Марија Оровчанец **Билјана Крстеска**
Весна Манова-Ерковиќ **Ѓорѓи Маркоски**

ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА I (ВТОР ДЕЛ)

Скопје, 2015

Рецензенти
Проф. д-р Никола Пандески
Редовен професор на ПМФ, Скопје
Проф. д-р Никита Шекутковски
Редовен професор на ПМФ, Скопје

Со одлука број 07-236/7 од 30.9.2004 година, на Наставно-научниот совет на Природно-математичкиот факултет во Скопје се одобрува печатење на оваа книга како учебно помагало.

ПРЕДГОВОР

Оваа збирка задачи пред се е наменета за студентите на студиите по математика. Но, сметаме дека збиркава ќе биде интересна и за студентите од техничките факултети и сите оние кои сакаат да се запознаат со основните поими од математичката анализа.

Збиркава содржи пет глави. На почетокот на секоја од нив дадени се дефиниции и основни својства на поимите кои се разгледуваат во таа глава. Потоа следуваат формулациите и решенијата задачите. Доказите на теоремите и целата потребна теоретска подготовка може да се најдат во учебниците [1] и [2].

Сите задачи се детално решени. Пожелно е читателот да се обиде да ја реши задачата, а ако не успее, дури тогаш да го погледне решението. За да може успешно да се следи материјалот во оваа збирка, потребно е читателот да има добри предзнаења од материјалот кој се изучува во средното образование.

На крајот збиркава содржи задачи од писмените испити по математичка анализа 1 на студиите по математика на Природно-математичкиот факултет во Скопје.

Им се заблагодаруваме на рецензентите кои дадоа корисни забелешки и предлози за подобрување на оваа збирка задачи. Сите забелешки од читателите ќе бидат добродојдени за подобрување на текстот на оваа книга во иднина.

Скопје, 2015 Авторите

I. Неопределен интеграл

1.1 Примитивна функција. Неопределен интеграл

Примитивна функција за дадена функција $f\left(x\right), x \in E \subseteq \mathbb{R}$ е диференцијабилната функција $F\left(x\right)$, $x \in E \subseteq \mathbb{R}$ таква што $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$, за секој $x \in E$.

Неоределен интеграл за дадена функција $f\left(x\right), x \in E \subseteq \mathbb{R}$ со ознака $\int f\left(x\right)dx$ е множеството од сите примитвни функции, т.е.

$$\int f\left(x\right)dx = \left\{F\left(x\right) + C \middle| F'\left(x\right) = f\left(x\right), \forall x \in E, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Вообичаено ознаката за множество ја изоставуваме, т.е. ако $F\left(x\right)$ е една примитивна функцијата за $f\left(x\right)$, тогаш пишуваме $\int f\left(x\right)dx = F\left(x\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Својства на неоределен интеграл:

1. $\int \alpha f\left(x\right)dx = \alpha \int f\left(x\right)dx, \ \alpha \in \mathbb{R}$,

2. $\int \left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right)dx = \int f\left(x\right)dx + \int g\left(x\right)dx$,

3. $\int F'\left(x\right)dx = F\left(x\right) + C$.

Таблица на неопределени интеграли на некои елементарни функции:

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1.$ **2.** $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int e^{x}dx = e^{x} + C.$ **4.** $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, \ a > 0, a \neq 1.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$ **6.** $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ **8.** $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$ **10.** $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C.$ **12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$

1.1. Најди една примитивна функција φ на функцијата f, ако $f(x) = \cos x$.

Решение. Треба да најдеме барем една функција чиј што извод е дадената функција. Бидејќи $(\sin x)' = \cos x$, заклучуваме дека $\varphi(x) = \sin x$ е една примитивна функција на дадената функција. ●

1.2. Најди ги сите функции f, за која важи $f'(x) = 1 + e^x$.

Решение. Од $(x+e^x)' = 1+e^x$, следува дека $f(x) = x + e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$.●

1.3. Докажи дека функцијата $\varphi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ е примитивна функција на функцијата $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Решение. $\varphi'(x) = \left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)' = (x^2)'\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$ ●

Со примена на таблицата на основните интеграли пресметај ги следните интеграли:

1.4. $\int 5x^5 dx.$

Решение. $\int 5x^5 dx = 5\int x^5 dx = 5\frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{5}{6}x^6 + C.$ ●

1.5. $\int \frac{dx}{x^2}.$

Решение. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C.$ ●

1.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$

Решение. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$ ●

1.7. $\int\left(\frac{1}{x} - 3\right)dx.$

Решение. $\int\left(\frac{1}{x} - 3\right)dx = \int\frac{dx}{x} - 3\int dx = \ln|x| - 3x + C.$ ●

1.8. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx.$

Решение. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx = \int (e^x-1)dx = \int e^x dx - \int dx = e^x - x + C.$ ●

1.9. $\int 5^x 3^{-x} dx.$

Решение. $\int 5^x 3^{-x} dx = \int \left(\frac{5}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\frac{5}{3}} + C = \frac{5^x}{(\ln 5 - \ln 3)3^x} + C.$ ●

1.10. $\int (2x - 3\sin x + \cos x)dx.$

Решение. $\int (2x - 3\sin x + \cos x)dx = 2\int x dx - 3\int \sin x dx + \int \cos x dx =$

$= x^2 + 3\cos x + \sin x + C.$ ●

1.11. $\int \mathrm{tg}^2 x dx.$

Решение. $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$ ●

1.12. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx.$

Решение. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -c\,\mathrm{tg}\, x - x + C.$ ●

1.13. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}.$

Решение. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \mathrm{arctg}\, x + C.$ ●

1.14. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx.$

Решение. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$

$= 3\arcsin x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C.$ ●

1.15. Определи ја функцијата $f(x)$ која што минува низ точката $M(1{,}0)$ и за која важи $f'(x) = 3x^2 - 1.$

Решение. Од $\int (3x^2-1)dx = 3\int x^2 dx - \int dx = x^3 - x + C$ следува дека

$\int f'(x)dx = x^3 - x + C$ се сите примитивни функции за $f'(x)$. Ја бараме онаа функција која што минува низ точката $M(1{,}0)$. Од условите $f(1) = 0$ и $f(1) = C$, добиваме $C = 0$. Бараната функција е $f(x) = x^3 - x.$ ●

1.2. Интегрирање со метод на замена

Нека $f(x)$, $x \in D_f$ и $\varphi(t), t \in D_\varphi$ се фукции такви што $D_\varphi \subseteq D_f$, $x = \varphi(t)$ е диферецијабилна и нека $t = \varphi^{-1}(x)$ е нејзината инверзна функција. Ако $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(t) + C$ тогаш $\int f(x)\,dx = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C$.

Со метод на замена најди ги следниве интеграли:

1.16. $\int (x+2)^5 dx.$

Решение. Овде $f(x) = x^5$ и $\varphi(x) = x + 2$. Значи воведуваме смена $x+2=t.$ Тогаш $x=t-2$. Диференцирајќи ги левата страна по x а десната по t добиваме $dx=dt.$ Заменувајќи во интегралот имаме:

$$\int (x+2)^5 dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(x+2)^6}{6} + C. \bullet$$

1.17. $\int \frac{dx}{2x+7}.$

Решение. Воведуваме смена $2x+7=t.$ Тогаш $x=\frac{t-7}{2}$ и $dx=\frac{1}{2}dt.$ Заменувајќи во нтегралот добиваме:

$$\int \frac{dx}{2x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+7| + C. \bullet$$

1.18. $\int \frac{2xdx}{1+x^2}.$

Решение. Воведуваме смена $1+x^2=t$ Тогаш $2xdx=dt.$ Заменувајќи во интегралот добиваме: $\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(1+x^2) + C. \bullet$

1.19. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3+4x)^3}}.$

Решение. Воведуваме смена $\sqrt[4]{(3+4x)^3} = t$. Тогаш $x = \frac{t^{\frac{4}{3}}-3}{4}$ и $dx = \frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}}dt.$ Заменувајќи во интегралот добиваме:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(3+4x)^3}} = \int \frac{\frac{1}{3}t^{\frac{1}{3}}dt}{t} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = t^{\frac{1}{3}} + C = \sqrt[4]{3+4x} + C. \bullet$$

1.20. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

Решение. Воведуваме смена $e^x = t$. Тогаш $e^x dx = dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C$. ●

1.21. $\int a^{x^4} x^3 dx$, $a > 0, a \neq 1$.

Решение. Воведуваме смена $x^4 = t$. Тогаш $4x^3 dx = dt$, односно $x^3 dx = \frac{1}{4} dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме:

$$\int a^{x^4} x^3 dx = \frac{1}{4} \int a^t dt = \frac{1}{4 \ln a} a^t + C = \frac{1}{4 \ln a} a^{x^4} + C. \text{ ●}$$

1.22. $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin x}$.

Решение. Воведуваме смена $4 + \sin x = t$. Тогаш $\cos x dx = dt$. Заменуваме во интегралот и добиваме $\int \frac{\cos x}{4+\sin x} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(4+\sin x) + C$. ●

1.23. $\int \sin^2 x dx$.

Решение. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Притоа во последниот интеграл ставивме смена $t = 2x$, од што добиваме $dx = \frac{1}{2} dt$. ●

1.24. $\int \cos^3 x dx$.

Решение. $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x) \cos x dx$.

Воведуваме смена $\sin x = t$. Тогаш $\cos x dx = dt$. Заменувајќи во последниот интеграл добиваме: $\int (1-\sin^2 x) \cos x dx = \int (1-t^2) dt =$

$$= \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C. \text{ ●}$$

1.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}}$, $a, b > 0$.

Решение. Интегралот ќе го доведеме во обликот $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 \left(1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2\right)}} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2}}.$$

Воведуваме смена $\frac{ax}{b}=t$. Тогаш $dx=\frac{b}{a}dt$. Заменувајќи во интегралот, добиваме:

$$\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{ax}{b}\right)^2}}=\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{a}\arcsin t+C=\frac{1}{a}\arcsin\frac{ax}{b}+C.\bullet$$

1.26. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2x^2\pm b^2}}$, $a,b>0$.

Решение. Интегралот ќе го доведеме во обликот $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm 1}}$. Имаме

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2x^2\pm b^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{b^2\left(\left(\frac{ax}{b}\right)^2\pm 1\right)}}=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{ax}{b}\right)^2\pm 1}}.$$

Воведуваме смена $\frac{ax}{b}=t$. Тогаш $dx=\frac{b}{a}dt$. Заменувајќи во интегралот, добиваме:

$$\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{ax}{b}\right)^2\pm 1}}=\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm 1}}=\frac{1}{a}\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm 1}\right|+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{ax}{b}+\sqrt{\left(\frac{ax}{b}\right)^2\pm 1}\right|+C.\bullet$$

1.27. $\int\frac{dx}{b^2+a^2x^2}$, $a,b>0$.

Решение. Интегралот ќе го доведеме во обликот $\int\frac{dt}{t^2+1}$. Имаме

$$\int\frac{dx}{b^2+a^2x^2}=\int\frac{dx}{b^2\left(1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2\right)}=\frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2}.$$

Воведуваме смена $\frac{ax}{b}=t$, па $dx=\frac{b}{a}dt$. Заменувајќи во последниот интеграл добиваме:

$$\frac{1}{b^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2}=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{ax}{b}+C.\bullet$$

1.28. $\int\frac{1}{x^2-1}dx$.

Решение. $\int\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C=$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\bullet$$

1.29. $\int\frac{dx}{a^2x^2-b^2}$, $a,b>0$.

Решение. $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \int \frac{dx}{b^2\left(\left(\frac{ax}{b}\right)^2-1\right)} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{ax}{b}\right)^2-1}$. Ќе воведеме смена $\frac{ax}{b}=t$,

па $dx=\frac{b}{a}dt$. Оттука имаме

$$\frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{ax}{b}\right)^2-1} = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\int \frac{dx}{t^2-1} = \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{\frac{ax}{b}-1}{\frac{ax}{b}+1}\right|+C = \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right|+C \quad \bullet$$

1.30. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $a>0$

а) ако $b^2-4ac>0$,

б) ако $b^2-4ac<0$.

Решение. Интегралот ќе го доведеме во еден од облиците $\int \frac{dt}{t^2+1}$ или $\int \frac{dt}{t^2-1}$.

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{(\sqrt{a}x)^2+2\frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}x+\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

а) $$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}} = \frac{1}{\frac{b^2-4ac}{4a}}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}\right)^2-1}.$$

Воведуваме смена $t=\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}$, па $dx=\frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}}dt$ и последниот интеграл

го добива обликот

$$\frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}-1}{\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}+1}\right|+C=$$

$$=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}\right|+C.$$

б) $$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}} = \frac{1}{\frac{4ac-b^2}{4a}}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}\right)^2+1}.$$

Воведуваме смена $t=\dfrac{\sqrt{a}x+\dfrac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a}}}$. Тогаш $dx=\sqrt{\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}}dt$, па добиваме

$$\frac{1}{\frac{4ac-b^2}{4a}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\frac{4ac-b^2}{4a}}\cdot\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{4a}{4ac-b^2}\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}+C\,.\bullet$$

1.31. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{(x+1)'\,dx}{(x+1)^2-\frac{2^2-4\cdot 2}{4}}=\int\frac{(x+1)'\,dx}{(x+1)^2+1}=$

$$=\int\frac{(x+1)'\,dx}{(x+1)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+1)+C.\bullet$$

1.32. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+1}$.

Решение. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2x+1}=\int\frac{(x+1)'\,dx}{(x+1)^2-\frac{2^2-4\cdot 1}{4}}=\int\frac{(x+1)'\,dx}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)}+C.\bullet$

1.33. $\displaystyle\int\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx$, $a,a_1\neq 0$.

Решение. $\displaystyle\int\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx=a_1\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b+\frac{2ab_1}{a_1}-b}{ax^2+bx+c}dx=$

$$=\frac{a_1}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\frac{a_1}{2a}\left(\frac{2ab_1}{a_1}-b\right)\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{a_1}{2a}I_1+\frac{a_1}{2a}\left(\frac{2ab_1}{a_1}-b\right)I_2\,.$$

Во I_1 воведуваме смена $t=ax^2+bx+c$ и се сведува на интеграл од обликот $\displaystyle\int\frac{dt}{t}$, а I_2 е од обликот $\displaystyle\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$.$\bullet$

1.34. $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c}dx$, каде $P_n(x)$ е полином со реални коефициенти и степен $n\geq 2$ и $a\neq 0$.

Решение. Полиномот $P_n(x)$ го делиме со ax^2+bx+c и добиваме количник $Q_{n-2}(x)$ и остаток $R(x)$. Притоа количникот е полином со степен $n-2$, а остатокот е полином со степен 0 или 1. Значи $P_n(x)=Q_{n-2}(x)(ax^2+bx+c)+R(x)$. Тогаш $\int\frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c}dx=\int Q_{n-2}(x)dx+\int\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx$, па $\int Q_{n-2}(x)dx$ е збир од таблични интеграли, а $\int\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx$ е или од обликот $\int\frac{a_1x+b_1}{ax^2+bx+c}dx$, $a_1,a\neq 0$ или од обликот $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$.●

1.35. $\int\frac{5x^6+7x^5+2x^4+3x+9}{2x^2+4x+6}dx$.

Решение. По делењето на полиномите добиваме

$$5x^6+7x^5+2x^4+3x+9=\Big(\frac{5}{2}x^4-\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{25}{2}\Big)(2x^2+4x+6)-16x+84$$

па $\int\frac{5x^6+7x^5+2x^4+3x+9}{2x^2+4x+6}dx=\int\Big(\frac{5}{2}x^4-\frac{3}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{23}{2}x-\frac{25}{2}\Big)dx+\int\frac{-16x+84}{2x^2+4x+6}dx=$

$$=\frac{1}{2}x^5-\frac{3}{8}x^4-\frac{7}{6}x^3+\frac{23}{4}x^2-\frac{25}{2}x+I_1.$$

Натаму, имаме

$$I_1=\int\frac{-16x+84}{2x^2+4x+6}dx=-4\int\frac{4x+4-4-21}{2x^2+4x+6}dx=-4\int\frac{4x+4}{2x^2+4x+6}dx+100\int\frac{dx}{2x^2+4x+6}=$$
$$=-4\ln|2x^2+4x+6|+100\int\frac{dx}{(\sqrt{2}x)^2+2\frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}x+\Big(\frac{2}{\sqrt{2}}\Big)^2-2+6}=$$
$$=-4\ln|2x^2+4x+6|+100\int\frac{dx}{(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2+4}=-4\ln|2x^2+4x+6|+\frac{100}{4}\int\frac{dx}{\Big(\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{2}\Big)^2+1}=$$
$$=-4\ln|2x^2+4x+6|+\frac{100}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{2}+C$$

Според тоа

$$\int\frac{5x^6+7x^5+2x^4+3x+9}{2x^2+4x+6}dx=\frac{1}{2}x^5-\frac{3}{8}x^4-\frac{7}{6}x^3+\frac{23}{4}x^2-\frac{25}{2}x-4\ln|2x^2+4x+6|+$$
$$+\frac{50}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{2}}{2}+C.●$$

1.36. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{\Big(\frac{x}{2}\Big)'dx}{\sqrt{1-\Big(\frac{x}{2}\Big)^2}}=\arcsin\frac{x}{2}+C.$ ●

1.37. $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)' dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$ ●

1.38. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}} = \int \frac{\left(\frac{x}{5}\right)' dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+25}\right| + C.$ ●

1.39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} = \int \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)' dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + C.$ ●

1.40. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

а) ако $a > 0$;

б) ако $a < 0$.

Решение. Овој интеграл се сведува на интеграли од обликот $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm 1}}$, $\int \frac{dt}{\sqrt{1 \pm t^2}}$, во зависност од знакот на a и b^2-4ac.

а) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{a}x)^2 + 2\frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}x + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}}}$$

i) Ако $b^2-4ac > 0$, тогаш

$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}\right)^2 - 1}}$, па со воведување на

смената $t = \frac{\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}$ се сведува на интеграл од типот $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$.

ii) Ако $b^2-4ac<0$, тогаш

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}\right)^2+1}}$$, па со воведување на

смената $t=\dfrac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a}}}$ се сведува на интеграл од типот $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

б) Во овој случај подинтегралната функција е дефинирана само за $b^2-4ac>0$ и нејзината дефинициона област е $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$.

Притоа $b^2-4ac=b^2+4|a|c$. Според тоа имаме

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-|a|x^2+bx+c}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-(|a|x^2-bx-c)}}=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left((\sqrt{|a|}x)^2-2\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\sqrt{|a|}x+\frac{b^2}{4|a|}-\frac{b^2}{4|a|}-c\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(\left(\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2-\frac{b^2+4|a|c}{4|a|}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2+4|a|c}{4|a|}}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}}{\sqrt{\frac{b^2+4|a|c}{4|a|}}}\right)^2}}$$

Со воведување на смената $t=\dfrac{\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}}{\sqrt{\frac{b^2+4|a|c}{4|a|}}}$ се сведува на обликот $\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. ●

1.41. $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+2}}$.

Решение. $$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+2}}=\int\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)'dx}{\sqrt{\frac{3^2+4\cdot 2}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}=$$

$$=\int\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)'dx}{\sqrt{\frac{17}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}+C=\arcsin\frac{2x+3}{\sqrt{17.}}+C.$$ ●

1.42. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}} = \int \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)' dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3^2-4\cdot 2}{4}}} = \int \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)' dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} =$

$= \ln\left| x+\frac{3}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + C = \ln\left| x+\frac{3}{2} + 2\sqrt{x^2+3x+2} \right| + C.$ ●

1.43. $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, $a \neq 0, p \neq 0$.

Решение. Дадениот интеграл ќе го претставиме како збир на интегралите од облик $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ и $\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+bt+c}}$. Имаме

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = p\int \frac{x+\frac{q}{p}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = p\frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b-b+2a\frac{q}{p}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$$

$$= p\frac{1}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + p\frac{1}{2a}\int \frac{-b+2a\frac{q}{p}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx =$$
$$= p\frac{1}{2a} I_1 + p\frac{1}{2a}\left(-b+2a\frac{q}{p}\right) I_2$$

Во I_1 воведуваме смена $t = ax^2+bx+c$. Оттука $dt = (2ax+b)dx$, па

$I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C$.

Интегралот I_2 е од обликот $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, кој е пресметан претходно. ●

1.44. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{-4x^2+2x+5}} dx$.

Решение. $I = \int \frac{3x+5}{\sqrt{-4x^2+2x+5}} dx = 3\frac{1}{2(-4)}\int \frac{-8x+2-2+\frac{5\cdot(-8)}{3}}{\sqrt{-4x^2+2x+5}} dx =$

$$= -\frac{3}{8}\int \frac{-8x+2}{\sqrt{-4x^2+2x+5}} dx + \left(-\frac{3}{8}\right)\left(-2-\frac{40}{3}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+5}} = -\frac{3}{8} I_1 + \frac{23}{4} I_2.$$

Во I_1 воведуваме смена $t = -4x^2+2x+5$, па $dt = -8x+2$. Според тоа

$$I_1 = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{-4x^2+2x+5} + C.$$

За I_2 имаме

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}2x-(2x)^2+5-\frac{1}{4}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}-2x\right)^2+\frac{19}{4}}} =$$

$$=\sqrt{\frac{4}{19}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}-2x}{\sqrt{\frac{19}{4}}}\right)^2+1}}=\sqrt{\frac{4}{19}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{19}}-\frac{4}{\sqrt{19}}x\right)^2+1}}$$

Воведуваме смена $y=\frac{1}{\sqrt{19}}-\frac{4}{\sqrt{19}}x$. Тогаш $dy=-\frac{4}{\sqrt{19}}dx$, па

$$I_2=-\sqrt{\frac{4}{19}}\frac{\sqrt{19}}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}=-\frac{1}{2}\ln\left|y+\sqrt{y^2+1}\right|+C_1=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{19}}-\frac{4}{\sqrt{19}}x+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{19}}-\frac{4}{\sqrt{19}}x\right)^2+1}\right)+C_1$$

Конечно, $I=2\sqrt{-4x^2+2x+5}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{19}}-\frac{4}{\sqrt{19}}x+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{19}}-\frac{4}{\sqrt{19}}x\right)^2+1}\right)+C_2$.●

1.45. $\int\sin ax\cos bx dx$, $a,b\neq 0$, $a+b,a-b\neq 0$.

Решение. $\int\sin ax\cos bx dx=\frac{1}{2}\int(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\sin(a+b)xdx-\frac{1}{2}\int\sin(a-b)xdx=-\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x+\frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x+C\ .●$$

1.46. $\int\cos ax\cos bx dx$, $a,b\neq 0$, $a+b,a-b\neq 0$.

Решение. $\int\cos ax\cos bx dx=\frac{1}{2}\int\cos(a+b)xdx+\frac{1}{2}\int\cos(a-b)xdx=$

$$=\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x+\frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x+C\ .●$$

1.47. $\int\cos 3x\cos 5x dx.$

Решение. $\int\cos 3x\cos 5nx dx=\frac{1}{2}\int[\cos 2x+\cos 8x]dx=$

$$=\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 8x}{16}+C\ .\ ●$$

1.48. $\int\sin 2x\cos 3x dx.$

Решение. $\int\sin 2x\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin\left(-x\right)+\sin 5x\right)dx=\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos 5x}{10}+C.$ ●

1.49. $\int\sin 4x\sin 7x dx.$

Решение. $\int\sin 4x\sin 7x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 3x-\cos 11x)dx=\frac{\sin 3x}{6}-\frac{\sin 11x}{22}+C.$ ●

1.50. $\int\sin^2 3x dx.$

Решение. $\int\sin^2 3x dx=\frac{1}{2}\int[1-\cos 6x]dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}+C.$ ●

1.51. $\int \cos^2 4x dx.$

Решение. $\int \cos^2 4x dx = \frac{1}{2}\int [1+\cos 8x]dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{16} + C.$ ●

1.52. $\int \frac{\ln^a x}{x} dx$, $a \neq 0$.

Решение. Воведуваме смена $t = \ln x$. Тогаш $dt = \frac{dx}{x}$, па

$$\int \frac{\ln^a x}{x} dx = \int t^a dt = \begin{cases} \frac{t^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1 \\ \ln|t| + C, a = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C, a \neq -1 \\ \ln|\ln x| + C, a = -1 \end{cases} . \bullet$$

1.53. $\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ **.**

Решение. $\int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2-2+\frac{1}{x^2}+2} dx = \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} dx$.

Воведуваме смена $t = x - \frac{1}{x}$. Оттука $dt = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$, па последниот интеграл се трансформира во $\int \frac{dt}{t^2+2}$. Натаму имаме

$$\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right) + C . \bullet$$

1.54. $\int \frac{x^2-1}{1+x^4} dx$ **.**

Решение. $\int \frac{x^2-1}{1+x^4} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+2+\frac{1}{x^2}-2} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} dx$.

Воведуваме смена $t = x + \frac{1}{x}$, па $dt = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$. Натаму,

$$\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} dx = \int \frac{dt}{t^2-2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{\frac{t}{\sqrt{2}}-1} - \int \frac{dt}{\frac{t}{\sqrt{2}}+1}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} + C. \bullet$$

1.55. $\int \frac{1+x^2}{x^4+3x^3+3x^2-3x+1} dx$ **.**

Решение. $\int \frac{1+x^2}{x^4+3x^3+3x^2-3x+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+3x+3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}dx =$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+3+2}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+5}dx .$$

Од смената $t = x - \frac{1}{x}$ добиваме $dt = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$, па

$$\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+5}dx = \int \frac{dt}{t^2+3t+5} = \int \frac{dt}{t^2+2t\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+5} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}} = \frac{4}{11}\int \frac{dt}{\left(\frac{t+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}}}\right)^2+1} = \frac{4}{11}\sqrt{\frac{11}{4}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}}}+C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{x}\right)+3}{\sqrt{11}}+C. \bullet$$

1.56. $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx$, $a,b>0$.

Решение. $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx = b\int \sqrt{1-\left(\frac{ax}{b}\right)^2}dx$. Прво ќе воведеме смена $t = \frac{ax}{b}$, од каде што добиваме $dx = \frac{b}{a}dt$, па $b\int \sqrt{1-\left(\frac{ax}{b}\right)^2}dx = \frac{b^2}{a}\int \sqrt{1-t^2}dt$. Сега воведуваме смена $t = \sin u$. Оттука $dt = \cos u\, du$, па

$$\int \sqrt{1-t^2}dt = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\, du = \int |\cos u|\cos u\, du .$$

Бидејќи $-1 \le u = \arcsin t \le 1$ следува дека $\cos u > 0$, па $|\cos u| = \cos u$. Според тоа

$$\int |\cos u|\cos u\, du = \int \cos^2 u\, du = \frac{\sin 2u}{4}+\frac{u}{2}+C = \frac{2\sin(\arcsin t)\cos(\arcsin t)}{4}+\frac{\arcsin t}{2}+C =$$

$$= \frac{t\sqrt{1-\sin^2(\arcsin t)}}{2}+\frac{\arcsin t}{2}+C = \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}+\frac{\arcsin t}{2}+C =$$

$$= \frac{\frac{ax}{b}\sqrt{1-\left(\frac{ax}{b}\right)^2}}{2}+\frac{\arcsin\frac{ax}{b}}{2}+C . \bullet$$

1.3. Интегрирање со методот на парцијална интеграција

Нека $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни функции. Тогаш важи

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx\,..$$

Со примена на методот на парцијална интеграција пресметај ги следниве интеграли:

1.57. $\int x\ln x dx.$

Решение. Ставаме $u=\ln x$ и $dv=xdx.$ Тогаш $du=\frac{dx}{x}$ и $v=\frac{x^2}{2},$ од каде добиваме дека

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C. \bullet$$

1.58. $\int xe^x dx.$

Решение. Ставаме $u=x$ и $dv=e^x dx.$ Тогаш $du=dx$ и $v=e^x,$ од каде добиваме дека $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C.$ ●

1.59. $\int x\operatorname{arctg} x dx.$

Решение. Ставаме $u=\operatorname{arctg} x$ и $dv=xdx.$ Тогаш $du=\frac{dx}{1+x^2}$ и $v=\frac{x^2}{2},$ од каде што добиваме дека

$$\int x\operatorname{arctg} x dx=\frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2}-\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{x^2\operatorname{arctg} x}{2}-\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)+C=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C. \bullet$$

1.60. $\int x\sin x dx.$

Решение. Ставаме $u=x$ и $dv=\sin x dx.$ Тогаш $du=dx$ и $v=-\cos x,$ од каде добиваме дека

$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C. \bullet$$

1.61. $\int x^2\cos x dx.$

Решение. Ставаме $u=x^2$ и $dv=\cos x dx.$ Тогаш $du=2xdx$ и $v=\sin x,$ од каде добиваме дека $\int x^2\cos x dx=x^2\sin x-2\int x\sin x dx.$ На интегралот од десната страна на равенството применуваме парцијална интеграција и заради задачата 1.59. добиваме $\int x\sin x dx=-x\cos x+\sin x+C.$ Според тоа ,

$$\int x^2\cos x dx=x^2\sin x-2(-x\cos x+\sin x)+C=(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C. \bullet$$

1.62. $\int x\sin 3x dx.$

Решение. Ставаме $u=x$ и $dv=\sin 3x dx.$ Тогаш $du=dx$ и $v=-\frac{\cos 3x}{3},$ од каде добиваме дека

$$\int x\sin 3x dx=-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{1}{3}\int\cos 3x dx=-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{1}{9}\sin 3x+C. \bullet$$

1.63. $\int e^x\sin x dx.$

Решение. Ставаме $u=e^x$ и $dv=\sin x dx.$ Тогаш $du=e^x dx$ и $v=-\cos x,$ од каде добиваме дека $\int e^x\sin x dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx..$ На интегралот од десната страна на равенството применуваме парцијална интеграција $u_1=e^x$ и $dv_1=\cos x dx$ и добиваме

$$\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x+C.$$

Според тоа, $\int e^x\sin x dx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx,$ од каде што следува дека

$$\int e^x\sin x dx=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C. \bullet$$

1.64. $\int(x^2+2x+3)e^{5x}dx.$

Решение. Дадениот интеграл ќе го запишеме во облик :

$$\int(x^2+2x+3)e^{5x}dx=\int x^2e^{5x}dx+2\int xe^{5x}dx+3\int e^{5x}dx.$$

Ставаме $I_1=\int x^2e^{5x}dx,$ $I_2=\int xe^{5x}dx$ $I_3=\int e^{5x}dx.$ Ако на секој од интегралите I_1 и I_2 одделно примениме парцијална интеграција добиваме

$$I_1=\int x^2e^{5x}dx=\frac{25x^2-10x+2}{125}e^{5x}+C \text{ и } I_2=\int xe^{5x}dx=\frac{5x-1}{25}e^{5x}+C.$$

Бидејќи, $I_3=\int e^{5x}dx=\frac{e^{5x}}{5}+C$, за дадениот интеграл конечно добиваме

$$\int (x^2+2x+3)e^{5x}dx=I_1+2I_2+3I_3=\left(\frac{x^2}{25}+\frac{3}{25}x+\frac{22}{125}\right)e^{5x}+C. \bullet$$

1.65. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Решение. Воведуваме парцијална интеграција $u=x, dv=\frac{1}{\sin^2 x}dx$. Оттука $du=dx, v=-\operatorname{ctg}x$, па

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x}=-x\operatorname{ctg}x+\int \operatorname{ctg}x dx=-x\operatorname{ctg}x+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C. \bullet$$

1.66. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Нека $I=\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогаш $I=\int x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Ставаме $u=x$ и $dv=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Оттука $du=dx$ и $v=-\sqrt{1-x^2}$, од каде што добиваме дека

$$I=-x\sqrt{1-x^2}+\int \sqrt{1-x^2}dx=-x\sqrt{1-x^2}+\int \frac{(1-x^2)dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-x\sqrt{1-x^2}+\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=-x\sqrt{1-x^2}+\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-I.$$

Според тоа $I=\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\left(-x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C.$ $\bullet$

1.67. $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx$, $a,b>0$.

