумен е дадена со порозноста n , додека соодносите на порните големини се опишани со коефициентот на порозност e .

$$n = \frac{\text{Волумен на порите}}{\text{Вкупен волумен}} = \frac{V_a + V_w}{V} \quad (2.2)$$

$$e = \frac{\text{Волумен на порите}}{\text{Волумен на цврста фаза}} = \frac{V_a + V_w}{V_s} \quad (2.3)$$

Меѓу овие две променливи постои директна врска, така што

$$n = \frac{e}{1 + e}; e = \frac{n}{1 - n} \quad (2.4)$$

Имајќи го предвид фактот дека вкупниот порен простор или вкупниот порен волумен (најчесто) е парцијално исполнет со двете флуидни фази на вода и воздух, за поединечните фази се добиени следниве коефициенти на порозност:

$$n = n_a + n_w \quad (2.5)$$

$$e_w = \frac{n_w}{1 - n} = \frac{e}{n} \cdot n_w \text{ и/или } e_a = \frac{n_a}{1 - n} = \frac{e}{n} \cdot n_a \quad (2.6)$$

Преку концептот на заситување којшто е дефиниран со S_w за водената фаза и S_a за воздушната фаза, се опишуваат порните простори во трифазниот модел. Накратко, двете компоненти целосно го исполнуваат просторот на порите, односно додавањето на парцијалните заситувања е еднакво на единица.

$$S_w + S_a = 1 \quad (2.7)$$

2.2 Равенки на рамнотежа

Равенките на рамнотежа претставуваат основа за теоретската рамка на трифазниот модел со чија помош се опишува трифазниот почвен елемент со главните непознати: поместувањата на почвените цврсти честички и притисоците на порните флуиди вода и воздух.

2.2.1 Равенки на рамнотежа на маса

Под претпоставка дека во дадената контролна површина нема размена на маса меѓу составните фази на трифазниот модел, рамнотежата на маса за секоја фаза може да се напише на следниов начин:

$$\frac{d^\pi \rho^\pi}{dt} + \rho^\pi \nabla \cdot v_\pi = 0 \quad (2.8)$$

Во оваа равенка, вкупниот извод се разгледува во однос на движењето на π фазата. Во равенките членот s ја претставува цврстата фаза, додека членот π ја претставува флуидната фаза која може да биде водена и/или воздушна фаза. Во пракса поради важноста на деформациите, дозволено е сите величини да се разгледуваат во однос на движењето на цврстата фаза [9], при што може да се користи следнава трансформација на равенката:

$$\frac{d^s(K)}{dt} = \frac{d^\pi(K)}{dt} + \nabla(K) \cdot v_{\pi s} \quad (2.9)$$

Во равенката 2.9, членот $v_{\pi s}$ ја претставува релативната брзина на π фазата во однос на цврстите почвени честички s . Имајќи ја предвид важноста на движењето на цврстата фаза, наместо терминот $d^s(K)/dt$, може да се усвои терминот $d(K)/dt$. Слично на тоа, наместо терминот v_s , се добива терминот v . Применувајќи ја новата нотација, се добиваат следниве равенки:

$$\frac{d\rho^s}{dt} + \rho^s \nabla \cdot v = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{d\rho^\pi}{dt} + \rho^\pi \nabla \cdot v + \nabla \cdot (\rho^\pi v_{\pi s}) = 0 \quad (2.11)$$

Како што е дадено во трудот на Вајт [9], внатрешниот притисок $p_\pi = tr \sigma_\pi / 3$ е функција од густината ρ^π додека големината Φ претставува промена на севкупната маса во дадениот елемент и може да се претстави како $\phi = f(\rho)$. Ако се воведат дека волуменскиот модул K_π :

$$K_\pi = \rho_\pi \frac{dp_\pi}{d\rho_\pi} \quad (2.12)$$

и ако се прошири вкупниот временски извод на парцијалната густина, се добива равенката:

$$\frac{d\rho^\pi}{dt} = \rho_\pi \left(\frac{d\phi^\pi}{dt} + \frac{\phi^\pi}{K_\pi} \frac{dp_\pi}{dt} \right) \quad (2.13)$$

Во равенката 2.13 може да се види дека промената на севкупната маса директно е поврзана со крутоста на цврстата фаза и внесениот притисок. Со внесување на равенката 2.13 во 2.10 и 2.11, се добиваат следниве равенки:

$$\frac{d\phi^s}{dt} + \frac{\phi^s}{K_s} \frac{dp_s}{dt} + \phi^s \nabla \cdot v = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{d\phi^\pi}{dt} + \frac{\phi^\pi}{K_\pi} \frac{dp_\pi}{dt} + \phi^\pi \nabla \cdot v + \frac{1}{\rho_\pi} \nabla \cdot (\rho^\pi v_{\pi s}) = 0 \quad (2.15)$$

Во горните равенки членот $v_{\pi s}$ ја претставува Дарсиевата брзина. Равенките 2.14 и 2.15 ги земаат предвид волуменските модули K_π и K_s како модули на јакости на флуидната фаза (воздух или вода) и модулот на јакост на цврстата фаза.

2.2.2 Равенки на рамнотежа на моментум

Локалниот облик на равенката на рамнотежа за моментум е даден во 2.16:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho g = 0 \quad (2.16)$$

Трифазниот систем во целина има четири непознати: две компоненти на поместување и две компоненти за опис на притисокот на флуидите. Равенките за рамнотежата на моментумот се однесуваат на двете доминантни непознати, додека преостанатите две непознати се добиваат од равенките за рамнотежа на маса. Со цел комплетирање на математичкото моделирање на трифазниот модел, неопходно е да се дефинираат конститутивни односи кои се дадени во следниот дел од текстот.

2.3 Конститутивни односи меѓу капиларност и заситеност

Односите меѓу капиларност и заситеност ја даваат поврзаноста меѓу волуменските фракции на флуидните фази во порите на трифазниот модел. Нивните притисоци ја опишуваат способноста на почвата за складирање на вода во празнините на порите. Врската меѓу капиларноста и заситеноста на почвата не зависи само од карактеристиките на флуидите, туку и од геометријата на порозната средина.

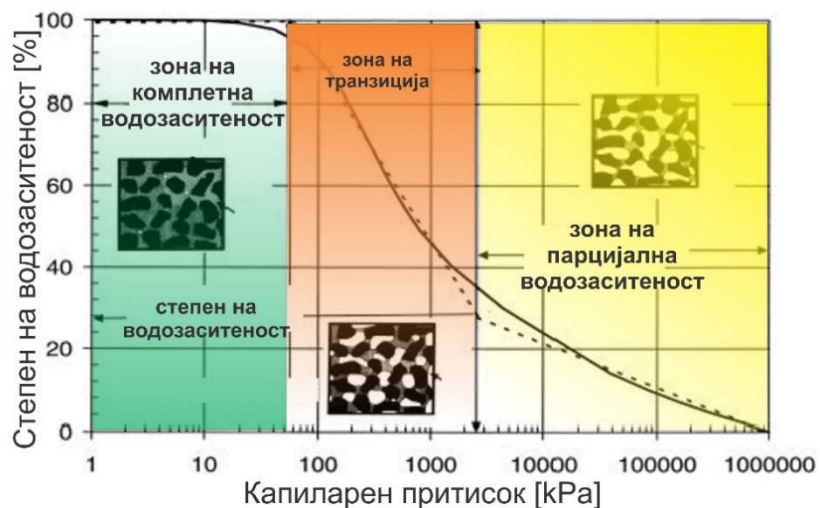
Нелинеарната врска меѓу капиларниот притисок и заситеноста произлегува од природата на почвата која зависи од обликот на цврстите честички и распоредот на зрната. Кога воздушниот притисок е поголем од притисокот на водата во порите, капиларниот притисок обезбедува дренажа во порните простори, со што се добива зголемено учество на воздух во порите. Во овој контекст, потребно е да се прави разлика меѓу однесувањето на водената и воздушната фаза во почвениот медиум. Поради својот голем површински притисок, водата најпрво ги апсорбира малите меѓупростори на почвената матрица.

Притисокот на водата се формира на контактните точки на цврстите честички. За споредба, воздухот има незначителен површински притисок поради што најпрво ги исполнува отворените пори на почвената матрица.

Покрај физичкото влијание на капиларноста, важно е да се земе предвид и апсорпцијата на водата [10]. На површината на зрната, со молекуларно поврзување на водата и цврстата материја, се формира тенок слој на вода. Силите на атхезија, кои се јавуваат како резултат на тоа, уште повеќе го зголемуваат влијанието на капиларноста. Како резултат, капиларните сили ја забрзуваат апсорпцијата на вода во незаситените почви при што се отежнува дренажата. Целосно истиснување на водата од почвата само со механички сили не е можно. Во случај на парцијално заситена почва, капиларниот притисок p_c се дефинира како разлика меѓу притисокот на порен воздух p_a и порна вода p_w .

$$p_c = p_a - p_w \quad (2.17)$$

Ова води кон зголемено учество на воздух со едновремено намалување на заситеноста со вода. На слика 2.2 е прикажан текот на односот на капиларноста и заситеноста.



Слика 2.2. Квалитативен тек на односот капиларност – заситеност [11].

На слика 2.2 може да се види дека во полето на многу мали капиларни притисоци, тешко да има какво било регистрирано намалување на заситеноста со вода. Ова се должи на влезниот капиларен притисок којшто не дозволува истекување на водата. Резултат на капиларноста на водата е тоа што водата се задржува во менискусите на меѓупросторите

на зрната. Оваа отпорност мора прво да се надмине за да може воздухот да продре во почвата. Во понатамошниот тек, во зоната на транзиција, во почетокот, се врши дренажа кај големите пори, при што негативните капиларни притисоци се зголемуваат кај средно големите пори. Понатамошно зголемување на капиларниот притисок резултира во одводнување на помалите порни простори, што уште еднаш се рефлектира во помала наклонетост на кривата, пред функцијата асимптотички да се приближи до парцијалната заситеност.

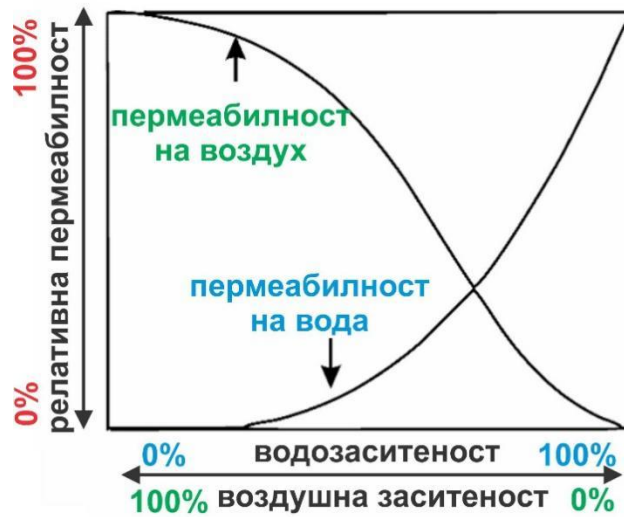
Генерално, треба да се разликува однесувањето на почвата при наводнување и одводнување. Процесот на одводнување кој е прикажан овде е само еден пат во хистерезисниот облик на односот капиларност–заситеност.

Обликот на цврстите честички, големината и распоредот на порите имаат влијание врз капацитетот на почвата да складира вода во порните простори. Во песокот, кој се смета за некохерентен материјал со подеднаков облик на зрна и со висока порозност, дренажата е присутна дури и на површини со низок притисок. Влезниот капиларен притисок е низок бидејќи песокот има низок капацитет за складирање вода. Кај кохерентните почви се забележува различно однесување. Големината на порите е многу помала што допринесува почвената средина да има голем капацитет на задржување на водата. Парцијална заситеност кај кохерентните почви се постигнува само при многу повисок опсег на притисок, што укажува на нивната висока капиларност.

2.4 Водоспроводливост

Општата способност на порозниот материјал да пренесува внатрешен флуид се нарекува спроводливост. Спроводливоста, која исто така се нарекува релативна спроводливост, го опишува заемното влијание на водата и воздухот врз нивните флуидни карактеристики, преку кои им се детектира стапката на проток. Притоа, кога се разгледуваат флуидните фази во целосно заситена почва, карактеристиките на протокот јасно и лесно се дефинираат, при што степенот на заситеност со вода (S_w) е еднаков на единица, додека при целосно сува почва, пак, степенот на заситеност со воздух (S_a) е единица.

Спроводливоста на парцијално заситените почви се одвојува од соодветната заситеност при што се добива парцијално заситен почвен медиум. Во парцијално заситениот медиум, се појавува и релативно движење на флуидите со меѓусебно заемно влијание. Степенот на влијание воглавно зависи од волуменските фракции и заситеноста на поединечните фази и може да се изведе од односот капиларност–заситеност. На слика 2.3. се прикажани карактеристиките на функциите на спроводливост за вода (k_{rw}) и воздух (k_{ra}) во зависност од степенот на заситеност со вода, односно воздух.



Слика 2.3. Релативна спроводливост на вода и воздух кај парцијално заситена почва

Од слика 2.3 може да се види дека во текот на наводнувањето, односно при зголемување на заситеност со вода, воздухот во внатрешноста на порите на почвата струи низ трифазната почвена средина. Влијанието на водата е незначително поради малите порни простори и шуплини на почвата, и не го спречува струењето на воздухот. Водената фаза, која е присутна во облик на капиларна вода, е прилично неподвижна, што се рефлектира во многу ниска спроводливост на трифазниот медиум. Оттука, при ниска содржина на порна вода, протокот на вода е невозможен. Понатаму, при набљудување на текот на спроводливоста, може да се забележи дека дури и мали воздушни единици значително влијаат врз протокот на вода.

2.5 Функции на хидрауличка спроводливост

Односите капиларност–заситеност обично се дефинираат по експериментален пат. Ова се врши преку „експеримент со истекување во повеќе чекори“, при кој водозаситен почвен столб се дренира со примена на растечки воздушен порен притисок. Детален опис со соодветни експериментални резултати може да се најде во различни публикации [12,13,14]. Бројни автори [15,16,17] имаат развиено регресиони равенки од експерименталните резултати. Врз основа на различните експериментални резултати, се добиени материјални криви кои можат да помогнат во добивање на емпириските параметри за однесувањето на различните типови на почва.

За разлика од односот меѓу капиларноста и заситеноста како функција која се дефинира чисто по експериментален пат, релативните спроводливости го опишуваат протокот на порната вода низ површина на заситените пори. Интерпретација на ова испитување е дадена од страна на *Mualem* [18], при што се добиени равенките на флуидната спроводливост (2.18) и (2.19).

$$k_{rw} = S_e^2 \left[\frac{\int_0^{S_e} \frac{1}{p_c^2} dS}{\int_0^1 \frac{1}{p_c^2} dS} \right]^2 \quad (2.18)$$

$$k_{ra} = (1 - S_e)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\int_{S_e}^1 \frac{1}{p_c} dS}{\int_{S_e}^1 \frac{1}{p_c} dS} \right]^2 \quad (2.19)$$

Во равенките 2.18 и 2.19 S_e ја опишува нормализираната водозаситеност, p_c е капиларниот притисок, додека интегралните функции ги дефинираат просторите каде флуидите имаат влијанија при опишувањето на парцијално заситените медиуми. Коэффициентот на релативна спроводливост на водената фаза k_{rw} е директно поврзана со нормираната водозаситеност S_e додека релативната спроводливост на воздушната фаза k_{ra} е комплементарна функција $(1 - S_e)^{\frac{1}{2}}$ од коэффициентот на релативна спроводливост на водената фаза.