Решение. Имаме $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx=b\int \sqrt{1-\left(\frac{ax}{b}\right)^2}dx$, па ставаме смена $t=\frac{ax}{b}$.

Оттука $dx=\frac{b}{a}dt$. Според тоа $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx=\frac{b^2}{a}\int \sqrt{1-t^2}dt$. Да означиме $I=\int \sqrt{1-t^2}dt$. Тогаш

$$I=\int \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t-\frac{1}{2}\left(-t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}+\frac{\arcsin t}{2}+C.$$

Конечно $\int\sqrt{b^2-a^2x^2}dx=\frac{b^2}{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{ax}{b}\sqrt{1-\left(\frac{ax}{b}\right)^2}+\frac{\arcsin\frac{ax}{b}}{2}\right)+C$.●

1.68. $\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Решение. Воведуваме парцијална интеграција на следниов начин

$u=x, dv=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Тогаш $du=dx, v=\sqrt{1+x^2}$, па

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$
$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx-\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Оттука $2\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$, т.е.

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+C\ .●$$

1.69. $\int\sqrt{a^2x^2\pm b^2}dx$, $a,b>0$.

Решение. На сличен начин како претходно ставаме смена $t=\frac{ax}{b}$ и $dx=\frac{b}{a}dt$,

па $\int\sqrt{a^2x^2\pm b^2}dx=\frac{b^2}{a}\int\sqrt{t^2\pm1}dt$.

Натаму

$$\int\sqrt{t^2\pm1}dt=\int\frac{t^2\pm1}{\sqrt{t^2\pm1}}dt=\int\frac{t^2}{\sqrt{t^2\pm1}}dt\pm\int\frac{1}{\sqrt{t^2\pm1}}dt=$$
$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm1}\right|+\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2\pm1}-\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm1}\right|\right)+C=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2\pm1}+\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm1}\right|\right)+C$$

Конечно, $\int\sqrt{b^2+a^2x^2}dx=\frac{b^2}{a}\frac{1}{2}\left(\frac{ax}{b}\sqrt{1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2}+\ln\left|\frac{ax}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{ax}{b}\right)^2}\right|\right)+C$.●

1.70. $\int\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение. $\int\sqrt{4-x^2}dx=\int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=$

$=4\arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}-\int\sqrt{4-x^2}dx,$ т.е. $\int\sqrt{4-x^2}dx=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+C.$ ●

1.71. $\int\sqrt{3-x^2}dx.$

Решение. $\int\sqrt{3-x^2}dx=\int\frac{3-x^2}{\sqrt{3-x^2}}dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{3-x^2}}=$

$=3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+x\sqrt{3-x^2}-\int\sqrt{3-x^2}dx$, т.е. $\int\sqrt{3-x^2}dx=\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x\sqrt{3-x^2}}{2}+C$. ●

1.72. $\int\sqrt{x^2+16}dx.$

Решение. $\int\sqrt{x^2+16}dx=\int\frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+16}}+16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}=.$

$=x\sqrt{x^2+16}-\int\sqrt{x^2+16}dx+16\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$, откаде следува дека

$\int\sqrt{x^2+16}dx=\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}+8\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|+C$,

притоа за решавање на интегралот $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+16}}$ се применува парцијална интеграција $u=x$ и $dv=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+16}}$. ●

1.73. $\int\sqrt{x^2-3}dx.$

Решение. $\int\sqrt{x^2-3}dx=\int\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-3}}dx=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-3}}-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}=$

$=x\sqrt{x^2-3}-\int\sqrt{x^2-3}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$, па следува дека

$$\int\sqrt{x^2-3}dx=\frac{x\sqrt{x^2-3}}{2}-\frac{3\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|}{2}+C. \bullet$$

1.74. $\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx$, $a\neq 0$.

Решение. 1) Нека $a>0$. Тогаш имаме

$$ax^2+bx+c=(\sqrt{a}x)^2+2\frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}x+\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}, \text{ па}$$

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=\int\sqrt{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}dx=\sqrt{\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|}\int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|}}\right)^2\pm 1}\ dx .$$

Со смената $t=\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right|}}$ последниот интеграл се сведува на обликот $\int\sqrt{t^2\pm 1}dt$.

2) Нека $a<0$. Тогаш

$$ax^2+bx+c=-|a|x^2+bx+c=-\left((\sqrt{|a|}x)^2-2\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\sqrt{|a|}x+\left(\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2\right)+\frac{b^2}{4|a|}+c=$$
$$=-\left(\sqrt{|a|}x-\frac{b\sqrt{a}}{2}\right)^2+\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}=\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}\cdot\left(1-\left(\frac{\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}}}\right)^2\right)$$

па $\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=\sqrt{\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}}\cdot\int\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}}}\right)^2}\,dx$. Со смената $t=\frac{\sqrt{|a|}x-\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{4|a|c+b^2}{4|a|}}}$

дадениот интеграл се сведува на обликот $\int\sqrt{1-t^2}dt$.●

1.75. $\int\sqrt{-x^2-5x+3}dx.$

Решение. $\int\sqrt{-x^2-5x+3}dx=$

$$=\int\sqrt{\frac{(-5)^2+4\cdot 3}{4}-\left(x-\frac{(-5)}{2}\right)^2}\left(x-\frac{(-5)}{2}\right)'dx=\int\sqrt{\frac{37}{4}-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{37}{8}\arcsin\frac{2x+5}{\sqrt{37}}+\frac{1}{4}(2x+5)\sqrt{3-5x-x^2}+C.●$$

1.76. $\int\sqrt{x^2+4x+3}dx..$

Решение. $\int\sqrt{x^2+4x+3}dx=\int\sqrt{\left(x+\frac{4}{2}\right)^2-\frac{4^2-4\cdot 3}{4}}\left(x+\frac{4}{2}\right)'dx=$

$$=\int\sqrt{(x+2)^2-1}\,dx=\frac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.●$$

1.77. $I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+b)^n}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a,b\neq 0$.

Решение. Со парцијална интеграција ќе го намалиме степенот на именителот за еден. Имаме

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+b)^n}=\frac{1}{b}\int\frac{ax^2+b-ax^2}{(ax^2+b)^n}dx=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{(ax^2+b)^{n-1}}-\frac{a}{b}\int\frac{x^2}{(ax^2+b)^n}=\frac{1}{b}I_{n-1}-\frac{a}{b}J.$$

Натаму во $J=\int\frac{x^2}{(ax^2+b)^n}$ воведуваме парцијална интеграција $u=x$,

$dv=\frac{x}{(ax^2+b)^n}dx$. Оттука $du=dx, v=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(ax^2+b)^{n-1}}$, па

$$J = x\cdot\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(ax^2+b)^{n-1}}-\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{1-n}\int\frac{1}{(ax^2+b)^{n-1}}dx=$$
$$=\frac{1}{2a(1-n)}\cdot\frac{x}{(ax^2+b)^{n-1}}-\frac{1}{2a(1-n)}I_{n-1}.$$

Конечно, $I_n=\frac{1}{b}I_{n-1}-\frac{a}{b}J=\frac{1}{b}I_{n-1}-\frac{a}{b}\left(\frac{1}{2a(1-n)}\cdot\frac{x}{(ax^2+b)^{n-1}}-\frac{1}{2a(1-n)}I_{n-1}\right)=$

$$=\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{2(1-n)}\right)I_{n-1}-\frac{1}{2b(1-n)}\cdot\frac{x}{(ax^2+b)^{n-1}}.$$

Оваа постапка се применува на I_{n-1}, понатаму на I_{n-2}, итн. се додека не се добие интеграл од обликот $\int\frac{dx}{ax^2+b}$.●

1.78. $I_n=\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$; $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a\neq 0$.

Решение. 1) $a>0$

$$I_n=\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx=\int\frac{1}{\left((\sqrt{a}x)^2+2\frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}x+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+c\right)^n}dx=$$

$$=\int\frac{1}{\left(\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\right)^n}dx=\int\frac{1}{\left(\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)^n}dx.$$

Ако $\frac{b^2-4ac}{4a}>0$, тогаш со смената $t=\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}}$ се сведува на обликот

$\int\frac{dt}{(t^2-1)^n}$.

Ако, пак, $\frac{b^2-4ac}{4a}<0$ со смената $t=\frac{\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{\left|\frac{b^2-4ac}{4a}\right|}}$ се сведува на обликот

$\int\frac{dt}{(t^2+1)^n}$. За $\frac{b^2-4ac}{4a}=0$ се добива обликот $\int\frac{dt}{(st+k)^{2n}}$.

2) $a<0$. На сличен начин интегралот се трансформира во обликот

$\int\frac{dt}{(at^2+b)^n}$.●

1.79. $I_n=\int\frac{a_1x+b_1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a_1,a\neq 0$.

Решение. $I_n=\int\frac{a_1x+b_1}{(ax^2+bx+c)^n}dx=a_1\frac{1}{2a}\int\frac{2ax+b+\frac{2ab_1}{a_1}-b}{(ax^2+bx+c)^n}dx=$

$$=\frac{a_1}{2a}\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}dx+\frac{a_1}{2a}\left(\frac{2ab_1}{a_1}-b\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{a_1}{2a}J_1+\frac{a_1}{2a}\left(\frac{2ab_1}{a_1}-b\right)J_2.$$

Во J_1 ставаме смена $t=ax^2+bx+c$. Оттука $dt=(2ax+b)dx$, па интегралот добива облик $\int\frac{dt}{t^n}$.

Интегралот J_2 е од облик кој претходно го пресметавме. ●

1.80. $\int\frac{3x+5}{(4x^2+7x-3)^3}dx$.

Решение. $\int\frac{3x+5}{(4x^2+7x-3)^3}dx=3\int\frac{8x+7+8\frac{5}{3}-7}{(4x^2+7x-3)^3}dx=$

$$=3\int\frac{8x+7}{(4x^2+7x-3)^3}dx+3\left(\frac{40}{3}-7\right)\int\frac{1}{(4x^2+7x-3)^3}dx=$$
$$=3J_1+19\int\frac{1}{\left((2x)^2+2\frac{7}{4}2x+\left(\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{16}-3\right)^3}dx=3J_1+19\int\frac{1}{\left(\left(2x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{97}{16}\right)^3}dx=$$
$$=3J_1+19\frac{1}{\left(\frac{97}{16}\right)^3}\int\frac{1}{\left(\left(\frac{2x+\frac{7}{4}}{\sqrt{\frac{97}{16}}}\right)^2-1\right)^3}dx=3J_1+19\left(\frac{16}{97}\right)^3\int\frac{1}{\left(\left(\frac{8x+7}{\sqrt{97}}\right)^2-1\right)^3}dx=$$
$$=3J_1+19\left(\frac{16}{97}\right)^3I.$$

Во J_1 ќе ставиме смена $t=4x^2+7x-3$. Оттука $dt=(8x+7)dx$, па

$$J_1=\int\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{2t^2}+C=-\frac{1}{2(4x^2+7x-3)^2}+C.$$

Во I смена $y=\frac{8x+7}{\sqrt{97}}$, па $dx=\frac{\sqrt{97}}{8}dx$ и $I=\frac{\sqrt{97}}{8}\int\frac{dy}{(y^2-1)^3}=\frac{\sqrt{97}}{8}I_3$.

За I_3 имаме $I_3=\int\frac{dy}{(y^2-1)^3}=-\int\frac{y^2-1-y^2}{(y^2-1)^3}dy=-\int\frac{y^2-1}{(y^2-1)^3}dy+\int\frac{y^2}{(y^2-1)^3}dy=$

$$=-\int\frac{1}{(y^2-1)^2}dy+\int\frac{y^2}{(y^2-1)^3}dy.$$

Во последниот интеграл воведуваме парцијална интеграција $u=y, dv=\dfrac{y}{(y^2-1)^3}dy$.

Оттука $du=dy, v=-\dfrac{1}{4(y^2-1)^2}$, па $\int\dfrac{y^2}{(y^2-1)^3}dy=-\dfrac{y}{4(y^2-1)^2}+\dfrac{1}{4}\int\dfrac{dy}{(y^2-1)^2}$. Според

тоа $I_3=-\int\dfrac{dy}{(y^2-1)^2}-\dfrac{y}{4(y^2-1)^2}+\dfrac{1}{4}\int\dfrac{dy}{(y^2-1)^2}=-\dfrac{y}{4(y^2-1)^2}-\dfrac{3}{4}\int\dfrac{dy}{(y^2-1)^2}=$

$$=-\frac{y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{y^2-1-y^2}{(y^2-1)^2}dy=-\frac{y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{y^2-1}{(y^2-1)^2}dy-\frac{3}{4}\int\frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy=$$
$$=-\frac{y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{1}{y^2-1}dy-\frac{3}{4}\int\frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy=-\frac{y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|-\frac{3}{4}\int\frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy.$$

Во интегралот $\int\dfrac{y^2}{(y^2-1)^2}dy$ воведуваме парцијална интеграција

$u=y, dv=\dfrac{y}{(y^2-1)^2}dy$. Оттука $du=dy, v=-\dfrac{1}{2(y^2-1)}$, па

$$\int\frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy=-\frac{y}{2(y^2-1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y^2-1}=-\frac{y}{2(y^2-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.$$

Сега,

$$\begin{aligned}I_3&=-\frac{y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|-\frac{3}{4}\int\frac{y^2}{(y^2-1)^2}dy=\\&=-\frac{y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|-\frac{3}{4}\left(-\frac{y}{2(y^2-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right)=\\&=-\frac{y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3y}{8(y^2-1)}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.\end{aligned}$$

Конечно,

$$\begin{aligned}&\int\frac{3x+5}{(4x^2+7x-3)^3}dx=3J_1+19\left(\frac{16}{97}\right)^3 I=\\&=-\frac{3}{2(4x^2+7x-3)^2}+19\left(\frac{16}{97}\right)^3\frac{\sqrt{97}}{8}\left(-\frac{y}{4(y^2-1)^2}+\frac{3y}{8(y^2-1)}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right)+C=\\&=-\frac{3}{2(4x^2+7x-3)^2}-\frac{19\cdot 8^3\sqrt{97}}{97^3}\left(\frac{\frac{8x+7}{\sqrt{97}}}{4\left(\left(\frac{8x+7}{\sqrt{97}}\right)^2-1\right)^2}-\frac{3\frac{8x+7}{\sqrt{97}}}{8\left(\left(\frac{8x+7}{\sqrt{97}}\right)^2-1\right)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{\frac{8x+7}{\sqrt{97}}-1}{\frac{8x+7}{\sqrt{97}}+1}\right|\right)+C.\bullet\end{aligned}$$

1.81. $I_n=\int\sin^n x dx$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Во $I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$ воведуваме парцијална интеграција $u = \sin^{n-1} x, dv = \sin x dx$. Оттука $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, v = -\cos x$, па

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n .$$

Според тоа, $I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Значи почетниот интеграл е сведен на интеграл со степен на $\sin x$ понизок за два. Продолжувајќи ја оваа постапка натаму, степенот се намалува уште за два, итн. Така, ако n е парен број постапката ќе заврши со $\int dx$, а ако n е непарен ќе заврши со $\int \sin x dx$. ●

1.82. $\int x^n \ln x dx$, $n \in \mathbb{R}$.

Решение. 1) Нека $n \neq -1$. Ставаме парцијална интеграција $u = \ln x, dv = x^n dx$. Оттука $du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, па

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C .$$

2) $n = -1$. Повторно со парцијалната интеграција $u = \ln x, dv = \frac{1}{x} dx$ добиваме $du = \frac{dx}{x}, v = \ln|x|$, па $\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln x \ln|x| - \int \frac{\ln|x|}{x} dx$. Но бидејќи $x > 0$ (само за тие x функцијата $\ln x$ е дефинирана) имаме $\ln|x| = \ln x$, па $2\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x + 2C$, т.е. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$.●

1.4. Интегрирање на дробно-рационални функции

За интегралите од вид $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, каде $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ се полиноми со реални коефициени и со степени n и m, соодветно имаме:

1) $n < m$. Нека $x_1, x_2, \dots, x_s$ се сите различни реални корени на $Q_m(x)$, т.е.

$$Q_m(x) = a_m(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_s)^{\alpha_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{\beta_t},$$

каде полиномите $x^2 + p_i x + q_i$ немаат реални корени за секој $i = 1, \dots, t$.
Притоа $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + \beta_1 + \dots + \beta_t = m$.

Тогаш постојат реални броеви $A_{i_1,\alpha_1}, \dots, A_{i_s,\alpha_s}$, за $i_k = 1, \dots, \alpha_k$, $k = 1, \dots, s$ и $M_{i_1,\beta_1}, N_{i_1,\beta_1}, \dots, M_{i_t,\beta_t}, N_{i_t,\beta_t}$, за $i_k = 1, \dots, \beta_k$, $k = 1, \dots, t$ така што

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{i,\alpha_1}}{(x - x_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{\alpha_s} \frac{A_{i,\alpha_s}}{(x - x_s)^i} + \sum_{i=1}^{\beta_1} \frac{M_{i,\beta_1} x + N_{i,\beta_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{\beta_t} \frac{M_{i,\beta_t} x + N_{i,\beta_t}}{(x^2 + p_t x + q_t)^i}.$$

Според тоа почетниот интеграл се сведува на интеграли од обликот $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ и $\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n}dx$, каде $n \in \mathbb{N}$ и полиномот $x^2 + px + q$ нема реални корени.

2) $n \geq m$. Тогаш $P_n(x) = L_{n-m}(x) Q_m(x) + R_k(x)$ и притоа $k < m$.

Оттука $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$, т.е. $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int L_{n-m}(x)dx + \int \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}dx$.

Интегралот $\int L_{n-m}(x)dx$ е збир од таблични интеграли, а $\int \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}dx$ е како во 1).

1.82. $\int \frac{dx}{x^2 + 5x}$.

Решение. Корените на полиномот во именителот се $x_1 = 0$ и $x_2 = -5$, па постојат реални броеви A и B така што $\frac{1}{x^2 + 5x} = \frac{1}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5}$. Множејќи го последново равенство со $x(x+5)$ добиваме $1 = A(x+5) + Bx$. Значи полиномите 1 и $A(x+5) + Bx$ се еднакви. Оттука коефициентите пред соодветните степени на x им се еднакви. Значи $0 = A + B, 1 = 5A$, па $A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{5}$. Според тоа

$\frac{1}{x(x+5)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+5}$, па $\int\frac{dx}{x^2+5x}=\frac{1}{5}\left(\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+5}\right)=\frac{1}{5}(\ln|x|-\ln|x+5|)+C$.●

1.83. $\int\frac{x^3}{x^2+x+1}dx$.

Решение. Степенот на полиномот во броителот не е помал од степенот на полиномот во именителот и полиномот во именителот нема реални корени. Ги делиме двата полиноми и добиваме

$$x^3=(x^2+x+1)(x-1)+1\,.$$

Значи $\frac{x^3}{x^2+x+1}=x-1+\frac{1}{x^2+x+1}$, па

$$\int\frac{x^3}{x^2+x+1}dx=\int(x-1)dx+\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=x^2-x+\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=$$

$$=x^2-x+\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=x^2-x+\frac{4}{3}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx\,.$$

Во последниов интеграл ставаме смена $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ и добиваме

$$\int\frac{x^3}{x^2+x+1}dx=x^2-x+\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\,.●$$

1.84. $\int\frac{x^6}{x^2-1}dx$.

Решение. Полиномот во броителот има повисок степен од полиномот во именителот, па $x^6=(x^4+x^2+1)(x^2-1)+1$. Значи

$$\int\frac{x^6}{x^2-1}dx=\int(x^4+x^2+1)dx+\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x+\int\frac{dx}{x^2-1}\,.$$

Натаму, $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ и оттука $1=A(x+1)+B(x-1)$.

Изедначувајќи ги коефициентите пред соодветните степени на x добиваме $0=A+B, 1=A-B$, па $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$. Значи

$$\int\frac{x^6}{x^2-1}dx=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\,.●$$

1.85. $\int\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx$.

Решение. Имаме $x^3+1=(x^2-3x+2)(x+3)+7x-5$, па

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx = \int (x+3)dx + \int \frac{7x-5}{x^2-3x+2}dx = \frac{x^2}{2}+3x+\int \frac{7x-5}{(x-1)(x-2)}dx \, .$$

Постојат реални броеви A и B така што $\frac{7x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$. Од последново равенство имаме $7x-5 = A(x-2)+B(x-1)$. Со изедначување на коефициентите пред соодветните степени на x имаме $7 = A+B, -5 = -2A-B$.

Решение на последниов систем е $A=-12, B=19$. Значи

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}dx = \frac{x^2}{2}+3x+\int \frac{7x-5}{(x-1)(x-2)}dx = \frac{x^2}{2}+3x-12\int \frac{dx}{x-1}+19\int \frac{dx}{x-2} =$$
$$= \frac{x^2}{2}+3x-12\ln|x-1|+19\ln|x-2|+C. \bullet$$

1.86. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Решение. Имаме $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1}$, бидејќи x^2-x+1 нема реални корени.

Оттука добиваме $1 = A(x^2-x+1)+(Bx+D)(x+1)$, односно $0 = A+B$, $0 = -A+B+D$ и $1 = A+D$. Решение на последниов систем е $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, D=\frac{2}{3}$, па имаме

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}+\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}I \, .$$

За I имаме

$$I = \int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Конечно,

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}I = \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C =$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C. \bullet$$

1.87. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

Решение. Од $\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}$ добиваме

$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Ex+F)(x^2-1)$, па

$$0=A+B+E, 0=A-B+F, 0=A+B-E, 1=A-B-F .$$

Оттука $A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, E=0, F=-\frac{1}{2}$, па имаме

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C .\bullet$$

1.88. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

Решение.

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{x^4+2x^2+1-2x^2}=\frac{1}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}=$$
$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Според тоа $1=(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Ex+F)(x^2-\sqrt{2}x+1)$, односно

$$0=A+E, 0=\sqrt{2}A+B-\sqrt{2}E+F, 0=A+\sqrt{2}B+E-\sqrt{2}F, 1=B+F .$$

Оттука $A=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, B=\frac{1}{2}, E=\frac{1}{2\sqrt{2}}, F=\frac{1}{2}$, па имаме

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx .$$

Последните два интеграли се од обликот $\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$.

Конечно

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(1-\sqrt{2}x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(1+\sqrt{2}x)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+C .\bullet$$

1.89. $\int\frac{3x^3+2x^2+4x+1}{x^8+4x^6+4x^4}dx$.

Решение.

$$\frac{3x^3+2x^2+4x+1}{x^8+4x^6+4x^4}=\frac{3x^3+2x^2+4x+1}{x^4(x^2+2)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_4}{x^4}+\frac{A_5x+A_6}{x^2+2}+\frac{A_7x+A_8}{(x^2+2)^2} .$$

Постапувајќи слично како претходно наоѓаме

$A_1=-\frac{1}{4}, A_2=\frac{1}{4}, A_3=1, A_4=\frac{1}{4}, A_5=\frac{1}{4}, A_6=-\frac{1}{4}, A_7=-\frac{1}{2}, A_8=-\frac{3}{4}$, па

$$\int\frac{3x^3+2x^2+4x+1}{x^8+4x^6+4x^4}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^3}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^4}+\frac{1}{4}\int\frac{x-1}{x^2+2}dx-\frac{1}{4}\int\frac{2x+3}{(x^2+2)^2}dx=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{12x^3}-\frac{3x-4}{16(x^2+2)}+\frac{1}{8}\ln(x^2+2)-\frac{7\sqrt{2}}{32}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}x .\bullet$$

1.90. $\int \frac{xdx}{x^8-1}$.

Решение. I *начин*: Прво го разложуваме x^8-1 на следниов начин

$$x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

а потоа постапката продолжува со наоѓање на 8 коефициенти.

II *начин*: Ставаме смена $t=x^2$. Оттука $xdx=\frac{1}{2}dt$,па $\int \frac{xdx}{x^8-1}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4-1}$. Последниот интеграл е пресметан претходно. ●

1.91. $\int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)}dx$.

Решение. Ако именителот се разложи, тогаш треба да се определат 9 коефициенти. До решението побргу може да се дојде ако се постапи на следниов начин

$$\int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)}dx=\int \frac{-x^8-1+2x^8}{x(x^8+1)}dx=-\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{x^7dx}{x^8+1}=-\ln|x|+\frac{1}{4}\ln(x^8+1)+C\ . ●$$

1.92. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^6}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x^3(x-1)^6}=\int \frac{dx}{x^9\left(\frac{x-1}{x}\right)^6}=\int \frac{dx}{x^9\left(1-\frac{1}{x}\right)^6}$. Воведуваме смена $t=1-\frac{1}{x}$.

Од смената имаме $x=\frac{1}{1-t}$, па $dx=\frac{dt}{(1-t)^2}$. За почетниот интеграл добиваме

$\int \frac{dx}{x^3(x-1)^6}=\int \frac{dx}{x^9\left(1-\frac{1}{x}\right)^6}=\int \frac{\frac{1}{(1-t)^2}}{\left(\frac{1}{1-t}\right)^9 t^6}dt=\int \frac{(1-t)^7}{t^6}dt$. Понатаму $(1-t)^7$ се развива според биномната формула и интегралот се сведува на збир од таблични интеграли. ●

1.93. $\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2}$

Решение. $\int \frac{dx}{x(1-x^3)^2}=\int \frac{x^3+1-x^3}{x(1-x^3)^2}dx=\int \frac{x^2}{(1-x^3)^2}dx+\int \frac{dx}{x(1-x^3)}=$

$$=\int \frac{x^2}{(1-x^3)^2}dx+\int \frac{1-x^3+x^3}{x(1-x^3)}dx=\int \frac{x^2}{(1-x^3)^2}dx+\int \frac{dx}{x}+\int \frac{x^2}{1-x^3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x^3}+\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|1-x^3|+C\ . ●$$

1.94. $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx$.

Решение. $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+3+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+5}dx$. Ставаме смена $t = x - \frac{1}{x}$, па $dt = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$. Натаму имаме

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx = \int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x-\frac{1}{x}\right) + C \ .\bullet$$

1.95. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}dx$.

Решение. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}dx = \int \frac{x^4-2x^2+1+2x^2}{(x^2)^3-1}dx = \int \frac{(x^2-1)^2+2x^2}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}dx =$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx + 2\int \frac{x^2dx}{(x^3)^2-1} = I_1 + 2I_2 \ .$$

За I_1 постапуваме како во претходната задача, а во I_2 воведуваме смена $t = x^3$ и тој се трансформира во обликот $\int \frac{dt}{t^2-1}$.●

1.96. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$.

Решение. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}dx =$

$$= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}dx = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{5}}\right)^2-1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1-\sqrt{5}}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1+\sqrt{5}}\right| + C.$$

●

1.97. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$, $n \in \mathbb{N}$

Решение. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{x^n x^{n-1}}{x^n+1}dx$.

Воведуваме смена $t = x^n + 1$, па $x^{n-1}dx = \frac{1}{n}dt$. Сега,

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{x^n x^{n-1}}{x^n+1}dx = \frac{1}{n}\int \frac{t-1}{t}dt = \frac{1}{n}(t - \ln|t|) + C = \frac{1}{n}(x^n + 1 - \ln|x^n+1|) + C \ .\bullet$$

1.5. Интегрирање на ирационални функции

1.5.1. Интегралите од типот $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k}\right)dx$, каде $p_i=\frac{m_i}{n_i}\in\mathbb{Q}$, а R е дробно-рационална функција, со смената $t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$, $m=\text{НЗС}(n_1,n_2,\dots,n_k)$ се сведуваат на интеграли од дробно-рационални функции.

1.98. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Овде $p_1=\frac{1}{2},p_2=\frac{1}{3}$, па $m=6$. Значи смената е $t^6=x$. Оттука $6t^5dt=dx$, па

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^5dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}=6\int\frac{t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=\\&=6\int(t^2-t+1)dt-6\int\frac{dt}{t+1}=\frac{t^3}{2}-\frac{t^2}{3}+6t-6\ln|t+1|+C=\\&=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.\bullet\end{aligned}$$

1.99. $\int\frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

Решение. Ставаме смена $t=x^4+1$, па $x^3dx=\frac{1}{4}dt$ и $\int\frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+\sqrt[3]{t}}$.

Сега воведуваме смена $u^3=t$ и $3u^2du=dt$. Според тоа

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+\sqrt[3]{t}}=\frac{1}{4}\int\frac{3u^2du}{1+\sqrt[3]{u^3}}=\frac{3}{4}\int\frac{u^2}{1+u}du=\frac{3}{4}\int\frac{u^2-1+1}{u+1}du=\frac{3}{4}\left(\frac{u^2}{2}-u+\ln|u+1|\right)+C=\\&=\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt[3]{(x^4+1)^2}}{2}-\sqrt[3]{x^4+1}+\ln|\sqrt[3]{x^4+1}+1|\right)+C.\bullet\end{aligned}$$

1.100. $\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

Решение. Ставаме смена $t^3=2+x$. Оттука $3t^2dt=dx$, па

$$\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx=\int\frac{(t^3-2)t}{t^3-2+t}3t^2dt=3\int\frac{(t^3-2)t^3}{t^3-2+t}dt.$$

Натаму $t^6-2t^3=(t^3-t)(t^3+t-2)+t^2-2t$ и $t^3+t-2=(t-1)(t^2+t+2)$, па добиваме $3\int\frac{(t^3-2)t^3}{t^3-2+t}dt=3\int(t^3-t)dt+3\int\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}dt=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3I_1$. За I_1 постапуваме како во 1.4. и добиваме $\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1}+\frac{5t-2}{4(t^2+t+2)}$. Значи

$$I_1=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{5}{8}\int\frac{2t+1-1-\frac{2}{5}}{t^2+t+2}dt=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{5}{8}\int\frac{2t+1}{t^2+t+2}dt-\frac{7}{8}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{5}{8}\ln|t^2+t+2|-\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{7}\int\frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dt=$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{5}{8}\ln|t^2+t+2|-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Конечно

$$3\int\frac{(t^3-2)t^3}{t^3-2+t}dt=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3\left(-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{5}{8}\ln|t^2+t+2|-\frac{\sqrt{7}}{4}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)+C=$$

$$=\frac{3}{4}(2+x)^4-\frac{3}{2}(2+x)^2+3\left(-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{5}{8}\ln|(2+x)^2+x+4|-\frac{\sqrt{7}}{4}\operatorname{arctg}\frac{2(2+x)+1}{\sqrt{7}}\right)+C\ .\bullet$$

1.101. $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=\int\frac{dx}{\sqrt[n]{\frac{(x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}}(x-b)^{n-1}(x-a)^{n+1}}}=$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{2n}\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}}}=\int\frac{dx}{(x-a)^2\left(\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}\right)^{n-1}}.$$

Ставаме смена $t^n=\frac{x-b}{x-a}$. Оттука $nt^{n-1}dt=\frac{b-a}{(x-a)^2}dx$. Значи

$$\int\frac{dx}{(x-a)^2\left(\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}\right)^{n-1}}=\int\frac{\frac{(x-a)^2\,nt^{n-1}}{b-a}}{(x-a)^2\,t^{n-1}}dt=\frac{n}{b-a}\int dt=\frac{n}{b-a}t+C=\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C\ .\bullet$$

1.5.2. Интегралите од типот $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, каде $P_n(x)$ е полином со степен n, може да се запишат во обликот

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

каде $Q_{n-1}(x)$ е полином со степен $n-1$, а $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.102. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

Решение. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx = (Ax^2+Bx+D)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Барајќи извод на двете страни од последново равенство добиваме

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2z-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1+2x-x^2}+(Ax^2+Bx+D)\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}} .$$

Натаму, множејќи ги двете страни од равенството со $\sqrt{1+2x-x^2}$ имаме

$$x^3 = (2Ax+B)(1+2x-x^2)+(Ax^2+Bx+D)(1-x)+\lambda .$$

Оттука $1=-2A-A, 0=5A-2B, 0=2A+3B-D, 0=B+D+\lambda$. Решение на последниов систем е $A=-\frac{1}{3}, B=-\frac{5}{6}, D=-\frac{19}{6}, \lambda=4$, па имаме

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx &= \left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2}+4\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \\
&= \left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2}+4\int \frac{dx}{\sqrt{2-(x-1)^2}} = \\
&= \left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2}+\frac{4}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \\
&= \left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x-\frac{19}{6}\right)\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C. \bullet
\end{aligned}$$

1.5.3. Интегралите од типот $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}, k\in\mathbb{N}$ со смената $x-\alpha=\frac{1}{t}$ се сведуваат на обликот **1.5.2.**

1.103. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$

Решение. Ставаме смена $x+1=\frac{1}{t}$. Оттука $dx=-\frac{1}{t^2}dt$, $x=\frac{1}{t}-1$ и $x^2+2x=\frac{1-t^2}{t^2}$. Заменувајќи во интегралот добиваме $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}} = -\int \frac{t^4dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Натаму решавајќи како во **1.5.2.** добиваме

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=\left(\frac{1}{4(x+1)^3}+\frac{3}{8(x+1)}\right)\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}+C\ .\bullet$$

1.5.4. $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\ ,\ m\in\mathbb{N}\ ;\ M,a\neq 0\ .$

а) Ако $ax^2+bx+c=\alpha(x^2+px+q)$, тогаш

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha}}dx=$$

$$=\frac{1}{2M\sqrt{\alpha}}\int\frac{2x+p+\frac{2N}{M}-p}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}}dx=$$

$$=\frac{1}{2M\sqrt{\alpha}}\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}}dx+\frac{1}{2M\sqrt{\alpha}}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\int\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{m+\frac{1}{2}}}dx=$$

$$=\frac{1}{2M\sqrt{\alpha}}I_1+\frac{1}{2M\sqrt{\alpha}}\left(\frac{2N}{M}-p\right)I_2$$

Во I_1 ставаме смена $t=x^2+px+q$ па $I_1=\int\frac{dt}{t^{m+\frac{1}{2}}}$, а I_2 со смената

$y=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'$ се сведува на интеграл од дробно-рационална фунција.

б.1.) $ax^2+bx+c\neq\alpha(x^2+px+q)$ за секој $\alpha\in\mathbb{R}$ и $p\neq\frac{b}{a}$.

Во овој случај ставаме смена $t=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, каде што α и β се определуваат од условот коефициентите пред t во ax^2+bx+c и x^2+px+q да се еднакви на нула.

б.2.) $ax^2+bx+c\neq\alpha(x^2+px+q)$ за секој $\alpha\in\mathbb{R}$ и $p=\frac{b}{a}$. Сега ставаме смена $t=x+\frac{p}{2}$.

Двата случаи **б.1.)** и **б.2.)** со наведените смени се доведуваат во обликот

$A\int\frac{tdt}{(t^2+\varphi)^m\sqrt{\delta t^2+\mu}}+B\int\frac{dt}{(t^2+\varphi)^m\sqrt{\delta t^2+\mu}}$, каде што $A,B,\varphi,\delta,\mu\in\mathbb{R}$ и $m\in\mathbb{N}$.

1.104. $\int\frac{x+1}{(x^2+x+2)^2\sqrt{4x^2+4x+8}}dx$.

Решение. Заради $4x^2+4x+8=4(x^2+x+2)$ добиваме

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x+1}{(x^2+x+2)^2\sqrt{4x^2+4x+8}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{(x^2+x+2)^{\frac{5}{2}}}dx=\\&=\frac{1}{4}\int\frac{2x+1}{(x^2+x+2)^{\frac{5}{2}}}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x^2+x+2)^2\sqrt{x^2+x+2}}dx=\\&=\frac{1}{4}\frac{(x^2+2x+2)^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1}+\frac{1}{4}I_1=-\frac{1}{6(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{4}I_{1.}\end{aligned}$$

Во I_1 воведуваме смена $t=(\sqrt{x^2+x+2})'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$. Од смената имаме $2t\sqrt{x^2+x+2}=2x+1$. Диференцирајќи го последново равенство добиваме $2\sqrt{x^2+x+2}dt+2t(\sqrt{x^2+x+2})'\,dx=2dx$, односно $\sqrt{x^2+x+2}dt+t^2dx=dx$. Оттука $\sqrt{x^2+x+2}dt=(1-t^2)dx$, т.е.

$$\frac{dt}{1-t^2}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}\,. \tag{1}$$

Од равенството $2t\sqrt{x^2+x+2}=2x+1$ добиваме $4t^2(x^2+x+2)=4x^2+4x+1$, односно $4t^2(x^2+x+2)=4(x^2+x+2)-7$. Оттука $(4t^2-4)(x^2+x+2)=-7$, т.е.

$$x^2+x+2=\frac{-7}{4t^2-4}\,. \tag{2}$$

Заменувајќи ги (1) и (2) во I_1 добиваме

$$\begin{aligned}I_1&=\int\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{-7}{4(t^2-1)}\right)^2}dt=\frac{16}{49}\int(1-t^2)dt=\frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)=\\&=\frac{16}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right)\end{aligned}$$

Конечно $I=-\frac{1}{6(x^2+2x+2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{4}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right)+C$.●

1.105. $\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Решение. Овде коефициентите во x^2-x+1 и x^2+1 не се пропорционални. Уште и $p=-1,b=0$, па $p\neq\frac{b}{a}$. Значи ставаме смена $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Сега имаме

$$x^2-x+1=\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2-\frac{\alpha t+\beta}{t+1}+1=\frac{(\alpha^2-\alpha+1)t^2+(2\alpha\beta-\alpha-\beta+2)t+\beta^2-\beta+1}{(t+1)^2}\,,$$

$$x^2+1=\left(\frac{\alpha t+\beta}{t+1}\right)^2+1=\frac{(\alpha^2+1)t^2+(2\alpha\beta+2)t+\beta^2+1}{(t+1)^2}.$$

Броевите α и β ги бираме така што коефициентите пред линеарните членови во броителите на x^2-x+1 и x^2+1 се еднакви на нула. Притоа доволно е да избереме само една вредност за α и една за β (ако ги има повеќе).

Така го добиваме системот $\begin{cases}2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0\\ 2\alpha\beta+2=0\end{cases}$. Едно негово решение е $\alpha=1$, $\beta=-1$. Значи смената е $x=\frac{t-1}{t+1}$, па $t=\frac{1+x}{1-x}$.

Од смената имаме $dx=\frac{2}{(t+1)^2}dt$, $x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2}$ и $x^2+1=\frac{2t^2+2}{(t+1)^2}$, па

$$\begin{aligned}&\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{11\frac{t-1}{t+1}-13}{\left(\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2-\frac{t-1}{t+1}+1\right)\sqrt{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2+1}}\cdot\frac{2}{(t+1)^2}dt=\\&=-\frac{4}{\sqrt2}\int\frac{t+12}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}dt=-\frac{4}{\sqrt2}\int\frac{t}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}dt-\frac{48}{\sqrt2}\int\frac{1}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}dt=\\&=-\frac{4}{\sqrt2}I_1-\frac{48}{\sqrt2}I_2\end{aligned}$$

Во I_1 ставаме смена $u=\sqrt{t^2+1}$. Оттука $du=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$, $t^2+3=u^2+2$, па за I_1 добиваме

$$\begin{aligned}I_1&=\int\frac{du}{u^2+2}=\frac12\int\frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt2}\right)^2+1}=\frac12\sqrt2\arctan\frac{u}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{t^2+1}=\\&=\frac{\sqrt2}{2}\arctan\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}.\end{aligned}$$

Во I_2 ставаме смена $y=\left(\sqrt{t^2+1}\right)'=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$. Диференцирајќи го равенството $y\sqrt{t^2+1}=t$ добиваме $\sqrt{t^2+1}dy+y\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=dt$, т.е. $\sqrt{t^2+1}dy+y^2dt=dt$. Оттука $\frac{dy}{1-y^2}=\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

Квадрирајќи го равенството $y\sqrt{t^2+1}=t$ добиваме $y^2(t^2+1)=t^2$, па $t^2=\frac{y^2}{1-y^2}$.

Според тоа $t^2+3=\frac{3-2y^2}{1-t^2}$. Заменувајќи во I_2 добиваме

$$I_2=\int\frac{1}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}dt=\int\frac{1}{\frac{3-2y^2}{1-y^2}}\cdot\frac{1}{1-y^2}dt=\int\frac{dy}{3-2y^2}=-\frac{1}{3}\int\frac{dy}{\left(\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{3}}\right)^2-1}=$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{3}}-1}{\frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{3}}+1}\right|=-\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}y-\sqrt{3}}{\sqrt{2}y+\sqrt{3}}\right|=-\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}+\sqrt{3}}\right|=$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-\sqrt{3}\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}t+\sqrt{3}\sqrt{t^2+1}}\right|=-\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\frac{1+x}{1-x}-\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}}{\sqrt{2}\frac{1+x}{1-x}+\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}}\right|$$

Конечно, $\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx=-2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}+$

$$+\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\frac{1+x}{1-x}-\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}}{\sqrt{2}\frac{1+x}{1-x}+\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}}\right|+C.\bullet$$

1.106. $\int\frac{2x+3}{(x^2-2x+2)^2\sqrt{x^2-2x+3}}dx$.

Решение. Во овој случај $p=-2=\frac{b}{a}$, па ставаме смена $t=x+\frac{p}{2}=x-1$. Оттука $dt=dx$ и $x=t+1$. Заменувајќи во интегралот добиваме

$$\int\frac{2x+3}{(x^2-2x+2)^2\sqrt{x^2-2x+3}}dx=\int\frac{2t+5}{((t+1)^2-2(t+1)+2)^2\sqrt{(t+1)^2-2(t+1)+3}}=$$
$$=\int\frac{2t+5}{(t^2+1)^2\sqrt{t^2+2}}dt=2\int\frac{t}{(t^2+1)^2\sqrt{t^2+2}}dt+5\int\frac{1}{(t^2+1)^2\sqrt{t^2+2}}dt=2I_1+5I_2.$$

Во I_1 ставаме смена $u=\sqrt{t^2+2}$. Оттука $du=\frac{tdt}{\sqrt{t^2+2}}$ и $t^2+1=u^2-1$, па

$$I_1=\int\frac{du}{(u^2-1)^2}=-\frac{u}{2(u^2-1)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|=-\frac{\sqrt{t^2+2}}{2(t^2+1)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{t^2+2}+1}{\sqrt{t^2+2}-1}\right|=$$
$$=-\frac{\sqrt{(x-1)^2+2}}{2((x-1)^2+1)}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{(x-1)^2+2}+1}{\sqrt{(x-1)^2+2}-1}\right|.$$

Во I_2 ставаме смена $y=\left(\sqrt{t^2+2}\right)'=\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}$. Од $y\sqrt{t^2+2}=t$ добиваме

$\sqrt{t^2+2}dy+y\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt=dt$, т.е. $\sqrt{t^2+2}dy+y^2dt=dt$. Значи $\frac{dy}{1-y^2}=\frac{dt}{\sqrt{t^2+2}}$. Исто така од $y\sqrt{t^2+2}=t$ имаме $y^2(t^2+2)=t^2$, па $t^2=\frac{2y^2}{1-y^2}$. Оттука $t^2+1=\frac{1+y^2}{1-y^2}$, па

$$I_2=\int\frac{1}{\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-y^2}dy=\int\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}dy=\frac{y}{y^2+1}=\frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2+1}=\frac{(t^2+1)t}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=$$
$$=\frac{((x-1)^2+1)(x-1)}{(2(x-1)^2+1)\sqrt{(x-1)^2+1}}.$$

Значи $\int\frac{2x+3}{(x^2-2x+2)^2\sqrt{x^2-2x+3}}dx=-\frac{\sqrt{(x-1)^2+2}}{((x-1)^2+1)}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{(x-1)^2+2}+1}{\sqrt{(x-1)^2+2}-1}\right|+$

$$+\frac{5((x-1)^2+1)(x-1)}{(2x^2-4x+3)\sqrt{x^2-2x+2}}+C\ .●$$

1.5.5. Интегралите од обликот $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, каде R е дробно-рационална функција со една од смените

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$, ако $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm c$, ако $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$, ако ax^2+bx+c има реални корени x_1 и x_2 (исто така може да се стави смената $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_2)$).

Овие смени се познати како Ојлерови смени.

1.107. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Овде $a=1>0$, па ставаме смена $\sqrt{x^2+x+1}=-\sqrt{1}x+t=t-x$ (знакот пред x сеедно е како ќе се избере). Со квадрирање на равенството

$\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ добиваме $x^2+x+1=x^2-2tx+t^2$, т.е. $x=\frac{t^2-1}{1+2t}$.

Оттука $dx=\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt$. Заменувајќи во интегралот имаме

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\cdot\frac{1}{\frac{t^2-1}{1+2t}+t-\frac{t^2-1}{1+2t}}dt=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=$$
$$=2\left(2\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{1+2t}-3\int\frac{dt}{(1+2t)^2}\right)=4\ln|t|-3\ln|1+2t|+\frac{1}{2t+1}+C=$$

$$= 4\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| - 3\ln\left|1+2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)\right| + \frac{1}{2\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)+1} + C. \bullet$$

1.108. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Решение. Овде $c=1>0$ па ставаме смена $\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1$. Со квадрирање на последново равенство добиваме $1-2x-x^2=x^2t^2-2xt+1$ и оттука $x=\frac{2t-2}{1+t^2}$.

Сега, $dx=\frac{-2t^2+4t+2}{(1+t^2)^2}dt$, па заменувајќи во интегралот добиваме

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int\frac{\frac{-2t^2+4t+2}{\left(1+t^2\right)^2}}{t\frac{2t-2}{1+t^2}}dt = \int\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)\left(1+t^2\right)}dt =$$
$$= -\int\frac{dt}{t} + \int\frac{dt}{t-1} - 2\int\frac{dt}{1+t^2} = -\ln|t| + \ln|t-1| - 2\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}-1\right| - 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C. \bullet$$

1.109. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

Решение. Заради $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ ставаме смена $\sqrt{(x+1)(x+2)}=t(x+1)$. Од неа добиваме $(x+1)(x+2)=t^2(x+1)^2$, т.е. $x+2=t^2(x+1)$. Оттука $x=\frac{2-t^2}{t^2-1}$, па $dx=-\frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$.

Заменувајќи во интегралот имаме

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx = \int\frac{\frac{2-t^2}{t^2-1}-t\left(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1\right)}{\frac{2-t^2}{t^2-1}+t\left(\frac{2-t^2}{t^2-1}+1\right)}dx = -2\int\frac{t(t+2)}{(1-t)(1+t)^3(t-2)}dt =$$
$$= -2\left(-\frac{16}{27}\int\frac{dt}{t-2} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{17}{108}\int\frac{dt}{t+1} - \frac{5}{18}\int\frac{dt}{(t+1)^2} + \frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^3}\right) =$$
$$= -2\left(-\frac{16}{27}\ln|t-2| + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{17}{108}\ln|t+1| + \frac{5}{36}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}\right) + C =$$

$$=\frac{32}{27}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}-2\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}-1\right|+\frac{17}{54}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+1\right|-\frac{5}{18\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+1\right)}+\frac{1}{3\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+1\right)^2}+C.\bullet$$

1.5.6. Интегралите од обликот $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, каде $m,n,p\in\mathbb{Q}$, во случаите:

1) ако $p\in\mathbb{Z}$ со смената $x=t^N$, каде N е најмал заеднички содржател за имените на m и n;

2) ако $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ со смената $t^N=a+bx^n$, каде N е именител на p;

3) ако $\frac{m+n}{n}+p\in\mathbb{Z}$ со смената $t^N=ax^{-n}+b$ каде N е именител на p;

се сведува на интеграл од дробно-рационална функција.

1.110. $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$.

Решение. Имаме $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$, па $p=-2\in\mathbb{Z}$. Тогаш $N=\text{НЗС}(2,3)=6$, ставаме смена $x=t^6$. Оттука $dx=6t^5dt$ и заменувајќи во интегралот добиваме

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx=\int t^3(1+t^2)^{-2}6t^5dt=6\int\frac{t^8}{(1+t^2)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+3t+\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{7}{2}\operatorname{arctg}t+C=$$
$$=\frac{1}{5}(\sqrt[6]{x})^5-\frac{2}{3}(\sqrt[6]{x})^3+3\sqrt[6]{x}+\frac{\sqrt[6]{x}}{2\left((\sqrt[6]{x})^2+1\right)}-\frac{7}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.\bullet$$

1.111. $\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx$.

Решение. Од $\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx=\int x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}dx$, па $m=\frac{1}{3},p=\frac{1}{3},n=2,N=3$. Значи $\frac{m+1}{n}\notin\mathbb{Z}$ но $\frac{m+1}{n}+p=1\in\mathbb{Z}$. Ставаме смена $t^3=3x^{-2}-1$. Оттука $x^2=\frac{3}{t^3+1}$, па $2xdx=-\frac{9t^2}{\left(t^3+1\right)^2}dt$ и заменувајќи во интегралот добиваме

$$\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx = -9\int x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{3-\frac{3}{t^3+1}}\cdot\frac{t^2}{x\left(t^3+1\right)^2}dt = -9\int\sqrt[3]{\frac{3t^3}{t^3+1}}\frac{t^2}{x^{\frac{2}{3}}\left(1+t^3\right)^2}dt =$$
$$= -9\int\sqrt[3]{\frac{3t^3}{t^3+1}}\cdot\frac{t^2}{\left(1+t^3\right)^2}\sqrt[3]{x^{-2}}dt = -9\int\sqrt[3]{\frac{3}{t^3+1}}\cdot\frac{t^3}{\left(1+t^3\right)^2}\sqrt[3]{\frac{t^2+1}{3}}dt = -9\int\frac{t^3}{\left(1+t^3\right)^2}dt =$$
$$= -\frac{1}{t+1}-\ln\left(t+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(t^2-t+1\right)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2t-1\right)+\frac{t+1}{t^2-t+1}+C =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{3x^{-2}-1}+1}-\ln\left(\sqrt[3]{3x^{-2}-1}+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{\left(3x^{-2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{3x^{-2}-1}+1\right)-$$
$$-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[3]{3x^{-2}-1}-1\right)+\frac{\sqrt[3]{3x^{-2}-1}+1}{\sqrt[3]{\left(3x^{-2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{3x^{-2}-1}+1}+C.\bullet$$

1.112. $\int\sqrt{x^3+x^4}dx$.

Решение. Сега имаме $\int\sqrt{x^3+x^4}dx=\int x^2(1+x^{-1})^{\frac{1}{2}}dx$, па

$m=2, n=-1, p=\frac{1}{2}, N=2$. Според тоа $\frac{m+1}{n}=-3\in\mathbb{Z}$, па ставаме смена $1+\frac{1}{x}=t^2$.

Оттука $x=\frac{1}{t^2-1}$ и $dx=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$. Заменувајќи во интегралот добиваме

$$\int\sqrt{x^3+x^4}dx = \int x^2\left(1+x^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}dx = -2\int\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2}\cdot\frac{t}{\left(t^2-1\right)^2}t\,dt = -2\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^4}dt =$$
$$= \frac{1}{24\left(t-1\right)^3}-\frac{1}{16\left(t-1\right)}-\frac{1}{16}\ln\left(t-1\right)+\frac{1}{24\left(t+1\right)^3}-\frac{1}{16\left(t+1\right)}+\frac{1}{16}\ln\left(t+1\right)+C =$$
$$= \frac{1}{24\left(\sqrt{1+x^{-1}}-1\right)^3}-\frac{1}{16\left(\sqrt{1+x^{-1}}-1\right)}-\frac{1}{16}\ln\left(\sqrt{1+x^{-1}}-1\right)+\frac{1}{24\left(\sqrt{1+x^{-1}}+1\right)^3}-$$
$$-\frac{1}{16\left(\sqrt{1+x^{-1}}+1\right)}+\frac{1}{16}\ln\left(\sqrt{1+x^{-1}}+1\right)+C.\bullet$$

1.6. Интегрирање на тригонометриски функции

Интегралите од обликот $\int R(\sin x, \cos x)dx$, каде R е дробно-рационална функција, со смената $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ се сведуваат на интеграли од дробно-рационални функции. Притоа $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Ако за функцијата R важи:

1) $\int R(-\sin x, \cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)dx$, со смената $t = \cos x$;

2) $\int R(\sin x, -\cos x)dx = -\int R(\sin x, \cos x)dx$, со смената $t = \sin x$;

3) $\int R(-\sin x, -\cos x)dx = \int R(\sin x, \cos x)dx$, со смената $t = \operatorname{tg} x$;

повторно се сведува на интеграл од дробно-рационална функција.

1.113. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3}$

Решение. Ја воведуваме смената $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогаш имаме

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 3} = \int \frac{\frac{2}{t^2+1}}{2\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{t^2+1} + 3}dt = \int \frac{dt}{2t^2+2t+1} = \int \frac{dt}{2t^2+2t+1} =$$
$$= \operatorname{arctg}(2t+1) + C = \operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) + C. \bullet$$

1.114. $\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}dx$.

Решение. Ако веднаш се стави смената $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ интегралот ќе се сведе на интеграл од дробно-рационална функција. Но, за подинтегралната функција важи $\int R(-\sin x, -\cos x)dx = \int R(\sin x, \cos x)dx$, па можеме да ја ставиме смената $t = \operatorname{tg} x$.

Така имаме $\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right)\cos^2 x}dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x + 1)\cos^2 x}dx$, па $t = \operatorname{tg} x$ и $dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$. Натаму,

$$\int \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x + 1)\cos^2 x}dx = \int \frac{t}{t+1}dt = \int \frac{t+1-1}{t+1}dt =$$
$$= \int dt - \int \frac{1}{t+1}dt = t - \ln|t+1| + C = \operatorname{tg} x - \ln|\operatorname{tg} x + 1| + C. \bullet$$

1.115. $\int \frac{\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x+2}dx$.

Решение. За оваа функција важи $\int R(\sin x,-\cos x)dx=-\int R(\sin x,\cos x)dx$, па ја воведуваме смената $t=\sin x$. Имаме

$$\int \frac{\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x+2}dx=\int \frac{1}{\left(1-t^2\right)^2+t^4+2t^2+2}dx=\int \frac{1}{2t^4+3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}t\right)^4+1}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}t-1\right)\right)+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)\right)+C.\bullet$$

1.116. $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

Решение. И овде веднаш може да се воведе смената $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Меѓутоа во добиениот интеграл функциите ќе имаат висок степен. Затоа прво ќе го намалиме степенот на функциите во почетниот интеграл.

Имаме $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, па

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=2^3\int \frac{dx}{\left(1+\cos 2x\right)^3+\left(1-\cos 2x\right)^3}=4\int \frac{dx}{1+3\cos^2 2x}=$$

$$=4\int \frac{1}{\cos^2 2x\left(3+\frac{\sin^2 2x+\cos^2 2x}{\cos^2 2x}\right)}dx=4\int \frac{1}{\cos^2 2x\left(4+\operatorname{tg}^2 2x\right)}dx$$

Во последниов интеграл ставаме смена $t=\operatorname{tg}2x$. Оттука $dt=2\frac{1}{\cos^2 2x}dx$, па добиваме $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=2^3\int \frac{dx}{(1+\cos 2x)^3+(1-\cos 2x)^3}=8\int \frac{1}{\cos^2 2x(4+\operatorname{tg}^2 2x)}dx=$

$$=2\int \frac{dt}{4+t^2}=\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}=\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{2}+C.\bullet$$

1.117. $\int \frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}dx$.

Решение. Освен со смената $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ овде може да постапиме и на следниов начин:

Ако $c=0$ или $d=0$ интегралот се сведува на облиците $\int(\mathrm{tg}x+p)dx$ или $\int(\mathrm{ctg}x+p)dx$, $p\in\mathbb{R}$, па се пресметува со смена.

Затоа нека $c,d\neq 0$.

Важи $(c\sin x+d\cos x)'=c\cos x-d\sin x$, па броителот ќе го запишеме во обликот $a\sin x+b\cos x=A(c\cos x-d\sin x)+B(c\sin x+d\cos x)$. Трансформирајќи го последново равенство добиваме $a\sin x+b\cos x=(Bc-Ad)\sin x+(Ac+Bd)\cos x$. Последново равенство е точно за $\begin{cases}a=Bc-Ad\\ b=Ac+Bd\end{cases}$. Бидејќи $c^2+d^2\neq 0$ системот има единствено решение $A=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, B=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$. Сега имаме

$$\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}dx=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\int\frac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x}dx+\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\int dx=$$
$$=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\ln\left|c\sin x+d\cos x\right|+\frac{ac+bd}{c^2+d^2}x+C. \bullet$$

1.118. $\int\frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx$.

Решение. Од $(4\sin x+5\cos x)'=4\cos x-5\sin x$ имаме

$$\sin x-3\cos x=A(4\cos x-5\sin x)+B(4\sin x+5\cos x),$$

па го добиваме системот $\begin{cases}1=-5A+4B\\ -3=4A+5B\end{cases}$ и неговото решение е $A=-\frac{17}{41}, B=-\frac{11}{41}$.

Според тоа

$$\int\frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx=-\frac{17}{41}\int\frac{4\cos x-5\sin x}{4\sin x+5\cos x}dx-\frac{11}{41}\int dx=$$
$$=-\frac{17}{41}\ln\left|4\sin x+5\cos x\right|-\frac{11}{41}x+C. \bullet$$

1.119. $\int\frac{a\sin x+b\cos x+c_1}{c\sin x+d\cos x+d_1}dx$.

Решение. Ако $c=d=0$ интегралот е збир од таблични. Затоа нека $c^2+d^2\neq 0$. Ќе го поедноставиме интегралот пред да ја воведеме смената $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Важи $(c\sin x+d\cos x+d_1)'=c\cos x-d\sin x$, па броителот ќе го запишеме во обликот $a\sin x+b\cos x+c_1=A(c\cos x-d\sin x)+B(c\sin x+d\cos x+d_1)+E$. Реалните броеви

A,B и E ги одредуваме од системот $\begin{cases} a=-dA+Bc \\ b=Ac+Bd \\ c_1=Bd_1+E \end{cases}$. Решение на последниов

систем е $A_0=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}, B_0=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, E_0=\frac{c^2c_1+c_1d^2-acd_1-bdd_1}{c^2+d^2}$, па

$$\int \frac{a\sin x+b\cos x+c_1}{c\sin x+d\cos x+d_1}dx = A_0\int \frac{c\cos x-d\sin x}{c\sin x+d\cos x+d_1}dx+B_0\int dx+E_0\int \frac{dx}{c\sin x+d\cos x+d_1}=$$
$$=A_0\ln\left|c\sin x+d\cos x+d_1\right|+B_0x+E_0I_1$$

Во I_1 ставаме смена $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, па добиваме

$$I_1=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{c\frac{2t}{1+t^2}+d\frac{1-t^2}{1+t^2}+d_1}dt=2\int \frac{dt}{2ct+d-dt^2+d_1+d_1t^2}=2\int \frac{dt}{(d_1-d)t^2+2ct+d+d_1}.$$

Понатаму пресметувањето продолжува како во **1.2.** ●

1.120. $\int \frac{2\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+2}dx$.

Решение. Важи $(\sin x-\cos x+2)'=\cos x+\sin x$, па

$$2\sin x+\cos x-1=A(\cos x+\sin x)+B(\sin x-\cos x+2)+E.$$

Реалните броеви A,B,E ги одредуваме како едно решение на системот

$\begin{cases} 2=A+B \\ 1=A-B \\ -1=2B+E \end{cases}$, па имаме $A=\frac{3}{2}, B=\frac{1}{2}, E=-2$. Значи

$$\int \frac{2\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+2}dx=\frac{3}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x+2}dx+\frac{1}{2}\int dx-2\int \frac{1}{\sin x-\cos x+2}dx=$$
$$=\frac{3}{2}\ln\left|\sin x-\cos x+2\right|+\frac{1}{2}x-2I_1$$

Во I_1 смена $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Оттука

$$I_1=\int \frac{1}{\sin x-\cos x+2}dx=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}dx=2\int \frac{1}{3t^2+2t+1}dx=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1+3t}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}.$$

Конечно, $\int \frac{2\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+2}dx=\frac{3}{2}\ln|\sin x-\cos x+2|+\frac{1}{2}x-\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$. ●

II. Определен интеграл

Поделба π на сегментот $\left[a,b\right]$ е множество точки $x_0, x_1, ..., x_n \in \left[a,b\right]$ такви што $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. **Дијаметар на поделбата** π е $h\left(\pi\right) = \max\left\{x_{i+1} - x_i \middle| i \in \left\{0,1,...,n-1\right\}\right\}$.

Во понатамошниот текст ќе разгледуваме само поделби π такви што $h\left(\pi\right) \to 0$ кога $n \to \infty$.

Ќе означуваме $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и $\Delta_i = \left[x_i, x_{i+1}\right]$ за секој $i \in \left\{0,1,...,n-1\right\}$.

За функцијата f, дефинирана и ограничена на $\left[a,b\right]$ велиме дека е **Риман интеграбилна** на $\left[a,b\right]$ ако постои реален број L таков што за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што $\left|\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i - L\right| < \varepsilon$ за секоја поделба π (со $h\left(\pi\right) \to 0, n \to \infty$) на $\left[a,b\right]$ и за секој избор на точките $\xi_i \in \left[x_i, x_{i+1}\right]$, за секој $i \in \left\{0,1,...,n-1\right\}$.

Со други зборови $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ постои за секоја поделба π (со $h\left(\pi\right) \to 0, n \to \infty$) на $\left[a,b\right]$ и за секој избор на точките $\xi_i \in \left[x_i, x_{i+1}\right]$, за секој $i \in \left\{0,1,...,n-1\right\}$ и $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = L$.

Означуваме $\int_a^b f\left(x\right)dx = L$.

Сумата $\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = S_\pi$ се нарекува Риманова интегрална сума. Зборот Риман во продолжение ќе го изоставуваме.

Својствата за збир, разлика и множење со реален број, како и методите за смена на променлива и парцијална интеграција важат како и кај неопределн интеграл.

Важат и следниве својства за интеграбилни функции на $\left[a,b\right]$:

1. Ако $0 \le f\left(x\right) \le g\left(x\right)$, тогаш $\int_a^b f\left(x\right)dx \le \int_a^b g\left(x\right)dx$

2. $\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right| \le \int_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx$

3. $\int_c^d f\left(x\right)dx = -\int_d^c f\left(x\right)dx$, каде $a \le c \le d \le b$.

4. $\int_a^c f\left(x\right)dx + \int_c^b f\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx$, за секој $c \in \left[a,b\right]$

5. $\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(x\right)\Big|_a^b = F\left(b\right) - F\left(a\right)$, каде F една примитивна функција на f.

6. Секоја непрекината функција е интеграбилна

7. Секоја монотона функција е интеграбилна.

Нека функцијата f е дефинирана и ограничена на $\left[a,b\right]$ и нека

$M_i = \sup\left\{f(x)\middle|\ x \in \Delta_i\right\}$, $m_i = \inf\left\{f(x)\middle|\ x \in \Delta_i\right\}$.

Функцијата f е интеграбилна ако и само ако за секој $\varepsilon > 0$ постои поделба π на $\left[a,b\right]$ така што $S_\pi - s_\pi < \varepsilon$, каде $S_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$, $s_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$.

Пресметај ги интегралите во задачите 2.1 - 2.8., со помош на интегралната сума:

2.1. $I = \int_0^1 x dx$.