2.5.1 Равенки на спроводливост според Брукс и Кори (Brooks and Corey)

Најстарата врска меѓу капиларност и заситеност и сè уште широко користен пристап е презентираан од страна на *Brooks u Corey* [19]. Врз основа на резултатите од тестовите, врската им е дефинирана на следниов начин:

$$S_e = \begin{cases} \left(\frac{p_c}{p_e}\right)^\lambda & \text{при } p_c \geq p_e \\ 1 & \text{при } p_c < p_e \end{cases} \quad (2.20)$$

Во равенка 2.20, S_e претставува нормализирана заситеност на почвениот медиум со вода и секогаш е помала или еднаква на единица.

$$S_e = \frac{S_w - S_{irr}}{S_m - S_{irr}} \quad (2.21)$$

Во равенката 2.21, апсолутната заситеност со вода е означена со S_w додека S_m е максималната заситеност во парцијално заситениот медиум. Најмалата можна вредност на заситеност е S_{irr} и се нарекува остаточна заситеност. Прилагодувањето на резултатите од тестирањата со различни типови на почви е дадено со емпириски параметри. Со замена на парцијалните густини во равенките (2.11) и (2.12) се добиваат следниве функции на релативните спроводливости за фазите на вода и воздух.

$$k_{rw} = S_e^{\frac{(2+2.5\lambda)}{\lambda}} \quad (2.22)$$

$$k_{ra} = (1 - S_e)^2 \left(1 - S_e^{\frac{(2+2.5\lambda)}{\lambda}}\right) \quad (2.23)$$

2.5.2 Равенки на спроводливост според Ван Генухтен

Равенките на спроводливост според *Van Genuchten* за опис на врската капиларност–заситеност [15] ги опишуваат врските на заситеност и се дефинираат врз основа на експериментални резултати, при што може да се наведе дека:

$$S_e = \left[1 + \left(\frac{p_c}{p_e}\right)^n\right]^{-m} \quad (2.24)$$

каде m – емпириски параметар, при што $m = 1 - 1/n$, а n – порозност. Симплифицираниот однос капиларност–заситеност е даден на следниов начин:

$$S_e = \left[1 + \left(\frac{p_c}{p_e} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}-1} \quad (2.25)$$

Функциите на релативна спроводливост на водената и воздушната фаза се:

$$k_{rw} = S_e^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{n}{n-1}} \right)^{1-\frac{1}{n}} \right]^2 \quad (2.26)$$

$$k_{ra} = (1 - S_e)^{\frac{1}{2}} \left(1 - S_e^{\frac{n}{n-1}} \right)^{2\left(1-\frac{1}{n}\right)} \quad (2.27)$$

2.6 Концепт на ефективни напрегања

Во мултифазниот почвен медиум, напрегањата имаат влијание врз целокупниот систем составен од цврстите честички (цврстата фаза) и флуидните фази. Според принципот на ефективни напрегања, цврстата фаза се смета за поврзана со порите каде има присуство на вода и/или воздух. Според тоа, напрегањата во повеќефазната средина можат да се поделат на напрегања од деформација на почвените честички и од промена на волуменот во фазите на вода и воздух во порите. Напрегањата кои предизвикуваат деформација во скелетот на цврстите честички се нарекуваат ефективни напрегања. Во анализа на почвените напрегања, почвената средина се смета како порозна средина која се состои од трифазен систем. Поради тоа, преносот на товар во почвената структура не се разгледува само преку цврстата фаза: тој се дистрибуира низ различни степени на присутност на трите фази.

Во механиката на почви, напрегањата кај цврстата фаза претставуваат негативни притисоци, додека водениот и воздушниот притисок се препознаваат како позитивни. Последователно, равенката 2-28 претставува генерализирана формулација на прикажаната повеќефазна средина, земајќи ги предвид вкупните напрегања σ :

$$\sigma = \sigma' + I p_s \quad (2.28)$$

со:

$$p_s = (1 - S_w)p_a + S_w p_w \quad (2.29)$$

Напрегањето се нарекува „ефективно напрегање“ и го претставува напрегањето кое дејствува врз цврстите честички (цврста фаза). Поради фактот дека флуидните фази се

присутни во порите на почвената средина, условите на хидростатичен притисок се дефинираат со матрица на идентитет која го зема предвид влијанието на притисоците само врз нормалните компоненти на напрегањето.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Како што е дадено во Теоријата на порозни средини, ефективното напрегање може да се поврзе со теоријата на консолидација за да се објасни временски зависниот тек под влијание на дадениот надворешен товар. Голем дел од вкупниот товар се распределува преку воздушните и водените фази. За да се дефинира деформацијата на скелетот на цврстите честички, се воведува параметарот α . Во тој случај, равенката 2-28 станува:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + \alpha I p_s \quad (2.31)$$

каде

$$\alpha = 1 - \frac{K_T}{K_S} \quad (2.32)$$

Параметарот α се нарекува Биотова константа според *Biot* [20] и претставува однос меѓу волуменскиот модул на цврстите честички K_T и волуменскиот модул на едно зрно од честичките K_S . Поради нејзината пропустливост, почвата овозможува проток кој може да се опише со Дарсиевиот закон. Неговата брзина и протокот зависат од различни параметри кои можат да се извлечат од природата на почвата и да ги одредат карактеристиките на средината во која тече. Брзината со која се намалуваат притисоците на воздухот и водата зависи од карактеристиките на протокот. Во зависност од спроводливоста на почвата, порниот притисок на водата може да се прилагоди во еден релативно долг период. За време на намалувањето на порниот воден и воздушен притисок во текот на времето, цврстата фаза прифаќа поголем дел од вкупниот товар. Понатамошниот тек на состојбата се нарекува целосно дренирање, при што порниот притисок на водата и воздухот повеќе не придонесуваат кон ефективното напрегање. Кај многу кохерентни почви, на пример, глина или кал, се очекува дека водата ќе истече после долго време. Кај некохерентни почви, овој процес се одвива брзо, со што ефективните напрегања се пренесуваат на самата цврста фаза. Во класичната механика на почвите, во теоријата на консолидација, влијанието на

воздухот обично се запоставува поради фактот што неговиот притисок е занемарлив. Ова води кон усвојување на симплифицираната теорија на консолидација на Терзаги, како што е објаснето во детали во трудот на *Verruijt* [21], каде првичната состојба на почвата е целосно заситена.

2.7 Основи на проток

При дефинирање на основите на проток од особено значење е Њутновиот флуид којшто се карактеризира со внатрешна попречна отпорност пропорционална на брзината на протокот: динамичка вискозност. Контролата на проток е опишана со Дарсијевиот закон во трудот на *Fredlund* [22], со што е формирана основата за моделирање на однесувањето на протокот во случај на два флуида (водена и воздушна фаза) во мултифазен медиум.

Динамичка вискозност

Важна механичка карактеристика на флуидите е вискозноста (lat.: viscum – лепак, лепливост), т.е. нивната особина на движење во порните празнини на почвата. Во движењето на молекулата низ флуидот, таа ја определува преовладувачката кохезија меѓу честичките. Отпорноста на честичката која се движи одговара на внатрешната сила на триење и се опишува со помош на Њутновиот закон за вискозност. Применетата сила F е пропорционална на контактната површина A и ја намалува брзината во слоевите кои се попречни на правецот на протокот. Равенката 2.33 ја опишува силата F :

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \quad (2.33)$$

каде μ е динамичка вискозност, A претставува контактна површина додека $\partial v / \partial n$ е градиент на брзина попречно на правецот на протокот. Факторот на пропорционалност μ се нарекува динамичка вискозност и може да се одреди по експериментален пат. На тој начин, напрегањето на смолкнување τ се добива на следниов начин:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \quad (2.34)$$

Со истражување на протокот на вода низ вертикални песочни филтри се покажало дека постои линеарна пропорционалност на волуметриската проточна брзина по површина на пресекот и намалувањето на притисокот по должина на проточната патека. На овој начин

се добива едноставна линеарна равенка на транспорт на флуидите која исто така се нарекува Дарсиев закон и е дадена во трудот на *Fredlund* [23]. Понатамошните емпириски докази откриваат дека линеарноста меѓу површинската брзина и хидрауличкиот градиент се прекинува при доволно големи брзини на проток, што ја ограничува применливоста на Дарсиевиот закон кај протоци управувани од мали спроводливости со мали градиенти на притисок на флуидот. Со други зборови, Дарсиевите протоци произлегуваат од правилно, мазно движење на порниот флуид (ламинарен проток) во границите на мали инерцијални сили.

Во Дарсиевиот закон, протокот на вода низ порниот простор на почвата зависи од хидрауличкиот градиент кој се дефинира како однос меѓу висината на хидрауличкиот притисок и должината на патеката на протокот. Количеството на вода кое тече вертикално по единица време низ површина на пресек нормален на правецот на протокот се нарекува брзина на протекување.

Брзината на порната вода како микроскопска вредност укажува на реалната брзина на водата на нејзиниот проточен пат низ порите. За разлика од тоа, брзината на протекување е достапна како макроскопска величина која ја претставува стапката на проток низ вкупната површина на средината. На макроскопско ниво, единствена големина е брзината на протекувањето. Дарсиевиот закон може да се опише како:

$$v = \mathbf{k}_f(\text{grad}(p) + \rho \mathbf{g}) \quad (2.35)$$

со:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{- Вектор на брзина на протекување}$$
$$\mathbf{k}_f = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{- Матрица на спроводливост}$$
$$\text{grad}(p) \quad \text{- Хидраулички градиент}$$
$$\rho \quad \text{- Густина}$$
$$\mathbf{g} \quad \text{- Вектор на гравитационо забрзување}$$

Матрицата на спроводливост за тридимензионалниот случај се поедноставува при претпоставување на изотропно однесување, со што матрицата на спроводливост \mathbf{k}_f може да се запише како скаларна функција k_f :

$$\mathbf{k}_f = k_f \quad (2.36)$$

Коефициентите на спроводливост k_f , наречени и хидрауличка спроводливост, зависат од влијанијата меѓу почвената структура и карактеристиките на протокот на флуидот. За да се опише однесувањето на почвената спроводливост, внатрешната спроводливост k се дава како:

$$k = \frac{\mu}{\rho \cdot g} k_f \quad (2.37)$$

Внатрешната спроводливост се дефинира преку динамичките вискозности μ и густините ρ на поединечните флуиди, како и Земјината гравитација g , со што се специфицира мерка за спроводливост на почвата за различни флуиди во трифазниот почвен модел. Равенките за проток изразени преку релативните спроводливости k_{rw} и k_{ra} за водената и воздушната фаза се дадени на следниов начин:

$$\dot{\mathbf{u}}_{ws} = \frac{k k_{rw}}{\mu_w} [-grad(p_w) + \rho_w(\mathbf{g} - \dot{\mathbf{u}}_s - \dot{\mathbf{u}}_{ws})] \quad (2.38)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{as} = \frac{k k_{ra}}{\mu_a} [-grad(p_a) + \rho_a(\mathbf{g} - \dot{\mathbf{u}}_s - \dot{\mathbf{u}}_{as})]. \quad (2.39)$$

Во равенките 2.38 $\dot{\mathbf{u}}_{ws}$ претставува брзина на движењето на парцијалната флуидна фаза која зависи од динамичката вискозност на флуидот μ_w и релативната спроводливост k_{rw} во неизотропен медиум каде матрицата на спроводливост е претставена со матрицата \mathbf{k} .

Терминот $-grad(p_w)$ го претставува притисокот со што се овозможува течењето на флуидната фаза додека со терминот $\rho_w(\mathbf{g} - \dot{\mathbf{u}}_s - \dot{\mathbf{u}}_{ws})$ се опишува влијанието на Земјиното забрзување \mathbf{g} , забрзувањето на цврстата фаза $\dot{\mathbf{u}}_s$ и забрзувањето на парцијалната флуидна фаза $\dot{\mathbf{u}}_{ws}$ во целокупниот систем на протокот. Во равенката 2.39 истите поими се дадени во однос на воздушната фаза. Брзините на протекување претставуваат релативни вредности меѓу цврстата фаза и соодветните флуиди [24].

2.7.1 Механички равенки за воздушна и водена фаза

Механичките равенки за воздушната и водената фаза се засновуваат врз теоријата презентирани во претходните делови од оваа глава. Следејќи ја работата на *Simoni* [25], законот за конзервација на маса за водената фаза се добива на следниов начин:

$$S_w \frac{\alpha - n}{K_s} \dot{p} + \alpha S_w \dot{\varepsilon}^{ii} + n \dot{S}_w + \nabla^T \mathbf{u}_{sw}^i + S_w \frac{n}{\rho_w} \dot{\rho}_w = 0 \quad (2.40)$$

На ист начин се добива законот за конзервацијата на маса за воздушната фаза

$$S_a \frac{\alpha - n}{K_s} \dot{p} + \alpha S_a \dot{\varepsilon}^{ii} + n \dot{S}_a + \nabla^T \mathbf{u}_{sa}^i + S_a \frac{n}{\rho_a} \dot{\rho}_a = 0 \quad (2.41)$$

Изводот за притисок во однос на времето е прикажан во равенка 2.42.

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial (S_w \cdot p_w + S_a \cdot p_a)}{\partial t} = \frac{\partial S_w}{\partial t} p_w + S_w \frac{\partial p_w}{\partial t} + \frac{\partial S_a}{\partial t} p_a + S_a \frac{\partial p_a}{\partial t} \quad (2.42)$$

Со елементарни математички трансформации и со користење на формулацијата за равенката за капиларен притисок, се добива следнава равенка:

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} = \left[S_w + (p_a - p_w) \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{\partial p_w}{\partial t} + \left[S_a - (p_a - p_w) \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{\partial p_a}{\partial t} \quad (2.43)$$

Првиот член од двете равенки ја претставува промената во условите на притисок на флуидните фази што се должи на ефективните напрегања. Влијанието од промена во цврстата матрица поради заситеноста, односно волуменската фракција на соодветната фаза (водена или воздушна), се опишува со третиот и четвртиот член на равенките.

2.7.2 Механички равенки на цврстата фаза

За цврстата фаза, равенката на рамнотежа се формира преку контролната површина (репрезентативен волуменски елемент). Претпоставката важи за мали деформации со константна температура:

$$\begin{aligned} L^T \sigma + \rho g = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \zeta \dot{\mathbf{u}} + n S_w \rho_w (\dot{\mathbf{u}}_{ws} + \text{grad}(\dot{\mathbf{u}}_w \dot{\mathbf{u}}_{ws})) \\ + n S_a \rho_a (\dot{\mathbf{u}}_{as} + \text{grad}(\dot{\mathbf{u}}_a \dot{\mathbf{u}}_{as})) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Со изоставување на релативната брзина и забрзување на флуидните фази, се добива следнава равенка:

$$L^T \sigma + \rho g = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \zeta \dot{\mathbf{u}} \quad (2.45)$$

Густината ρ е целокупната густина на трифазниот почвен медиум и може да се одреди со множење на парцијалните густини на индивидуалните фази и нивните волуменски фракции.

$$\rho = (1 - n)\rho_s + n S_w \rho_w + (1 - n) S_a \rho_a \quad (2.46)$$

Параметарот ζ го дефинира пригушувањето кое зависи од брзината, додека диференцијалниот оператор L ги претставува делумните изводи на координатите:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

3.МОДЕЛИРАЊЕ СО КОНЕЧНИ ЕЛЕМЕНТИ

За решавање на горенаведените диференцијални равенки е користен методот на конечни елементи со пристапот на Галеркин, како што е опишан во трудот на *Zienkiewicz* [26]. Во овој пристап, се избира приближна функција (тест-функција) и истата се внесува во диференцијалната равенка. Грешката во апроксимацијата, која се води како резидуална грешка, е остаток кој резултира и при секоја итерација се намалува. На крај приближното решение на равенката добива финален облик каде нумеричките грешки се сведени на минимум. Поместувањата во која било точка од трифазниот елемент на почвата се апроксимираат како \bar{u} .

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^U \bar{\mathbf{u}} \quad (3.1)$$

Притисоците од вода и воздух се апроксимираат соодветно како \bar{p}_w и \bar{p}_a , и се множат со функциите на облик на N^u и N^p :

$$p_w = \mathbf{N}^u \bar{p}_w \quad (3.2)$$

$$p_a = \mathbf{N}^p \bar{p}_a \quad (3.3)$$

3.1 Дискретизација на водената фаза

Како што е дадено во трудовите на повеќе автори [11, 27-29], конзервацијата на маса на водената фаза во диференцијален облик нема директно решение. Од законот за конзервација на маса на водената фаза, земајќи ги предвид изводите на притисоците проследени со временскиот извод, се добива равенка 3.4 за кои важат ознаките дадени погоре:

$$S_w \frac{\alpha - n}{K_s} \left[\left[S_w + (p_a - p_w) \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{\partial p_w}{\partial t} + \left[S_a - (p_a - p_w) \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{\partial p_a}{\partial t} \right] + \alpha S_w \dot{\varepsilon}^{ii} + n \dot{S}_w + \nabla^T \dot{\mathbf{u}}_{sw}^i + S_w n \frac{1}{\rho_w} \dot{p}_w = 0 \quad (3.4)$$

Помеѓу волуменскиот модул и притисокот на флуид постои следнава врска:

$$K_\alpha = \rho_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial \rho_\alpha} \quad (3.5)$$

Дискретизирианиот облик на равенката за водената фаза се прикажува во равенка 3.6:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{P,T} \left[S_w \frac{\alpha - n}{K_s} \left(S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) + \frac{n \cdot S_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \mathbf{N}^P d\Omega \right] \dot{p}_w \\ & + \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{P,T} \left[S_w \frac{\alpha - n}{K_s} \left(1 - S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \mathbf{N}^P d\Omega \right] \dot{p}_a \\ & + \left[\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^{P,T} \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \text{grad}(\mathbf{N}^P) d\Omega \right] \bar{\mathbf{p}}_w \\ & + \left[\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^{P,T} \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \rho_w \mathbf{N}^U d\Omega \right] \ddot{\mathbf{u}} + \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{P,T} \alpha S_w \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega \right] \dot{\mathbf{u}} \\ & = \left[\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^{P,T} \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \rho_w \mathbf{g} d\Omega \right] - \left[\int_{\Gamma_w} \nabla \mathbf{N}^{P,T} \rho_w \frac{k k_{rw}}{\mu_w} (-\nabla(\mathbf{N}^P \bar{\mathbf{p}}_w) + \rho_w \mathbf{g})^T \mathbf{n} d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2 Дискретизација на воздушната фаза

Почнувајќи од механичкиот опис на воздушната фаза, изводот е целосно аналоген на водената фаза. Дискретизацијата на воздушната фаза може да се напише на следниов начин:

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{P,T} \left[(1 - S_w) \frac{\alpha - n}{K_s} \left((1 - S_w) - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) + \frac{n \cdot (1 - S_w)}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \mathbf{N}^P d\Omega \right] \dot{\mathbf{p}}_a \\
 & + \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{P,T} \left[(1 - S_w) \frac{\alpha - n}{K_s} \left(S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \mathbf{N}^P d\Omega \right] \dot{\mathbf{p}}_w \\
 & + \left[\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^{P,T} \frac{kk_{ra}}{\mu_a} \text{grad}(\mathbf{N}^P) d\Omega \right] \tilde{\mathbf{p}}_a \\
 & + \left[\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^{P,T} \frac{kk_{ra}}{\mu_a} \rho_a \mathbf{N}^U d\Omega \right] \ddot{\mathbf{u}} + \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{P,T} \alpha (1 - S_w) \mathbf{m}^T \mathbf{B} d\Omega \right] \dot{\mathbf{u}} \\
 & = \left[\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^{P,T} \frac{kk_{ra}}{\mu_a} \rho_w \mathbf{g} d\Omega \right] - \left[\int_{\Gamma_g} \nabla \mathbf{N}^{P,T} \rho_g \frac{kk_{ra}}{\mu_a} (-\nabla(\mathbf{N}^P \tilde{\mathbf{p}}_a) + \rho_a \mathbf{g})^T \mathbf{n} d\Gamma \right]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Како што може да се види во равенките 3.6 и 3.7, заградите претставуваат матрици во форма на конечни елементи каде влијанијата на протокот на флуидот се интегрирани во матриците на пермеабилност \mathbf{P}_{aa} , компресибилност \mathbf{C}_{aw} , маса \mathbf{M}_a и векторот на силата \mathbf{f}_a .

3.3 Дискретизација на цврстата фаза

Дискретизација на цврстата фаза од трифазниот модел се врши имајќи ги предвид законите за конзервација на маса за водената и воздушната фаза. Приближното решение со диференцијални равенки е дадено во следнава равенка:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \zeta \dot{\mathbf{u}} \quad (3.8)$$

Како што може да се забележи од равенката 3.8, трифазната средина е составена од деформабилни цврсти и флуидни фази на вода и воздух, претставен на следниов начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + ((1-n)\rho_s + nS_w\rho_w + (1-n)S_a\rho_a)\mathbf{g} = \\ ((1-n)\rho_s + nS_w\rho_w + (1-n)S_a\rho_a)\mathbf{N}^U \ddot{\mathbf{u}} + \zeta \mathbf{N}^U \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Равенката за ефективно напрегање е дадена со:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{m}^T \alpha (S_w \mathbf{N}^P \bar{\mathbf{p}}_w + S_a \mathbf{N}^P \bar{\mathbf{p}}_a) \quad (3.10)$$

Дискретизираниот облик на цврстата фаза се изведува на следниов начин:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m}^T \alpha S_w \mathbf{N}^P \bar{\mathbf{p}}_w d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m}^T \alpha S_a \mathbf{N}^P \bar{\mathbf{p}}_a d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}^{U,T} ((1-n)\rho_s + nS_w\rho_w + (1-n)S_a\rho_a) \mathbf{g} d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}^{U,T} ((1-n)\rho_s + nS_w\rho_w + (1-n)S_a\rho_a) \mathbf{N}^U \ddot{\mathbf{u}} d\Omega - \\ \int_{\Omega} \mathbf{N}^{U,T} \zeta \mathbf{N}^U d\Omega \dot{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{U,T} \mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Со преуредување на членовите во равенката 3.11, конечната равенка може да се напише во облик кој ги содржи матриците кои се потребни за трансформирање на комплетниот систем во конечни елементи.

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} d\Omega \right] \bar{\mathbf{u}} - \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m}^T \alpha S_w \mathbf{N}^P d\Omega \right]}_{c_{sw}} \bar{\mathbf{p}}_w - \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m}^T \alpha S_g \mathbf{N}^P d\Omega \right]}_{c_{sa}} \bar{\mathbf{p}}_a \\
 & \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{N}^{U,T} ((1-n)\rho_s + nS_w\rho_w + (1-n)S_g\rho_g) \mathbf{g} d\Omega}_{f_u} - \\
 & \left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{U,T} ((1-n)\rho_s + nS_w\rho_w + (1-n)S_g\rho_g) \mathbf{N}^U d\Omega \right] \ddot{\mathbf{u}} - \\
 & \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^{U,T} \zeta \mathbf{N}^U d\Omega \right]}_c \dot{\mathbf{u}} + \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^{U,T} \mathbf{I}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma}_{f_u} = 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.4 Сумирање на целиот систем

По имплементирање на основните равенки од теоријата на порозни средини, следува составувањето на дискретизираната равенка на трифазниот модел. Со користење на матриците за маса, пригушување и крутост на целиот систем, равенките се сумирани на следниов начин:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_g & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{sw}^T & \mathbf{P}_{ww} & \mathbf{C}_{wa} \\ \mathbf{C}_{sa}^T & \mathbf{C}_{aw} & \mathbf{P}_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{p}}_w \\ \dot{\mathbf{p}}_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C}_{sw} & -\mathbf{C}_{sa} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}}_w \\ \bar{\mathbf{p}}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_a \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Степените на слобода во јазлите на трифазниот елемент се однесуваат на поместувањето, на водниот и на воздушниот притисок и истите се земени предвид како $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{p}}_w, \bar{\mathbf{p}}_g$. Нивните први временски изводи $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{p}}_w, \dot{\mathbf{p}}_g$ и втори временски изводи на цврстата фаза $\ddot{\mathbf{u}}$ го комплетираат системот на равенки. Прикажаните матрици на системот од равенки опишуваат различни карактеристики на трифазниот модел. Индексите обезбедуваат информации за природата и функцијата на матрицата која може да се интерпретира на следниов начин.

Имено, матриците за спојување \mathbf{C}_{sw} и \mathbf{C}_{sa} ја опишуваат интеракцијата на цврстата фаза со водените и воздушните фази. Заемното влијание на флуидите е претставено со \mathbf{C}_{wa} . Компресибилноста на разните фази и нивните влијанија врз порните средини се земаат предвид преку матрицата на компресибилност \mathbf{P}_{ww} . Од друга страна, матрицата на спроводливост \mathbf{H}_{ww} го опишува однесувањето на протокот и вклучува само променливи кои ги опишуваат спроводливостите на почвата за протоци од вода и воздух.

3.5 Гранични услови

Изведените диференцијални равенки го опишуваат физичкото однесување на парцијално заситениот почвен медиум во дискретизираната област. За да се реши системот на равенки, потребни се гранични услови за опис на интеракциите на системот со средината. Неопходниот број и тип на гранични услови зависи од степенот на диференцијалните равенки кои ги опишуваат соодветните степени на слобода. За

флуидните фази, диференцијалните равенки се од прв ред. Последователно, граничните услови за протокот на водената фаза се добиени на следниов начин:

$$\rho_w \frac{kk_{rw}}{\mu_w} (-\nabla p_w + \rho_w \mathbf{g})^T \mathbf{n} = \mathbf{q}_w \quad (3.14)$$

додека граничните услови за протокот на воздушната фаза е даден преку:

$$\rho_g \frac{kk_{ra}}{\mu_a} (-\nabla p_a + \rho_a \mathbf{g})^T \mathbf{n} = \mathbf{q}_a \quad (3.15)$$

4. НУМЕРИЧКА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈА НА ТРИФАЗНИОТ МОДЕЛ

Во ова поглавје е прикажано нумеричкото решение на трифазниот модел опишан во претходните поглавја. Во оваа насока, презентирани се нумеричките формулации на меродавните односи на рамнотежа, проследени со соодветни техники за дискретизација на трифазниот модел и неговата формулација во просторен и во временски домен.

4.1 Просторна дискретизација со конечни елементи

Просторната дискретизација се врши со помош на интерполациските полиноми (функции на облик). Изборот на интерполациските полиноми игра главна улога во трифазниот модел. За степени на слобода на цврстите честички, со цел нелинеарно претставување, се бираат биквадратни функции, додека за степените на слобода на притисоците на флуидите се бираат линеарни функции. Условите на парцијална заситеност ги одредуваат големините на матриците на компресибилност и матриците на спроводливост на соодветните фази.

4.2 Нумеричка интеграција

Нумеричката интеграција на матриците од трифазниот модел е решена со примена на методот на Гаусовата квадратура [30]. Во равенките 4.1 и 4.2 е дадено решение на површински интеграл:

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad (4.1)$$

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m W_i W_j f(x_i, y_j) \frac{1}{4} L_x L_y \quad (4.2)$$

каде:

3. $f(x_i, y_j)$ - функциски вредности во Гаусовите точки,
4. x_i, y_j - координати на Гаусовите точки,
5. n, m - број на интеграциски точки,
6. $L_x L_y$ - должина на страна,
7. W_{ij} - тежински фактори.

Функциските вредности кај пропишаните координати на координатниот систем со тежинските фактори $W_{i,j}$ се основни точки каде се врши интеграцијата. Бројот на јазли со кои може да се интегрира еден полином зависи од редот на функцијата. Во актуелниот трифазен модел, бројот на точките за интеграција може да има вредност од два до девет, со што се одредува точноста на матриците во конечниот елемент.

4.3 Решение на диференцијална равенка

Решението на диференцијалната равенка мора да биде во согласност со физичката нелинеарност во временски домен. За таа цел се врши итеративно зголемување на поместувањето во однос на тангенцијалната крутост, со што се добива рамнотежата на внатрешните и надворешните сили. Внатрешните сили од поместувањата, притисоците, брзините и забрзувањата во елементот и индуцираните сили однадвор треба да бидат во дозволените граници на разлики кои на итеративен начин се намалуваат и се добива коректно решение. Рамнотежата помеѓу внатрешната и надворешната сила се пресметува земајќи ја предвид тековната крутост. За решавање временски зависни проблеми, моделот е модифициран во инкрементален облик со помош на соодветен метод [31] за временска интеграција. Изборот на методот е важен за стабилноста и точноста на решението и зависи од проблемот кој се разгледува. Во зависност од постоењето на првиот или вториот временски извод на степените на слобода, се прави разлика меѓу проблеми од прв и втор ред.

4.4 Њумарков метод на интеграција

Доколку постои диференцијална равенка од втор ред која се состои од матрицата на маса M , матрицата на пригушување C , матрицата на крутост K и векторот на сила во зависност време t^{n+1} како што е F^{n+1} , решение се применува преку имплицитниот метод на Њумарковата интеграција [30, 32]. Во равенка 4.3 прикажан е Њумарковиот метод којшто има прифатлива шема на имплементација со голема точност на резултатите.

$$M\ddot{u}_{n+1} + C\dot{u}_{n+1} + Ku_{n+1} = F^a \quad (4.3)$$

Од почетните вредности на забрзувањата, брзините и поместувањата во време t_n , се добиваат актуелните вредности на забрзувањата, брзините и поместувањата во време t_{n+1} како што следи:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + [(1 - \delta)\dot{\mathbf{u}}_n + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]\Delta t \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\dot{\mathbf{u}}_n + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}\right]\Delta t^2 \\ \Rightarrow \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} &= a_0(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - a_2\dot{\mathbf{u}}_n - a_3\ddot{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + a_6\ddot{\mathbf{u}}_n + a_7\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Со замена во диференцијалната равенка (4.3), се дефинираат поместувањата, брзините и забрзувањата во време t^{n+1}

$$\begin{aligned}(a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1}) \\ = \mathbf{F}^a + \mathbf{M}(a_0\mathbf{u}_n + a_2\dot{\mathbf{u}}_n + a_3\ddot{\mathbf{u}}_n) + \mathbf{C}(a_1\mathbf{u}_n + a_4\dot{\mathbf{u}}_n + a_5\ddot{\mathbf{u}}_n)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Во равенката 4.5, непознатите се пресметуваат врз основа на рамнотежата на внатрешните и надворешните сили. Вредностите на a_0 до a_7 се константи кои резултираат од Њумарковите параметри и големината на временскиот чекор Δt . Со повратна замена во равенката 4.4, можат да се дефинираат тековната брзина и забрзувањето преку имплицитниот метод. За стабилна итерација, Њумарковите параметри се дефинираат во следниве граници:

$$\alpha \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2, \delta \geq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta + \alpha > 0\tag{4.6}$$

4.5 Трапезоиден метод на интеграција

Проблемите во врска со протоци се опишуваат со диференцијални равенки од прв ред. Тие се состојат од матрицата на пригушување C , од матрицата на крутост K и од векторот на сила F^{ap} во време t_{n+1} :

$$C\dot{p}_{n+1} + Kp_{n+1} = F^{ap} \quad (4.7)$$

Во ваков тип на проблеми, најоптимално решение за интеграција е трапезоидниот метод. Степените на слобода во случајот на порните притисоци може да се определат од првите изводи и соодветните почетни услови за временскиот интервал $t=t^{n+1}$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + (1 - \theta)\Delta t\dot{p}_n + \theta\Delta t\dot{p}_{n+1} \\ \Rightarrow \dot{p}_{n+1} &= a_8(p_{n+1} - p_n) + a_9\dot{p}_n \end{aligned} \quad (4.8)$$

Со замена на равенката 4.8 во 4.7, се добива

$$(a_8C + K)p_{n+1} = F^{ap} + C(a_8p_n + a_9\dot{p}_n) \quad (4.9)$$

Воведените константи се дефинирани во зависност од временски чекор на интегрирање Δt и се дадени во равенката 4.10:

$$a_8 = \frac{1}{\theta\Delta t} \quad \text{и} \quad a_9 = \frac{1-\theta}{\theta} \quad (4.10)$$

4.6 Применливост на трифазниот модел

Системот на диференцијални равенки на трифазниот модел на почва овозможува симултано решение на деформабилните карактеристики на цврстите честички и ефектите на протокот на флуидите во порните простори. Користењето на прикажаните шеми на временска интеграција води кон стабилност и точност на решението. Но, истовремената интеграција на цврстата и на флуидните фази го отежнува процесот на итерација при наоѓање решение во итеративните процеси. Целосната формулација на системот на диференцијални равенки може да се напише на следниов начин:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_w & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{sw}^T & \mathbf{P}_{ww} & \mathbf{C}_{wa} \\ \mathbf{C}_{sa}^T & \mathbf{C}_{aw} & \mathbf{P}_{aa} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{p}}_{w+1} \\ \dot{\mathbf{p}}_{a+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C}_{sw} & -\mathbf{C}_{sa} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ww} & \mathbf{C}_{wa} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{aa} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ \mathbf{p}_{w+1} \\ \mathbf{p}_{a+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_a \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Во овој тип на анализа се земаат предвид влијанието на масите и нивните забрзувања, при што анализата е од типот на динамичка анализа. Од друга страна, квазистатичката анализа се фокусира врз механичките карактеристики на флуидите врз целокупниот трифазен модел без вклучување на инерцијалните сили на цврстите честички во трифазниот модел. Забрзувањето на системот е незначително, со што се елиминира потребата од формулирање на матрицата на маса. Модифицираниот систем од равенки е прикажан во равенката 4.12:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{sw}^T & \mathbf{P}_{ww} & \mathbf{C}_{wa} \\ \mathbf{C}_{sa}^T & \mathbf{C}_{aw} & \mathbf{P}_{aa} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{p}}_{w+1} \\ \dot{\mathbf{p}}_{a+1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C}_{sw} & -\mathbf{C}_{sa} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ww} & \mathbf{C}_{wa} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{aa} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ \mathbf{p}_{w+1} \\ \mathbf{p}_{a+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_a \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Освен динамичката и квазистатичката формулација, системот на равенки се добива и за статичкиот случај, како што е прикажано во равенката 4.13:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C}_{sw} & -\mathbf{C}_{sa} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ww} & \mathbf{C}_{wa} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{aa} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n+1} \\ \mathbf{p}_{w+1} \\ \mathbf{p}_{a+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_w \\ \mathbf{f}_a \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Во овој тип на анализа, временскиот извод се запоставува, со што протокот на флуидите во трифазниот почвен модел нема придонес во внатрешните сили. Статичката анализа вклучува пресметка само на финалната состојба при консолидација. Независно од разгледуваниот временски домен и поврзаната динамичка, статичка или квазистатичка