Решение. Подинтегралната функција $f(x)=x$ е непрекината функција на целото множество од реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[0,1]$. Нека $T=\{0=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=1\}$, каде $x_i=\frac{i}{n},\ i\in\{0,1,2,\dots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$ и нека $\xi_i=x_{i+1}\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Тогаш

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\frac{i+1}{n}-\frac{i}{n}=\frac{1}{n},$$

$$h(T)=\max\left\{\Delta x_i \middle|\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}=\max\left\{\frac{1}{n}\middle|\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}=\frac{1}{n}$$

а интегралната сума е

$$S_T=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[0,1]$, имаме дека $I=\int_0^1 xdx=\lim_{n\to\infty}S_T=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

2.2. $I=\int_1^2\frac{1}{x}dx$.

Решение. Подинтегралната функција $f(x)=\frac{1}{x}$ е непрекината функција во сите реални броеви освен во 0, па и на сегментот $[1,2]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[1,2]$. Нека $T=\{1=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=2\}$, каде $x_i=2^{\frac{i}{n}},\ i\in\{0,1,2,\dots,n\}$, е поделба на сегментот $[1,2]$ и $\xi_i=x_{i+1}\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$.

Тогаш $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=2^{\frac{i+1}{n}}-2^{\frac{i}{n}}=2^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)$,

$$h(T)=\max\left\{2^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)\middle|\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}=\left(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)2\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

интегралната сума е

$$S_T=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^{\frac{i+1}{n}}}2^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}}=n\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}}.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[1,2]$, имаме

дека $I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty} S_T=\lim_{n\to\infty} n\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}=(\ln 2)\cdot 1=\ln 2$.

2.3. $I=\int_0^1 x^2dx$.

Решение. Подинтегралната функција $f(x)=x^2$ е непрекината функција на целото множество од реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[0,1]$. Нека $T=\{0=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=1\}$, каде $x_i=\frac{i}{n},\ i\in\{0,1,2,\dots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$ и нека $\xi_i=x_{i+1}\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Тогаш

$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\frac{i+1}{n}-\frac{i}{n}=\frac{1}{n}$,

$h(T)=\max\left\{\frac{1}{n}\middle|\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}=\frac{1}{n}\to 0$, при $n\to\infty$,

а интегралната сума е

$$S_T=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[0,1]$, имаме дека $I=\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty} S_T=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2.4. $I=\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$.

Решение. Подинтегралната функција $f(x)=\frac{1}{x^2}$ е непрекината функција во сите реални броеви освен во 0, па и на сегментот $[1,2]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[1,2]$. Нека $T=\{1=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=2\}$ е произволна поделба на сегментот $[1,2]$, така што $h(T) \to 0$ при $n \to \infty$ и нека $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}} \in [x_i, x_{i+1}],\ i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Тогаш интегралната сума е

$$S_T = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i^{\,2}}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_{n-2}} - \frac{1}{x_{n-1}}\right) + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[1,2]$, имаме дека $I = \int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_T = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2.5. $I = \int\limits_{-1}^{4} (1+x)dx$.

Решение. Подинтегралната функција $f(x) = 1 + x$ е непрекината функција во сите реални броеви, па и на сегментот $[-1,4]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[-1,4]$. Нека $T = \{-1 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 4\}$ е произволна поделба на сегментот $[-1,4]$, така што $h(T) \to 0$ при $n \to \infty$ и нека $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \in [x_i, x_{i+1}],\ i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Тогаш интегралната сума е

$$S_T = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}(1+\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(1 + \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1}{}^2 - x_i{}^2)\right] = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}{}^2 - x_i{}^2) =$$

$$= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}[(x_1{}^2 - x_0{}^2) + (x_2{}^2 - x_1{}^2) + \ldots + (x_n{}^2 - x_{n-1}{}^2)] =$$

$$= x_n - x_0 + \frac{1}{2}(x_n{}^2 - x_0{}^2) = 4 - (-1) + \frac{1}{2}\left(4^2 - (-1)^2\right) = 12{,}5.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[-1,4]$, имаме дека $I = \int\limits_{-1}^{4}\left(1+x\right)dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_T = \lim\limits_{n\to\infty} 12{,}5 = 12{,}5$.

2.6. $I = \int\limits_a^b e^x dx$, каде $a,b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

Решение. Подинтегралната функција $f(x) = e^x$ е непрекината функција на целото множество од реални броеви, па и на произволен сегментот $[a,b]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[a,b]$. Нека $T=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$, каде $x_i=a+i\frac{b-a}{n},\ i\in\{0,1,2,\dots,n\}$, е поделба на сегментот $[a,b]$ и нека избереме $\xi_i=x_i\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Тогаш $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=a+(i+1)\frac{b-a}{n}-a-i\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}$, $h(T)=\frac{b-a}{n}\to 0$ при

$n\to\infty$, а интегралната сума е

$$S_T=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}e^{\xi_i}\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}e^{a+i\frac{b-a}{n}}\frac{b-a}{n}=e^a\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{i\frac{b-a}{n}}=e^a\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^i$$

$$=e^a\frac{b-a}{n}\frac{\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^n-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}=e^a\frac{b-a}{n}\frac{e^{b-a}-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}=\frac{e^a\left(e^{b-a}-1\right)}{\frac{e^{\frac{b-a}{n}}-1}{\frac{b-a}{n}}}.$$

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[a,b]$, имаме дека

$$I=\int_a^b e^x dx=\lim_{n\to\infty}S_T=\lim_{n\to\infty}\frac{e^a\left(e^{b-a}-1\right)}{\frac{e^{\frac{b-a}{n}}-1}{\frac{b-a}{n}}}=\frac{e^a\left(e^{b-a}-1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{b-a}{n}}-1}{\frac{b-a}{n}}}=\frac{e^a\left(e^{b-a}-1\right)}{\ln e}=e^b-e^a.$$

2.7. $I=\int_a^b x^k dx$, каде $k\in\mathbb{N}, a,b\in\mathbb{R}$ и нека $0<a<b$.

Решение. Подинтегралната функција $f(x)=x^k$, за $k\in N$, е непрекината функција во сите реални броеви, па и на сегментот $[a,b]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $[a,b]$. Нека $T=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$, каде $x_i=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}},\ i\in\{0,1,2,\dots,n\}$, е поделба на сегментот $[a,b]$ и нека избереме точки $\xi_i=x_{i+1}\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Тогаш

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}}-a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\right),$$

$$h(T)=\max\left\{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)\middle|\, i\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}=\left(1-\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)\cdot b\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

а интегралната сума е

$$S_T=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i{}^k\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left[a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}}\right]^k a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}a^k\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k(i+1)}{n}}a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i+1}{n}}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)=a^{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\right]^i=$$

$$=a^{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\right)\frac{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\right]^n-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}-1}=a^{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}-1}{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{k+1}-1}=$$

$$=a^{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}-1}{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]\cdot\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right]}=$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k+1}{n}}\cdot a^{k+1}\cdot\frac{\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}+1}=$$

$$=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}+1}.$$

Забелешка. Во горните пресметувања користевме дека за реалниот број x и природниот број kважи $x^{k+1}-1=(x-1)(x^k+x^{k-1}+\ldots+x+1)$ (за $x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$).

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $[a,b]$, имаме дека

$$I=\int_a^b x^k dx=\lim_{n\to\infty}S_T=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}+\ldots+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}+1}\right]=1\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{1+1+\ldots+1}=$$

$$=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Забелешка. При пресметувањето на лимесот, користевме дека за секој реален број x важи $\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}=1$ (во улога на x беа броевите $\left(\frac{b}{a}\right)^m, m\in\{1,2,\ldots,k\}$).

2.8. $I=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$.

Решение. Подинтегралната функција $f(x)=\sin x$ е непрекината функција на целото множество од реални броеви, па и на сегментот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна функција на сегментот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Нека $T=\left\{0=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=\frac{\pi}{2}\right\}$, каде $x_i=i\frac{\pi}{2n},\ i\in\{0,1,2,\dots,n\}$, е поделба на сегментот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и нека $\xi_i=x_i\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$.Тогаш

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=(i+1)\frac{\pi}{2n}-i\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2n},\quad h(T)=\max\left\{\frac{\pi}{2n}\middle|\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}=\frac{\pi}{2n}\to 0$$

при $n\to\infty$, а интегралната сума е

$$S_T=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(\sin\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sin i\frac{\pi}{2n}\right)\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{\pi}{2n}i=$$

$$=\frac{\pi}{2n}\frac{\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4n}}=\frac{\pi}{4n}\frac{-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4n}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4n}}=\frac{\pi}{4n}\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)}{\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}}.$$

Забелешка: При пресметувањето на интегралната сума користевме дека $\sum_{i=0}^{n-1}\sin(\alpha i)=\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, за секои $\alpha\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$, коешто се докажува со принципот на математичка индукција.

Заради интеграбилноста на подинтегралната функција на сегментот $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, имаме дека

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}S_T=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)}{\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1}=1.$$

Забелешка. При пресметувањето на лимесот користевме дека $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ($x=\frac{\pi}{4n}\to 0$ при $n\to\infty$) и дека синусната функција е непрекината,

па $\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)=\sin\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)\right)=\sin\frac{\pi}{4}$.

2.9. а) Докажи по дефиниција дека $\int\limits_a^b dx = b - a$.

б) Докажи дека функцијата $f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\notin Q\end{cases}$ не е интеграбилна на произволен сегмент $[a,b]$, каде $a,b\in R,\ a<b$.

Решение.

а) Нека $T=\{0=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=1\}$ е произволна поделба $[a,b]$ и нека $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$ се произволни. Тогаш интегралната сума е

$$S_T=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = x_1-x_0+x_2-x_1+\dots+x_n-x_{n-1}=b-a .$$

Па имаме дека $\int\limits_a^b dx=\lim\limits_{n\to\infty} S_T=\lim\limits_{n\to\infty}(b-a)=b-a$.

б) Нека $T=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$ е произволна поделба на сегментот $[a,b]$, така што $h(T)\to 0$ при $n\to\infty$.

Ако избереме точките $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$ да бидат рационални, т.е. $\xi_i\in\mathbb{Q}$, за интегралната сума добиваме

$$S_T=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}1(x_{i+1}-x_i)=$$
$$=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\dots+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_0=b-a .$$

Ако избереме точките $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\dots,n-1\}$ да бидат ирационални, т.е. $\xi_i\notin\mathbb{Q}$, за интегралната сума добиваме $S'_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}0\cdot(x_{i+1}-x_i)=0$.

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} S_T=\lim\limits_{n\to\infty}(b-a)=b-a\neq 0=\lim\limits_{n\to\infty} S'_T$, заклучуваме дека функцијата не е интеграбилна на сегментот $[a,b]$.

Пресметај ги следниве определени интеграли (2.10.- 2.15.)

2.10. $\int\limits_1^3 x dx.$

Решение. Ќе определиме една примитивна функција на подинтегралната функција $f(x)=x$. Од $\int x dx=\frac{x^2}{2}+C$ следува дека $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}$ е една примитивна функција на дадената подинтегрална функција. Тогаш $\int_1^3 x dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^3=\frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2}=4$. ●

2.11. $\int_1^2 5x^3 dx$.

Решение. Бидејќи $\int 5x^3 dx=5\int x^3=\frac{5}{4}x^4+C$, за вредноста на определениот интеграл добиваме $\int_1^2 5x^3 dx=\frac{5}{4}x^4\Big|_1^2=\frac{5}{4}(2^4-1^4)=\frac{75}{4}$. ●

2.12. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$.

Решение. Од $\int \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int x^2 dx+\int \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$ следува дека $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=21$. ●

2.13. $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

Решение. За определување на интегралот $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$ воведуваме смена $\ln x=t$. Тогаш $\frac{dx}{x}=dt$. Од $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int \sin t dt=-\cos t+C=$

$=-\cos(\ln x)+C$. За вредноста на определениот интеграл добиваме $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx=-\cos(\ln x)|_1^e=1-\cos 1$.

Интегралот може да се пресмета и на следниов начин:

Воведуваме смена $\ln x=t$. Тогаш , за $x=1$ имаме $t=\ln 1=0$, а за $x=e$ имаме $t=\ln e=1$, па $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int_0^1 \sin t dt=-\cos t\Big|_0^1=\cos 0-\cos 1=1-\cos 1$. ●

2.14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$.

Решение. Со примена на методот на парцијална интеграција на интегралот $\int x\sin x dx$ добиваме $\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C$. Тогаш, за вредноста на определениот интеграл добиваме $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Интегралот може да се пресмета и на следниов начин:

Со примена на методот на парцијална интеграција на интегралот добиваме

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0\cdot\cos 0 - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1. \bullet$$

2.15. Докажи дека $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = \frac{\ln 2}{2}.$

Решение. За пресметување на интегралот $\int\sqrt{e^x-1}\,dx$ воведуваме смена $\sqrt{e^x-1} = t$. Тогаш $x = \ln(t^2+1)$ и $dx = \frac{dt}{t^2+1}$. Од

$$\int\sqrt{e^x-1}dx = \int\frac{tdt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{x}{2} + C,$$

за вредноста на определениот интеграл добиваме $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = \frac{\ln 2}{2}.$ ●

2.16. Нека функцијата f е интеграбилна на $[0,5]$ и нека $\int\limits_0^1 f(x)dx = 6$, $\int\limits_0^2 f(x)dx = 4$ и $\int\limits_2^5 f(x)dx = 6$. Пресметај $\int\limits_1^5 f(x)dx$.

Решение. $\int\limits_1^5 f(x)dx = \int\limits_1^2 f(x)dx + \int\limits_2^5 f(x)dx = \left(\int\limits_0^2 f(x)dx - \int\limits_0^1 f(x)dx\right) + \int\limits_2^5 f(x)dx = 4$. ●

2.17. Докажи дека $\int\limits_0^{2\pi}\sin mx\sin nx dx = \begin{cases} 0, & m\neq n \\ \pi & m = n\end{cases}.$

Решение. За $m\neq n$, $\int\sin mx\sin nx dx = \frac{1}{2}\int[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx =$

$= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$ од каде што следува дека

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin mx\sin nx dx = \left(\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

За $m=n$, $\int \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int \sin^2 mx dx = \frac{1}{2}\int [1+\cos 2mx]dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin mx}{4m}+C$ од

каде што следува дека $\int\limits_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{\sin mx}{4m}\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi.$ ●

2.18. Докажи дека $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} \le \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}.$

Решение. За секој $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, важи $1+\sin x \ge \sin x$, односно $\frac{1}{1+\sin x} \le \frac{1}{\sin x}$, од

каде што следува дека $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} \le \int \frac{dx}{\sin x}.$ ●

2.19. Утврди, без пресметување на интегралите, кој од нив $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ или $\int\limits_0^1 x dx$ има поголема вредност.

Решение. За секој $x\in[0,1]$, важи $1+x^2 \ge x^2$, односно $\sqrt{1+x^2} \ge \sqrt{x^2}$ од каде што следува дека $\sqrt{1+x^2} \ge x.$ Тогаш $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \ge \int\limits_0^1 x dx..$●

2.20. Докажи дека $\frac{1}{6} \le \int\limits_0^2 \frac{dx}{x+10} \le \frac{1}{5}.$

Решение. Ако $0\le x\le 2$ тогаш $10\le x+10\le 12$, односно $\frac{1}{12}\le\frac{1}{x+10}\le\frac{1}{10}$, од

каде што следува дека $\int\limits_0^2 \frac{1}{12}dx \le \int\limits_0^2 \frac{1}{x+10}dx \le \int\limits_0^2 \frac{1}{10}dx.$ Според тоа, $\frac{1}{6}\le\int\limits_0^2 \frac{dx}{x+10}\le\frac{1}{5}.$ ●

2.21. Без да го пресметуваш интегралот, докажи дека важи $2^{-q} \le \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^p)^q}dx \le 1$, за произволни $p,q\in\mathbb{R}^+$.

Решение. За $x\in[0,1]$ и $p,q\in\mathbb{R}^+$ имаме $0\le x^p\le 1$, па со додавање на 1 на овие неравенства, добиваме $1\le 1+x^p\le 2$, од каде пак следува и $1^q\le(1+x^p)^q\le 2^q$. Конечно важи $2^{-q}\le\frac{1}{(1+x^p)^q}\le 1$, за сите $x\in[0,1]$. Оттука добиваме

$$\int\limits_0^1 2^{-q}dx \le \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^p)^q}dx \le \int\limits_0^1 1dx,$$

од каде следува

$$2^{-q}(1-0) \le \int_0^1 \frac{1}{(1+x^p)^q}dx \le 1-0 \text{, т.е. } 2^{-q} \le \int_0^1 \frac{1}{(1+x^p)^q}dx \le 1 \text{,}$$

што требаше и да се докаже.

2.22. Без да го пресметуваш интегралот, докажи дека важи

$$\frac{4}{9}(e-1) \le \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}dx \le \frac{1}{2}(e-1) \text{.}$$

Решение. Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(2-x)}$, за $x \in [0,1]$. Таа е непрекината на сегментот $[0,1]$, па значи достигнува минимум и максимум (или во внатрешни точки на интервалот $(0,1)$ или пак во крајните точки од сегментот $[0,1]$). Бидејќи $f'(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)^2(2-x)^2}=0$ ако и само ако $x=\dfrac{1}{2}$, и функцијата опаѓа на $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, а расте на $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ и $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{9}, f(0)=f(1)=\dfrac{1}{2}$, добиваме дека функцијата $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(2-x)}$ на сегментот $[0,1]$ достигнува максимална вредност еднаква на $\dfrac{1}{2}$ и минимална вредност еднаква на $\dfrac{4}{9}$. Значи докажавме дека важи $\dfrac{4}{9} \le \dfrac{1}{(x+1)(2-x)} \le \dfrac{1}{2}$, за сите $x \in [0,1]$. Заради $e^x > 0$ за секој реален број x, последните неравенства може да ги помножиме со e^x, па добиваме дека е точно $\dfrac{4}{9}e^x \le \dfrac{e^x}{(x+1)(2-x)} \le \dfrac{1}{2}e^x$, за сите $x \in [0,1]$. Оттука добиваме

$$\int_0^1 \frac{4}{9}e^x dx \le \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}dx \le \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx \text{, т.е. } \frac{4}{9}(e^1-e^0) \le \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}dx \le \frac{1}{2}(e^1-e^0) \text{, т.е.}$$

$$\frac{4}{9}(e-1) \le \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}dx \le \frac{1}{2}(e-1) \text{,}$$

што требаше и да се докаже.

2.23. Пресметај ги следните лимеси, користејќи ја дефиницијата за определен интеграл:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}},\ p>0$; ѓ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\dfrac{2}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

Решение. а) Нека со S_n го означиме изразот чијшто лимес го бараме. Тогаш имаме $S_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\ldots+\dfrac{n-1}{n}\right)$, т.е.

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x)=x$ на сегментот $[0,1]$. Таа е непрекината во сите реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, е и интеграбилна на сегментот $[0,1]$.

Нека $T=\{0=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=1\}$, каде $x_i=\dfrac{i}{n},\ i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$ и нека $\xi_i=x_i\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$. Тогаш $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\dfrac{1}{n}$, $h(T)=\dfrac{1}{n}\to 0$, при $n\to\infty$, а интегралната сума е

$$S(T)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)=S_n\,.$$

Заради интеграбилноста на функцијата $f(x)=x$ на сегментот $[0,1]$, имаме дека $\int\limits_0^1 xdx=\lim\limits_{n\to\infty}S(T)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, па бараниот $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\int\limits_0^1 xdx=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$.

б) Нека со S_n го означиме изразот чијшто лимес го бараме. Тогаш имаме
$S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$,

т.е.

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

Да ја разгледаме функцијата $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ на сегментот $[0,1]$. Таа е непрекината во сите реални броеви освен во -1, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, е и интеграбилна на сегментот $[0,1]$. Нека $T=\{0=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=1\}$, каде $x_i=\dfrac{i}{n},\ i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$

и нека $\xi_i = x_{i+1} \in [x_i, x_{i+1}], i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Тогаш $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$, $h(T) = \frac{1}{n} \to 0$, при $n \to \infty$, а интегралната сума е

$$S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i+1}{n}}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{i+1}{n}} = S_n .$$

Заради интеграбилноста на функцијата $f(x) = \frac{1}{1+x}$ на сегментот $[0,1]$, имаме дека

$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \lim_{n\to\infty} S(T) = \lim_{n\to\infty} S_n$, па $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = (\ln|1+x|)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

в) Нека со S_n го означиме изразот чијшто лимес го бараме. Тогаш имаме

$$S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} =$$

$$= \frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right], \quad \text{т.е.}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

Да ја разгледаме сега функцијата $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на сегментот $[0,1]$. Таа е непрекината во сите реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, е и интеграбилна на сегментот $[0,1]$.

Нека $T = \{0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = 1\}$, каде $x_i = \frac{i}{n}$, $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$ и нека $\xi_i = x_{i+1} \in [x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Тогаш $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$, $h(T) = \frac{1}{n} \to 0$, при $n \to \infty$, а интегралната сума е

$$S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+{\xi_i}^2}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2} = S_n .$$

Заради интеграбилноста на функцијата $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на сегментот $[0,1]$, имаме

дека $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty} S(T) = \lim_{n\to\infty} S_n$,па

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = (\operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

г) Нека со S_n го означиме изразот чијшто лимес го бараме.Тогаш имаме

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

Да ја разгледаме сега функцијата $f(x) = \sin x$ на сегментот $[0,\pi]$.Таа е непрекината во сите реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, е и интеграбилна на сегментот $[0,\pi]$. Нека $T = \{0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 1\}$, каде $x_i = \frac{i}{n}\pi,\ i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,\pi]$ и нека $\xi_i = x_i \in [x_i, x_{i+1}], i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Тогаш $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{\pi}{n}$, $h(T) = \frac{\pi}{n} \to 0$, при $n \to \infty$, а интегралната сума е

$$S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sin\xi_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sin\frac{i}{n}\pi\right)\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{n} \underset{(1)}{=} \pi S_n.$$

Заради интеграбилноста на функцијата $f(x) = \sin x$ на сегментот $[0,\pi]$, имаме дека

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \lim_{h(T)\to 0} S(T) = \lim_{n\to\infty} \pi S_n = \pi \lim_{n\to\infty} S_n, \text{ па}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(-\cos\pi - (-\cos 0)) = \frac{2}{\pi}.$$

д) Нека со S_n го означиме изразот чијшто лимес го бараме.Тогаш имаме

$$S_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1^p}{n^p} + \frac{2^p}{n^p} + \ldots + \frac{n^p}{n^p}\right) = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right], \text{ т.е.}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right] \tag{1}$$

Да ја разгледаме сега функцијата $f(x) = x^p$ на сегментот $[0,1]$.Таа е непрекината во сите реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, е и интеграбилна на сегментот $[0,1]$. Нека $T = \{0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 1\}$, каде $x_i = \frac{i}{n},\ i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$ и нека $\xi_i = x_{i+1} \in [x_i, x_{i+1}],\ i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Тогаш $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$, $h(T) = \frac{1}{n} \to 0$, при $n \to \infty$, а интегралната сума е

$$S(T)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i{}^p\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}\right)^p\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}\right)^p=S_n\,.$$

Заради интеграбилноста на функцијата $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ на сегментот $[0,1]$, имаме

дека $\int\limits_0^1 x^p dx=\lim\limits_{n\to\infty} S(T)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, па $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int\limits_0^1 x^p dx=\left.\left(\dfrac{x^{p+1}}{p+1}\right)\right|_0^1=\dfrac{1}{p+1}$.

г) Нека со S_n го означиме изразот чијшто лимес го бараме. Тогаш имаме

$$S_n=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2}{n+\frac{1}{n}}=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{2n}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{1+\frac{1}{n\cdot n}}\right),\text{ т.е.}$$

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{2n}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{1+\frac{1}{n\cdot n}}\right)\tag{1}$$

Нека $u_n=\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\ldots+2^{\frac{n}{n}}\right)$ и $v_n=\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}u_n=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+\ldots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\right)$, т.е.

$$v_n=\frac{n}{n+1}u_n\tag{2}$$

За секој $n\in\mathbb{N}$ и за секој $i\in\mathbb{N}$ важи $1+\frac{1}{in}>1$ и $\frac{1}{in}\le\frac{1}{n}$, па оттука добиваме

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{2n}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{1+\frac{1}{n\cdot n}}\right)<\frac{1}{n}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{1}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{1}\right)=u_n \qquad \text{и}$$

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{2n}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{1+\frac{1}{n\cdot n}}\right)\ge\frac{1}{n}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{n}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\right)=v_n,\text{ т.е.}$$

$$v_n\le S_n\le u_n,\text{ за секој } n\in\mathbb{N}\tag{3}$$

Сакаме да пресметаме $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, каде $u_n=\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\ldots+2^{\frac{n}{n}}\right)$:

Да ја разгледаме сега функцијата $f(x)=2^x$ на сегментот $[0,1]$. Таа е непрекината во сите реални броеви, па и на сегментот $[0,1]$, па, согласно критериумите за интеграбилност, е и интеграбилна на сегментот $[0,1]$.

Нека $T=\{0=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=1\}$, каде $x_i=\frac{i}{n},\ i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, е поделба на сегментот $[0,1]$ и нека $\xi_i=x_{i+1}\in[x_i,x_{i+1}],\ i\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.

Тогаш $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\frac{1}{n}$, $h(T)=\frac{1}{n}\to 0$, при $n\to\infty$, а интегралната сума е

$$S(T)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}2^{\xi_i}\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}2^{\frac{i+1}{n}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}2^{\frac{i+1}{n}}=u_n\,.$$

Заради интеграбилноста на функцијата $f(x)=2^x$ на сегментот $[0,1]$, имаме дека $\int_0^1 2^x dx=\lim_{n\to\infty}S(T)=\lim_{n\to\infty}u_n$, па $\lim_{n\to\infty}u_n=\int_0^1 2^x dx=(\frac{2^x}{\ln 2})\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$, т.е. $\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{\ln 2}$.

Заради (2) $\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}u_n=1\cdot\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$. Од (3), $\lim_{n\to\infty}v_n=\frac{1}{\ln 2}=\lim_{n\to\infty}u_n$ и својствата на низи добиваме дека $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{\ln 2}$.

2.24. Докажи дека ако функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината, периодична функција со период T, тогаш, за секој позитивен реален број a, важи

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx\,.$$

Решение. Бидејќи функцијата f е периодична со период T, следува дека важи

$$f(x)=f(x-T),\ \forall x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Функцијата f е непрекината, па согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна. Од својствата на определениот интеграл се добива

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x)dx\underset{(1)}{=}\int_a^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x-T)dx\text{, т.е.}$$

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_a^T f(x)dx+\int_T^{a+T}f(x-T)dx \tag{2}$$

Ако во $\int_T^{a+T}f(x-T)dx$ ставиме смена $u=x-T$, имаме $du=dx$, и за $x=T,u=0$, а за $x=a+T,u=a$, па

$$\int_T^{a+T}f(x-T)dx=\int_0^a f(u)du \tag{3}$$

Од (2) и (3) добиваме

$$\int_a^{a+T} f(x)dx \underset{(2)}{=} \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x-T)dx \underset{(3)}{=} \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(u)du =$$

$$= \int_0^a f(x)dx + \int_a^T f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \text{ , т.е. } \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \text{ .}$$

2.25. Докажи дека ако n е непарен природен број, тогаш функциите $F(x)$ и $G(x)$, дефинирани со $F(x) = \int_0^x \sin^n t dt$ и $G(x) = \int_0^x \cos^n t dt$, се периодични функции.

Решение. Нека $x \in \mathbb{R}$. Тогаш

$$F\left(x+2\pi\right) = \int_0^{x+2\pi} \sin^n t dt = \int_0^x \sin^n t dt + \int_x^{x+2\pi} \sin^n t dt \underset{2.24}{\overset{df}{=}} F\left(x\right) + \int_0^{2\pi} \sin^n t dt \text{ , т.е.}$$

$$F(x+2\pi) = F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n t dt \qquad (1)$$

Адо во $\int_0^{2\pi} \sin^n t dt$ ставиме смена $x = \pi - t$ и искористиме дека $\sin x = \sin(\pi - x)$, за секој реален број x, добиваме $\int_0^{2\pi} \sin^n t dt = -\int_\pi^{-\pi} \sin^n(\pi - x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x dx = 0$, т.е.

$$\int_0^{2\pi} \sin^n t dt = 0 \qquad (2)$$

Забелешка. Последниот интеграл е еднаков на 0 бидејќи функцијата $y = \sin^n x$ е непарна функција (поради тоа што $y = \sin x$ е непарна функција и n е непарен природен број) и $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, за непарна функција $y = f(x)$ и реален број a.

(Се остава на читателот да докаже дека $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, за секоја непарна функција $y = f(x)$ и за секој реален број a)

Конечно, $F(x+2\pi) \underset{(1)}{=} F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n t dt \underset{(2)}{=} F(x) + 0 = F(x)$, за секој реален број x, па значи дека функцијата $F(x)$ е периодична функција. Слично се докажува и за функцијата $G(x)$.

2.26. Докажи дека ако f е непрекината функција на сегментот $[0,1]$, тогаш важи:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

Решение. Бидејќи функцијата $y = \sin x$ е непрекината во сите реални броеви и за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \in [0,1]$, и бидејќи функцијата f е непрекината на сегментот $[0,1]$, добиваме дека сложената функција $f(\sin x)$ е непрекината на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, па согласно критериумите за интеграбилност, таа е и интеграбилна на сегментот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Слично и функцијата $f(\cos x)$ е интеграбилна на сегментот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ставајќи смена $t = \frac{\pi}{2} - x$ во $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$, користејќи ги својствата на определениот интеграл, како и дека $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, за секој реален број x добиваме

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx,$$

што требаше и да се докаже.

б) Слично како под а), се докажува дека функцијата $f(\sin x)$ е интеграбилна на сегментот $[0,\pi]$. Користејќи го тоа, како и интеграбилноста на функцијата $y = x$ и фактот дека производ од интеграбилни функции е пак интеграбилна функција, заклучуваме дека функцијата $xf(\sin x)$ е интеграбилна на сегментот $[0,\pi]$.

Ставајќи смена $t = \pi - x$ во $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx$, користејќи ги својствата на определениот интеграл, како и дека $\sin(\pi - x) = \sin x$, за секој реален број x добиваме

$$\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = -\int\limits_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t))dt = \int\limits_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt = \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int\limits_0^{\pi} tf(\sin t)dt,$$

т.е. $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx$, коешто е еквивалентно со

$$2\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx, \text{ т.е. со } \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx,$$

што требаше и да се докаже.

2.27. Докажи дека ако функцијата f е интеграбилна на сегментот $[a,b]$, тогаш и f^2 е интеграбилна на $[a,b]$.

Решение. Нека функцијата f е интеграбилна на сегментот $[a,b]$. Нека $T=\{a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b\}$ е произволна поделба на $[a,b]$ и нека $\Delta_i=[x_i,x_{i+1}]$ и $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$. Од интеграбилноста на f на $[a,b]$ следува дека таа е и ограничена на $[a,b]$, па значи постои $\sup\left\{|f(x)| \,\middle|\, x\in[a,b]\right\}$, којшто ќе го означиме со M.

Нека $M_i=\sup\left\{f(x) \,\middle|\, x\in\Delta_i\right\}$, $m_i=\inf\left\{f(x) \,\middle|\, x\in\Delta_i\right\}$, $M'_i=\sup\left\{f^2(x) \,\middle|\, x\in\Delta_i\right\}$ и $m'_i=\inf\left\{f^2(x) \,\middle|\, x\in\Delta_i\right\}$ и $S_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i$, $s_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$, $S'_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}M'_i\Delta x_i$ и $s'_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}m'_i\Delta x_i$.