анализа, соодветните највисоки изводи на степените на слобода на притисокот се усреднуваат на следниов начин:

$$\bar{\dot{p}}_{n+1} = \frac{p_{n+1} - p_n}{\Delta t} \quad (4.14)$$

Од друга страна, степените на слобода на поместување се усреднуваат на следниов начин:

$$\bar{\dot{v}}_{n+1} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} \quad (4.15)$$

На овој начин се одредува итеративното решение на матриците:

$$M\bar{\ddot{u}}_{n+1} + C\bar{\dot{u}}_{n+1} + K\bar{u}_{n+1} = F^a \quad (4.16)$$

Трапезоидниот метод на интеграција во форма на матрици се пишува како во равенката 4.17:

$$C\bar{\dot{p}}_{n+1} + K\bar{p}_{n+1} = F^{ap} \quad (4.17)$$

Со цел да се овозможи стабилна и точна пресметка, потребно е прилагодување на системот на равенки поврзани со временскиот домен и соодветниот алгоритам на решение. Временскиот чекор е важен елемент во пресметката на непознатите во трифазниот почвен модел, при што од значење е нумеричката стабилност во временски домен. За да се добијат најточни резултати, треба да се земе предвид биквадратниот пристап за степените на слобода на поместувањето на цврстите честички и линеарниот пристап за степените на слобода на притисоките на флуидните фази. Капиларниот притисок е од особена важност за степенот на заситеност. Почвата е заситена, додека притисокот на воздухот во порните простори е идентичен со атмосферскиот. Ова овозможува користење на врската капиларност–заситеност според *Brooks u Corey* [16] или *Van Genuchten* [33], каде се земаат предвид остаточната заситеност на водената фаза дури и во услови на многу високи притисоци на водената фаза на трифазниот модел. На овој начин, системот на равенки е комплетиран, со што се постигнува нумеричка стабилност во граничниот регион на парцијално до целосно заситената трифазна почвена средина. Во случај на состојба на рамнинска деформација, предвид се зема само еден дел од почвената средина, која има

константна дебелина. Деформациите што се добиваат како одговор на поместувањето имаат форма на диференцијални функции:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ 0 \\ \partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Деформацискиот оператор $\mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}^u$ за функциите на облик на поместување се добива на следниов начин:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ 0 & 0 \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Матрицата на крутост \mathbf{K} на цврстата фаза од трифазниот модел е дадена со:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} d\Omega \quad (4.20)$$

Матрицата на материјалниот модел за цврстите честички \mathbf{D}_t се пресметува на итеративен начин, со што се обезбедува можноста за користење различни линеарни и нелинеарни материјални модели во трифазниот почвен модел.

4.7 Програмирање во ANSYS

Како програмска платформа за нумеричко симулирање на трифазниот почвен модел, избран е софтверот со конечни елементи ANSYS [34]. Со користење на неговите програмабилни карактеристики (User Programmable Features), корисникот има можност да додава потпрограми (т.н. субрутини) и да креира нови елементи кои можат да се користат во процесирање на податоците на самиот софтвер. Покрај материјални модели, преку програмирање на трифазниот почвен елемент, корисникот може да дефинира различни криви на парцијално заситување преку различни типови на конечни елементи, со цел да се добие стабилен нумерички модел за симулација на проблемите од напредното

геотехничко инженерство. Предноста на користење на програмабилните карактеристики е во тоа што новопрограмираните субрутини можат да се комбинираат со веќе постојните елементи во библиотеката на софтверот ANSYS. Исто така, можностите кои ги дава претпроцесорот (влезниот дел на софтверот), како што е формирање на геометрија, и, од друга страна, можностите кои ги дава постпроцесорот, како што се анализа на временска историја и јазолни решенија, се добиваат без дополнителна работа. На слика 4.1 е прикажан дијаграмот на пресметување на потребните податоци за време на итерациите во програмскиот пакет ANSYS.



Слика 4.1. Пресметување на променливите во трифазниот почвен модел

Програмскиот пакет ANSYS нуди рутини напишани на компјутерскиот јазик FORTRAN кои дозволуваат промени во согласност со потребите на корисникот. Кога се ползуваат корисничките програмабилни карактеристики на софтверот, субрутините *UEC100.for* и

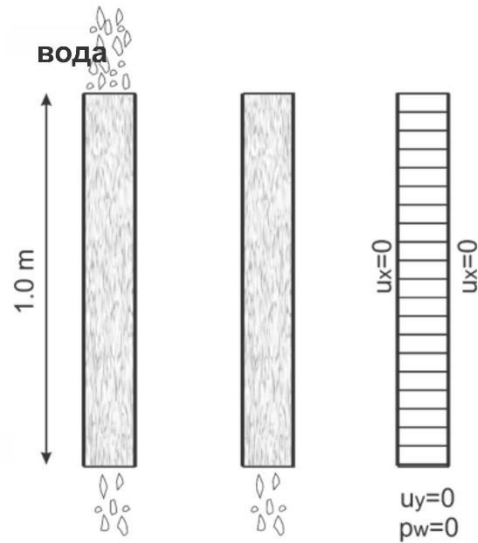
UEL100.for (Анекс А) го имаат најважниот удел во креирањето на елементот. Субрутината *UEC100.for* ги содржи карактеристиките на елементот како што се броеви на јазли, степени на слобода и типот на елементот, додека во субрутината *UEL100.for* се дефинирани матриците кои се потребни за решавање различни феномени, како што се крутост, проток на флуиди, матрицата на пригушување и матриците на маса. Во секој итеративен чекор, софтверот ANSYS ги повикува субрутините *UEL100.for* и *UEC100.for*. За програмирање на материјалниот модел со користење на корисничките програмабилни карактеристики, софтверот ја нуди субрутината *USERMAT3D.for* (Анекс А) каде може да се програмира кој било материјален модел. За да се интегрираат податоците од елементот со податоците од материјалниот модел, софтверот ANSYS нуди додатни субрутини кои се спремни алатки за користење за да се добие во време за основните функции на матриците кои ги чуваат информациите меѓу јазлите на елементот и интеграциските точки во внатрешноста на елементите. Со користење на овие субрутини, можно е да се зачува реалното забрзување, брзината и поместувањето во секој реален временски чекор и да се контролира рамнотежата на равенките. Детален преглед на делот за програмирање и субрутините се дадени во Анекс А.

5. ВЕРИФИКАЦИЈА НА ТРИФАЗНИОТ МОДЕЛ

Во ова поглавје, нумеричкиот трифазен модел е верифициран со споредба на различни примери од литературата презентирани во трудовите од други автори. За оваа цел, е користена различна литература која се фокусира на мултифазното моделирање на почвената средина. Во оваа насока, презентирани се проблеми од напредното геотехничко инженерство каде нумеричките формулации ги опишуваат различните функции на рамнотежа помеѓу фазите на цврстите честички и флуидните фази во трифазниот модел.

5.1 Дренажа на почвен столб

Дренажата на почвен столб претставува типичен проблем за валидација на трифазен модел кој опишува парцијално заситена почва. Во докторската дисертација на *Liakopoulos* [17] експериментално е истражувано протекувањето на вода низ целосно заситен почвен столб составен од песок „Del Monte“ под влијание на гравитација. Во експериментот, почвениот столб е сместен во непропустлив цилиндричен сад со отворено дно, со цел да се добие едnodимензионален почвен столб. Поконкретно, експериментот се засновува врз претпоставка за деформабилна линеарно-еластична почва, за кој нумерички решенија можат да се најдат во трудовите на повеќе автори [35-37]. Со цел верификација на нумери* на трифазниот почвен модел, дренажниот тест на Лиакопулос е симулиран со користење на истите параметри за песокот „Del Monte“, додека геометриските параметри на експериментот се прикажани на слика 5.1: висина од 1 m и широчина од 0.1 m (цртежот не во размер).



Слика 5.1. Симулирање на дренажниот тест на Liakopoulos

За да се добијат иницијалните услови во лабораторијата, на врвот на примерокот континуирано се нанесува вода и се остава слободно да се издренира на дното сè додека не се воспостави постојан рамномерен проток на вода кој одговара на (надворешниот) атмосферскиот притисок на порната вода низ песочниот столб. Доводот на вода е регулиран со цел да не се создаде пораст на притисокот на порната вода. На почетокот на експериментот, доводот на вода на врвот од столбот се прекинува. Потоа, порната вода во песокот постепено истекува низ почвениот столб по гравитационен пат. Од друга страна, почвениот столб слегнува со вертикално поместување, додека порните простори се исполнуваат со воздух, со што се добива парцијално заситен почвен медиум. За време на експериментот, регистрирани се притисоци на порната вода и порниот воздух на различни висини од песочниот столб и истите се нумерички симулирани. Во нумеричката анализа, користени се 20 четириаголни елементи со еднаква големина. За механичките параметри на песокот „Del Monte“, претпоставено е дека истиот се однесува линеарно-еластично за време на тестот, а неговите параметри се дадени во табела 5.1.

Табела 5.1. Параметри на песокот „Del Monte“

Јунгов модул	E	1.3 MPa
Поасонов коефициент	ν	0.4

Густина на цврсти честички	ρ_s	2000 kg/m ³
Волуменски модул на цврсти	K_s	1.0 x 10 ⁶ MPa
Волуменски модул на вода	K_w	2.0 x 10 ³ MPa
Волуменски модул на воздух	K_a	0.1 MPa
Густина на вода	ρ_w	1000 kg/m ³
Густина на воздух	ρ_a	1.20 kg/m ³
Почетна порозност	n	0.2975
Внатрешна пропустливост	k	4.5 x 10 ⁻¹³ m ²
Вискозност на вода	μ_w	1.0 x 10 ⁻³ Pa·s
Вискозност на воздух	μ_a	1.8 x 10 ⁻⁵ Pa·s
Гравитационо забрзување	g	9.806 m·s ⁻²
Референтен атмосферски	p_{atm}	0.0 MPa

Симулираниот временски домен е сетиран на два часа или 120 минути. За математички опис на протокот на флуидите низ порозната средина, усвоени се експериментално дефинирани функции дадени во равенките 5.1 и 5.2:

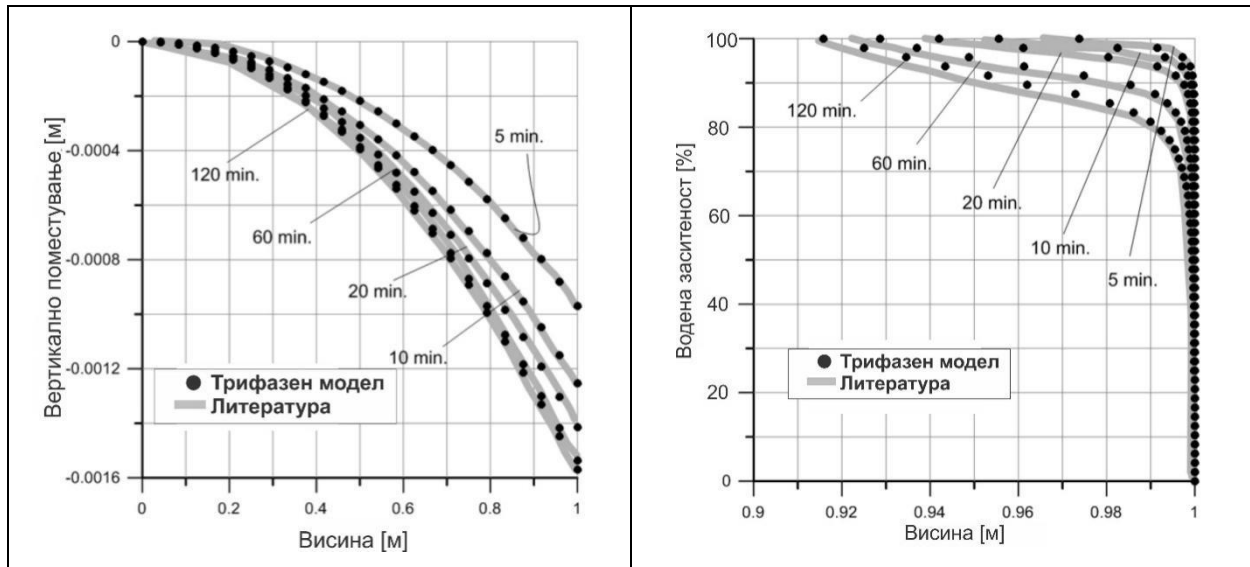
$$S_w = 1 - 0.10152(p_c)^{2.4279} \quad (5.1)$$

$$k_{rw} = 1 - 2.207(1 - S_w)^{1.0121} \quad (5.2)$$

Спроводливоста за воздушната фаза е дадена преку:

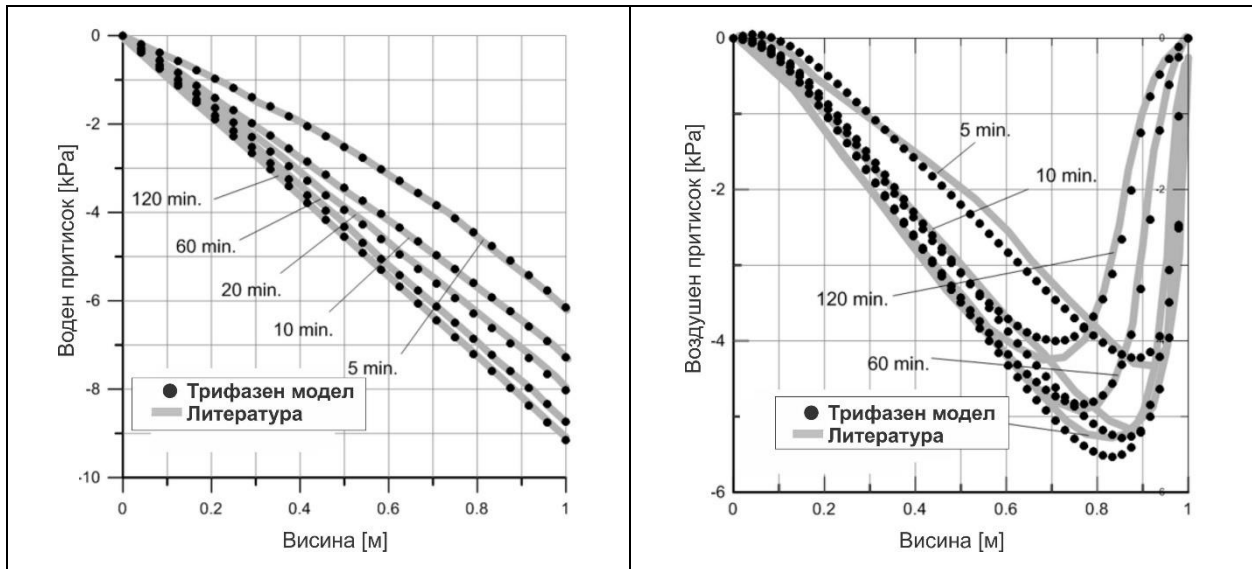
$$k_{ra} = 1 - 2.207(S_w)^{1.0121} \quad (5.3)$$

Врз основа на ова, на слика 5.2 се прикажани споредбите на нумеричките резултати од пресметката со користење трифазен модел и вредностите од користената литература.



Слика 5.2. Споредба на вертикално поместување и водозаситеност по висина на почвен столб

Како што може да се види од слика 5.2, нумеричкиот трифазен модел коректно го предвидува вертикалното поместување и временската промена на поместувањето, кое се зголемува со растот на времето. Исто така, евидентно е дека максималниот притисок на порниот воздух во првите минути значително влијае врз водозаситеноста, која има вредност над 90 %. Понатаму, заситеноста се намалува, со што се овозможува струење на воздухот во порните простори на почвениот столб. Јасно е дека дистрибуцијата на притисокот на порниот воздух може да се симулира само во случај на трифазен почвен медиум.



Слика 5.3. Споредба на водениот и воздушниот притисок по висина на песочен столб

Временскиот интервал на водниот притисок на слика 5.3-лево јасно укажува дека, со текот на времето, протокот на вода се зголемува како резултат на намалување на порните притисоци (сукција).

Со тоа, од сликите 5.2 и 5.3 може да се забележи мошне добро усогласување меѓу нумеричките резултати од трифазниот почвен модел и експерименталните вредности од литература презентирани од различни автори [35-37].

Влезната датотека на симулацијата е дадена подолу:

```

/prep7

ET,1,101
KEYOPT,1,1,16           ! степени на слобода за цврстата фаза
KEYOPT,1,2,8           ! степени на слобода за флуидните фази
KEYOPT,1,3,3           ! бројот на точки за интеграција
KEYOPT,1,4,0           ! дискретизирање на елементот

!           0: рамнински модел
    
```


	!	1: аксисиметричен модел
KEYOPT,1,5,2	!	временска интеграција
	!	1: комплетна
	!	2: матрицата на маса = 0
	!	3: матриците на маса и пригушување = 0
KEYOPT,1,6,2	!	тип на сатурација
	!	1: Sw = 1
	!	2: Лиакопулос
KEYOPT,1,7,1	!	Материјален модел
	!	1: Elastic
	!	2: Usermat
rhos =	2	
rhow =	1	
rhog =	0.0012	
kk =	$4.5 \cdot 10^{**(-13)}$	
Ks =	10^{**9}	
Kw =	$2 \cdot 10^{**6}$	
Kg =	100	
kxy =	1.	
muew =	$1 \cdot 10^{**(-6)}$	
mueg =	$1.8 \cdot 10^{**(-8)}$	

stdamp = 0

E = 1300 ! OK

mue = 0.4 ! OK

n = 0.2975 ! OK

tb,user,1,0,14, ! се приложуваат параметрите во трифазниот елемент

tldata,,rhos,rhow,rhog,kk,ks,kw

tldata,,kg,kxy,muew,mueg,stdamp,E

tldata,,mue,n

!опис на геометријата и потребните параметри

acel,,9.81

b=0.1

h=1

ndiv=20

type,1

mat,1

real,1

k,1,0,0,0

k,2,b,0,0

k,3,b,h,0

k,4,0,h,0

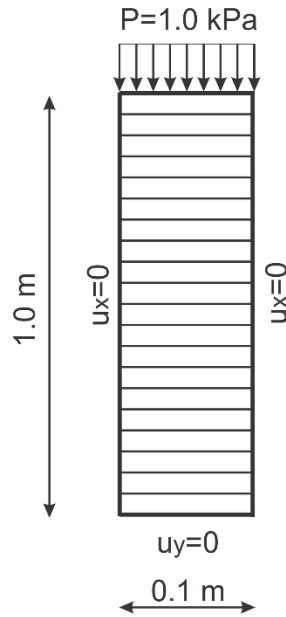
a,1,2,3,4

LESIZE,2,, ,ndiv,, , , ,1

```
LESIZE,4,, ,ndiv,, , ,1
LESIZE,1,, ,1,, , ,1
LESIZE,3,, ,1,, , ,1
amesh,all !меширање на геометрија
nset,s,loc,x,0 !дефинирање на граничните услови
nset,a,loc,x,b
d,all,ux,0
allsel
nset,s,loc,y,0
d,all,uy,0
allsel
```

5.2 Консолидација на парцијално заситен почвен столб

Консолидацијата на парцијално заситен столб е презентирани со цел верификација на нумеричкиот модел со споредба на резултатите од претходно добиени симулации од различни автори, како што се *Khoei u Rahman* [37, 38]. Во овој пример, консолидацијата на парцијално заситен почвен столб почнува со аплицирање на мал притисок на врвот на почвениот столб со висина од 1 m, како што е прикажано на слика 5.4 (сликата не е во размер).



Слика 5.4 Домен на парцијално заситен столб

Доменот е дискретизиран со користење правоаголна мрежа која се состои од 20 елементи. Во вертикален правец, е користено подеднакво растојание меѓу јазлите од 0.05 m. Почетната вредност на водената сатурација е 0.52, со што се карактеризира парцијално заситениот почвен медиум. Почетниот порен притисок е подесен на 280kPa и истиот се менува на 420 kPa во почвениот столб со цел да се добие консолидирање на парцијално заситениот почвен столб. Карактеристиките на почвениот материјал се сумирани во табела 5.2.

Табела 5.2. Карактеристики на материјалот за анализа на консолидација на почвата

Јунгов модул	E	6 MPa
Поасонов коефициент	ν	0.4
Густина на цврсти честички	ρ_s	2000 kg/m ³
Волуменски модул на цврсти зрна	K_s	0.14 x 10 ¹⁰ Pa
Волуменски модул на вода	K_w	0.43 x 10 ¹³ Pa
Волуменски модул на воздух	K_a	0.1 x 10 ⁶ Pa
Густина на вода	ρ_w	1000 kg/m ³
Густина на воздух	ρ_a	1.22 kg/m ³
Почетна порозност	n	0.3

Внатрешна спроводливост	k	$0.46 \times 10^{-11} \text{ m}^2$
Вискозност на вода	μ_w	$1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Вискозност на воздух	μ_a	$1.8 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Гравитационо забрзување	g	$9.806 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Референтен атмосферски	p_{atm}	101.0 kPa

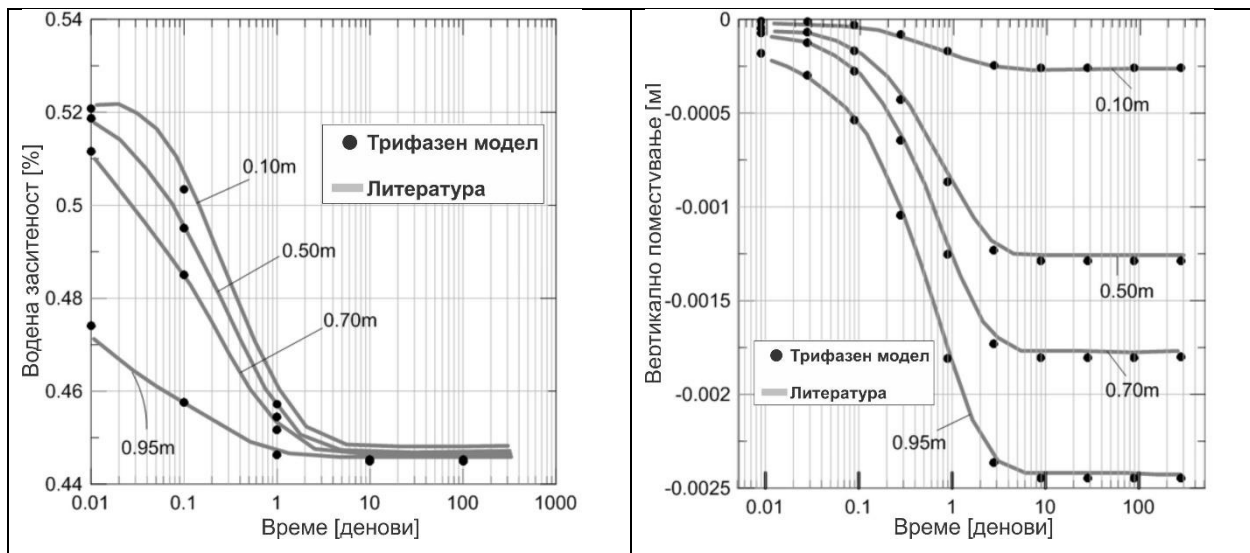
Равенките на релативните спроводливости за вода и воздух се дадени од страна на *Brooks* и *Corey* [14] на следниов начин:

$$S_w = S_{rw} + (1 - S_{rw}) \left(\frac{p_b}{p} \right)^\lambda \quad (5.4)$$

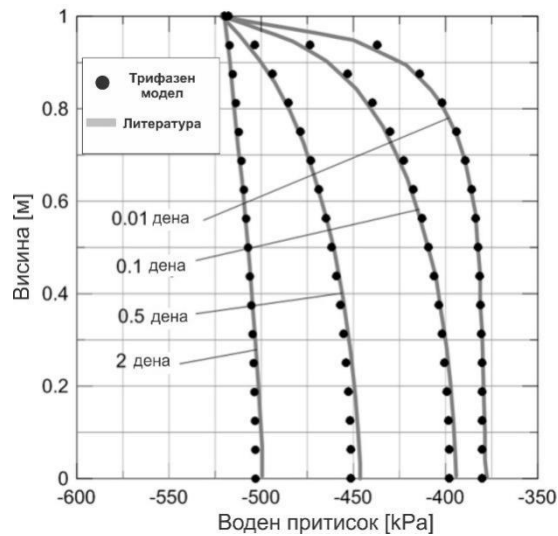
$$k_{rw} = S_e^{\frac{(2+3\lambda)}{\lambda}} \quad (5.5)$$

$$k_{ra} = (1 - S_e)^2 \left(1 - S_e^{(2+\lambda)/\lambda} \right) \quad (5.6)$$

Во равенката 5.4, заситеноста со најмала количина на вода е $S_{rw} = 0.3966$, додека притисокот во меурчињата е $p_b = 225 \text{ kN/m}^2$. Временските истории на вертикално поместување и заситување со вода се дадени за селектирани јазолни точки на висина од 0.1, 0.5, 0.7, и 0.95 m пресметано од дното на почвениот столб. На сликите 5.5-5.6 се прикажани парцијалната заситеност, вертикалното поместување и водениот притисок долж почвениот столб, во различни временски интервали.



Слика 5.5. Споредба на степенот на водозаситеност и вертикалното поместување со текот на времето



Слика 5.6. Развој на водниот притисок по висина на столбот со тек на време

Моделот го опишува однесувањето на незаситениот почвен медиум во услови на промени на заситеноста во почвената средина. Како што може да се види на сликата 5.6, вертикалното поместување се зголемува дополнително со намалувањето на водозаситеноста. Главната причина за ова е консолидирањето на почвениот примерок и намалувањето на висината.

Од друга страна, разликата во заситеноста во долниот дел на почвениот столб расте со време сè додека не се постигне стабилизирање на вредностите. Следна е претставена влезната датотека на симулацијата:

```
/prep7
ET,1,101
KEYOPT,1,1,16      ! степени на слобода за цврстата фаза
KEYOPT,1,2,8       ! степени на слобода за флуидните фази
KEYOPT,1,3,4       ! бројот на точки за интеграција
KEYOPT,1,4,0       ! дискретизирање на елементот
```

	!	0: рамнински модел
	!	1: аксисиметричен модел
KEYOPT,1,5,2	!	временска интеграција
	!	1: комплетна
	!	2: матрицата на маса = 0
	!	3: матриците на маса и пригушување = 0
KEYOPT,1,6,3	!	тип на сатурација
	!	1: Sw = 1
	!	2: Лиакопулос
	!	3: Брукс и Кори
KEYOPT,1,7,1	!	Материјален модел
	!	1: Elastic
	!	2: Usermat
rhos =		2.0
rhow =		1
rhog =		.00122
Ks =		1.4*10**6
Kw =		4.3*10**9
Kg =		100
kxy =		1
muew =		(1.0*10**(-6))/86400

mueg = (1.0*10**(-6))/86400

kk = 4.6*10**(-12)

stdamp = 0

E = 6000 ! OK

mue = 0.4 ! OK

n = 0.3 ! OK

tb,user,1,0,14, , ! се приложуваат параметрите во трифазниот елемент

tbdata,,rhos,rhow,rhog,kk,ks,kw

tbdata,,kg,kxy,muew,mueg,stdamp,E

tbdata,,mue,n

!опис на геометријата и потребните параметри

acel,,9.81

b=1

a=0.1

k,1 ,0,0

k,2 ,a,0

k,3 ,a,b

k,4 ,0,b

a,1,2,3,4

LESIZE,2,,,40

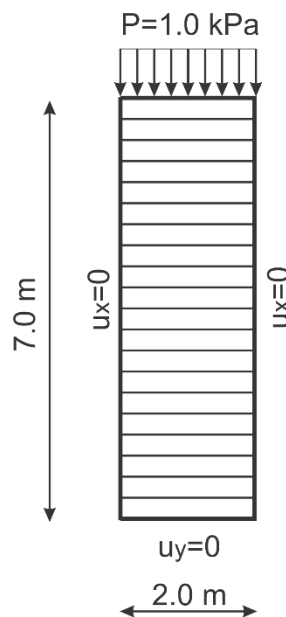

```
LESIZE,4,,,40
LESIZE,1,,,1
LESIZE,3,,,1
MSHKEY,1
type,1
mat,1
real,1
amesh,all !меширање на геометрија

nselect,s,loc,y,0
d,all,ux,0
d,all,uy,0
allselect
nselect,s,loc,x,0
d,all,ux,0
allselect
nselect,s,loc,x,a
d,all,ux,0
allselect
lselect,s,,,3
nselect,s
esln,s
```

SFE,all,3,PRES, ,1, , ,

5.3 Консолидирање на целосно заситен почвен столб

Во овој пример, трифазниот модел е верифициран преку симулација на проблемот на целосно заситен столб за кој се познати претходните решенија. Имено, еднодимензионален проблем на консолидација на горната страна при целосна заситеност е решен и спореден со претходното решение дадено од страна на *Rahman u Lewis*. [38]. Почвениот столб е со висина од 7 m и широчина од 2 m при што големината на елементите е 0.35m. Порниот притисок на врвот на почвениот столб е еднаков на нула, при што се аплицира рамномерен притисок од 1 kPa. Моделот е даден на слика 5.7.



Слика 5.7. Модел на почвен столб

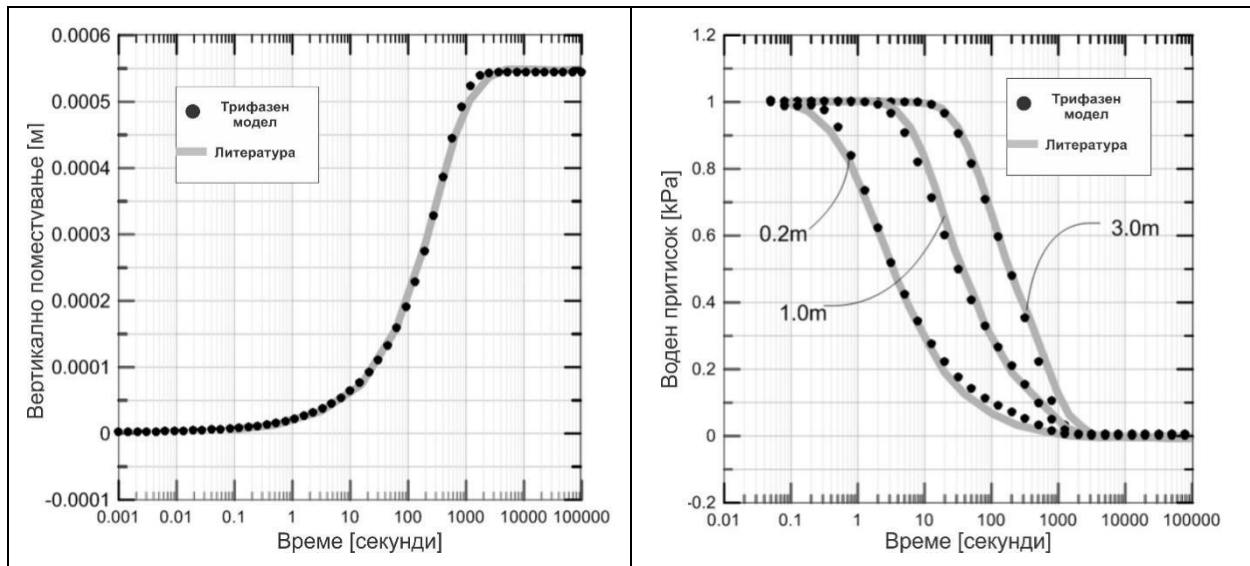
Горниот дел од почвениот столб е дренирана граница, додека преостанатите граници се водонепропустливи. Параметрите на материјалот се дадени во табела 5.3.

Табела 5.3. Карактеристики на материјалот за анализа на консолидација на водозаситена почва

Јунгов модул	E	6 MPa
--------------	---	-------

Поасонов коефициент	ν	0.4
Волуменски модул на цврсти зрна	K_s	0.14×10^{10} Pa
Волуменски модул на вода	K_w	0.43×10^{13} Pa
Почетна порозност	n	0.3
Спроводливост	k	0.46×10^{-11} m ²
Вискозност на вода	μ_w	1.0×10^{-3} Pa·s

На слика 5.8 е прикажана споредба помеѓу нумеричките и теориските вредности за вертикално поместување и водниот (порниот) притисок во зависност од времето за селектирани длабочини.