За произволни $x,y\in[a,b]$, имаме

$$|f^2(x)-f^2(y)|=|f(x)+f(y)||f(x)-f(y)|\le$$

$$\le(|f(x)|+|f(y)|)|f(x)-f(y)|\le 2M|f(x)-f(y)|,$$ т.е. важи

$$|f^2(x)-f^2(y)|\le 2M|f(x)-f(y)|,\ \forall x,y\in[a,b] \qquad (1)$$

Сега да направиме оценка на $M'_i-m'_i$ (Притоа, ќе го користиме равенството $\sup A-\inf B=\sup(A-B)$). Имаме

$$M'_i-m'_i=\sup\left\{f^2(x) \,\middle|\, x\in\Delta_i\right\}-\inf\left\{f^2(y) \,\middle|\, y\in\Delta_i\right\}=\sup\left\{f^2(x)-f^2(y) \,\middle|\, x,y\in\Delta_i\right\}\underset{(1)}{\le}$$

$$\le\sup\left\{2M(f(x)-f(y)) \,\middle|\, x,y\in\Delta_i\right\}=2M\left(\sup\left\{f(x) \,\middle|\, x\in\Delta_i\right\}-\inf\left\{f(y) \,\middle|\, y\in\Delta_i\right\}\right)=$$

$$=2MM_i-2Mm_i=2M(M_i-m_i).$$

Конечно, $S'_T-s'_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M'_i-m'_i)\Delta x_i\le 2M\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i=2M(S_T-s_T)$, од каде заради интеграбилноста на функцијата f на $[a,b]$, следува интеграбилност и на функцијата f^2 на $[a,b]$.

2.28. Докажи дека ако функцијата f е интеграбилна на сегментот $[a,b]$ и ако постои позитивен реален број $m>0$ така да важи $|f(x)|\ge m$, за сите $x\in[a,b]$, тогаш и функцијата $\frac{1}{f}$ е интеграбилна на $[a,b]$.

Решение. Нека функцијата f е интеграбилна на сегментот $[a,b]$. Нека $T=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b\}$ е произволна поделба на $[a,b]$ и нека $\Delta_i=[x_i,x_{i+1}]$ и $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$. Нека $M_i=\sup\left\{f(x)\middle|\ x\in\Delta_i\right\}$, $m_i=\inf\left\{f(x)\middle|\ x\in\Delta_i\right\}$, $M'_i=\sup\left\{\frac{1}{f(x)}\middle|\ x\in\Delta_i\right\}$ и $m'_i=\inf\left\{\frac{1}{f(x)}\middle|\ x\in\Delta_i\right\}$ и $S_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i$, $s_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$, $S'_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}M'_i\Delta x_i$ и $s'_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}m'_i\Delta x_i$.

За произволни $x,y\in[a,b]$, $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|=\left|\frac{f(y)-f(x)}{f(x)f(y)}\right|\le\frac{1}{m^2}|f(x)-f(y)|$ т.е. важи

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|\le\frac{1}{m^2}|f(x)-f(y)|,\ \forall x,y\in[a,b] \tag{1}$$

Сега да направиме оценка на $M'_i-m'_i$ (Притоа, ќе го користиме равенството $\sup A-\inf B=\sup(A-B)$)

$$M'_i-m'_i=\sup\left\{\frac{1}{f(x)}\middle|\ x\in\Delta_i\right\}-\inf\left\{\frac{1}{f(y)}\middle|\ y\in\Delta_i\right\}=\sup\left\{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\middle|\ x,y\in\Delta_i\right\}\underset{(1)}{\le}$$

$$\le\sup\left\{\frac{1}{m^2}(f(x)-f(y))\middle|\ x,y\in\Delta_i\right\}=\frac{1}{m^2}\left(\sup\left\{f(x)\middle|\ x\in\Delta_i\right\}-\inf\left\{f(y)\middle|\ y\in\Delta_i\right\}\right)=$$

$$=\frac{1}{m^2}M_i-\frac{1}{m^2}m_i=\frac{1}{m^2}(M_i-m_i).$$

Конечно, $S'_T-s'_T=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M'_i-m'_i)\Delta x_i\le\frac{1}{m^2}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)\Delta x_i=\frac{1}{m^2}(S_T-s_T)$, од каде заради интеграбилноста на функцијата f на $[a,b]$, следува интеграбилност и на функцијата $\frac{1}{f}$ на $[a,b]$.

2.29. Нека функцијата f е непрекината на сегментот $[a,b]$ и нека $c\in(a,b)$. Нека на сегментот $[a,b]$ е дефинирана функција g со $g(x)=\begin{cases}f(x),\ x\in[a,b]\setminus\{c\}\\ A,\ x=c\end{cases}$, каде $A\ne f(c)$. Докажи дека функцијата g е интеграбилна на сегментот $[a,b]$ и дека важи $\int\limits_a^b g(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Решение. Нека функцијата f е непрекината на сегментот $[a,b]$. Тогаш таа е и интеграбилна на $[a,b]$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно избран позитивен реален број. Од интеграбилноста на f следува дека постои $\delta > 0$ така да за секоја поделба $T = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ на $[a,b]$, со $h(T) < \delta$ и за секој избор на точки $\xi_i \in \Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$ важи

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

каде $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Од интеграбилноста на f на $[a,b]$ уште следува дека таа е и ограничена на $[a,b]$, па значи постои $\sup\left\{ |f(x)| \;\middle|\; x \in [a,b] \right\}$, којшто ќе го означиме со M. Нека $\delta_1 = \min\left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{4K} \right\}$, каде $K = \max\{M, |A|\}$ и нека $h(T) < \delta_1$. Како $\delta_1 \le \delta$, следува дека важи (1). Нека сега $T = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ е произволна поделба на $[a,b]$, за која $h(T) < \delta_1$, и нека $\xi_i \in \Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$ се произволно избрани и нека $c \in \Delta_k$. Тогаш имаме

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i \right| = \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i \right| \le$$

$$\le \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \right| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i \right|_{f(x)=g(x), \forall x \ne c} \overset{(1)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + |f(\xi_k) - g(\xi_k)|\Delta x_k \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + (|f(\xi_k)| + |g(\xi_k)|)\Delta x_k \le \frac{\varepsilon}{2} + (M + |A|)\delta_1 \le \frac{\varepsilon}{2} + 2K\frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon .$$

Значи, за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta_1 > 0$ така да за произволна поделба $T = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ на $[a,b]$, за која $h(T) < \delta_1$, и за секој избор на точки $\xi_i \in \Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$ важи $\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon$, од каде следува дека функцијата g е интеграбилна на $[a,b]$ и, притоа, важи $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

2.30. Дали функцијата $g(x) = \begin{cases} e^{\sin x}, & x \in [-1,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ е интеграбилна на $[-1,1]$?

Решение. Функцијата $f(x) = e^{\sin x}$ е непрекината на $[-1,1]$, како композиција од непрекинати функции. Од друга страна функциите f и g се разликуваат само во точката $x = 0$, па заради задача 2.29, следува дека и функцијата g е интеграбилна на $[-1,1]$.

2.31. Докажи дека ако функцијата f е непрекината на сегментот $[a,b]$, $f(x)\geq 0$, за сите $x\in[a,b]$ и ако $\int_a^b f(x)dx=0$ тогаш $f(x)=0$, за сите $x\in[a,b]$.

Решение. Нека се исполнети условите на задачата. Нека претпоставиме дека функцијата f не е идентички еднаква на 0 на сегментот $[a,b]$, т.е. нека постои $x_0\in[a,b]$ за кое $f(x_0)\neq 0$. Бидејќи $f(x)\geq 0$, за сите $x\in[a,b]$, следува $f(x_0)>0$. Од непрекинатоста на функцијата f на $[a,b]$ и од $x_0\in[a,b]$, следува дека за секој $\varepsilon>0$, па и за $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$, постои $\delta>0$, така да за сите $x\in[a,b]$ за кои важи $|x-x_0|<\delta$ е исполнето $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$ (δ се избира така што $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$). Од $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}$ што е еквивалентно со

$$-\frac{f(x_0)}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{f(x_0)}{2}\text{, т.е. со }\frac{f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0)$$

следува дека важи:

Постои $\delta>0$ така да за сите $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ важи $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$ (1)

Познато е дека ако за интеграбилната функција важи $f(x)\geq 0$, за сите $x\in[a,b]$, тогаш $\int_a^b f(x)dx\geq 0$. Користејќи го ова, (1), како и својствата на определениот интеграл, добиваме

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx\geq 0+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+0\underset{(1)}{\geq}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}dx=$$

$=\frac{f(x_0)}{2}[(x_0+\delta)-(x_0-\delta)]=f(x_0)\delta=\delta_1>0$, т.е. добивме дека $\int_a^b f(x)dx\geq\delta_1>0$ што противречи со условот на задачата, т.е. со $\int_a^b f(x)dx=0$. Значи, не е точно дека постои $x_0\in[a,b]$ за кое $f(x_0)\neq 0$, па заклучуваме дека мора $f(x)=0$, за сите $x\in[a,b]$.

2.32. Докажи дека ако функциите f и g се непрекинати на сегментот $[a,b]$, тогаш важи неравенството на Коши:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \qquad (1)$$

Притоа, во (1) важи равенство ако и само ако за некој $\lambda \in \mathbb{R}$ важи $g(x) = \lambda f(x)$, за сите $x \in [a,b]$.

Решение. Од непрекинатоста на функциите f и g на сегментот $[a,b]$, следува интеграбилност на истите на сегментот $[a,b]$, па и интеграбилност на функциите f^2, g^2 и на fg на $[a,b]$. За $\lambda \in \mathbb{R}$, ја разгледуваме

$$T(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx .$$

Од својствата на определениот интеграл се добива дека $T(\lambda) = \int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx$, па, заради $[\lambda f(x) + g(x)]^2 \ge 0$ за сите $x \in [a,b]$ и за секој $\lambda \in \mathbb{R}$, следува дека $T(\lambda) \ge 0$, за секој $\lambda \in \mathbb{R}$.

Значи квадратната функција (по λ)

$$T(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0 \text{, за секој } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Коефициентот пред λ^2 е $\int_a^b f^2(x)dx$ и е позитивен, бидејќи од $f^2(x) \ge 0$, за сите $x \in [a,b]$. Меѓутоа, можеме да сметаме дека $\int_a^b f^2(x)dx > 0$, затоа што ако го претпоставиме спротивното, т.е. дека $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, заради задача 2.31 добиваме дека $f^2(x) = 0$ за сите $x \in [a,b]$, па и $f(x) = 0$ за сите $x \in [a,b]$, а во тој случај (1) е тривијално исполнето. Значи, квадратната функција $T(\lambda) \ge 0$ и коефициентот пред λ^2 е строго позитивен. Од својствата на квадратната функција е јасно дека дискриминантата мора да биде непозитивна, т.е. мора да важи $4\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \le 0$ што е еквивалентно со (1).

Во (1) важи равенство ако и само ако дискриминантата е 0, а тоа значи дека постои (и тоа единствен) $\lambda \in \mathbb{R}$, за кој важи $T(\lambda) = 0$, т.е. $\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]^2 dx = 0$, од каде повторно заради задача 2.31 следува дека мора $[\lambda f(x) + g(x)]^2 = 0$ за сите

$x \in [a,b]$ односно $\lambda f(x) + g(x) = 0$ за сите $x \in [a,b]$, па значи $g(x) = \lambda' f(x)$, за сите $x \in [a,b]$ ($\lambda' = -\lambda \in \mathbb{R}$).

2.33. Докажи дека ако функцијата f е интеграбилна на сегментот $[0,1]$, тогаш важи неравенството $\int_0^1 f(x)dx \le \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}$.

Решение. Со користење на неравенството на Коши, притоа за функција g ја земаме константната функција $g(x) = 1, x \in [0,1]$, добиваме:

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 = \left[\int_0^1 f(x)\cdot 1dx\right]^2 \le \int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 1^2 dx = \left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)(1-0) = \int_0^1 f^2(x)dx \text{, т.е.}$$

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \le \int_0^1 f^2(x)dx ,$$

од каде со коренување се добива бараното неравенство.

2.34. Докажи дека ако функцијата f е интеграбилна на сегментот $[a,b]$, тогаш важи неравенството $\left[\int_a^b f(x)\sin x dx\right]^2 + \left[\int_a^b f(x)\cos x dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$.

Решение. И во оваа задача, користејќи го неравенството на Коши, добиваме

$$\left[\int_a^b f(x)\sin x dx\right]^2 + \left[\int_a^b f(x)\cos x dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b \sin^2 x dx + \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b \cos^2 x dx =$$

$$= \left(\int_a^b \sin^2 x dx + \int_a^b \cos^2 x dx\right)\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b (\sin^2 x + \cos^2 x)dx \int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b 1dx \int_a^b f^2(x)dx =$$

$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)dx ,$$

со што е докажано неравенството.

2.35. Докажи дека ако функциите f, g и h се интеграбилни на сегментот $[a,b]$, тогаш важи неравенството:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx\right]^4 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^2 \int_a^b g^4(x)dx \int_a^b h^4(x)dx .$$

Решение. И во оваа задача, двапати користејќи го неравенството на Коши, добиваме

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)h(x)dx\right]^4 = \left[\left(\int_a^b f(x)[g(x)h(x)]dx\right)^2\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b [g(x)h(x)]^2 dx\right]^2 =$$

$$=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^2\left(\int_a^b g^2(x)h^2(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^2 \int_a^b g^4(x)dx \int_a^b h^4(x)dx\,.$$

2.36. Докажи дека ако функцијата f е интеграбилна на сегментот $[0,1]$ и ако $\int_0^1 f(x)dx=1$, тогаш важи $\int_0^1 (1+x^2)f^2(x)dx \ge \frac{4}{\pi}$.

Решение. Од условот на задачата и неравенството на Коши, за интеграбилната функција f имаме

$$1^2=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2=\left(\int_0^1\left[f(x)\sqrt{1+x^2}\right]\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right)^2 \le \int_0^1 (1+x^2)f^2(x)dx\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\,,$$

од каде заради $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$, се добива дека

$1\le\frac{\pi}{4}\int_0^1 (1+x^2)f^2(x)dx$, што е еквивалентно со неравенството што требаше да се докаже.

2.37. Докажи дека ако функцијата f има непрекинат прв извод на сегментот $[a,b]$ и ако $f(a)=0$, тогаш

$$(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx \ge M^2\,,$$

каде $M=\max\left\{|f(x)| \;\middle|\; x\in[a,b]\right\}$.

Решение. Нека се исполнети условите на задачата. Од непрекинатоста на f' на $[a,b]$ следува интеграбилност на f' на $[a,b]$, од каде следува дека функцијата f'^2 е интеграбилна на $[a,b]$.

Нека $c\in(a,b)$ е произволно избрана. Тогаш $\int_a^c f'(x)dx=f(c)-f(a)=f(c)$,т.е.

$$\int_a^c f'(x)dx=f(c),\forall c\in(a,b) \tag{1}$$

Уште важи $\int_a^b f'^2(x)dx=\int_a^c f'^2(x)dx+\int_c^b f'^2(x)dx\ge\int_a^c f'^2(x)dx+0=\int_a^c f'^2(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f'^2(x)dx\ge\int_a^c f'^2(x)dx,\;\;\forall c\in(a,b) \tag{2}$$

Од диференцијабилноста на f на $[a,b]$ следува непрекинатост на f на $[a,b]$, па постои $\max\left\{|f(x)|\,\middle|\, x\in[a,b]\right\}$, да го означиме со M, и, притоа, овој максимум се достигнува на $[a,b]$, т.е. постои $c\in(a,b)$ така да $|f(c)|=M$. Конечно, имаме

$$M^2=|f(c)|^2\underset{(1)}{=}\left|\int_a^c f'(x)dx\right|^2=\left|\int_a^c f'(x)\cdot 1dx\right|^2\le\int_a^c f'^2(x)dx\int_a^c 1^2dx\underset{(2)}{\le}(c-a)\int_a^b f'^2(x)dx\le$$

$$\underset{c\in(a,b)}{\le}(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx,$$

т.е. добивме $M^2\le(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx$, што требаше и да се докаже.

2.38. Нека функцијата f е непрекината и ограничена на сегментот $[a,b]$, т.е постојат $m,M\in\mathbb{R}$ така да $m\le f(x)\le M$ за сите $x\in[a,b]$ и нека F е непрекината и конвексна функција на $[m,M]$. Докажи дека важи

$$F\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b F(f(x))dx.$$

Решение. Нека се исполнети условите на задачата.
Нека $T=\{a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b\}$, каде $x_i=a+\frac{b-a}{n}i,\ i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$ е поделба на $[a,b]$ и нека $\xi_i=x_{i+1}\in[x_i,x_{i+1}]$. Тогаш $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$. Од непрекинатоста на f на $[a,b]$ следува интеграбилност на f на $[a,b]$, па имаме

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}S(T)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+1})\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+1}),$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)] \qquad (1)$$

Од конвексноста на функцијата F на $[m,M]$, од $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1, 0<\frac{1}{n}<1$ и од условот на задачата дека $f(x)\in[m,M]$ за сите $x\in[a,b]$, добиваме

$$F\left(\frac{1}{n}f(x_1)+\frac{1}{n}f(x_2)+\ldots+\frac{1}{n}f(x_n)\right)\le\frac{1}{n}F(f(x_1))+\frac{1}{n}F(f(x_2))+\ldots+\frac{1}{n}F(f(x_n)),\text{ т.е.}$$

$$F\left(\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))\right)\le\frac{1}{n}[F(f(x_1))+F(f(x_2))+\ldots+F(f(x_n))] \qquad (2)$$

Од друга страна, од f е непрекината на $[a,b]$, $f(x)\in[m,M]$ за сите $x\in[a,b]$ и F е непрекината на $[m,M]$, следува дека и композицијата $F\circ f$ е непрекината на $[a,b]$, па значи е и интеграбилна на $[a,b]$. Значи за секоја поделба на $[a,b]$, па и за избраната поделба на почетокот на задачата и за секој избор на точки $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, па и за тој на почетокот на задачата важи

$$\int_a^b F(f(x))dx=\lim_{n\to\infty}S'(T)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}F(f(\xi_i))\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}F\big(f(x_{i+1})\big)\frac{b-a}{n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}F\big(f(x_{i+1})\big)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[F(f(x_1))+F(f(x_2))+\ldots+F(f(x_n))\right],\text{ т.е.}$$

$$\int_a^b F(f(x))dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[F(f(x_1))+F(f(x_2))+\ldots+F(f(x_n))\right] \qquad (3)$$

Од (1), (2) , (3) и својства на конвергентни низи, добиваме

$$F\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\underset{(1)}{=}F\left(\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(F\left(\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n))\right)\right)\underset{(2)}{\leq}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(F(f(x_1))+F(f(x_2))+\ldots+F(f(x_n)))$$

$$\underset{(3)}{=}\frac{1}{b-a}\int_a^b F(f(x))dx\,,$$

со што е докажано неравенството.

2.39. Докажи дека ако функцијата g е непрекината и позитивна на сегментот $[a,b]$ тогаш важи неравенството $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(g(x))dx}\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$.

Решение. Функцијата $f(x)=\ln(g(x)),x\in[a,b]$ е непрекината и ограничена функција на $[a,b]$, заради условот на задачата, а функцијата $F(x)=e^x$ е конвексна функција, па може да се примени претходната задача. Добиваме

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(g(x))dx}=F\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b F(f(x))dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{\ln(g(x))}dx=$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\,,$$

што требаше да се докаже.

2.40. Докажи дека ако функцијата f е непрекината на сегментот $[a,b]$, а функцијата g е интеграбилна на сегментот $[a,b]$ и не го менува знакот на $[a,b]$, тогаш постои точка $c\in[a,b]$ така да важи неравенството

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx .$$

Решение. Функцијата f е непрекината на сегментот $[a,b]$, па значи и интеграбилна. Нека претпоставиме дека g е позитивна на $[a,b]$. Нека $m=\inf\left\{f(x)\middle|\ x\in[a,b]\right\}$ и $M=\sup\left\{f(x)\middle|\ x\in[a,b]\right\}$. Тогаш $m\le f(x)\le M$ за сите $x\in[a,b]$, па заради позитивноста на g, точно е и $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ за сите $x\in[a,b]$. Со интегрирање на последното неравенство, се добива

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx ,$$

т.е. бројот $\lambda=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\in[m,M]$. Бидејќи функцијата f е непрекината функција на $[a,b]$, $m\le f(x)\le M$ за сите $x\in[a,b]$ и $\lambda\in[m,M]$, од својствата на непрекината функција, добиваме дека постои точка $c\in[a,b]$ таква да важи $f(c)=\lambda$, т.е.

$f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$, од каде следува она што требаше да се докаже.

Слично се докажува и случајот кога функцијата g е негативна.

Забелешка. Оваа задача е позната како обопштена теорема за средна вредност.

2.41. Докажи дека ако функциите f и g се непрекинати и монотоно растечки на сегментот $[0,1]$, тогаш важи неравенството

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \ge \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx .$$

Решение. Нека означиме $A=\int_0^1 f(x)dx$. Од теоремата за средна вредност следува дека постои точка $c\in[0,1]$ така да $A=\int_0^1 f(x)dx=f(c)\int_0^1 1dx=f(c)$. Од друга страна, бидејќи функцијата f е монотоно растечка, за сите x за кои важи $0\le x\le c$ точно е $f(x)\le f(c)=A$ и за сите x за кои важи $c\le x\le 1$ точно е $A=f(c)\le f(x)$, т.е. за $0\le x\le c$ важи $A-f(x)\ge 0$, а за $c\le x\le 1$ важи $A-f(x)\le 0$. Применувајќи ја теоремата за средна вредност, добиваме дека постојат точки $\xi_1\in[0,c],\ \xi_2\in[c,1]$ така да важи

$$\int_0^c g(x)(A-f(x))dx=g(\xi_1)\int_0^c (A-f(x))dx\,,\ \int_c^1 g(x)(f(x)-A)dx=g(\xi_2)\int_c^1 (f(x)-A)dx \quad (1)$$

Бидејќи $0\le\int_0^c (A-f(x))dx=Ac-\int_0^c f(x)dx=\ Ac-\left(\int_0^1 f(x)dx-\int_c^1 f(x)dx\right)=$

$$=Ac-\left(A-\int_c^1 f(x)dx\right)=-A(1-c)+\int_c^1 f(x)dx=\ -\int_c^1 A\,dx+\int_c^1 f(x)dx=\int_c^1 (f(x)-A)dx\,,$$

добиваме дека

$$0\le\int_0^c (A-f(x))dx=\int_c^1 (f(x)-A)dx \quad (2)$$

Од друга страна, од $\xi_1\in[0,c],\ \xi_2\in[c,1]$ се добива дека $\xi_1\le\ \xi_2$, од каде, заради монотоноста на функцијата g, се добива дека

$$g(\xi_1)\le\ g(\xi_2) \quad (3)$$

Конечно од (1), (2), (3) добиваме

$$\int_0^c g(x)(A-f(x))dx=g(\xi_1)\int_0^c (A-f(x))dx\underset{(3)}{\le}$$

$$\le g(\xi_2)\int_0^c (A-f(x))dx\underset{(2)}{\le} g(\xi_2)\int_c^1 (f(x)-A)dx\underset{(1)}{=}\int_c^1 g(x)(f(x)-A)dx\,,$$

т.е. добивме $\int_0^c g(x)(A-f(x))dx\le\int_c^1 g(x)(f(x)-A)dx$, од каде се добива

$$A\int_0^c g(x)dx-\int_0^c f(x)g(x)dx\le\int_c^1 f(x)g(x)dx-A\int_c^1 g(x)dx\text{, т.е.}$$

$$A\int_0^1 g(x)dx\le\int_0^1 f(x)g(x)dx\text{ ,т.е. }\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx\le\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

што требаше и да се докаже.

2.42. Без пресметување на интегралот $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx$, определи го неговиот знак.

Решение. Точно е $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx = \int\limits_{-2}^{0} x^3 2^x dx + \int\limits_{0}^{2} x^3 2^x dx$. Ако во првиот интеграл ставиме смена $x = -t$, добиваме

$$\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx = \int\limits_{2}^{0} t^3 2^{-t} dt + \int\limits_{0}^{2} x^3 2^x dx \text{, т.е.}$$

$$\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx = -\int\limits_{0}^{2} x^3 2^{-x} dt + \int\limits_{0}^{2} x^3 2^x dx = \int\limits_{0}^{2} (2^x - 2^{-x}) x^3 dx .$$

Применувајќи ја теоремата за средна вредност ($f(x) = 2^x - 2^{-x}, g(x) = x^3$), добиваме дека постои точка $c \in [0,2]$ така да

$$\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx = \int\limits_{0}^{2} (2^x - 2^{-x}) x^3 dx = f(c) \int\limits_{0}^{2} x^3 dx = (2^c - 2^{-c}) \frac{2^4}{4} > 0 .$$

Заклучуваме дека интегралот е позитивен.

2.43. Докажи дека ако функцијата f е монотоно опаѓачка на сегментот $[0,1]$, тогаш за секој $a \in [0,1]$ важи $\int\limits_{0}^{a} f(x) dx \geq a \int\limits_{0}^{1} f(x) dx$.

Решение. Нека се исполнети условите на задачата. Од тоа што функцијата f е монотоно опаѓачка на сегментот $[0,1]$, добиваме дека за $0 \leq x \leq a$ важи $f(x) \geq f(a)$ и за $a \leq x \leq 1$ важи $f(x) \leq f(a)$. Тогаш

$$\frac{1}{1-a} \int\limits_{a}^{1} f(x) dx \leq \frac{1}{1-a} \int\limits_{a}^{1} f(a) dx = \frac{1}{1-a} f(a)(1-a) = f(a) = \frac{1}{a} \int\limits_{0}^{a} f(a) dx \leq \frac{1}{a} \int\limits_{0}^{a} f(x) dx ,$$

од каде се добива $a \int\limits_{a}^{1} f(x) dx \leq (1-a) \int\limits_{0}^{a} f(x) dx$. Последното е еквивалентно со $a \int\limits_{a}^{1} f(x) dx \leq \int\limits_{0}^{a} f(x) dx - a \int\limits_{0}^{a} f(x) dx$, т.е со $a \int\limits_{0}^{1} f(x) dx \leq \int\limits_{0}^{a} f(x) dx$, што требаше и да се докаже.

1.2. Примена на определениот интеграл

Нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се непрекинати функции на сегментот $[a,b]$ и нека $y_1(x) \leq y_2(x)$, за секое $x \in [a,b]$. Плоштината на рамнинската фигура ограничена со графиците на функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и правите $x=a$ и $x=b$, се пресметува по формулата

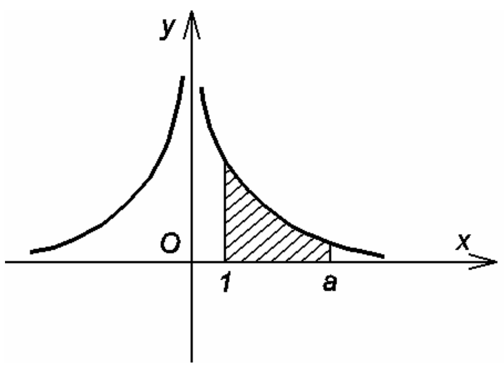
$$P = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx.$$

Нека $y_1(x)$ и $y_2(x)$ се непрекинати функции на сегментот $[a,b]$ и нека $y_1(x) \leq y_2(x)$, за секое $x \in [a,b]$. Волуменот на вртливото тело добиено со ротација околу $x-$ оската на рамнинската фигура ограничена со графиците на функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$, правите $x=a$, $x=b$ и апцисната оска се пресметува по формулата

$$P = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]dx.$$

Нека f и f' се непрекинати функцијии на $\left[a,b\right]$. Тогаш должината L на делот од графикот на функцијата f од $A\left(a, f\left(a\right)\right)$ до $B\left(b, f\left(b\right)\right)$ е $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$.

2.44. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со кривата $y = \frac{1}{x^2}$, правите $x=1$ и $x=a>1$ и $y=0$.



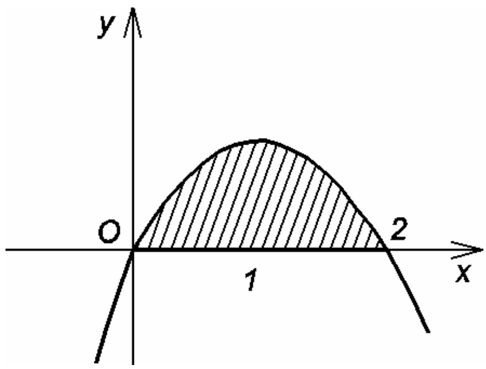
Решение. Од условот на задачата, имаме $y_1(x)=0$, и $y_2 = \frac{1}{x^2}$. За бараната плоштината добиваме

$$P = \int_1^a \left[\frac{1}{x^2} - 0\right]dx = \int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^a = 1 - \frac{1}{a} \; .●$$

2.45. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со лакот на параболата $y = -x^2 + 2x$ и правата $y=0$.

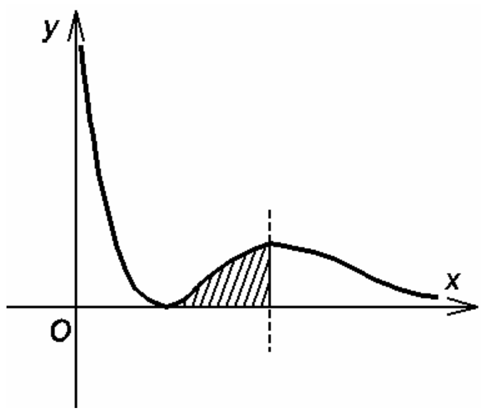
Решение. Од условот на задачата имаме $y_1(x)=0$ и $y_2=-x^2+2x$. За бараната плоштината добиваме

$$P=\int_0^2(-x^2+2x)dx=\frac{4}{3}. \bullet$$

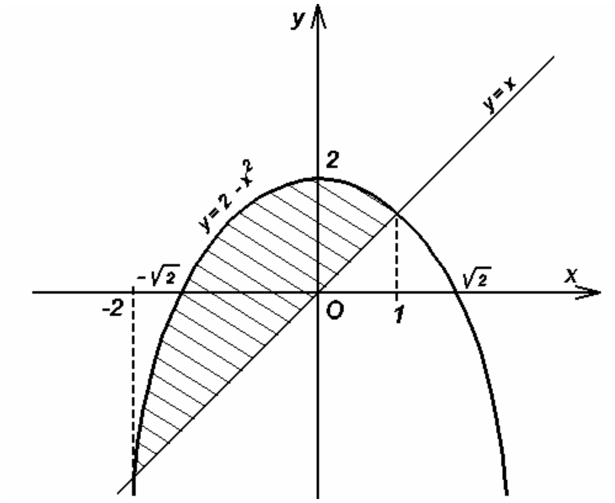


2.46. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со дел од кривата $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ и правите $x=1, x=e$ и $y=0$.

Решение: Бараната плоштина е $P=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx=\frac{1}{3}$. Да забележиме дека при пресметувањето на интегралот, воведовме смена $t=\ln x$. Тогаш, $dt=\frac{dx}{x}$, а границите ги добивме на следниот начин: за $x=1$, добиваме $t=\ln 1=0$, додека за $x=e$, имаме $t=\ln e=1$, т.е го пресметавме интегралот $\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$. ●



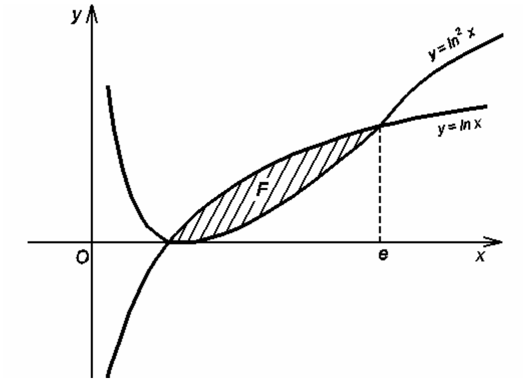
2.47. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со параболата $y=2-x^2$ и правата $y=x$.



Решение: Со решавањето на системот равенки $\begin{cases} y=2-x^2 \\ y=x \end{cases}$, ги добиваме апсцисите на пресечните точки од параболата и правата, а со тоа и границите на интеграција. Добивме $x_1=-2$ и $x_2=1$. Бараната плоштина е

$$P=\int_{-2}^{1}[(2-x^2)-x]dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(-4+\frac{8}{3}-2\right)=\frac{9}{2}.\ \bullet$$

2.48. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите: $y=\ln x$ и $y=\ln^2 x$.