Слика 5.8. Споредба на вертикално поместување и порен притисок

Од прикажаното, може да се заклучи дека резултатите добиени со користење на трифазниот почвен модел речиси се совпаѓаат со оние од стручната литература. Притоа, порниот притисок се намалува до вредност нула со зголемување на времето од над 1000 s, кога настанува целосна консолидација на почвениот слој. Влезната датотека на симулацијата е дадена подолу каде освен рамнински модел може да се разгледува и аксисиметричната состојба:

/prep7

ET,1,101

KEYOPT,1,1,16

! степени на слобода за цврстата фаза

KEYOPT,1,2,8

! степени на слобода за флуидните фази

KEYOPT,1,3,4

! бројот на точки за интеграција

KEYOPT,1,4,0

! дискретизирање на елементот

! 0: рамнински модел

! 1: аксисиметричен модел

KEYOPT,1,5,2

! временска интеграција

! 1: комплетна

! 2: матрицата на маса = 0

! 3: матриците на маса и пригушување = 0

KEYOPT,1,6,1

! тип на сатурација

! 1: Sw = 1

! 2: Лиакопулос

! 3: Брукс и Кори

KEYOPT,1,7,1

! Материјален модел

! 1: Elastic

! 2: Usermat

rhos = 2.7

rhow = 1

```
rhog = .0013
Ks = 10**9
Kw = 2*10**7
Kg = 100
kxy = 1
muew = 1.31*10**(-6)
mueg = 0.0176*10**(-6)
kk = 1.31*10**(-10)
stdamp = 0
E = 5000 ! OK
mue = 0.25 ! OK
n = 0.5 ! OK
```

tb,user,1,0,14, , ! се приложуваат параметрите во трифазниот елемент

```
tbdata,,rhos,rhow,rhog,kk,ks,kw
```

```
tbdata,,kg,kxy,muew,mueg,stdamp,E
```

```
tbdata,,mue,n
```

!опис на геометријата и потребните параметри

```
acel,,9.81
```

```
b=7
```

```
a=2
```

```
k,1 ,0,0
k,2 ,a,0
k,3 ,a,b
k,4 ,0,b
a,1,2,3,4
LESIZE,2,,,20
LESIZE,4,,,20
LESIZE,1,,,1
LESIZE,3,,,1
MSHKEY,1
type,1
mat,1
real,1
amesh,all !меширање на геометрија
nset,s,loc,y,0
d,all,ux,0
d,all,uy,0
allsel
nset,s,loc,x,0
d,all,ux,0
allsel
nset,s,loc,x,a
```

d,all,ux,0

allsel

lsel,s,,,3

nsll,s

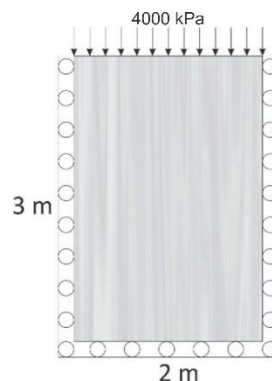
esln,s

SFE,all,3,PRES, ,1, , , !аплицирање на притисок

allsel

5.4 Симулација на резервоар

Во овој карактеристичен пример е симулиран нафтен резервоар како медиум различен од типичните во геотехниката, со цел да се верифицира трифазниот почвен модел во медиуми каде флуидната фаза е составена од нафта наместо од вода. Така, нафтените резервоари претставуваат порозни средини при што во цврстата фаза на почвата има пори исполнети со нафта. Врз секоја промена на порниот притисок влијае деформацијата на цврстото тело. Порозниот почвен примерок со нафта е сместен во резервоар и е прикажан на слика 5.9:



Слика 5.9. Модел на резервоар

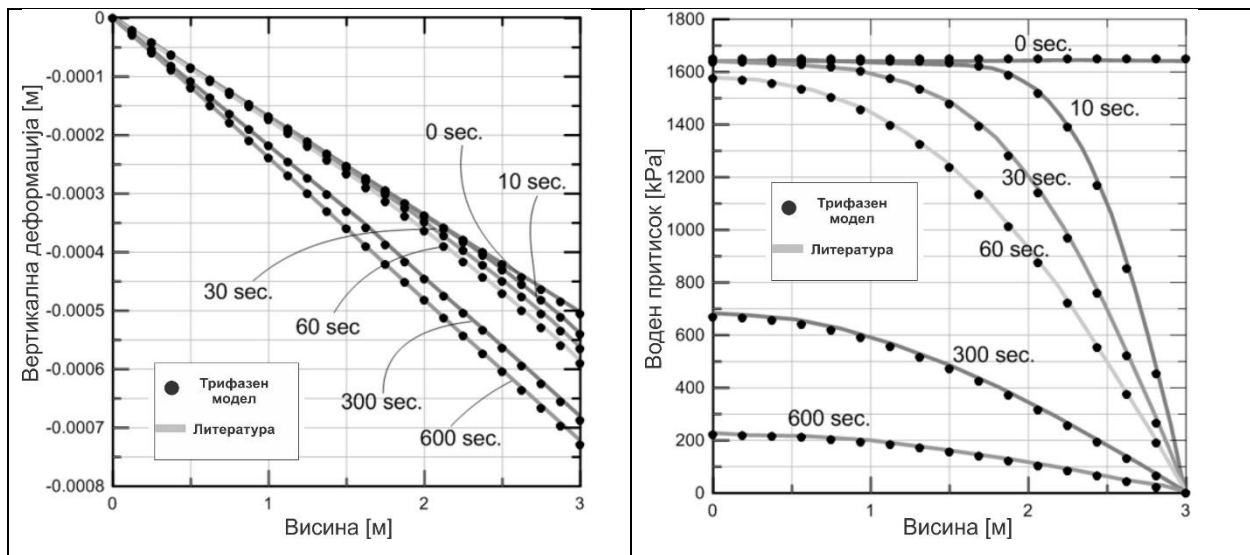
Димензиите на резервоарот се 2 м x 3 м и е рамнински модел. На врвот од резервоарот се нанесува постојан товар од 4000 kPa што претставува надворешен товар со цел симулирање на реален пример од природната средина. Хоризонталните странични движења се ограничени, вертикалното поместување во дното се смета дека е нула, а при недренирани услови, нафтата не може да тече преку границите. Параметрите потребни за симулирање се дадени во табела 5.4.

Табела 5.4. Параметри на нафтениот примерок

Јунгов модул	E	1.44×10^4 МПа
Посонов коефициент	ν	0.2
Биотов коефициент		0.79
Волуменски модул на нафта	K_w	1.23×10^4 МПа
Густина на цврсто зрно...	ρ_s	2000 kg/m^3
Густина на нафта	ρ_o	940 kg/m^3

Почетна порозност	n	0.2
Внатрешна спроводливост	k	$2 \times 10^{-13} \text{ m}^2$
Кинематски вискозитет	μ_w	$1.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

Нумеричките резултати за вертикалното поместување и порниот притисок се прикажани на слика 5.10, заедно со аналитичките решенија од литература, како што е дадено во трудот на Zheng [39]. Вертикалното поместување и порниот притисок се дистрибуирани долж елементот. По почетното товариње во недренирани услови, врвот на примерокот се отвора и порниот притисок на врвот добива вредност од нула бидејќи нафтата тече преку горната граница. Зададениот товар останува константен со вредност од 4000 kPa. Промената на притисокот и поместувањето со време се симулирани со користење на трифазниот почвен модел.



Слика 5.10. Споредба на вертикалното поместување (лево) и порен притисок (десно) со референтни вредности од извештајот на Zheng [39]

Како што може да се види од слика 5.10, со тек на време, состојбата на порозниот примерок се сведува на целосно издрениран материјал, при што порниот притисок достигнува минимална вредност. Во поглед на вертикалната деформација, добиените вредности имаат солидно совпаѓање со резултатите добиени од литературата, односно

испитувањето опишано во трудот на *Zheng* [39]. Влезната датотека за симулација е претставена подолу.

/prep7		
ET,1,101		
KEYOPT,1,1,16		! степени на слобода за цврстата фаза
KEYOPT,1,2,8		! степени на слобода за флуидните фази
KEYOPT,1,3,3		! бројот на точки за интеграција
KEYOPT,1,4,0		! дискретизирање на елементот
	!	0: рамнински модел
	!	1: аксисиметричен модел
KEYOPT,1,5,2		! временска интеграција
	!	1: комплетна
	!	2: матрицата на маса = 0
	!	3: матриците на маса и пригушување = 0
KEYOPT,1,6,1		! тип на сатурација
	!	1: Sw = 1
	!	2: Лиакопулос
	!	3: Брукс и Кори
KEYOPT,1,7,1		! Материјален модел
	!	1: Elastic
	!	2: Usermat
rhos = 2		! OK
rho = 0.94		! OK t/m ³

```
rhog = 0.0012 ! OK

kk = 2.0*10**(-13) !!!-13

Ks = 1.0*10**(9) !!!9
Kw = 1.242*10**(6) !!!6
Kg = 100
kxy = 1.
muew = 1.3*0.55*10**(-4) !!!!-4
mueg = 1.8*10**(-8)
stdamp = 0
E = 1.44*10**(7)*1 ! OK
mue = 0.2*1 ! OK
n = 0.2 ! OK

tb,user,1,0,14,
tbdata,,rhos,rhow,rhog,kk,ks,kw
tbdata,,kg,kxy,muew,mueg,stdamp,E
tbdata,,mue,n
tb,user,1,0,14, , ! се приложуваат параметрите во трифазниот елемент
tbdata,,rhos,rhow,rhog,kk,ks,kw
```

```
tbddata,,kg,kxy,muew,mueg,stdamp,E
```

```
tbddata,,mue,n
```

!опис на геометријата и потребните параметри

```
acel,,9.81
```

```
b=3
```

```
a=2
```

```
k,1 ,0,0
```

```
k,2 ,a,0
```

```
k,3 ,a,b
```

```
k,4 ,0,b
```

```
a,1,2,3,4
```

```
LESIZE,2,,,20
```

```
LESIZE,4,,,20
```

```
LESIZE,1,,,1
```

```
LESIZE,3,,,1
```

```
MSHKEY,1
```

```
type,1
```

```
mat,1
```

```
real,1
```

```
amesh,all !меширање на геометрија
```

```
nset,s,loc,y,0
```

d,all,ux,0

d,all,uy,0

allsel

nselect,s,loc,x,0

d,all,ux,0

allsel

nselect,s,loc,x,a

d,all,ux,0

allsel

lselect,s,,,3

nselect,s

esln,s

SFE,all,3,PRES, ,4000, , , !аплицирање на товар

allsel

6. ЗАКЛУЧОК

Во овој практикум, е развиен и верифициран трифазен почвен модел со што почвените медиуми може да се симулираат како парцијално заситени и/или целосно заситени средини. Покрај статичката интеракција меѓу цврстата матрица и флуидните фази, кај проблемите поврзани со протокот на флуидните фази, успешно се симулира течењето на флуидите во порите. Со цел симулирање на меѓуфазните односи, воведени се волуметриски коефициенти според концептот на волуменски фракции. Земајќи го предвид фактот дека целокупниот порен волумен е парцијално пополнет со двете флуидни фази на вода и воздух, е добиена формулација за парцијално заситени почвени средини.

По нумеричко дискретизирање на трифазниот модел со конечни елементи се добиваат четири непознати и тоа: две компоненти на поместување и две компоненти за притисоците на флуидите. Равенките на рамнотежа на моментумот и конзервацијата на маса ги обезбедуваат потребните непознати поврзани со поместувањата на цврстите честички и порните притисоци. За да се комплетира моделот, неопходно е да се дефинираат конститутивни односи кои се успешно воведени во трифазниот модел. Предложената шема за нумеричка симулација со користење на софтверскиот пакет ANSYS е реализирана за симулација на разни проблеми во полето на напредното геотехничко инженерство. Споредено со еднофазното еластично моделирање на почвата, што претставува вообичаена апроксимација, меродавните равенки кои го опишуваат пороеластичниот материјал ја земаат предвид интеракцијата меѓу цврстиот скелет и флуидите кои ги исполнуваат порите. Последователно, основните променливи се поместувањата на цврстата фаза и притисоците на флуидите во порите, како што се водниот и воздушниот притисок. Врската меѓу капиларноста и заситеноста на почвата не зависи само од карактеристиките на флуидите, туку и од структурата на порозниот медиум. Нелинеарната врска меѓу капиларниот притисок и заситеноста произлегува воглавно од природата на почвата, односно се должи на обликот на честичките и гранулометрискиот состав на честичките. При верификацијата на трифазниот модел, добиените резултати се во мошне добра корелација со референтните симулации од литературата. Со цел користење

на трифазниот модел во напредни анализи и користење на рутините во четирифазни анализи со вклучување на температурата во равенките, во Анекс А се приложени основните субрутини од трифазниот модел.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Boer, R., *Theory of Porous Media*. 2000, Berlin: Springer-Verlag.
2. Oettl, G., R.F. Stark, and G. Hofstetter, *A comparison of elastic-plastic soil models for 2D FE analyses of tunnelling*. Computers and Geotechnics, 1998. **23**(1–2): p. 19-38.
3. Bowen, R.M., *Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures*. International Journal of Engineering Science, 1980. **18**(9): p. 1129-1148.
4. Bowen, R.M., *Theory of mixtures*. In Eringen, A. C., editor, Continuum Physics. Vol. 3. 1976, New York Academic Press.
5. de Boer, R., *Theory of Porous Media — Past and Present*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1998. **78**(7): p. 441-466.
6. Diebels, S. and W. Ehlers, *DYNAMIC ANALYSIS OF A FULLY SATURATED POROUS MEDIUM ACCOUNTING FOR GEOMETRICAL AND MATERIAL NON-LINEARITIES*. INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING, 1996. **39**(1): p. 81-97.
7. Lewis, R.W. and B.A. Schrefler, *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*,. 1998: Second Edition, Wiley Verlag.
8. Sanavia, L., B. Schrefler, and P. Steinmann, *A formulation for an unsaturated porous medium undergoing large inelastic strains*. Computational Mechanics, 2002. **28**(2): p. 137-151.
9. White, J.A. and R.I. Borja, *Stabilized low-order finite elements for coupled solid-deformation/fluid-diffusion and their application to fault zone transients*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008. **197**(49–50): p. 4353-4366.
10. Oettl, G., R. Stark, and G. Hofstetter, *Numerical simulation of geotechnical problems based on a multi-phase finite element approach*. Computers and Geotechnics, 2004. **31**(8): p. 643-664.
11. Stefan, H. and B. Christoph, *A multiphase model with hypoplastic formulation of the solid phase and its application to eq problems*.
12. Hopmans, J.W. and Y.P. Liu, *Parameter of two-fluid capillary pressuresaturation and permeability functions*. 1996, University of California, Davis: Department of Land, air and water resources.
13. Dane, J.H. and A.T. Corey, *Simultaneous measurement of capillary pressure, saturation, and effective permeability of immiscible liquids in porous media*. Water Resources Research, 1998. **34**: p. 3687-3692.
14. Corey, A.T. and R.H. Brooks, *The Brooks – Corey Relationship*. 2002: United States University of California at Riverside.
15. Van Genuchten, M.T., *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*. Soil Science Society of America Journal, 1980. **44**(5): p. 892-898.
16. RN, B. and C. AT., *Properties of porous media affecting fluid flow*. J Irrigat Drain Div Am Soc Civil Eng 1966. **92**: p. 61-68.
17. Liakopoulos, A.C., *Transient flow through unsaturated porous media*. 1965, University of California, Berkeley.
18. Mualem, Y., *Hydraulic conductivity of unsaturated porous media: Generalized macroscopic approach*. Water Resources Research, 1978. **14**(2): p. 325-334.
19. Brooks, R.H. and A.T. Corey, *Hydraulic properties of porous media*, in *Hydrology Papers* 1964: Colorado State University, Fort Collins.
20. M.A.Biot, *Theory of elasticity and consolidation for porous anisotropic solid*. Journal of Applied Physics, 1955. **26**(2),: p. 182-185.

21. Verruijt, A., *Theory of Consolidation*, in *An Introduction to Soil Dynamics*. 2010, Springer Netherlands. p. 65-90.
22. Fredlund, D.G. and H.Rahardjo, *Soil Mechanics for Unsaturated Soils*. 1993, New York: John Wiley and Sons.
23. Fredlund, D.G. and J.U. Hasan, *One-dimensional consolidation theory: unsaturated soils*. Canadian Geotechnical Journal, 1979. **16**(3): p. 521-531.
24. Lewis, R. and Y. Sukirman, *Finite element modelling of three-phase flow in deforming saturated oil reservoirs*. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 2005. **17**(8): p. 577-598.
25. Simoni, L. and B.A. Schrefler, *A staggered finite-element solution for water and gas flow in deforming porous media*. Communications in Applied Numerical Methods, 1991. **7**(3): p. 213-223.
26. Zienkiewicz, O.C., et al., *Static and Dynamic Behaviour of Soils: A Rational Approach to Quantitative Solutions. II. Semi-Saturated Problems*. Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 1990. **429**(1877): p. 311-321.
27. Edip, K., *Development of three phase model with finite and infinite elements for dynamic analysis of soil media*. 2013, Ss. Cyril and Methodius: Institute of Earthquake Engineering and Engineering Seismology.
28. Schrefler, B., et al., *Mechanics of partially saturated porous media*. Numerical Methods and Constitutive Modelling in Geomechanics, CISM Courses and Lectures, 1990(311): p. 169-209.
29. Oettl, G., R.F. Stark, and G. Hofstetter, *Numerical simulation of geotechnical problems based on a multi-phase finite element approach*. Computers and Geotechnics, 2004. **31**(8): p. 643-664.
30. Xikui, L. and O.C. Zienkiewicz, *Multiphase flow in deforming porous media and finite element solutions*. Computers & Structures, 1992. **45**(2): p. 211-227.
31. Zienkiewicz, O.C., *Computational Geomechanics*. 1999.
32. Pastor, M., et al., *Stabilized finite elements with equal order of interpolation for soil dynamics problems*. Archives of Computational Methods in Engineering, 1999. **6**(1): p. 3-33.
33. Van Genuchten, M.T. and D. Nielsen, *On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils*. Ann. Geophys, 1985. **3**(5): p. 615-628.
34. ANSYS. *Fem Software*. 2006.
35. Narasimhan, T.N., P.A. Witherspoon, and A.L. Edwards, *Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable porous media: 2. The algorithm*. Water Resources Research, 1978. **14**(2): p. 255-261.
36. Schrefler, B.A., L. Simoni, and C.E. Majorana, *A general model for the mechanics of saturated-unsaturated porous materials*. Materials and Structures, 1989. **22**(5): p. 323-334.
37. Khoei, A.R. and T. Mohammadnejad, *Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: A comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams*. Computers and Geotechnics, 2011. **38**(2): p. 142-166.
38. Rahman, N.A. and R.W. Lewis, *Finite element modelling of multiphase immiscible flow in deforming porous media for subsurface systems*. Computers and Geotechnics, 1999. **24**(1): p. 41-63.
39. Zheng, Y.B., Robert; Burns, Daniel R., *Reservoir Simulation with the Finite Element Method Using Biot Poroelastic Approach*, in *Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report;2003-11*. 2003: Massachusetts Institute of Technology. Earth Resources Laboratory.

АНЕКС А

Основните субрутини кои го дефинираат трифазниот модел се дадени во субрутините uel_soil.for и ues_soil.for напишани со користење на програмскиот јазик FORTRAN. На почетокот се додадени алатките од софтверскиот пакет ANSYS со цел да се овозможи формирање внатрешни матрици кои се користат за трансфер на податоците помеѓу јазлите на трифазниот елемент.

Субрутините uel_100.for и ues_100.for го опишуваат трифазниот елемент во целост

```
subroutine UEL_100 (elem,ielc,elmdat,eomask,nodes,locsvrL,kelreq,  
& kelfil,nr,xyz,u,kelout,zs,zass,damp,gstif,zsc,zscnr,elvol,elmass,  
& center,elener,edindxL,lcerstL,nnode,nfg,ufg,pfg,ngp,nprop,ncomp,  
& ndirect,nshear,nstatev)  
c  
  #include "impcom.inc"  
  #include "ansysdef.inc"  
  #include "elparm.inc"  
  #include "echprm.inc"  
  #include "seldcm.inc"  
  #include "soptcm.inc"  
  #include "stepcm.inc"  
  #include "elecom.inc"  
  #include "elucm.inc"  
  #include "outpcm.inc"  
  #include "usvrcm.inc"  
  #include "acelcm.inc"  
  #include "loadcm.inc"  
  #include "trans.inc"  
  #include "tintcm.inc"  
  #include "mflDCM.inc"  
  #include "commonsave.inc"  
  external erhandler  
  integer elem,ielc(IE LCSZ),elmdat(10),eomask,  
  x kelreq(10),nr,kelout(10),kelfil(10)  
c --- arguments  
  LONGINT locsvrL, edindxL(25),lcerstL  
  integer nnode,nfg,ufg,pfg,ngp,nrvr,nrsvr,nprop,  
& ncomp,ndirect,nshear,nstatev  
  double precision rvr(ielc(NMTRLC)),nrsvr(ielc(NMNSVR))  
  double precision center(3),elvol,elmass,elener  
  double precision xyz(6,nnode),u(nr,5),checkpressures  
  double precision A,E,nue,Ematgp(4,4,ngp,ngp),Kmat(ufg,ufg),
```

```

&          Bmatgp(4,ufg,ngp,ngp),Mmass(ufg,ufg),
&          Mmasw(pfg,ufg),Mmasg(pfg,ufg),
&          Cdamp(ufg,ufg),
&          straingp(4,ngp,ngp),dstraingp(4,ngp,ngp),
&          stressgp(4,ngp,ngp),stresstotgp(4,ngp,ngp)
double precision  Pww(pfg,pfg),Cwg(pfg,pfg),Cgw(pfg,pfg),
&          Pgg(pfg,pfg),Hww(pfg,pfg),Hgg(pfg,pfg),
&          Csw(ufg,pfg),Csg(ufg,pfg),
&          fu(ufg),fw(pfg),fg(pfg),nmittel,emittel
double precision  kk,Ks,Kw,Kg,muew,mueg,n(ngp,ngp),alpha2,
&          rhos,rhow,rhog,av,ah,stdamp
double precision  zs(nr,nr),damp(nr,nr),zass(nr,nr),
&          zsc(nr),gstif(nr,nr),zscnr(nr)
double precision  floww(4,2),flowg(4,2)
double precision  statevgp(nstatev,ngp,ngp),svindx(20)
double precision  prop(nprop),nodes(nnode),tester
double precision  lineload(4),faktor
double precision  stressgpsave(4,ngp,ngp),kxy
integer          mat
integer          i,j,k,l,activegp
nnrsvr =ielc(NMNSVR)
                                ! read number of saved var.
nrvr   =ielc(NMTRLC)
                                ! read number of real const
call solubeg(      elem,elmdat,locsvrL,svindx,ielc,rvr,nrsvr,
&          nrvr,nnrsvr,mat)
c #### read acceleration
ah     =      -accel(1)
av     =      -accel(2)

call getprop(      E,nue,kk,Ks,Kw,Kg,kxy,muew,mueg,n,alpha2,ielc,
&          rhos,rhow,rhog,stdamp,elmdat,nprop,prop,ngp)
call geomet(      xyz,u,nnode,ngp,nfg,pfg,n,rhos,rhow,
&          rhog,A,center,elmass,elvol,ielc,rvr,nrvr)
call Bmatrixgauss( Bmatgp,xyz,nnode,ufg,ngp,ielc)
call strain(      Bmatgp,dstraingp,straingp,u,nfg,ufg,ngp,A)
call readval(     nrsvr,nnrsvr,statevgp,stressgp,ngp,nstatev)
c call CheckSave(      nrsvr,nnrsvr,ieqitr)
c if (cnvrgd.ne.1) then
call materialgp(  E,nue,xyz,straingp,dstraingp,statevgp,
&          stressgp,Ematgp,ngp,nnode,ufg,ielc,
&          elem,svindx,prop,nprop,mat,
&          ncomp,ndirect,nshear,nstatev)

```

```
c      endif
      if (ielc(KYOP7).eq.2) then
          !
          call genporo( n,statevgp,ngp,nstatev)
c      do i =1,ngp
c      do j =1,ngp
c      n(i,j)=0.d0
c      enddo
c      enddo
c      endif

          !
          call Kmatrix(      Kmat,Ematgp,Bmatgp,xyz,A,ufg,ngp,nnode,ielc)

          call stresstot(      stresstotgp,stressgp,n,ielc,u,nfg,
&                          ngp,pfg,rvr,nrvr,nnode)

          call writeval(      nrsvr,nnrsvr,statevgp,stressgp,ngp,nstatev)
c -----
c      call couplingNEW (      Pww,Cwg,Cgw,Pgg,Hww,Hgg,Csw,Csg,
&                          xyz,u,alpha2,n,kk,Ks,Kw,Kg,kxy,muew,
&                          mueg,pfg,ufg,nnode,nfg,ngp,A,ielc,rvr,nrvr,
&                          activegp)

          call Mmatrix(      Mmass,Mmasw,Mmasg,Cdamp,
&                          A,u,rhos,rhow,rhog,n,nnode,xyz,
&                          nfg,ufg,pfg,ngp,ielc,rvr,nrvr,stdamp,
&                          kk,muew,mueg)
c -----
c      if (ielc(KYOP11).eq.0.or.
          ! Anzahl der Gaußpunkte = ngp
&      checkpressures(u,rvr,nrvr,nr,pfg).eq.0.d0) then

          activegp=ngp
          endif
c -----
c      call elementloadnew(fu,fw,fg,xyz,u,rhos,rhow,rhog,
&                          muew,mueg,kk,kxy,n,A,av,ah,ngp,
&                          ufg,pfg,nfg,nnode,ielc,rvr,nrvr,activegp)

          if (ielc(KYOP5).ne.2.and.ielc(KYOP5).ne.3) then
              do 5 i = 1,ufg
                  fu(i)=0.d0
              5 continue
```

```
endif
if(kelreq(5).eq.1) then
  call Defineloads (elem,lineload)
  call calcsurfpres (fu,xyz,lineload,ufg,nnode)
endif
call vzero(   zs ,nr,nr)
call vzero(   damp ,nr,nr)
call vzero(   zass ,nr,nr)
call matinsert(Kmat ,zs ,nfg,ufg,ufg,1,1, 1.d0,0)
! K in K-matrix
call matinsert(Csw ,zs ,nfg,ufg,pfg,1,3,-1.d0,0)
! -Csw in K-matrix
call matinsert(Csg ,zs ,nfg,ufg,pfg,1,4,-1.d0,0)
! -Csg in K-matrix
call matinsert(Hww ,zs ,nfg,pfg,pfg,3,3, 1.d0,0)
! Hww in K-matrix
call matinsert(Hgg ,zs ,nfg,pfg,pfg,4,4, 1.d0,0)
! Hgg in K-matrix
call matinsert(Cdamp,damp,nfg,ufg,ufg,1,1, 1.d0,0)
! Cdamp in D-matrix
call matinsert(Csw ,damp,nfg,ufg,pfg,1,3, 1.d0,1)
! Csw T in D-matrix
call matinsert(Csg ,damp,nfg,ufg,pfg,1,4, 1.d0,1)
! Csg T in D-matrix
call matinsert(Pww ,damp,nfg,pfg,pfg,3,3, 1.d0,0)
! Pww in D-matrix
call matinsert(Pgg ,damp,nfg,pfg,pfg,4,4, 1.d0,0)
! Pgg in D-matrix
call matinsert(Cwg ,damp,nfg,pfg,pfg,3,4, 1.d0,0)
! Cwg in D-matrix
call matinsert(Cgw ,damp,nfg,pfg,pfg,4,3, 1.d0,0)
! Cgw in D-matrix
call matinsert(Mmass,zass,nfg,ufg,ufg,1,1, 1.d0,0)
! mass in M-matrix

call vecinsert(fw ,zsc ,nfg,pfg,3, 1.d0)
! fw in load-v.
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
call vecinsert(fg ,zsc ,nfg,pfg,4, 1.d0)
! fg in load-v.
call vecinsert(fu ,zsc ,nfg,ufg,1, 1.d0)
! fu in load-v.
```

```
    if (ielc(KYOP5).eq.0) then
    elseif (ielc(KYOP5).eq.1) then
    elseif (ielc(KYOP5).eq.2) then
        call vzero(    zass ,nr,nr)
    elseif (ielc(KYOP5).eq.3) then
        call vzero(    zass ,nr,nr)
        call vzero(    damp ,nr,nr)
    endif
c#####
    call restoring(    A,zscnr,zs,u,stressgp,Bmatgp,ufg,
&                    nfg,pfg,ngp,xyz,nnode,ielc)

20  continue
    endif
    call svrput (svindx(1),4,nnrsvr,nrsvr(1))
    call svpidx (locsvrL,svindx(1))
    if (outkey.eq.1) then
        call Flow( floww,flowg,xyz,nnode,u,nfg,ngp,pfg,
&                rhow,rhog,kk,muew,mueg,av,ah,rvr,nrvr,ielc)
    call genoutput(    floww,flowg,elem,lcerstL,edindxL,stressgp,
&                    stresstotgp,straingp,dstraingp,statevgp,
&                    ngp,nfg,pfg,ielc,n,rvr,nrvr,u,nnode,nodes,
&                    nnrsvr,nrsvr,xyz,A,elmdat,eomask,nstatev,
&                    activegp)
    endif
    if(kelreq(1).eq.1)    kelout(1) = 1
    if(kelreq(2).eq.1)    kelout(2) = 1
    if(kelreq(3).eq.1)    kelout(3) = 1
    if(kelreq(4).eq.1)    kelout(4) = 1
    if(kelreq(5).eq.1)    kelout(5) = 1
    if(kelreq(6).eq.1)    kelout(6) = 1

subroutine uec101 (elcdn,ielc,kerr)
c   *** this subroutine defines the characteristics of user101.
c
#include "impcom.inc"
#include "echprm.inc"
c
    external nminfo,erinqr
    integer  erinqr,ngp,nstatev
    integer ielc(*),i,kerr
```

```
character*28 elcdn
c
c **** define element name ***
call nminfo (ielc(1),'USER101 ')

c
c **** element type characteristics:
c
if (ielc(KYOP1).eq.8.and.ielc(KYOP2).eq.4) then
    ielc(NMNDMX) = 4 ! maximum number
of nodes per element
    ielc(NMNDMN) = 4 ! minimum number
of nodes per element
    ielc(NMNDST) = 4 ! number of nodes
that have stiffness or conductivity effects
    ielc(NMNDAC) = 4 ! active number of
nodes per elements (nodes that have dofs)
    ielc(NMNDNO) = 4 ! Number of Nodes
having nodal output stored in results file
else
    ielc(MNODE ) = 2 ! has midside
nodes, but may be dropped
    ielc(NMNDMX) = 8 ! maximum number
of nodes per element
    ielc(NMNDMN) = 4 ! minimum number
of nodes per element
    ielc(NMNDST) = 8 ! number of nodes
that have stiffness or conductivity effects
    ielc(NMNDAC) = 8 ! active number of
nodes per elements (nodes that have dofs)
    ielc(NMNDNE) = 8 ! maximum number
of nodes per element, less any 'extra' nodes
!
default = NMNDMX
    ielc(NMNDNO) = 4 ! Number of Nodes
having nodal output stored in results file
endif

nstatev=ielc(KYOP8)
ngp=ielc(KYOP3)
ielc(NMNSVR) = ngp*ngp*2*(10+nstatev)

c ielc(NMSSVR) = 200
```



```

c      ielc(KCONIT) = 1                ! key for nodal averagable
data such as stresses, strains,
c                                     field   fluxes,   field
gradients,etc.)
c                                     =     1     -
contourable nodal items are present
      ielc(JMASS ) = 0
c      ielc(JMASS ) = 2
      ielc(KDIM  ) = 0                ! 2-D Element
      ielc(ISHAP ) = 4                ! shape allowed by the element :
quadrilateral

      ielc(KDOFS ) = 2**0+2**1       ! degrees of freedom
      ielc(KDOFS2) = 2**0+2**1       ! degrees of freedom

      ielc(NMDRLC) = 12              ! number of documented real
constants
      ielc(NMTRLC) = 12              ! number of total real constants
default = NMDRLC
      ielc(MATRQD) = 0               ! number of required material
property for this element
      ielc(MATRXS) = STIFM + MASSM + DAMPM ! computed matrices
      ielc(JNONLR) = 2               ! element is nonlinear but
return
end

```

При елаборирање на матриците особена важност имаат матриците за проток на флуидите и корелацијата помеѓу фазите на флуидите. Во прилог се прикажани матриците потребни за формулацијата на флуидите.

```

subroutine coupling( Pww,Cwg,Cgw,Pgg,Hww,Hgg,Csw,Csg,
&                    xyz,u,alpha2,n,kk,Ks,Kw,Kg,kxy,muew,mueg,
&                    pfg,ufg,nnode,nfg,ngp,A,ielc,rvr,nrvr)
c
c      #####
#####
c      compute coupling matrices
c
c      input:
c      A                                area