Решение. Апсцисите на пресечните точки на кривите ги наоѓаме со решавање на системот равенки: $\begin{cases} y=\ln x \\ y=\ln^2 x \end{cases}$, што се сведува на решавање на равенството $\ln x-\ln^2 x=0$, односно $\ln x(1-\ln x)=0$. Бидејќи $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ и $\ln x=1 \Leftrightarrow x=e$, апсцисите на пресечните точки се $x_1=1$ и $x_2=e$. Бараната плоштина ја пресметуваме на следниот начин

$P=\int_{1}^{e}(\ln x-\ln^2 x)dx$. Со примена на методот на парцијална интеграција, при што земаме $u=\ln x-\ln^2 x$ и $dv=dx$, добиваме

$$\int(\ln x-\ln^2 x)dx=(\ln x-\ln^2 x)x-\int x\frac{1-2\ln x}{x}dx=(\ln x-\ln^2 x)x-\int(1-2\ln x)dx.$$

За последниот интеграл, повторно го применуваме методот на парцијална интеграција, при што земаме $u=1-2\ln x$ и $dv=dx$. Тогаш, $du=-\frac{2}{x}dx$ и $v=x$, па добиваме $\int(1-2\ln x)dx=3x-2x\ln x+C$.

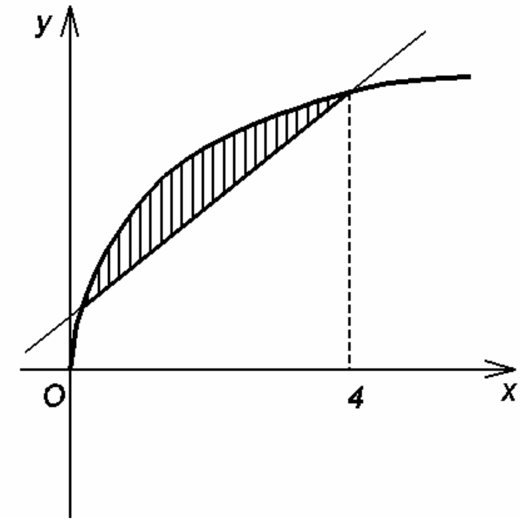
Конечно, $\int(\ln x-\ln^2 x)dx=(\ln x-\ln^2 x)x-3x+2x\ln x+C$.

За вредноста на определениот интеграл добиваме

$$\int_{1}^{e}(\ln x-\ln^2 x)dx=((\ln x-\ln^2 x)x-3x+2x\ln x)\Big|_{1}^{e}=3-e.\ \bullet$$

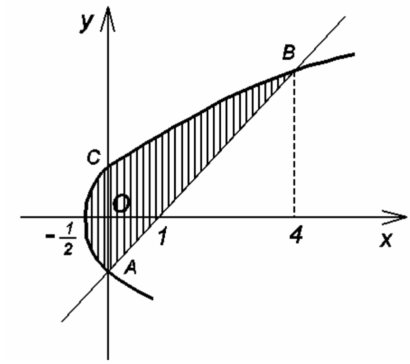
2.49. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со лакот на параболата $y=2\sqrt{x}$ и правата $y=\frac{4}{5}(x+1)$.

Решение. Дадените криви се сечат во точките $A\left(\frac{1}{4},1\right)$ и $B(4,4)$. Бараната плоштина е $P=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{4}\left[2\sqrt{x}-\frac{4}{5}(x+1)\right]dx=\frac{9}{8}$.



●

2.50. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со лакот на параболата $y=\sqrt{2x+1}$ и правата $y=x-1$.



Решение. Бараната плоштина е $P=P_1+P_2$, каде што P_1 е плоштината на ликот ограничен со лакот на параболата $y=\sqrt{2x+1}$ и $y-$оската, додека P_2 е плоштината на рамнинската фигура ограничена со лакот на параболата $y=\sqrt{2x+1}$ и правите $x=0$ и $y=x-1$.

При пресметувањето на плоштината P_1 земаме $y_1=-\sqrt{2x+1}$ и $y_2=\sqrt{2x+1}$. Така,

$$P_1=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\left[\sqrt{2x+1}-(-\sqrt{2x+1})\right]dx=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\left[\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+1}\right]dx=$$

$$=2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}dx=2\int\limits_{0}^{1}\sqrt{t}\frac{dt}{2}=\frac{2}{3}.$$

За пресметувањето на плоштината P_2 имаме $y_1 = x-1$ и $y_2 = \sqrt{2x+1}$, т.е,

$P_2 = \int_0^4 [\sqrt{2x+1} - (x-1)]dx = \int_0^4 \sqrt{2x+1}dx - \int_0^4 (x-1)dx$. Воведуваме смена: $t = 2x+1$.

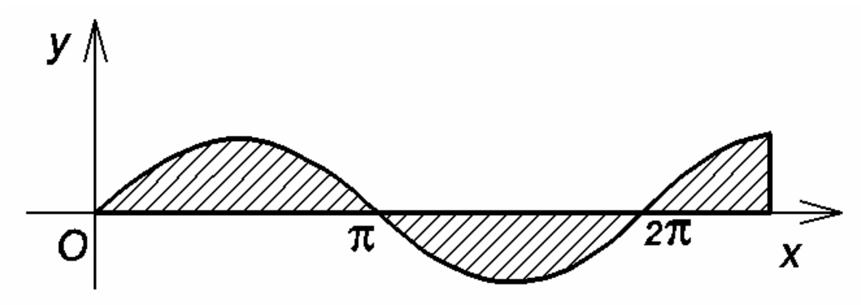
Тогаш, $dx = \frac{dt}{2}$ и границите се $t_1 = 2\cdot 0+1 = 1$ и $t_2 = 2\cdot 4+1 = 9$.

Така, добиваме $P_2 = \int_1^9 \sqrt{t}\frac{dt}{2} - \int_0^4 (x-1)dx = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} - \frac{12}{3} = \frac{14}{3}$.

Конечно, бараната плоштина е $P = P_1 + P_2 = \frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3}$. ●

2.51. Пресметај ја плоштината на рамнинската фигура ограничена со еден период на синусоидата $y = \sin x$ и апсцисната оска.

Решение.



Бараната плоштина $P = P_1 + P_2$ каде што P_1 е плоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = \sin x$ и правите $x = 0$ и $x = \pi$, т.е. $P_1 = \int_0^{\pi} (\sin x - 0)dx = \int_0^{\pi} \sin x dx$, а P_2 е плоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = 0$ и правите $x = \pi$ и $x = 2\pi$, т.е.

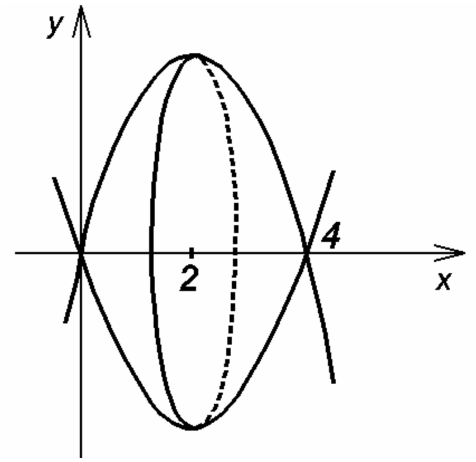
$P_2 = \int_{\pi}^{2\pi} [0 - \sin x]dx = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$.

Тогаш $P = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.$ ●

2.52. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со параболата $y = 4x - x^2$ и апсцисната оска околу $x-$ оската.

Решение. Од условот на задачата имаме $y_1(x)=0$ и $y_2=4x-x^2$. За волуменот на вртливото тело добиваме $V=\pi\int\limits_0^4\left[(4x-x^2)^2-0\right]dx=$

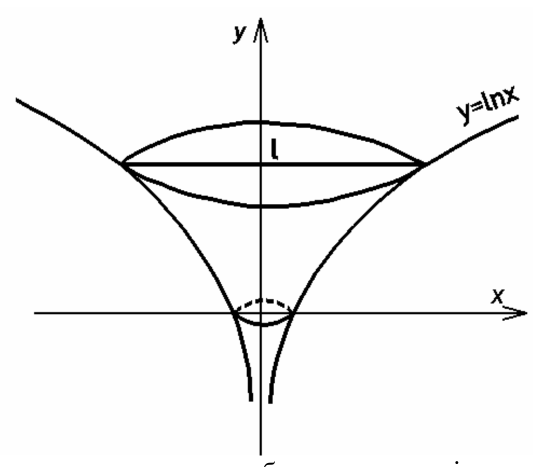
$\pi\int\limits_0^4(16x^2-8x^3+x^4)dx=\pi\left(16\frac{x^3}{3}-8\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^4=\frac{512}{15}\pi$.



●

2.53. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на делот од рамнината ограничен со $y=\ln x$, $x=0$, $y=0$ и $y=1$ околу $y-$оската.

Решение:



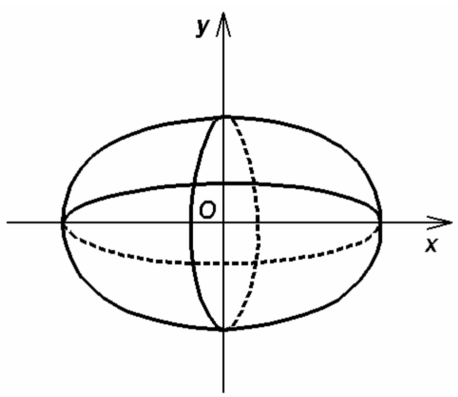
Волуменот на телото кое се добива со ротација на делот од рамнината околу $y-$оската, е $V=\pi\int\limits_0^1\left(e^y\right)^2dy=\pi\int\limits_0^1 e^{2y}dy=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^2 e^t dt=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$. ●

2.54. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ околу:

а) $x-$ оската;

б) $y-$ оската.

Решение:



Телото што се добива со ротација на елипса околу својата голема или мала оска се вика ротационен елипсоид.

а) Од $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имаме $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. Волуменот на телото добиено со ротација на елипсата околу $x-$ оската е

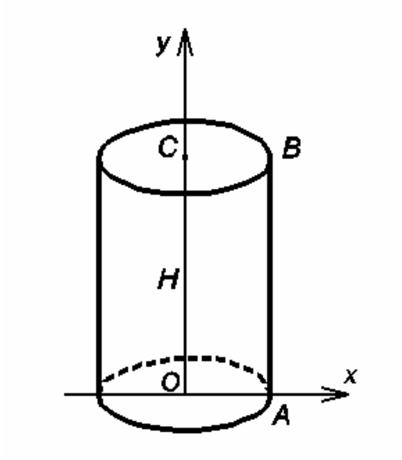
$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2dx=\frac{b^2}{a^2}\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}ab^2\pi .$$

б) Слично како под а), волуменот на телото добиено со ротација на елипсата околу $y-$ оската е

$$V=\pi\int_{-b}^{b} x^2dy=\frac{4}{3}a^2b\pi . \quad \bullet$$

2.55. Пресметај го волуменот на цилиндер со радиус R и висина H.

Решение. Цилиндерот на сликата, со радиус R и висина H, се добива со ротација на правоаголникот $OABC$ околу $y-$ оската. Равенката на правата AB е $x=R$, па бараниот волумен е $V=\pi\int_{0}^{H} x^2dy=\pi\int_{0}^{H} R^2dy=R^2\pi H$.

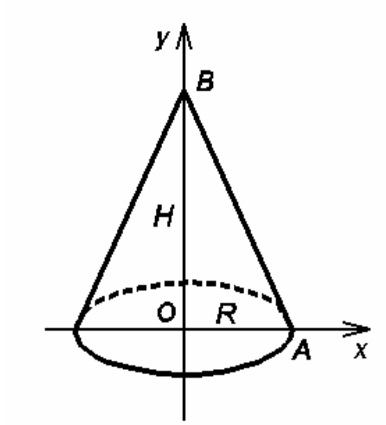


●

2.56. Најди ја формулата за пресметување на волумен на конус.

Решение. Конусот се добива со ротација на правоаголниот триаголник OAB околу $y-$оската. Равенката на правата AB е $\frac{x}{R}+\frac{y}{H}=1$ и таа ротира околу $y-$оската, па волуменот на конусот е

$$V=\pi\int_0^H x^2 dy=\pi\int_0^H R^2\left(1-\frac{y}{H}\right)^2 dy=\frac{R^2\pi H}{3}.$$

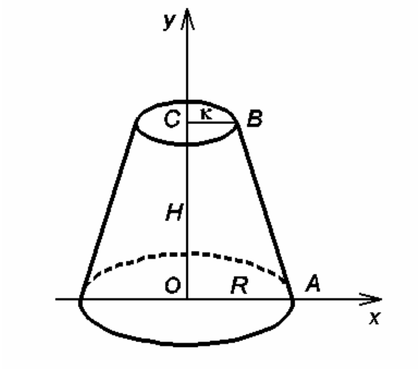


●

2.57. Најди ја формулата за пресметување на волумен на пресечен конус.

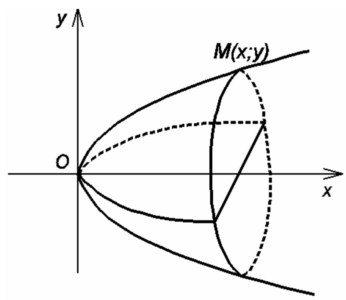
Решение: Пресечен конус е ротационо тело кое што се добива со ротација на правоаголниот трапез $OABC$ со основи R и r и висина H, околу $y-$оската.

Бидејќи точките A и B имаат координати $A(R,0)$ и $B(r,H)$, равенката на правата AB е $x=\frac{r-R}{H}y+R$. Бараниот волумен е $V=\pi\int_0^H x^2dy=\pi\int_0^H\left(\frac{r-R}{H}y+R\right)^2dy.$ Воведуваме смена $\frac{r-R}{H}y+R=z$, тогаш $dy=\frac{H}{r-R}dz$, а границите на интегрирање се $z_1=R$ и $z_2=r$. Така, имаме $V=\pi\frac{H}{r-R}\int_R^r z^2dz=\pi\frac{H}{R-r}\int_r^R z^2dz=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$



●

2.58. Пресметај го волуменот на телото добиено со ротација на фигурата ограничена со дел од параболата $y^2=2px$ и правите $x=a$ и $y=0$ околу $x-$ оската.



Решение: Телото добиено со ротација на фигурата ограничена со дел од параболата $y^2=2px$ околу својата оска на симетрија, се вика ротационен параболоид.

Неговиот волумен е $V=\pi\int_0^a 2pxdx=\pi pa^2.$ ●

2.59. Пресметај ја должината L на делот од графикот на функцијата $y=x^2$ од $O\left(0,0\right)$ до $A\left(1,1\right)$.

Решение. Имаме $y'=2x$, па

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(2x\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{4}.$$ ●

1.3. Несвојствени интеграли

Несвојствени интеграли со бесконечна граница

Нека функцијата $f(x)$ е определена на $\left[a,\infty\right)$ и е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $\left[a,\infty\right)$ и нека постои конечен лимес $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_a^x f(t)dt$. Тогаш овој реален број се нарекува несвојствен интеграл на $f(x)$ на $\left[a,\infty\right)$ и се означува со $\int\limits_a^\infty f(t)dt$, т.е. $\int\limits_a^\infty f(t)dt=\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_a^x f(t)dt$.

Слично, ако $f(x)$ е определена на интервалот $\left(-\infty,b\right]$, интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $\left(-\infty,b\right]$ и ако постои конечен лимес $\lim\limits_{x\to-\infty}\int\limits_x^b f(t)dt$, тогаш $\int\limits_{-\infty}^b f(t)dt=\lim\limits_{x\to-\infty}\int\limits_x^b f(t)dt$.

За $f(x)$ определена на $\left(-\infty,\infty\right)$ и интеграбилна на $\left(-\infty,c\right]$ и $\left[c,\infty\right)$ по дефиниција $\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^c f(t)dt+\int\limits_c^\infty f(t)dt$

Критериуми за конвергенција

(I) Нека $0\le f(x)\le g(x)$, $\forall x\in[a,\infty)$ и нека f,g се интеграбилни на секој $[a,b]$, $b<\infty$. Тогаш:

а) Од конвергенцијата на $\int\limits_a^\infty g(x)dx$, следува конвергенција и на $\int\limits_a^\infty f(x)dx$;

б) Од дивергенцијата на $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ следува дивергенција и на $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

(II) Нека $f(x)\geq 0,\ g(x)>0,\ \forall x\in[a,\infty)$ и нека f,g се интеграбилни на секој $[a,b],\ b<\infty$.

Ако $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k,\ 0<k<\infty,$ тогаш $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ конвергираат или дивергираат истовремено.

б) Ако $k=\lim\limits_{k\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ тогаш од конвергенција на $\int\limits_a^b g(x)dx$ следува конвергенција на $\int\limits_a^b f(x)dx$.

в) Ако $k=\infty$ тогаш од дивергенција на $\int\limits_a^b g(x)dx$ следува дивергенција на $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Критериум на Коши. Нека $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $[a,\infty)$. Тогаш тврдењата а) и б) се еквивалентни, каде:

а) Интегралот $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ конвергира.

б) За секој $\varepsilon>0$, постои $b\geq a$ т.ш. за сите $b_{1,}b_2\in[b,\infty)$ да е исполнето

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon .$$

Од критериумот за конвергенција (I): Ако $|f(x)|\leq g(x),\ \forall x\in[a,\infty)$ и ако конвергира $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ тогаш конвергира и интегралот $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, ја имаме следната последица.

<u>Последица.</u> Ако конвергира интегралот $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$, тогаш конвергира и интегралот $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

(Ова важи бидејќи $f(x)\leq|f(x)|$, за секој реален број x)

Ако $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ конвергира велиме $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ конвергира апсолутно. Конечно точно е

Последица. Ако $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ конвергира апсолутно, тогаш тој конвергира.

Ако $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ конвергира, а $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ дивергира велиме $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$ **условно** конвергира.

Критериум на Дирихле. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се функции определени на $[a,+\infty)$ т.ш.

(1) $f(x)$ непрекината на $[a,+\infty)$ и $(\exists M\in\mathbb{R})$ $\left|\int\limits_a^{b}f(x)dx\right|\leq M$ $(\forall b>a)$

(2) функцијата $g(x)\geq 0,\ x\in[a,\infty)$, $g(x)$ монотоно опаѓа, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ и g има непрекинат извод.

Тогаш интегралот $\int\limits_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ конвергира.

Несвојствен интеграли со конечна граница

Нека функцијата $f(x)$ е определена на $[a,b)$ и е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $[a,b)$ и нека постои конечен лимес $\lim\limits_{x\to b}\int\limits_a^{x}f(t)dt$. Тогаш овој реален број се нарекува несвојствен интеграл на $f(x)$ на $[a,b)$ и се означува со $\int\limits_a^{b}f(t)dt$, т.е. $\int\limits_a^{b}f(t)dt=\lim\limits_{x\to b^-}\int\limits_a^{x}f(t)dt$.

Слично, ако $f(x)$ е определена на полуотворен интервал $(a,b]$, интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $(a,b]$ и ако постои конечен лимес $\lim\limits_{x\to a}\int\limits_x^{b}f(t)dt$, тогаш $\int\limits_a^{b}f(t)dt=\lim\limits_{x\to a^+}\int\limits_x^{b}f(t)dt$.

За $f(x)$ определена на (a,b) и интеграбилна на $(a,c]$ и $[c,b)$ по дефиниција

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Критериуми за конвергенција

(I) Нека $0 \le f(x) \le g(x)$, за сите $x \in [a,b)$ и нека f, g се определени на $[a,b)$ и интеграбилни на секој $[a,\xi)$, $\xi < b$. Тогаш:

а) Од конвергенцијата на $\int_a^b g(x)dx$ следува конвергенција и на $\int_a^b f(x)dx$.

б) Од дивергенцијата на $\int_a^b f(x)dx$ следува дивергенција и на $\int_a^b g(x)dx$.

(II) а) Ако $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ за сите $x \in [a,b)$ и ако постои $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ и притоа $0 < k < \infty$, тогаш следува дека интегралите $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ имаат иста природа на конвергенција, т.е. конвергираат или дивергираат истовремено.

б) Ако $k = \lim\limits_{k \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ тогаш од конвергенција на $\int_a^b g(x)dx$ следува конвергенција на $\int_a^b f(x)dx$.

в) Ако $k = \infty$ тогаш од дивергенција на $\int_a^b g(x)dx$ следува дивергенција на $\int_a^b f(x)dx$.●

2.60. Испитај ја конвергенцијата на интегралот $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$, $a > 0$, во зависност од реалниот број $\alpha > 0$.

Решение. (i) Нека $\alpha > 0$ и $\alpha \ne 1$. Тогаш имаме

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_a^b=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha})=$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\Big(\lim_{b\to\infty}b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}\Big)==\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}\infty-a^{1-\alpha}\ , \ \alpha<1\\ 0-a^{1-\alpha}\ , \ \alpha>1\end{cases}=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}\infty, \ \alpha<1\\ -a^{1-\alpha}, \ \alpha>1\end{cases}$$

Заклучуваме дека за $0<\alpha<1$, интегралот $\int_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ дивергира, а за $\alpha>1$, интегралот конвергира и важи $\int_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

(ii) Нека $\alpha=1$. Тогаш имаме

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_a^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln a)=\infty-\ln a=\infty,$$ т.е. следува дека за $\alpha=1$, интегралот $\int_a^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ дивергира.

Да забележиме дека овој интеграл дивергира и за $\alpha\le 0$.●

2.61. Пресметај ги интегралите или утврди ја нивната дивергенција:

а) $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx$; б) $\int_0^{\infty}\cos 2x dx$; в) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+x^2}dx$; г) $\int_0^{\infty}x\sin x dx$.

Решение. а) Од

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{1}{x^2-1}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)\bigg|_2^b=\lim_{b\to\infty}\Big[\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{b-1}{b+1}\Big)-\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1}{3}\Big)\Big]$$ и при $b\to\infty$,

$\frac{b-1}{b+1}\to 1$, па $\lim_{b\to\infty}\ln\frac{b-1}{b+1}=\ln 1=0$, од каде следува дека

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=+\frac{1}{2}\Big(0-\ln\frac{1}{3}\Big)=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3,$$ т.е. $\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{\ln 3}{2}$.

б) Заради

$$\int_0^{\infty}\cos 2x dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\cos 2x dx=\lim_{b\to\infty}\frac{\sin 2x}{2}\bigg|_0^b=\lim_{b\to\infty}\Big(\frac{\sin 2b}{2}-\frac{\sin 2\cdot 0}{2}\Big)=\lim_{b\to\infty}\frac{\sin 2b}{2}$$ и заради фактот дека $\lim_{x\to\infty}\sin x$ не постои, следува дека интегралот $\int_0^{\infty}\cos 2x dx$ дивергира.

в) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{a^2+x^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+x^2}dx=$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{1}{a^2+x^2}dx+\lim_{c\to\infty}\int_0^c\frac{1}{a^2+x^2}dx=$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_b^0+\lim_{c\to\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^c=$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\lim_{b\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}(0)-\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)\right]+\lim_{c\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{a}\right)-\operatorname{arctg}0\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}\left\{\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\left[\frac{\pi}{2}-0\right]\right\}=\frac{1}{a}\cdot 2\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{a}.$$

г) Се остава на читателот. ●

2.62. Испитај ја конвергенцијата на следните интеграли:

а) $\int\limits_1^\infty\frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$; б) $\int\limits_1^\infty\frac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}dx$; в) $\int\limits_1^\infty\frac{1}{x+\sin^2 x}dx$;

г) $\int\limits_1^\infty\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$; д) $\int\limits_3^\infty\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x-2)}}dx$.

Решение.

а) За $x\in[1,\infty)$ важи $0\le\frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$. Бидејќи $\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}dx$ конвергира (задача 2.60., за $\alpha=\frac{4}{3}>1$) и заради (I) следува дека и интегралот $\int\limits_1^\infty\frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$ конвергира.

б) Нека $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и $x\in[1,\infty)$. Тогаш имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{4x+\ln x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{4+\frac{\ln x}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}}=\sqrt{\frac{1}{4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}=k,\ 0<k<\infty.$$

Заради (II) следува дека интегралите $\int\limits_1^\infty\frac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}dx$ и $\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ имаат иста природа на конвергенција, а како интегралот $\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ дивергира (задача 2.60. за $\alpha=\frac{1}{2}<1$) следува дека и интегралот $\int\limits_1^\infty\frac{1}{\sqrt{4x+\ln x}}dx$ дивергира.

в) Бидејќи $\frac{1}{x+\sin^2 x}>\frac{1}{x+1}>0$, за сите $x\in[1,\infty)$ и бидејќи

$\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x+1}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{1}{x+1}dx=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln(b+1)-\ln 2)=\infty$, т.е. интегралот $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x+1}dx$

дивергира, заради (I) следува дека и интегралот $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x+\sin^2 x}dx$ дивергира. ●

г) Нека $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ и $x\in[1,\infty)$. Заради

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arctg}x}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}=k,\ 0<k<\infty$ и заради (II) следува дека

интегралите $\int\limits_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$ и $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ имаат иста природа на конвергенција. Бидејќи

интегралот $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ дивергира (задача 2.60), следува дека и интегралот $\int\limits_1^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$

дивергира.

д) Нека $x\in[3,\infty)$ и нека $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ и $g(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$. Ќе го

одредиме α така што $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ биде конечен број различен од 0. Од

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}}$$

следува дека за $\alpha=\frac{3}{2}$, а тогаш $g(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}}=1=k \text{ и } 0<k<\infty .$$

Сега заради тоа што $\int\limits_3^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ конвергира и од (II) следува дека и интегралот

$\int\limits_3^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x+1)(x-2)}}dx$ конвергира.

Забелешка. Во сите случаи од оваа задача позитивноста на подинтегралните функции и на новодадените функции (онаму каде што не беше проверена) е јасна и се остава на читателот да ја утврди. ●

2.63. Докажи дека интегралот $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}dx$ дивергира за реалниот број $0<\alpha\le 1$.

Решение. Согласно критериумот на Коши, за да ја решиме задачата, треба да го докажеме следното:

$$\exists\varepsilon>0,\ \text{т.ш.}\ \forall b\geq 1,\ \exists b_1,b_2>b\ \ \text{така што}\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|\geq\varepsilon \qquad (*)$$

Нека $\varepsilon=\frac{1}{4}$ и нека $b\in(1,\infty)$ е произволно избран. Тогаш, заради Архимедовото својство, постои $n\in N$ т.ш. $\pi\cdot n>b$. За $b_1=n\pi>b,\ b_2=2n\pi>b$, имаме

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|=\left|\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx\right|=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx\,.$$

Бидејќи $x\in[n\pi,2n\pi],\ \alpha\leq 1$, важи $x^\alpha\leq x,\ \frac{1}{x^\alpha}\geq\frac{1}{x}$, па добиваме

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|=\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx\geq\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx>\frac{1}{2n\pi}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 x dx=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_{n\pi}^{2n\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2n\pi}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_{n\pi}^{2n\pi}=$$

$$=\frac{1}{4n\pi}(2n\pi-0-n\pi+0)=\frac{n\pi}{4n\pi}=\frac{1}{4}=\varepsilon$$

Значи $\exists\varepsilon>0,\ \varepsilon=\frac{1}{4}$ т.ш. $\forall b>1\ \exists b_1=n\pi,\ b_2=2n\pi,\ b_1,b_2>b$ за кои $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|\geq\varepsilon$

т.е (*) е исполнето, па согласно критериумот на Коши, заклучуваме дека $\int_1^\infty\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx$ дивергира за $0<\alpha\leq 1$.●

2.64. Докажи дека интегралот $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ условно конвергира.

Решение. Треба да докажеме дека $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ конвергира, а $\int_1^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ дивергира. Од $\int_a^\infty udv=\lim_{x\to\infty}u(x)v(x)-u(a)v(a)-\int_a^\infty vdu$ и ставајќи, во интегралот $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx$, $u=\frac{1}{x},\ dv=\sin xdx$ имаме $du=-\frac{1}{x^2}dx,\ v=-\cos x$, од каде се добива

$$\int_1^\infty\frac{\sin x}{x}dx=-\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^\infty-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}dx=\frac{\cos 1}{1}-\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}dx=$$

$$=\cos 1-0-\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx,$$

т.е добивме дека

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\cos 1-\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx \qquad (1)$$

Да ја одредиме природата на интегралот $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$.

Од $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|<\frac{1}{x^2},\ \forall x\in[1,\infty)$, конвергенцијата на интегралот $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ и критериумот (I), следува дека и

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx \text{ конвергира} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx \text{ конвергира} \qquad (3)$$

Да ја испитаме сега конвергенцијата на интегралот $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$.

Од $x\in[1,\infty)$ имаме $\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\frac{|\sin x|}{|x|}=\frac{|\sin x|}{x}>\frac{|\sin x|^2}{x}=\frac{\sin^2 x}{x}$. Бидејќи $\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ дивергира (задача 2.63.), заради критериумот (I) добиваме дека

$$\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \text{ дивергира} \qquad (4)$$

Од (3) и (4) следува условна конвергенција на $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. ●

2.65. Испитај апсолутна и условна конвергенција на $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$, за реалниот број $\alpha>0$.

Решение.

(I) Нека $\alpha>1$ и нека $x\in[1,+\infty)$. Тогаш од $\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right|\le\frac{1}{x^{\alpha}}$ и конвергенцијата на интегралот $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ за $\alpha>1$ (задача 2.60.), заради критериумот (I), следува дека интегралот $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ конвергира.Значи, интегралот $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, за $\alpha > 1$, апсолутно конвергира.

(II) Нека $0 < \alpha \leq 1$ и нека $x \in [1, +\infty)$. Ќе покажеме условна конвергенција на интегралот $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$.

За функциите $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, имаме:

(1) Функцијата f е непрекината на $[1, +\infty)$ (а)

Од $\left|\int_1^b \sin x dx\right| = \left|-\cos x\Big|_1^b\right| = \left|\cos 1 - \cos b\right| \leq \left|\cos 1\right| + \left|\cos b\right| \leq 1 + 1 = 2$, за секој $b > 1$, следува

Постои $M = 2 > 0$ така да важи $\left|\int_1^b f(x) dx\right| \leq M$ (б)

(2) $g(x) \geq 0,\ \forall x \in [1, +\infty)$ (в)

Од $g'(x) = -\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}} < 0$, за сите $x \in [1, +\infty)$, следува дека

g монотоно опаѓа на $[1, +\infty)$ (г)

Уште важи $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ и $g'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ е непрекината на $[1, +\infty)$, т.е.

$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ и g има непрекинат извод на $[1, +\infty)$ (д)

Од (а), (б), (в), (г) и (д), следува дека се исполнети условите од критериумот на Дирихле, па значи дека

Интегралот $\int_1^\infty f(x) g(x) dx = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx,$ за $0 < \alpha \leq 1$ конвергира (*)

Понатаму, за $x \in [1, \infty)$, имаме $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| = \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$. Бидејќи интегралот $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}$ дивергира за $0 < \alpha \leq 1$ (заради задача 2.63), од критериумот (I), следува дека и

Интегралот $\int\limits_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right|dx,\ \ 0<\alpha\leq 1$ дивергира (**)

Од (*) и (**) следува условна конвергенција на $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ за $0<\alpha\leq 1$.●

2.66. Пресметај ги интегралите или утврди ја нивната дивергенција:

а) $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;   б) $\int\limits_0^1 \ln x dx$;

в) $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx$, каде $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x<0\\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$ г) $\int\limits_{-1}^1\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение.

а) Функцијата $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ е определена на $[0,1)$, но не и во 1, и е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $[0,1)$. Од дефиницијата имаме

$$\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\xi\to1^-}\int\limits_0^{\xi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\lim_{\xi\to1^-}\arcsin x\Big|_0^{\xi}=\lim_{\xi\to1^-}(\arcsin\xi-0)=\frac{\pi}{2},$$

па значи дека $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}$.