```

```

c      ngp                      number of gausspoints
c      nnode                    number of nodes
c      ufg                      dof displacement
c      pfg                      dof pressure
c      kk,Ks,Kw,Kg,muew,mueg
c      n(ngp,ngp)              porosity
c      alpha2                   =1 (incompressive grain)
c      u(nfg,5)                 element nodal solution values
c      xyz(6,nnode)            nodal coordinates
c
c      output:
c      Pww(pfg,pfg)            wetting fluid compressibility matrix
c      Cwg(pfg,pfg)            wetting-non-wetting fluid matrix
c      Cgw(pfg,pfg)            non-wetting-wetting fluid coupling matrix
c      Pgg(pfg,pfg)            non-wetting fluid compressibility matrix
c      Hww(pfg,pfg)            wetting fluid permeability matrix
c      Hgg(pfg,pfg)            non-wetting fluid permeability matrix
c      Csw(ufg,pfg)            solid-wetting coupling matrix
c      Csg(ufg,pfg)            solid-non-wetting fluid coupling matrix
c
#####
#####
implicit none
#include "echprm.inc"
integer          pfg,ufg,nnode,nfg,ngp,nrvr
double precision Pww(pfg,pfg),Cwg(pfg,pfg),Cgw(pfg,pfg),
&                Pgg(pfg,pfg),Hww(pfg,pfg),Hgg(pfg,pfg),
&                Csw(ufg,pfg),Csg(ufg,pfg)
double precision NptNp(pfg,pfg),BtmNp(ufg,pfg),
&                grNptgrNp(pfg,pfg)
double precision xyz(6,nnode),u(nfg,5)
double precision r(ngp),s(ngp),alpha(ngp),n(ngp,ngp)
double precision Sw,Cs,A,kk,Ks,Kw,Kg,muew,mueg
double precision pw,pg,krw,krg,alpha2,rvr(nrvr)
double precision radius(ngp,ngp),pi,kxy,JacDet
integer          i,j,k,l,ielc(ielcsz)

pi=2.d0*DACOS(0.d0)
c
c ### initialize
c
call vzero(Pww,pfg,pfg)
call vzero(Cwg,pfg,pfg)

```

```

call vzero(Cgw,pfg,pfg)
call vzero(Pgg,pfg,pfg)
call vzero(Hww,pfg,pfg)
call vzero(Hgg,pfg,pfg)
call vzero(Csw,ufg,pfg)
call vzero(Csg,ufg,pfg)
c ###
call gauss (ngp,r,s,alpha)
call genradius(radius,xyz,ufg,nnode,ngp,ielc)
do 10 i = 1,ngp
do 10 j = 1,ngp
    call genJacDet(JacDet,xyz,r(i),s(j),nnode)
    call genpressure(pw,pg,u,r(i),s(j),nfg,pfg,nnode)
    call gensaturation(Sw,Cs,pw,pg,n(i,j),ielc,rvr,nrvr)
    call genpermea(krw,krg,Sw,ielc,rvr,nrvr)
    call genNptNp(NptNp,r(i),s(j),pfg,nnode)
    call gengrNptgrNpNEW(grNptgrNp,xyz,r(i),s(j),nnode,kxy,pfg)
    call genBtmNp(BtmNp,xyz,r(i),s(j),nnode,ufg,pfg,ngp,ielc,i,j)
c ###
    do 20 k = 1,pfg
    do 20 l = 1,pfg
if(ielc(KYOP10).eq.1) then
    ! KS=infinity
    Pww(k,l)=Pww(k,l)+
& NptNp(k,l)*(n(i,j)*Sw/Kw-Cs)
& *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
    Cwg(k,l)=Cwg(k,l)+
& NptNp(k,l)*(Cs)
& *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
    Cgw(k,l)=Cgw(k,l)+
& NptNp(k,l)*(Cs)
& *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
    Pgg(k,l)=Pgg(k,l)+
& NptNp(k,l)*(n(i,j)*Sw/Kg-Cs)
& *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
    Hww(k,l)=Hww(k,l)+grNptgrNp(k,l)*kk*krw/muew
& *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
    Hgg(k,l)=Hgg(k,l)+grNptgrNp(k,l)*kk*krv/mueg
& *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
else
    Pww(k,l)=Pww(k,l)+
& NptNp(k,l)*((alpha2-n(i,j))/Ks*Sw*(Sw+(pg-pw)*
& Cs/n(i,j))+n(i,j)*Sw/Kw-Cs)

```

```

&          *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
          Cwg(k,l)=Cwg(k,l)+
&          NptNp(k,l)*((alpha2-n(i,j))/Ks*Sw*
&          ((1.d0-Sw)+(pw-pg)*Cs/n(i,j))+Cs)
&          *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
          Cgw(k,l)=Cgw(k,l)+
&          NptNp(k,l)*((alpha2-n(i,j))/Ks*(1.d0-Sw)*
&          (Sw+(pg-pw)*Cs/n(i,j))+Cs)
&          *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
          Pgg(k,l)=Pgg(k,l)+
&          NptNp(k,l)*((alpha2-n(i,j))/Ks*(1.d0-Sw)*
&          (1.d0-Sw+(pw-pg)*Cs/n(i,j))+n(i,j)*(1.d0-Sw)
&          /Kg-Cs)*alpha(i)*alpha(j)*JacDet*
&          radius(i,j)*pi*2.d0
          Hww(k,l)=Hww(k,l)+grNptgrNp(k,l)*kk*krw/muew
&          *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
          Hgg(k,l)=Hgg(k,l)+grNptgrNp(k,l)*kk*krw/mueg
&          *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
          endif

20          continue
c ####
          do 30 k = 1,ufg
          do 30 l = 1,pfg
&          Csw(k,l)=Csw(k,l)+BtmNp(k,l)*Sw*alpha2
&          *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
&          Csg(k,l)=Csg(k,l)+BtmNp(k,l)*(1.d0-Sw)*alpha2
&          *alpha(i)*alpha(j)*JacDet*radius(i,j)*pi*2.d0
30          continue
10 continue
          end

```

Матриците на маса и крутост се дефинирани и се формираат при секоја итерација.

```

subroutine Mmatrix( Mmass,Mmasw,Mmasg,Cdamp,
&          A,u,rhos,rhow,rhog,n,nnode,xyz,
&          nfg,ufg,pfg,ngp,ielc,rvr,nrvr,stdamp,
&          kk,muew,mueg)
c #####
c compute mass-matrices
c
c input:

```

```

c      u(nfg,5)                element nodal solution values
c      xyz(6,nnode)           nodal coordinates
c      ngp                    number of gausspoints
c      ufg                    dof displacement
c      nfg                    dof
c      pfg                    dof pressure
c      nnode                  number of nodes
c      A                      area
c      n                      porosity
c      rhos                   solid density
c      rhog                   gas density
c      rhow                   water density
c
c      output:
c      Mmass(ufg,ufg)
c      Mmasw(pfg,pfg)
c      Mmasg(pfg,pfg)
c      Cdamp(ufg,ufg)
c
c      #####
#
implicit none
#include "echprm.inc"
#include "stepcm.inc"
integer                nnode,nfg,ufg,pfg,ngp,nrvr
double precision       Mmass(ufg,ufg),xyz(6,nnode),
&                      Mmasw(pfg,ufg),Mmasg(pfg,ufg),Cdamp(ufg,ufg)
double precision       n(ngp,ngp),u(nfg,5),pw,pg
double precision       r(ngp),s(ngp),alpha(ngp)
double precision       rhos,rhow,rhog,Sw,Cs,A,krw,krp
double precision       NutNu(ufg,ufg),Nu(2,ufg),Nut(ufg,2),
&                      grNpt(pfg,2),grNp(2,pfg),grNptNu(pfg,ufg),
&                      rvr(nrvr),stdamp,radius(ngp,ngp),pi
double precision       muew,mueg,kk,JacDet
integer                i,j,k,l,m,ielc(ielcsz)

pi=2.d0*DACOS(0.d0)
c
c ### initialize
c
call vzero(Mmass,ufg,ufg)
call vzero(Mmasw,pfg,ufg)
call vzero(Mmasg,pfg,ufg)

```

```

call vzero(Cdamp,ufg,ufg)
c ###
call gauss(ngp,r,s,alpha)
call genradius(radius,xyz,ufg,nnode,ngp,ielc)
  do 5 i = 1,ngp
    do 5 j = 1,ngp
      call genJacDet(JacDet,xyz,r(i),s(j),nnode)
        call genNutNu(NutNu,Nu,Nut,ufg,pfg,r(i),s(j),nnode)
        call genpressure(pw,pg,u,r(i),s(j),nfg,pfg,nnode)
        call gensaturation(Sw,Cs,pw,pg,n(i,j),ielc,rvr,nrvr)
        call gengrNp(grNp,xyz,r(i),s(j),nnode,pfg)
        call genpermea(krw,krg,Sw,ielc,rvr,nrvr)
        call vzero(grNpt,pfg,2)
        call vzero(grNptNu,pfg,ufg)

        do 2 k =1,pfg
          do 2 l =1,2
            grNpt(k,l)=grNp(l,k)
2          continue
          do 3 k= 1, pfg
            do 3 l= 1, ufg
              do 3 m= 1, 2
                grNptNu(k,l)=grNptNu(k,l)+grNpt(k,m)*Nu(m,l)
3              continue
            do 4 k= 1,pfg
              do 4 l= 1,ufg
                Mmasw(k,l)=Mmasw(k,l)+grNptNu(k,l)*alpha(i)*alpha(j)
&                *JacDet*kk*krw/muew*rhow*radius(i,j)
&                *pi*2.d0
                Mmasg(k,l)=Mmasg(k,l)+grNptNu(k,l)*alpha(i)*alpha(j)
&                *JacDet*kk*krw/mueg*rhog*radius(i,j)
&                *pi*2.d0
4              continue
            do 6 k = 1,ufg
              do 6 l = 1,ufg
                Mmass(k,l)= Mmass(k,l)+NutNu(k,l)*alpha(i)*alpha(j)
&                *JacDet*((1.d0-n(i,j))*rhos+n(i,j)*Sw*rhow
&                +n(i,j)*(1.d0-Sw)*rhog)*radius(i,j)
&                *pi*2.d0
                Cdamp(k,l)= Cdamp(k,l)+NutNu(k,l)*alpha(i)*alpha(j)
&                *JacDet*stdamp*radius(i,j)
&                *pi*2.d0
6              continue

```

```

5      continue
      return
      end

subroutine Kmatrix(Kmat,Ematgp,Bmatgp,xyz,A,ufg,ngp,nnode,ielc)
c      #####
c      compute stiffness
c
c      input:
c      nnode          number of nodes
c      ngp            number of gausspoints
c      ufg            dof displacement
c      xyz(6,nnode)   nodal coordinates
c      Bmatgp(4,ufg,ngp,ngp) displacement-strain matrix
c      Ematgp(4,4,ngp,ngp) elasticity matrix
c      A              area
c
c      output:
c      Kmat(ufg,ufg)  stiffness matrix
c
c      #####
#
      implicit none
      #include "echprm.inc"
      integer          ufg,ngp,nnode
      double precision Bmatgp(4,ufg,ngp,ngp),Kmat(ufg,ufg)
      double precision Ematgp(4,4,ngp,ngp),Cmat(4,ufg,ngp,ngp),A
      double precision xyz(6,nnode),r(ngp),s(ngp),alpha(ngp),pi,
&      radius(ngp,ngp),JacDet
      integer          i,j,k,l,m,ielc(IELCSZ)

      pi=2.d0*DACOS(0.d0)
      call gauss (ngp,r,s,alpha)
      call genradius(radius,xyz,ufg,nnode,ngp,ielc)
      call vzero (Kmat,ufg,ufg)
         do 50 i = 1,ngp
         do 50 j = 1,ngp
         do 50 k = 1,4
         do 50 l = 1,ufg
            Cmat(k,l,i,j)=0.d0
50      continue

```

```
do 60 i = 1,ngp
do 60 j = 1,ngp
do 60 k = 1,4
do 60 l = 1,ufg
do 60 m = 1,4
      Cmat(k,l,i,j)= Cmat(k,l,i,j)+
&
&      Ematgp(k,m,i,j)*Bmatgp(m,l,i,j)
60      continue
do 70 i = 1,ngp
do 70 j = 1,ngp
do 70 k = 1,ufg
do 70 l = 1,ufg
do 70 m = 1,4
call genJacDet(JacDet,xyz,r(i),s(j),nnode)
      Kmat(k,l)=      Kmat(k,l)+Bmatgp(m,k,i,j)*
&
&      Cmat(m,l,i,j)*alpha(i)*alpha(j)*JacDet
&
&      *2.d0*pi*radius(i,j)
70      continue

return
end
```

Со цел дефинирање на материјалниот модел субрутината во прилог овозможува дефинирање на односот помеѓу напрегања и дилатации.

```
subroutine usermat3d (
&      matId, elemId,kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
&      ldstep,isubst,keycut,
&      nDirect,nShear,ncomp,nStatev,nProp,
&      Time,dTime,Temp,dTemp,
&      stress,statev,dsdePl,sedEl,sedPl,epseq,
&      Strain,dStrain, epsPl, prop, coords,
&      rotateM, defGrad_t, defGrad,
&      tsstif, epsZZ,
&      var1, var2, var3, var4, var5,
&      var6, var7, var8)
      implicit none
      INTEGER
&      matId, elemId,elmdat(10),elmget,
&      kDomIntPt, kLayer, kSectPt,
&      ldstep,isubst,keycut,nodes(20),
&      nDirect,nShear,ncomp,nStatev,nProp
      DOUBLE PRECISION
```



```
&      Time, dTime, Temp, dTemp,
&      sedEI, sedPI, epseq, epsZZ

DOUBLE PRECISION
&      stress (ncomp ), statev (nStatev),
&      dsdePI (ncomp,ncomp),
&      Strain (ncomp ), dStrain (ncomp ),
&      epsPI (ncomp ), prop (nProp ),
&      coords (3), rotateM (3,3),
&      defGrad (3,3), defGrad_t(3,3),
&      tsstif (2),Ehelp,vhelp,
&      faktor1,faktor2,faktor3
DOUBLE PRECISION var1, var2, var3, var4, var5,
&      var6, var7, var8,E,nu
```

c

```
INTEGER      i, j,e1,value2,value3,value4,erster,tot,quali(2)
INTEGER realval
DOUBLE PRECISION trsigma,trsigma1,prestr,trepdot
```

```
E=14000.d0
nu=0.2d0
```

```
dsdepl(1,1) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*(1.d0-nu)
dsdepl(1,2) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*nu
dsdepl(1,3) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*nu
dsdepl(1,4) = 0.d0
dsdepl(1,5) = 0.d0
dsdepl(1,6) = 0.d0
dsdepl(2,1) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*nu
dsdepl(2,2) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*(1.d0-nu)
dsdepl(2,3) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*nu
dsdepl(2,4) = 0.d0
dsdepl(2,5) = 0.d0
dsdepl(2,6) = 0.d0
dsdepl(3,1) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*nu
dsdepl(3,2) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*nu
dsdepl(3,3) = E/(1.D0+nu)/(1.d0-2.d0*nu)*(1.d0-nu)
dsdepl(3,4) = 0.d0
dsdepl(3,5) = 0.d0
dsdepl(3,6) = 0.d0
dsdepl(4,1) = 0.d0
dsdepl(4,2) = 0.d0
dsdepl(4,3) = 0.d0
```

```
dsdepl(4,4) = E/(1.D0+nu)/2.d0
dsdepl(4,5) = 0.d0
dsdepl(4,6) = 0.d0
dsdepl(5,1) = 0.d0
dsdepl(5,2) = 0.d0
dsdepl(5,3) = 0.d0
dsdepl(5,4) = 0.d0
dsdepl(5,5) = E/(1.D0+nu)/2.d0
dsdepl(5,6) = 0.d0
dsdepl(6,1) = 0.d0
dsdepl(6,2) = 0.d0
dsdepl(6,3) = 0.d0
dsdepl(6,4) = 0.d0
dsdepl(6,5) = 0.d0
dsdepl(6,6) = E/(1.D0+nu)/2.d0

stress(1) = stress(1)+
&          dsdepl(1,1)*dstrain(1)+
&          dsdepl(1,2)*dstrain(2)+
&          dsdepl(1,3)*dstrain(3)
stress(2) = stress(2)+
&          dsdepl(2,1)*dstrain(1)+
&          dsdepl(2,2)*dstrain(2)+
&          dsdepl(2,3)*dstrain(3)
stress(3) = stress(3)+
&          dsdepl(3,1)*dstrain(1)+
&          dsdepl(3,2)*dstrain(2)+
&          dsdepl(3,3)*dstrain(3)
stress(4) = stress(4)+
&          dsdepl(4,4)*dstrain(4)
stress(5) = stress(5)+
&          dsdepl(5,5)*dstrain(5)
stress(6) = stress(6)+
&          dsdepl(6,6)*dstrain(6)
end
```