б) Функцијата $f(x)=\ln x$ е определена на $(0,1]$, но не и во 0, и е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $(0,1]$. Од дефиницијата имаме

$$\int\limits_0^1\ln x dx=\lim_{\varsigma\to0^+}\int\limits_{\varsigma}^1\ln x dx=\lim_{\varsigma\to0^+}(x\ln x-x)\Big|_{\varsigma}^1=\lim_{\varsigma\to0^+}(-1-\varsigma\ln\varsigma+\varsigma)=-1-\lim_{\varsigma\to0^+}\frac{\ln\varsigma}{\frac{1}{\varsigma}}+0=$$

$$=-1-\lim_{\varsigma\to0^+}\frac{\frac{1}{\varsigma}}{-\frac{1}{\varsigma^2}}=-1-0=-1,$$ т.е. $\int\limits_0^1\ln x dx=-1$.

в) Функцијата $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x<0\\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$ е определена на $[-1,1]\setminus\{0\}$ и е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $[-1,0)$ и $(0,1]$. Од дефиницијата имаме

$$\int\limits_{-1}^1 f(x)dx=\int\limits_{-1}^0 f(x)dx+\int\limits_0^1 f(x)dx=\lim_{\xi\to0^-}\int\limits_{-1}^{\xi}f(x)dx+\lim_{\eta\to0^+}\int\limits_{\eta}^1 f(x)dx=$$

$$=\lim_{\xi\to 0^-}\int_{-1}^{\xi}\frac{1}{x^2}dx+\lim_{\eta\to 0^+}\int_{\eta}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\xi\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{\xi}\right)+\lim_{\eta\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\big|_{\eta}^{1}\right)=$$

$$=\lim_{\xi\to 0^-}\left(-\frac{1}{\xi}+1\right)+\lim_{\eta\to 0^+}(2\cdot 1-2\sqrt{\eta})=\infty\ .$$

Заклучуваме дека интегралот $\int_{-1}^{1}f(x)dx$ дивергира.

г) Се остава на читателот. ●

2.67. За реалниот број $\lambda>0$, испитај ја конвергенцијата на следните интеграли:

а) $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^\lambda}dx$; б) $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^\lambda}dx$.

Решение. Функцијата $f(x)=\dfrac{1}{(b-x)^\lambda}$ е определена на $[a,b)$, но не и во $x=b$, и е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $[a,b)$.

1) Нека $\lambda>0$ и нека $\lambda\neq 1$. Тогаш имаме

$$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^\lambda}dx=\lim_{\xi\to b^-}\int_a^{\xi}\frac{1}{(b-x)^\lambda}dx=\lim_{\xi\to b^-}\left(-\frac{(b-x)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right\|_a^{\xi}=$$

$$=\lim_{\xi\to b^-}\frac{1}{\lambda-1}\left((-\xi+b)^{1-\lambda}-(b-a)^{1-\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda-1}\left(\lim_{\xi\to b^-}(-\xi+b)^{1-\lambda}-(b-a)^{1-\lambda}\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda},\ 0<\lambda<1\\ \infty\ ,\ \lambda>1\end{cases}.$$

Значи, за $\lambda>1$ интегралот $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^\lambda}dx$ дивергира, а за $0<\lambda<1$ интегралот $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^\lambda}dx$ конвергира и важи $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^\lambda}dx=\frac{1}{\lambda-1}(b-a)^{1-\lambda}$.

2) Нека $\lambda=1$. Тогаш

$$\int_a^b\frac{1}{(b-x)}dx=\lim_{\xi\to b^-}\int_a^{\xi}\frac{1}{(b-x)}dx=-\lim_{\xi\to b^-}\left(\ln|b-x|\big|_a^{\xi}\right)=$$

$$=-\lim_{\xi\to b^-}(\ln|b-\xi|-\ln|b-a|)=\infty\ .$$

Заклучуваме дека интегралот $\int\limits_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}dx$ за $\lambda=1$ дивергира.

б) Се остава начитателот. ●

2.68. Пресметај го интрграллот $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$.

Решение. Прво ќе утврдиме конвергенција на дадениот интрегрaл.

Функцијата $f(x)=\ln\sin x$ е определена на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, но не и во 0, и е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ставајќи, во интегралот $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$, $u=\ln\sin x,\ dv=dx$, добиваме $du=\frac{\cos x}{\sin x}dx,\ v=x$, па оттука имаме

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = x\ln\sin x\Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx = \frac{\pi}{2}\cdot 0 - \lim_{\xi\to 0^+}\xi\ln\sin\xi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx =$$

$$= 0 - \lim_{\xi\to 0^+}\frac{\ln\sin\xi}{\frac{1}{\xi}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx = +\lim_{\xi\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sin\xi}\cdot\cos\xi}{\frac{1}{\xi^2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx =$$

$$= \lim_{\xi\to 0^+}(\xi\cos\xi)\frac{1}{\frac{\sin\xi}{\xi}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx = 0\cdot 1 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx = -\int\limits_0^{\pi/2} x\operatorname{ctg} x dx .$$

Добивме

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx \qquad (*)$$

Од определеноста на $g(x)=x\operatorname{ctg} x$ на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ и од

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \cos 0\cdot\frac{1}{1} = 1 ,$$

следува дека функцијата $g(x)=x\operatorname{ctg} x$ е определена на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, па заради (*), интегралот $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$ конвергира.

Нека J=$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$. Ставајќи $x=2t,\ dx=2dt$, добиваме

J$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cos t)dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt$.Сега ставајќи, во интегралот $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt$, $t=\frac{\pi}{2}-u,\ dt=-du$, добиваме

$$\text{J}=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du=$$

$$=2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u du=\frac{\pi}{4}2\ln 2+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt=\frac{\pi\ln 2}{2}+2\cdot\text{J}.$$

Конечно добивме J=2J+$\frac{\pi\ln 2}{2}$, од каде следува J$=-\frac{\pi\ln 2}{2}$. ●

2.69. Испитај ја конвергенција на интегралите:

а) $\int\limits_0^1\frac{\cos^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_0^1\frac{1}{1-x^3}dx$; в) $\int\limits_0^8\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$;

г) $\int\limits_0^2\frac{1}{x-\sin x}dx$; д) $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x^4}}dx$.

Решение. а) За $x\in(0,1]$ важи $0\le\frac{\cos^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$. Интегралот $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^1 x^{1/2}$ конвергира (заради задача 2.67., за $\lambda=\frac{1}{2}<1$), па заради критериумот (I) , следува конвергенција и на интегралот $\int\limits_0^1\frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$.

б) Нека $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$, $g(x)=\frac{1}{1-x}$ и нека $x\in[0,1)$. Тогаш имаме

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}}{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{3}=k$ и $0<k<\infty$, од каде заради критериумот (II), следува дека интегралите $\int\limits_0^1\frac{1}{1-x^3}dx$ и $\int\limits_0^1\frac{1}{1-x}dx$ имаат иста природа на конвергенција. Како интегралот $\int\limits_0^1\frac{1}{1-x}dx$ дивергира (задача 2.67., за $\lambda=1$) следува дека и интегралот $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}dx$ дивергира.

в) Заради $0 \leq \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, за сите $x \in (0,8]$, конвергенцијата на $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ (задача 2.67, за $\lambda=\frac{1}{3}<1$) и критериумот (I), следува дека и интегралот $\int_0^8 \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$ конвергира.

г) Нека $f(x)=\frac{1}{x-\sin x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ и нека $x \in (0,2]$.

Од $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x-\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{0}=\infty$, дивергентноста на интегралот $\int_0^2 \frac{1}{x}dx$ (задача 2.67.) и критериумот (II), следува дека интегралот $\int_0^2 \frac{1}{x-\sin x}dx$ дивергира.

д) Нека $x \in [0,1)$, $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x^4}}$ и $g(x)=\frac{1}{(1-x)^{\lambda}}$. Притоа λ го определуваме така што $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}$ биде конечен реален број различен од 0.

Од $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{\frac{x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}}{\frac{1}{(1-x)^{\lambda}}}\overset{\lambda=\frac{1}{2}}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}=k, \quad 0<k<\infty$,

конвергенцијата на $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}dx$ (задача 2.67.) и критериумот (II), следува дека интегралот $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}dx$ конвергира. ●

III. БРОЈНИ РЕДОВИ

3.1. Дефиниција и својства на конвергентни редови

Нека $\left(a_n\right)$ е дадена низа реални броеви. Со помош на низата $\left(a_n\right)$ индуктивно дефинираме низа $\left(S_n\right)$:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

....

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$

Подредената двојка $\left(\left(a_n\right),\left(S_n\right)\right)$ од низите $\left(a_n\right)$ и $\left(S_n\right)$ ја викаме **броен ред**, и за ознака на ред го користиме формалниот израз

$a_1 + a_2 + ...a_n + ...$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Броевите $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ **се членови на редот.** Збирот на првите $n-$члена на редот се нарекува $n-$**та парцијална сума на редот** и се означува со S_n, односно

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$

Ако постои границата $\lim_{n\to\infty} S_n = S,\ -\infty < S < +\infty$

велиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **конвергира**, а бројот S се нарекува негов **збир** или **сума** и пишуваме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Во спротивно велиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **дивергира**.

Ако во редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ги отфрлиме првите $n-$члена добиваме нов ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ кој се вика **остаток** на дадениот ред и се означува со r_n.

1. Редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако низата парцијални суми (S_n) е Кошиева, односно за секое $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што важи

$$(\forall n \geq n_0)\,(\forall p \in \mathbb{N})\ \left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

2. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира тогаш $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

3. Ако редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ се конвергентни, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha a_n \pm \beta b_n\right)$, каде α и β се реални броеви, конвергира и притоа важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha a_n \pm \beta b_n\right) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Збир (разлика) на конвергентен и дивергентен ред е дивергентен ред.

3.1. Најди барем една формула за општиот член a_n на следните редови:

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots;$ б) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \ldots;$ в) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots;$

г) $\frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \frac{27}{4} + \frac{64}{5} + \ldots;$ д) $\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \ldots;$ ѓ) $\frac{2}{3} + \frac{6}{8} + \frac{24}{15} + \frac{120}{24} + \ldots$

Решение. а) $a_n = \frac{1}{2n-1};$ б) $a_n = \frac{2n}{3n+2};$ в) $a_n = (-1)^{n+1};$

г) $a_n = \frac{n^3}{n+1};$ д) $a_n = \frac{n^2}{2^n};$ ѓ) $a_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2 - 1}.$ ●

3.2. Напиши ги првите пет члена на редот со општ член a_n ако:

а) $a_n = \frac{3n-2}{n^2+1};$ б) $a_n = (-1)^{n-1};$ в) $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n};$

г) $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2};$ д) $a_n = \frac{\left(2 + \sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!};$ ѓ) $a_n = \sqrt{\frac{3n+4}{5n+1}};$

е) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n;$ ж) $a_n = \frac{(-1)^n n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}};$ з) $a_n = \frac{1}{[3 + (-1)^n]^n}.$

Решение. а) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{4}{5}, \quad a_3 = \frac{7}{10}, \quad a_4 = \frac{10}{17}, \quad a_5 = \frac{1}{2};$

б) $a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = 1;$

в) $a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{3}{8}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = -\frac{5}{32};$

г) $a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{9}, \quad a_4 = \frac{3}{16}, \quad a_5 = \frac{1}{25};$

д) $a_1 = -3, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{12}, \quad a_5 = -\frac{1}{40};$

ѓ) $a_1 = \sqrt{\frac{7}{6}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{10}{11}}, \quad a_3 = \frac{\sqrt{13}}{4}, \quad a_4 = \frac{4}{\sqrt{21}}, \quad a_5 = \sqrt{\frac{19}{26}};$

е) $a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{9}, \quad a_3 = \frac{1}{8}, \quad a_4 = \frac{81}{625}, \quad a_5 = \frac{32}{243};$

ж) $a_1 = -\frac{1}{3\sqrt[4]{2}}, \quad a_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}, \quad a_3 = -\frac{3}{5\sqrt[4]{4}}, \quad a_4 = \frac{2}{3\sqrt[4]{5}}, \quad a_5 = -\frac{5}{7\sqrt[4]{6}};$

з) $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{16}, \quad a_3 = \frac{1}{8}, \quad a_4 = \frac{1}{256}, \quad a_5 = \frac{1}{32}.$ ●

3.3. Најди ја формулата за општиот член a_n, парцијалната сума S_n и остатокот r_n на геометрискиот ред $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots.$ а потоа испитај ја неговата конвергенција.

Решение. Општиот член $a_n = q^{n-1}$.

Низата парцијални суми $S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, за $q \neq 1$ и $S_n = n$ за $q = 1$,

а остатокот $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k-1}$.

Понатаму

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, за $|q| < 1$ и $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ или не постои, за $|q| \geq 1$.

Според тоа геометрискиот ред конвергира за $|q| < 1$ и дивергира за $|q| \geq 1$. ●

3.4. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и најди ја неговата сума, ако:

а) $a_n = \frac{1}{n(n+1)};$ б) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)};$ в) $a_n = \frac{1}{n^2 + 2n};$

г) $a_n = \dfrac{1}{9n^2 - 3n - 2}$; д) $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$; ѓ) $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Решение. а) Од

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + ... + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

добиваме $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

Според тоа дадениот ред конвергира и неговата сума е $S = 1$.

б) Од

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+3)-n}{3n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= \frac{1}{3n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)},$$

следува дека

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}\right) = \frac{1}{18},$$

од каде што заклучуваме дека дадениот ред конвергира и неговата сума $S = \dfrac{1}{18}$.

в) Од $a_n = \dfrac{1}{n^2 + 2n} = \dfrac{1}{n(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$ добиваме дека

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}.$$

Разгледуваниот ред конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Неговата сума $S = \dfrac{3}{4}$.

г) Бидејќи

$$\frac{1}{9n^2-3n-2}=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right),$$

добиваме дека

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

Дадениот ред конвергира и неговата сума $S=\dfrac{1}{3}$.

д) Општиот член на дадениот ред е $a_n=\dfrac{2^{n+1}}{3^n}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Низата парцијални суми

$$S_n=2\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=4-4\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

од каде што следува дека

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(4-4\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)=4.$$

Дадениот ред конвергира и неговата сума $S=4$.

ѓ) Да воочиме дека $2n+1=(n+1)^2-n^2$. Заради тоа $a_n=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$, од каде што следува дека

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Тогаш

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1. \bullet$$

3.5. Најди ја низата парцијални суми S_n и сумата S на следниве редови:

а) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{25}+\ldots+\dfrac{2}{5^n}+\ldots;$

б) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)+\ldots;$

в) $\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots;$ г)

$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

Решение. а) За низата парцијални суми S_n на разгледуваниот ред имаме

$$S_n=\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\ldots+\frac{2}{5^n}=\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}\right)=\frac{2}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$$

од каде што следува дека

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{2}.$$

б) За низата парцијални суми S_n на разгледуваниот ред имаме

$$S_n=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right).$$

Тогаш за неговата сума имаме

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\right]=\frac{3}{4}.$$

в) Низата парцијални суми на дадениот ред гласи

$$S_n=\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}.$$

Неговата сума

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}.$$

г) Низата парцијални суми

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

За збирот на дадениот ред добиваме

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}. \; \bullet$$

3.6. Најди ја сумата на следниве редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^{n-1}}$;

ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

Решение. а) Заради

$$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

добиваме

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Од

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

следува дека сумата на дадениот ред е $S = \frac{1}{2}$.

б) Бидејќи

$$a_n = \frac{1}{16n^2-8n-3} = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$$

добиваме дека

$$S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right).$$

Од

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

следува дека сумата на дадениот ред е $S=\dfrac{1}{4}$.

в) Заради

$$a_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

добиваме дека

$$S_n = \ln\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}+\ln\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}+\ldots+\ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=$$

$$=\ln\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\ln\frac{n+1}{2n}.$$

Од

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n \ln\frac{n+1}{2n}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2,$$

следува дека сумата на дадениот ред е $S=-\ln 2$.

г) Бидејќи

$$a_n = \sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2^2}{2^n}-\sin\frac{2}{2^n}\right)$$

добиваме дека

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2^2}{2}-\sin\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2^2}{2^2}-\sin\frac{2}{2^2}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2^2}{2^n}-\sin\frac{2}{2^n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin 2-\sin\frac{2}{2^n}\right).$$

Од

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sin 2-\sin\frac{2}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\sin 2$$

следува дека сумата на дадениот ред е $S=\dfrac{1}{2}\sin 2$.

д) За $n\geq 3$:

$$S_n = 1-\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$2S_n = 2 - 3 + \frac{5}{2^1} - \frac{7}{2^2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-3}} + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-2}}.$$

Тогаш од

$$3S_n = \frac{5-3}{2^1} - \frac{7-5}{2^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)-(2n-3)}{2^{n-2}} + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-3}} + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

добиваме дека

$$S_n = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}\right) + \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

Според тоа сумата на дадениот ред е

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{9}\left(1 - \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}\right) + \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{3\cdot 2^{n-1}}\right] = \frac{2}{9}.$$

ѓ) Општиот член на дадениот ред ќе го трансформираме во облик

$$a_n = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

Според тоа

$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

Тогаш

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = 1-\sqrt{2}. \bullet$$

3.7. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$, $|q|<1$, конвергира и најди ја неговата сума.

Решение. Бидејќи

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k$$

имаме

$$S_n - S_n q = (q + 2q^2 + \dots + nq^n) - (q^2 + 2q^3 + \dots + (n-1)q^n + nq^{n+1}) =$$

$$= q + q^2 + \dots + q^n - nq^{n+1}$$

од каде што следува $S_n(1-q) = \dfrac{q - q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1}$, т.е.

$$S_n = \frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}.$$

Од претпоставката $|q| < 1$ добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0$. Според тоа $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$

од каде што заклучуваме дека дадениот ред конвергира и неговата сума

$$S = \frac{q}{(1-q)^2}. \bullet$$

3.8. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^2 + n + 1}$.

Решение. Од

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + n(n+1)} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n(n+1)}} = ar\operatorname{ctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}$$

добиваме дека

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k+1} \right) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}.$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \right) = \frac{\pi}{4}$$

дадениот ред конвергира и негoват сума $S = \dfrac{\pi}{4}. \bullet$

3.9. Најди ја сумата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x_n}$, ако $x_1 = a > 1$ и $x_{n+1} = x_n{}^2 - x_n + 1$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)^2 \geq 0, \ \ n = 2, 3, \dots$$

од каде што заклучуваме дека низата $\left(x_n\right)$ е монотоно растечка. Ако низата е ограничена од горе тогаш таа е конвергентна, односно постои границата

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Од равенката $x = x^2 - x + 1$ добиваме дека $x = 1$. Тоа значи дека $x_n \leq 1,\ n = 1,2,..$ што е контрадикција. Според тоа

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Понатаму, од $x_{n+1} - 1 = x_n(x_n - 1)$ добиваме дека

$$\frac{1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{x_n(x_n - 1)} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_n},$$

односно

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}.$$

Тогаш

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} ... + \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} =$$

$$= \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$$

следува дека

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}\right) = \frac{1}{a - 1}.$$

Според тоа дадениот ред конвергира и неговата сума $S = \dfrac{1}{a-1}$. ●

3.10. Најди ги следниве граници:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!}$;

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

Решение. а) Да воочиме дека $k^3 + 6k^2 + 11k + 5 = (k+1)(k+2)(k+3) - 1$.

Тогаш од

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}\right) = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!}$$

добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

б) Бараната граница е всушност сумата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Според тоа, од

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{(n+1)} + \frac{1}{n+2}\right)$$

добиваме дека

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right) = \frac{1}{4}. \bullet$$

3.11. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира ако:

а) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+3}$;

б) $a_n = \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$;

в) $a_n = \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

г) $a_n = (n^2+2)\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

д) $a_n = \sqrt[n]{0,02}$;

ѓ) $a_n = \sin n\alpha, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{N}$.

е) $a_n = \sin n^2$;

Решение. а) Од

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1 \text{ и } \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1,$$

заклучуваме дека низата $\left(a_n\right)$ нема граница. Според тоа дадениот ред дивергира.

б) Дадениот ред дивергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}=1\neq 0.$$

в) Заради

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{2n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{n^2}}=\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-2}\neq 0,$$

следува дека редот дивергира.

г) Заради

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(n^2+2)\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}(n^2+2)\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1\neq 0.$$

следува дека редот дивергира.

д) Дадениот ред дивергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0,02}=1\neq 0.$$

ѓ) Претпоставуваме дека дадениот ред конвергира. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\sin n\alpha=0 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\sin(n+1)\alpha=0,$$

односно

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin n\alpha\cos\alpha+\cos n\alpha\sin\alpha\right)=0,$$

од каде што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n\alpha=0.$ Така добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty}\sin n\alpha=\lim_{n\to\infty}\cos n\alpha=0$$

од каде што следува дека

$$\lim_{n\to\infty}(\sin^2 n\alpha+\cos^2 n\alpha)=0$$

што е контрадикција бидејќи $\sin^2 n\alpha+\cos^2 n\alpha=1$. Според тоа редот дивергира.

е) Редот дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула. Навистина, ако претпоставиме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2=0$ тогаш и $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+1)^2=0.$ Оттука имаме

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)^2 = \lim_{n\to\infty}\sin(n^2+2n+1) = \lim_{n\to\infty}(\sin n^2\cdot\cos(2n+1)+\sin(2n+1)\cdot\cos n^2) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sin(2n+1)\cdot\sqrt{1-\sin^2 n^2} = \lim_{n\to\infty}\sin(2n+1) = 0.$$

Понатаму, од последното равенство добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\sin(2n+3) = \lim_{n\to\infty}(\sin(2n+1)\cdot\cos 2+\cos(2n+1)\sin 2) = \lim_{n\to\infty}\sin 2\cdot\cos(2n+1) = 0.$$

Значи, добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty}(\sin^2(2n+1)+\cos^2(2n+1)) = 0$$

што е контрадикција. ●

3.12. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ако $a_1 = 1, a_{n+1} = \cos(a_n)$.

Решение. Од

$0 \le a_n \le 1$ и $a_{n+1} = \cos(a_n) \ge \cos 1 > 0$

следува дека

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0.$$

Според тоа дадениот ред дивергира. ●

3.13. Покажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$ го исполнува потребниот услов за конвергенција, но тој дивергира.

Решение. Од

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} = 0,$$

заклучуваме дека дадениот ред го исполнува потребниот услов за конвергенција. За $k = 1,2,\ldots,n$ важи неравенството

$$a_k = \frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n}},$$

од каде што следува дека

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}} \ge n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Тогаш $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ од каде што заклучуваме дека дадениот ред дивергира. ●

3.14. Испитај ја конвергенцијата на следните редови:

а) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}+...;$ б) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+...+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+...$

Решение. а) Низата парцијални суми на дадениот ред е растечка. Ќе покажеме дека таа е неограничена. За таа цел ја избираме нејзината подниза $\left(S_{2^n}\right)$

$$S_{2^1}=S_2=1+\frac{1}{3},\ S_{2^2}=S_4=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7},...,\ S_{2^n}=1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^{n+1}-1}.$$

Од неравенствата

$$1+\frac{1}{3}>1,\quad \frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}>\frac{4}{16}=\frac{1}{4},...$$

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+...+\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4},$$

го добиваме неравенството

$$S_{2^n}=\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n+1}+.........+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)>1+\frac{n-1}{4}.$$

Според тоа, поднизата $\left(S_{2^n}\right)$ е неограничена, од каде што следува дека и низата $\left(S_n\right)$ е неограничена. Со тоа докажавме дека дадениот ред дивергира.

б) Од неравенството

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+...+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}>$$

$$>\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+...+\ln\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\ln(n+1),$$

следува дека дадениот ред дивергира. ●

3.15. Со помош на Кошиевиот критериум докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира.

Решение. Низата парцијални сума на дадениот ред $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно дадено. Избираме $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$ Тогаш за секое $n\geq n_0$ и за секој природен број p важи:

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(n+p)^2}\right|<$$

$$<\left|\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+...+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon,$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира. ●

3.16. Со помош на Кошиевиот критериум да се покаже дека следните редови се конвергентни:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$.

Решение. а) Нека $\varepsilon>0$ е произволно дадено. Избираме $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$ Тогаш за секое $n\geq n_0$ и за секој природен број p важи:

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)(n+2)}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{\sin(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}=$$
$$=\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира.

б) Нека $\varepsilon>0$ е произволно дадено. Избираме $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$ Тогаш за секое $n\geq n_0$ и за секој природен број p важи:

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}+...+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\leq$$
$$\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(n+p)^2}<$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+...+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира.

в) Нека $1 \geq \varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме $n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$ Тогаш за секое $n \geq n_0$ и за секој природен број p важи:

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира.

г) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1.$ Тогаш за секое $n \geq n_0$ и за секој природен број p важи:

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos(n+1)x - \cos(n+2)x}{n+1} + \frac{\cos(n+2)x - \cos(n+3)x}{n+2} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x - \cos(n+p+1)x}{n+p}\right| =$$

$$= \left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} - \ldots - \frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\cos(n+p+1)x}{(n+p)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{n+p} < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира. ●

3.17. Со помош на Кошиевиот критериум докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Решение. Низата парцијални суми на дадениот ред $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$ Нека $\varepsilon = \frac{1}{2}.$ За произволно $k \in \mathbb{N}$, ставаме $n = p = k.$ Тогаш

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| = \left|\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{k+p}\right| \geq k\frac{1}{2k} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

од каде што следува дека дадениот ред дивергира. ●

3.18. Со помош на Кошиевиот критериум докажи дека следниве редови се дивергентни.

а) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$ б) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\ldots$

Решение. а) Од

$$S_{6n}-S_{3n}=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\ldots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n},$$

каде што $\left(S_{6n}\right)$ и $\left(S_{3n}\right)$ се поднизи на низата парцијални суми на дадениот ред добиваме

$$S_{6n}-S_{3n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\ldots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6}$$

од каде што заради Кошиевиот критериум следува дека дадениот ред дивергира.

б) Нека $\varepsilon=\frac{1}{4}$. Од

$$\left|S_{2n}-S_{n}\right|=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}>$$

$$>\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{4}$$

следува дека редот дивергира. ●

3.19. Со помош на Кошиевиот критериум испитај ја конвергенцијата редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}$, ако $a_{n}=\frac{d_{n}}{10^{n}}$, $|\,d_{n}\,|<10$.

Решение. Нека $\varepsilon>0$ е произволно дадено. Избираме $n_{0}=\left[1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$

Тогаш за секое $n\geq n_{0}$ и за секој природен број p важи:

$$\left|S_{n+p}-S_{n}\right|==\left|\frac{d_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{d_{n+2}}{10^{n+2}}+\ldots+\frac{d_{n+p}}{10^{n+p}}\right|<\frac{10}{10^{n+1}}+\frac{10}{10^{n+2}}+\ldots+\frac{10}{10^{n+p}}=$$

$$=\frac{1}{10^{n}}\cdot\frac{1-(\frac{1}{10})^{p}}{1-\frac{1}{10}}<\frac{1}{10^{n}}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{9\cdot 10^{n-1}}<\frac{1}{10^{n-1}}<\varepsilon\,.$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира. ●

3.20. Дали редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, ако $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p})=0$, $p=1,2,....?$

Решение. Да, бидејќи дадениот услов е всушност Кошиевиот критериум за конвергенција на броен ред. ●

3.21. Докажи дека ако редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергираат и ако $a_n \le c_n \le b_n$, за секое $n\in\mathbb{N}$, тогаш конвергира и редот $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} \le \sum_{k=1}^{p} c_{n+k} \le \sum_{k=1}^{p} b_{n+k}, \text{ за секои } n,p\in\mathbb{N}.$$

Бидејќи редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергираат, за секое $\varepsilon>0$ постојат $n_0^{'}$ и $n_0^{''}$ такви што за секое $n>n_0^{'}$ и секое $p\in\mathbb{N}$ важи $-\varepsilon<\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}<\varepsilon$, односно за секое $n>n_0^{''}$ и секое $p\in\mathbb{N}$, важи $-\varepsilon<\sum_{k=1}^{p} b_{n+k}<\varepsilon.$

Нека $n_0=\max(n_0^{'},n_0^{''})$. Тогаш за секое $n>n_0$ и за секое $p\in\mathbb{N}$, важи $-\varepsilon<\sum_{k=1}^{p} c_{n+k}<\varepsilon$, од каде што следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира. ●

3.22. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако конвергира остатокот на редот, т.е. редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$.

Решение. Ако

$$S_k=a_1+a_2+...+a_k$$

е парцијана сума на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и

$$r_{n,m}=a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+m}$$

е парцијална сума на редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$, тогаш

$$r_{n,m} = (a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m}) - (a_1 + a_2 + ... + a_n) = S_{n+m} - S_n.$$

Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвргира и $\lim_{k\to\infty} S_k = S$, од

$$\lim_{m\to\infty} r_{n,m} = \lim_{m\to\infty}(S_{n+m} - S_n) = S - S_n$$

следува дека остатокот $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ конвергира и има сума $S - S_n$.

Обратно, ако редот $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ конвергира и $\lim_{m\to\infty} r_{n,m} = r_n$, тогаш заради

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m} = \lim_{m\to\infty}(r_{n,m} + S_n) = r_n + S_n$$

следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и има сума $r_n + S_n$. ●

3.23. Докажи дека ако $\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

Решение. Од дефиницијата на конвергентна низа имаме дека за секое $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < |a|$, постои n_0 така што за секое $n > n_0$ и за секое $p \in \mathbb{N}$ важи неравенството

$$a - \varepsilon < (m+n)a_{m+n} < a + \varepsilon,\ m = 1,2,...,p,$$

односно

$$\frac{a-\varepsilon}{m+n} < a_{m+n} < \frac{a+\varepsilon}{m+n}.$$

Со сумирање на овие неравенства по m од 1 до p, добиваме

$$(a-\varepsilon)\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n} < \sum_{m=1}^{p} a_{m+n} < (a+\varepsilon)\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n}.$$

Бидејќи хармонискиот ред дивергира дивергира и неговиот остаток, односно

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n} = +\infty.$$

Според тоа дадениот ред дивергира. ●

3.2. Редови со ненегативни членови

Редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ се вика **ред со ненегативни членови** ако $a_n \geq 0$, за секое $n \in \mathbb{N}$.

1. Редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ со ненегативни членови конвергира ако и само ако низата парцијални суми $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ е ограничена од горе, односно постои реален број $M > 0$ така што $S_n \leq M$, за секое $n \in \mathbb{N}$.

2. (Критериум на споредување) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ се редови со ненегативни членови. Тогаш точни се следниве тврдења.

а) Ако $a_n \leq b_n$, за секое $n > n_0$, тогаш од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следува конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, додека од дивергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следува дивергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

б) Нека $a_n, b_n > 0$ за секое $n \in \mathbb{N}$ и нека $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$.

Ако $0 < k < +\infty$, тогаш редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ се еквиконвергентни, односно конвергираат или дивергираат истовремено.

Ако $k = 0$ тогаш од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следува конвергенција на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ако $k = \infty$ тогаш од дивергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следува дивергенција на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. (Даламберов критериум) Ако за редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n > 0)$ важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

тогаш за $\lambda < 1$ редот конвергира, а за $\lambda > 1$ редот дивергира. Ако $\lambda = 1$ критериумот не дава одговор.

4. (Кошиев критериум) Ако за редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n > 0)$ важи

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

тогаш за $\lambda < 1$ редот конвергира, а за $\lambda > 1$ редот дивергира. Ако $\lambda = 1$ критериумот не дава одговор.

5. (Рабеов критериум) Ако за редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n > 0)$ важи

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda$$

тогаш за $\lambda > 1$ редот конвергира, а за $\lambda < 1$ редот дивергира. Ако $\lambda = 1$ критериумот не дава одговор.

6. (Кумеров критериум) Нека е даден редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (a_n > 0)$. Ако постои низа позитивни реални броеви $\left(b_n\right)$ така што редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ дивергира и ако $\left\{k_n\right\}_{n\in N}$ е низа реални броеви таква што

$$k_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$$

тогаш за $k_n \geq \delta > 0,$ (за секое $n > n_0$)редот конвергира, а за $k_n \leq 0$ редот дивергира.

7. (Интегрален критериум) Ако функцијата f е непрекината, ненегативна и монотоно опаѓачка за $x \geq 1,$ и $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = 0$, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конвергира или дивергира истовремено со несвојствениот интеграл $\int_{1}^{\infty} f(x)dx.$

3.24. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ако:

а) $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{n(n+1)}$; б) $a_n = \dfrac{\sin^2 2n}{(n+1)(n+2)}$.

Решение. а) Од неравенството

$$\frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \le \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

добиваме низата парцијални суми на дадениот ред е ограничена, односно

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира.

б) Дадениот ред конвергира бидејќи низата парцијални суми е ограничена од горе, односно

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{\sin^4 2k}{(k+1)(k+2)} \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2} < 1. \bullet$$

3.25. Докажи дека ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$ конвергира, тогаш конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$. Дали важи обратното?

Решение. Нека A_n и B_n се низите парцијални суми на редовите $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, соодветно. Ако низата (B_n) конвергита, таа е ограничена, па

$$A_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 < (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = B_n^2 \le M, \text{ за секој } n,$$

од каде што следува дека низата парцијални суми (A_n) на редот $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ е ограничена од горе. Тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ конвергира.

Обратното не важи. Така на пример редот $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ конвергира, додека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ дивергира. ●

3.26. Докажи дека ако редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\ 2}$ конвергираат, тогаш конвергираат и редовите $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n b_n\right|$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|a_n\right|}{n}$.

Решение. Од неравенството

$$|\,a_n b_n\,| \le \frac{1}{2}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})$$

заради ограниченоста на низите од парцијални суми на редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\ 2}$ добиваме

$$\sum_{k=1}^{n}|\,a_k b_k\,| \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}+\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2}\right) \le M, \text{ за секој } n,$$

од каде што може да заклучиме дека редот $\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k b_k\,|$ конвергира.

Специјално, за $b_n=\frac{1}{n}$ добиваме дека редот $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\,a_k\,|}{k}$ конвергира.

Понатаму, од

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}+2\sum_{k=1}^{n}|\,a_k b_k\,|+\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2} \le M_1+2M_2+M_3=M, \text{ за секој } n,$$

следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ конвергира. ●

3.27. Со примена на критериумот на споредување испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ако :

а) $a_n=\frac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}$; б) $a_n=\frac{n+1}{n^2}$; в) $a_n=\frac{1}{\sqrt{4^n+7}}$;

г) $a_n=\frac{\sin^2 3n}{2^n}$; д) $a_n=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt[5]{n^{10}+1}}$; ѓ) $a_n=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$;

е) $a_n=\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right)\right)$; ж) $a_n=\frac{1}{2^n+\cos^2 n}$;

Решение. а) Бидејќи за секое $n\in\mathbb{N}$, $2\le 5+3(-1)^n\le 8$, следува дека

$$0<\frac{1}{2^{n+2}}\leq\frac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}\leq\frac{1}{2^n}.$$

Тогаш од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ следува конвергенција на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}.$$

б) Заради неравенството

$$\frac{n+1}{n^2}>\frac{1}{n}$$

од дивергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ следува дивергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$.

в) Заради неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{4^n+7}}\leq\frac{1}{\sqrt{4^n}}=\frac{1}{2^n}$$

од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ следува конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4^n+7}}$.

г) За општиот член на дадениот ред важи

$$0\leq\frac{\sin^2 3n}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}.$$

Тогаш од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ следува конвергенција на дадениот ред.

д) Од неравенството

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt[5]{n^{10}+1}}\leq\frac{1}{n^2}$$

бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира, следува дека дадениот ред конвергира.

Да забележиме дека $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4n}\right)}{\sqrt[5]{n^{10}+1}}>0$, за секој n, бидејќи $0<\frac{\pi}{4n}\leq\frac{\pi}{4}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

ѓ) Дадениот ред дивергира бидејќи $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)>\frac{1}{n}$.

е) Заради неравенството

$$1-\cos\left(\frac{\pi}{3^n}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right)\leq 2\left(\frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{9^n}$$

следува дека дадениот ред ковергира, бидејќи конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}$.

ж) Според критериумот за споредување, од

$$\frac{1}{2^n+\cos^2 n}\leq\frac{1}{2^n}$$

следува дека разгледуваниот ред конвергира. ●

3.28. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,ако :

а) $a_n=\dfrac{e^n+n^4}{3^n+\ln^2(n+1)}$; б) $a_n=\dfrac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$; в) $a_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Решение. а) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{e^n+n^4}{3^n+\ln^2(n+1)}}{\dfrac{e^n}{3^n}}=1$$

и конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n$ следува дека дадениот ред конвергира.

б) Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}}{\dfrac{2}{n}}=1$$

и од тоа што редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ дивергира следува дивергенција на дадениот ред.

в) Од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}=1$$

следува дека редовите $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ се еквиконвергентни. Бидејќи редот

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира следува дека и дадениот ред конвергира. ●

3.29. Со помош на Даламберовиот критериум испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, ако :

а) $a_n = \frac{n^3}{3^n}$; б) $a_n = \frac{2^n}{n^2+n}$; в) $a_n = \frac{n^4}{4^n+1}$;

г) $a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n+2)}$; д) $a_n = \frac{n^n}{n!}$; ѓ) $a_n = \frac{n!}{n^2\cdot 2^n}$;

е) $a_n = n^3\sin\frac{\pi}{3^n}$; ж) $a_n = n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$; з) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a>0$;

ѕ) $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$; и) $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; ј) $a_n = \frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$.

Решение. а) Од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{3}<1$$

следува дека дадениот ред конвергира.

б) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)}}{\frac{2^n}{n^2+n}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}=2>1$$

дадениот ред дивергира.

в) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{4^{n+1}+1}}{\frac{n^4}{4^n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\cdot\frac{4^n+1}{4\cdot 4^n+1}=\frac{1}{4}<1$$

редот конвергира.

г) Редот конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4\cdot7\cdot10\cdot\dots\cdot(3n+4)(3n+7)}{2\cdot6\cdot10\cdot\dots\cdot(4n+2)(4n+6)}}{\dfrac{4\cdot7\cdot10\cdot\dots\cdot(3n+4)}{2\cdot6\cdot10\cdot\dots\cdot(4n+2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+7}{4n+6}=\frac{3}{4}<1.$$

д) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$$

дадениот ред дивергира.

ѓ) Дадениот ред дивергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^2\cdot2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^2\cdot2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2(n+1)}=+\infty.$$

е) Од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n^3\sin\frac{\pi}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$$

следува дека дадениот ред конвергира.

ж) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1$$

редот конвергира.

з) Редот конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(n+1)}=0<1.$$

ѕ) Од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n n!}{n^n}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1$$

следува дека дадениот ред дивергира.

и) Дадениот ред конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)^2}{2^{2n+1}}=0.$$

ј) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+3)!!}{3^{n+1}(n+1)!}}{\dfrac{(2n+1)!!}{3^n n!}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}=\frac{2}{3}<1$$

според критериумот на Даламбер следува дека дадениот ред конвергира. ●

3.30. Со помош на критериумот на Коши испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, ако :

а) $a_n=n^5\left(\dfrac{3n+2}{4n+3}\right)^n$; б) $a_n=\left(\dfrac{3n}{n+5}\right)^n\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; в) $a_n=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n^2}$;

г) $a_n=\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$; д) $a_n=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; ѓ) $a_n=\dfrac{8^{n+2}}{5^n}$;

е) $a_n=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n(n+1)}$; ж) $a_n=2^{-n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; з) $a_n=\operatorname{arctg}^n\dfrac{1}{n}$;

ѕ) $a_n=\ln^n\dfrac{2n+1}{n}$; и) $a_n=\left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$; ј)$a_n=\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^3+3n+1}}$.

Решение. а) Од

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n}=\frac{3}{4}<1$$

следува дека дадениот ред конвергира.

б) Редот дивергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{n+5}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+5}\left(\frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{3}{n}}\right)^n=\frac{3}{e}>1.$$

в) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}=\frac{1}{e^2}<1$$

добиваме дека редот конвергира.

г) Дадениот ред конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

д) Од

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}=\frac{1}{e^2}<1$$

заклучуваме дека дадениот ред конвергира.

ѓ) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{8^{n+2}}{5^n}}=\frac{8}{5}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{64}=\frac{8}{5}>1$$

следува дека дадениот ред дивергира.

е) Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n+1}=\frac{1}{e^2}<1$$

дадениот ред конвергира.

ж) Дадениот ред дивергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1.$$

з) Границата

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n}=0<1$$

од каде што според Кошиевиот критериум заклучуваме дека дадениот ред конвергира.

ѕ) Редот конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^n\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n}=\ln 2<1.$$

и) Од

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}+3}}{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}+3}\right)^{3}}=\frac{1}{e}<1$$

добиваме дека дадениот ред конвергира.

ј) Редот конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^3+3n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\dfrac{n+1}{2}}\right)^{\frac{\sqrt{n^3+3n+1}}{n}}=0<1.\bullet$$

3.31. Докажи дека ако

$\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,\ a_n\geq 0$

тогаш за $q<1$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира, а за $q>1$ редот дивергира.

Решение. Нека $q<1$. Од условот во задачата имаме дека за $0<\varepsilon<1-q$ постои $n_0\in\mathbb{N}$, така што

$0\leq a_i<(q+\varepsilon)^i$ каде што $i=n_0,n_{0+1},\ldots,n$ и $q+\varepsilon<1$.

Бидејќи редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(q+\varepsilon)^n$ конвергира, од критериумот за споредување следува дека и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира.

Нека $q>1$. Тогаш за избрано $0<\varepsilon<q-1$ постои $m\in\mathbb{N}$, така што за секое $k>m$ важи

$a_{n_m+1}>(q-\varepsilon)^{n_m+1},\ a_{n_m+2}>(q-\varepsilon)^{n_m+2},\ldots,a_{n_k}>(q-\varepsilon)^{n_k}$, за $q-\varepsilon<1$.

Според тоа општиот член на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ не тежи кон нула од каде што заклучуваме дека редот дивергира. $\bullet$

3.32. Испитај ја конвергенцијата на следниве редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Решение. а) Со примена на задача 3.31 добиваме

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(\sqrt[2k]{2k})^3\sqrt[2k]{(\sqrt{2}+(-1)^{2k})^{2k}}}{\sqrt[2k]{3^{2k}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира.

б) Со примена на задача 3.31 добиваме

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}}=\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}}=\frac{4}{9}<1$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира. ●

3.33. Со помош на Рабеовиот критериум да се испита конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,ако :

а) $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; б) $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$;

в) $a_n=\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\cdots(a+\sqrt{n+1})},a>0$;

г) $a_n=\frac{\ln 2\cdot\ln 3\cdots\ln(n+1)}{\ln(2+a)\cdot\ln(3+a)\cdots\ln(n+1+a)},a>0$;

Решение. а) Заради

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\frac{1}{2}<1$$

според Рабеовиот критериум може да заклучиме дека дадениот ред дивергира.

б) Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+3}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)=\frac{3}{2}>1$$

според Рабеовиот критериум заклучуваме дека дадениот ред конвергира.

в) Од

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\dfrac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\cdots(a+\sqrt{n+1})}}{\dfrac{\sqrt{(n+1)!}}{(a+\sqrt{2})(a+\sqrt{3})\cdots\cdot(a+\sqrt{n+1})(a+\sqrt{n+2})}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)=\infty$$

следува дека дадениот ред конвергира.

г) Заради

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\dfrac{\ln 2\cdot\ln 3\cdot\dots\cdot\ln(n+1)}{\ln(2+a)\cdot\ln(3+a)\cdot\dots\cdot\ln(n+1+a)}}{\dfrac{\ln 2\cdot\ln 3\cdot\dots\cdot\ln(n+1)\cdot\ln(n+2)}{\ln(2+a)\cdot\ln(3+a)\cdot\dots\cdot\ln(n+1+a)\cdot\ln(n+2+a)}}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\ln(n+2+a)-\ln(n+2)}{\ln(n+2)}\right)=0$$

заклучуваме дека дадениот ред дивергира.

3.34. Со примена на Кумеровиот критериум да се испита конвергенвијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p>0.$

Решение. Ставајќи во Кумеровиот критериум $b_n=n$, го добиваме редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ кој дивергира. Понатаму од

$$k_n=\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p}{\dfrac{1}{n}}-1$$

добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} k_n = p-1.$$

Според тоа редот конвергира за $p-1>0$, односно $p>1$. Ако $p<1$ редот дивергира. ●

3.35. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ако :

а) $a_n = \dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{1}{n}$;

б) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \quad n \geq 2$;

в) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$;

г) $a_n = ne^{-\frac{n^2}{2}}$;

д) $a_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$;

ѓ) $a_n = \dfrac{1}{n\ln^{\beta} n}, n \geq 2$;

е) $a_n = \dfrac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}, n \geq 3$;

ж) $a_n = \dfrac{1}{n\cdot\ln n(\ln\ln n)^{1+\alpha}}, n \geq 3$.

Решение.

а) Бидејќи функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ е ненегативна, монотоно опаѓачка на интервалот $\left[1,+\infty\right)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right) = 0$ следува

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^1 \sin t dt = 1-\cos 1$$

заклучуваме дека редот конвергира.

б) Функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ е ненегативна и монотоно опаѓа на интервалот $\left[2,+\infty\right)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right) = 0$. Од

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx = \int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty}\frac{2t}{t}dt = 2\int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty}dt = +\infty$$

следува дека редот дивергира.

в) Дадениот ред конвергира бидејќи

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{3\pi^2}{32} < +\infty$$

каде што $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$ е ненегативна и монотоно опаѓачка функција на интервалот $\left[1,+\infty\right)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right) = 0$.

г) Дадениот ред конвергира бидејќи функцијата $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ е ненегативна и монотоно опаѓачка на интервалот $\left[1,+\infty\right)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$ и

$$\int_1^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\infty} e^t dx = e^{-\frac{1}{2}} < +\infty.$$

д) За $\alpha>0$ функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$ е ненегативна и монотоно опаѓачка на интервалот $\left[1,+\infty\right)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$. Интегралот

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

конвергира за $\alpha>1$ и дивергира за $0<\alpha\le 1.$ Според тоа редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha>1$ и дивергира за $0<\alpha\le 1.$

Ако $\alpha\le 0,$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ дивергира, бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}\ne 0.$

Значи редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha>1$ и дивергира за $\alpha\le 1.$

ѓ) Функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^\beta x}$ е ненегативна на интервалот $\left[2,+\infty\right)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$. Нејзиниот извод $f^{'}(x)=-\dfrac{\ln x+\beta}{x^2\ln^{\beta+1}x}.$ Ако $\ln x+\beta>0,$ односно $x>e^{-\beta},$ тогаш $f'(x)<0.$ Според тоа функцијата монотоно опаѓа на разгледуваниот сегмент. Понатаму

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^\beta x} = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^\beta} < +\infty$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира.

е) Функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$ е ненегативна и монотоно опаѓачка на интервалот $\left[3,+\infty\right)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$. Од

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} = \int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t} = +\infty$$

следува дека дадениот ред дивергира.

ж) Од

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^{1+\alpha}} = \int_{\ln\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} < +\infty$$

следува дека дадениот ред конвергира за $\alpha > 0$.

Редот дивергира за $\alpha \le 0$. ●

3.36. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$ конвергира ако постои $\alpha > 0$ така што $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \ge 1+\alpha$, за $n \ge n_0$, а дивергира ако $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \le 1$, за $n \ge n_0$.

Решение. Од условите во задачата ги добиваме неравенствата

$$0 < a_n \le \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \text{ за } n \ge n_0, \text{ и } a_n \ge \frac{1}{n} \text{ за } n \ge n_0.$$

Според критериумот за споредување во првиот случај редот конвергира ако $\alpha > 0$, а во вториот случај редот дивергира. ●

3.37. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ ако:

а) $a_n = \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$, $n > 2$; б) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$, $n > 2$.

Решение. а) Од

$$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{\ln(\ln(\ln n)^{\ln n}}{\ln n} = \ln(\ln(\ln n)) > 1{,}1 \text{ за } n > \exp(\exp(\exp 1{,}1))$$

и од претходната задача следува дека редот конвергира.

б) Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} = 0$ следува дека

$\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \frac{(\ln(\ln n))^2}{\ln n} \le 1$ за доволно големо n, па дадениот ред дивергира (според претходната задача). ●

3.38. Со комбинирана примена на разни критериуми да се испита конвергенцијата на следните редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+n+1}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\ln n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln^2 n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\ln^4(n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2} + n\ln^2 n}$; ѓ) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n^2+1}\right)$.

Решение. а) Од

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n+1}{n^4+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

следува дека даденот ред и редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ се еквиконвергентни. Бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е конвергентен следува дека и дадениот ред е конвергентен.

б) Бидејќи

$$a_n = \frac{1}{(n^2+1)\ln n} < \frac{1}{n^2}$$

и редот $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира заклучуваме дека дадениот ред конвергира.

в) Од

$$a_n = \frac{1}{(3n+2)\ln^2 n} < \frac{1}{n\ln^2 n}$$

следува дека даденот ред конвергира бидејќи според задача 3.35. ѓ) конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$.

г) Дадениот ред дивергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{\ln^4(n+1)} = +\infty.$$

д) Бидејќи

$$a_n = \frac{n}{2^{n^2} + n\ln^2 n} < \frac{n}{2^{n^2}} \leq \frac{n}{2^n}$$

и редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ конвергира заклучуваме дека дадениот ред конвергира.

ѓ) Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n^2+1}\right)}{\frac{\pi}{n^2+1}}=1$$

и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2+1}$ конвергира заклучуваме дека дадениот ред конвергира. ●

3.39. Испитај ја конвергенцијата на следниве редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n},\quad a>0;$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!};$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}};$ д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p},\quad p>0;$ ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};$

е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};$ ж) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}};$ з) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}.$

Решение. а) За $a\le 1$ редот дивергира бидејќи неговиот општ член не тежи кон нула. Ако $a>1$ тогаш

$$0<\frac{1}{1+a^n}<\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

од каде што заради критериумот за споредување следува дека редот конвергира.

б) Редот конвергира бидејќи

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}<\frac{1}{2^n}.$$

в) Бидејќи

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n},$$

дадениот ред дивергира.

г) Од

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{n^{3/2}},$$

следува дека дадениот ред конвергира.

д) Заради $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^p n}{n}=0$ имаме дека $\ln^p n<n$, за доволно големо n, односно

$\dfrac{1}{\ln^p n}>\dfrac{1}{n}$, за доволно големо n,

од каде што следува дека дадениот ред дивергира.

ѓ) Дадениот ред конвергира бидејќи

$\dfrac{n!}{n^n}<\dfrac{2}{n^2}$, за $n>3$.

е) Од

$\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\dfrac{1}{n^{\ln\ln n}}<\dfrac{1}{n^2}$, за доволно големо n,

следува дека редот конвергира.

ж) Дадениот ред конвергира бидејќи

$\dfrac{1}{(\ln\ln nn)^{\ln n}}=\dfrac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}<\dfrac{1}{n^2}$, за доволно големо n.

з) Заради неравнството $\ln(n!)<n\ln n$, односно

$\dfrac{1}{\ln(n!)}>\dfrac{1}{n\ln n}$

имаме дека дадениот ред дивергира. ●

3.40. Испитај ја конвергенцијата на следниве редови:

а) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+bn)^s}$;

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$;

Решение. а) Заради

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}>\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$$

следува дека редот дивергира.

б) Од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(a+bn)^s}}{\dfrac{1}{b^s n^s}}=1\,,$$

може да заклучиме дека редот конвергира за $s>1,$ а дивергира за $s\leq 1.$

в) Дадениот ред дивергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=1\,.$$

г) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a\neq 0$$

дадениот ред дивергира. ●

3.41. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, ако:

а) $a_n=\int\limits_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx;$ б) $a_n=\left(\int\limits_0^{n}\sqrt[4]{1+x^4}\,dx\right)^{-1};$ в) $a_n=\int\limits_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}dx;$

г) $a_n=\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx;$ д) $a_n=\int\limits_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx;$ ѓ) $a_n=\frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}.$

Решение. а) Од

$$0<a_n=\int\limits_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}=\int\limits_0^{1/\sqrt{n}}\frac{2t^2dt}{1+t^4}\leq 2\int\limits_0^{1/\sqrt{n}}t^2dt=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$$

следува дека редот конвергира.

б) Од неравенството

$$\frac{1}{a_n}=\int\limits_0^{n}\sqrt[4]{1+x^4}\,dx>\int\limits_0^{n}x\,dx=\frac{n^2}{2}$$

следува дека $0<a_n<\dfrac{2}{n^2}$ од каде што заклучуваме дека дадениот ред конвергира.

в) За да покажеме дека дадениот ред конвергира, заради

$e^{-\sqrt{n+1}}<a_n<e^{-\sqrt{n}}$

доволно е да покажеме дека конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$. Заради

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx = 2\int_1^{+\infty} te^{-t}dt = 2\left(-e^{-t}\cdot t\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} e^{-t}dt\right) = 2\left(\frac{1}{e} - e^{-t}\Big|_1^{+\infty}\right) = \frac{4}{e} < +\infty$$

следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ конвергира.

г) Од неравенството

$$a_n > \frac{1}{\pi(n+1)}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2(n+1)}$$

имајќи во вид дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ дивергира, следува дека дадениот ред дивергира.

д) Конвергенцијата на дадениот ред следува од неравенството

$$0 < a_n < \int_0^{\pi/n} x^2 dx = \frac{\pi}{3n^3}.$$

ѓ) Заради неравенството

$$0 < a_n < \frac{n\cdot n!}{(2n)!}$$

имајќи во вид дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot n!}{(2n)!}$ конвергира, следува дека дадениот ред конвергира. ●

4.42. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ако:

а) $a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$;

б) $a_n = \dfrac{1000\cdot(1000+1)\cdot\ldots\cdot(1000+n)}{(2n-1)!!}$;

в) $a_n = \dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

г) $a_n = \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{(n+1)/2}}$;

д) $a_n = \dfrac{n^{n+1/n}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$;

ѓ) $a_n = (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$;

е) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

ж) $a_n = \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1}}$.

Решение. а) Редот конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{1000^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0<1.$$

б) Од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1000(1000+1)\cdot\ldots\cdot(1000+n)(1000+n+1)}{(2n+1)!!}}{\dfrac{1000(1000+1)\cdot\ldots\cdot(1000+n)}{(2n-1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000+n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

следува дека дадениот ред конвергира.

в) Заради $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}<1$ може да заклучиме дека дадениот ред конвергира.

г) Од

$$\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{(n+1)/2}}<\frac{n^{n-1}}{2^{(n+1)/2}n^{n+1}}=\frac{1}{n^2 2^{(n+1)/2}}<\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1},$$

имајќи во вид дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$ конвергира, заради критериумот за споредување добиваме дека дадениот ред конвергира.

д) Дадениот ред дивергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}=1\neq 0.$$

ѓ) Редот конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty a}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}\right)=\sqrt{2}-1<1.$$

е) Од неравенството $\ln n<n, n\in\mathbb{N}$, следува $\sqrt[n]{\ln n}<\sqrt[n]{n}$, односно

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ дивергира, заради критериумот за споредување, дивергира и разгледуваниот ред.

ж) Имајќи го во вид равенството $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$, со помош на математичка индукција може докажеме дека $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-1} = 2\cos\frac{\pi}{2^n}, n \geq 2$. Од

$$a_n = \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^n}$$

следува дека дадениот ред конвергира. ●

3.43. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ако:

а) $a_n = \frac{1}{n^{1+k/\ln n}}$;

б) $a_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$;

в) $a_n = \frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$;

г) $a_n = \frac{1}{n\ln^p n \ln^q \ln n}$, $n > 2$;

д) $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;

ѓ) $a_n = \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$;

е) $a_n = \frac{((n+1)!)^n}{2!\cdot 4!\cdot 6!\cdot ...\cdot (2n)!}$;

Решение. а) Од

$$a_n = \frac{1}{n^{1+k/\ln n}} = \frac{1}{n \cdot n^{k/\ln n}} = \frac{1}{n}\cdot e^{\ln n^{-k/\ln n}} = \frac{1}{n}\cdot e^{-(k/\ln n)\cdot \ln n} = \frac{e^{-k}}{n}$$

може да заклучиме дека дадениот ред дивергира.

б) Дадениот ред дивергира бидејќи $a_n = \frac{1}{n^{1+1/n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$, кога $n \to \infty$.

в) Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}} = 1$$

добиваме дека редот дивергира за $p \leq 0$, а конвергира за $p > 0$.

г) Дадениот ред е еквиконвергентен со интегралот

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x (\ln(\ln x))^q} = \int\limits_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p \ln^q t}.$$

Ако $p = 1$, со смената $\ln t = z$ добиваме дека интегралот, па според тоа и дадениот ред конвергира за $q > 1$.

За произволно $q \in \mathbb{R}$, ако $p > 1$, тогаш за доволно големо t, од

$$\frac{1}{t^p \ln^q t} \leq \frac{1}{t^\alpha}, \text{ за } p \geq \alpha > 1$$

следува дека дадениот ред конвергира.

Слично, ако $p < 1$, тогаш за доволно големо t, од

$$\frac{1}{t^p \ln^q t} \geq \frac{1}{t^\alpha}, \text{ за } p \leq \alpha < 1$$

следува дека дадениот ред дивергира.

д) Дадениот ред конвергира бидејќи

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \frac{n^{\ln n / n}}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} \cdot e^{\ln^2 n / n} \to 0 \cdot e^0 = 1, \text{ кога } n \to \infty.$$

ѓ) Со помош на математичка индукција може да покажеме дека за $n \geq 3$ важи неравенството $\ln n! \geq n - 2$. Според тоа

$$\frac{n-2}{n^\alpha} \leq \frac{\ln n!}{n^\alpha} < \frac{n \ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}.$$

Редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^\alpha}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$ се конвергентни за $\alpha > 2$ од каде што следува дека дадениот ред конвергира за $\alpha > 2$.

е) Заради

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{((n+2)!)^{n+1}}{2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \ldots \cdot (2n)!(2n+2)!}}{\dfrac{((n+1)!)^n}{2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \ldots \cdot (2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n-1}}{2 \cdot (2n+1) \cdot \ldots \cdot (n+3)} = 0$$

следува дека дадениот ред конвергира. ●

3.44. Докажи дека ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред со позитивни членови и ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, добиен со групирање на членовите на дадениот ред конвергира, тогаш конвергира и дадениот ред.

Решение. Нека (p_k) е произволна подниза природни броеви и нека (S_n) и (S_{p_k}) се парцијални суми на првиот и вториот ред соодветно. Бидејќи $a_n \geq 0$ точни се неравенствата:

$S_1 \leq S_n \leq S_{p_1}$ за секое $n,\ 1 \leq n \leq p_1,$

$S_{p_1} \leq S_n \leq S_{p_2}$ за секое $n,\ p_1 \leq n \leq p_2,$

...

$S_{p_k} \leq S_n \leq S_{p_{k+1}}$ за секое $n,\ p_k \leq n \leq p_{k+1},$

од каде што заради претпоставката дека вториот ред конвергира следува дека

$$\lim_{k\to\infty} S_{p_k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} S_{p_{k+1}} = S. \bullet$$

3.45. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, ако $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ ако } & n = m^2; \\ \frac{1}{n^2}, \text{ако } & n = m; \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}$.

Решение. Заради задачата 3.44 доволно е да покажме конвергенција на редот

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)}_{A_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{8^2}\right)}_{A_2}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\ldots+\frac{1}{((n+1)^2-1)^2}\right)}_{A_n}+\ldots$$

Од неравенствата

$$A_n < \frac{1}{n^2}+\frac{2n}{(n^2+1)^2} < 2\cdot\frac{1}{n^2}, \text{ за секое } n \in \mathbb{N},$$

следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ конвергира, од каде што може да заклучиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. $\bullet$

3.46. Да се испита конвергенцијата на редот

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$$

Решение. Да го разгледаме редот

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{4\sqrt{5}}+\frac{1}{5\sqrt{6}}+\frac{1}{6\sqrt{7}}+\frac{1}{7\sqrt{8}}\right)+\dots$$
$$\dots+\left(\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}\right)+\dots$$

добиен со групирање на членовите на дадениот ред. Од неравенствата

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}<\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{4\sqrt{5}}+\dots+\frac{1}{7\sqrt{8}}<\frac{1}{4\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{7\sqrt{7}}<\frac{4}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{(\sqrt{2})^2},$$

....

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{\left(2n\right)^{\frac{3}{2}}}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{(\sqrt{2})^n},$$

следува дека

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\dots+\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\le\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Според тоа низата парцијални суми S_n е ограничена. Освен тоа таа е и монотона, па според тоа редот добиен со групирање на членовите на дадениот ред е конвергентен. Заради задачата 3.44. дадениот ред е конвергентен. ●

3.47. Нека $\left(a_n\right)$ е монотоно опаѓачка низа позитивни реални броеви. Докажи дека редовите $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ се еквиконвергентни.

Решение. Нека редот $\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ конвергира. Заради тоа што $\left(a_n\right)$ монотоно опаѓа следува $a_3\ge a_2, a_4\ge a_3,\dots$, па го добиваме неравенството

$$0<a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_{2^{n+1}}\le a_1+2a_2+4a_4+\dots+2^n a_{2^n}.$$

Заради критериумот за споредување следува конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Обратно, нека редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира. Низата $\left(a_n\right)$ монотоно опаѓа, па имаме

$$2\left(a_1 + a_2\right) \geq 2a_2$$

$$2\left(a_3 + a_4\right) \geq 2 \cdot 2a_4 = 4a_4$$

$$2\left(a_5 + a_6 + a_7 + a_8\right) \geq 2 \cdot 4a_8 = 8a_8$$

.

.

.

$$2\left(a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \ldots + a_{2^{n-1}+2^{n-1}}\right) \geq 2 \cdot 2^{n-1} a_{2^n} = 2^n a_{2^n}$$

Следува

$$2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n}\right) \geq 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$$

и од критериумот за споредување следува конвергенција на редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. ●

3.48. Нека $f : \left[1, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ е позитивна монотоно опаѓачка функција. Докажи дека ако редот $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ конвергира тогаш за неговиот остаток $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ важи

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq r_n \leq f(n+1) + \int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Најди ја сумата на редот $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ со точност од $0,01$.

Решение. Бидејќи функцијата f е позитивна и монотоно опаѓачка важат неравенствата

$$0 < f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \text{ за } k \leq x \leq k+1,\ k \in \mathbb{N},$$

од каде што следува

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) = r_n \quad \text{и}$$

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k+1) = r_n - f(n+1).$$

Од добиените неравенства следува доказот на тврдењето во задачата.

За $f(x) = \frac{1}{x^3}$ имаме

$$r_n \le \frac{1}{(n+1)^3} + \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \le \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

Најмалото n за кое важи $\dfrac{1}{(n+1)^3} + \dfrac{1}{2(n+1)^2} \le 0,01$ е $n=6$. Тогаш $r_6 \le 0,01$.

Според тоа најмалиот потребен број собироци за пресметување на сумата $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$ со точност до $0,01$ е $n=6$. Така добиваме

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = S_6 + r_6 \approx S_6 = \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n^3} = 1,1903. \bullet$$

3.49. Ако за редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$, важи условот $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \rho < 1$, за $n \ge n_0$, тогаш за остатокот $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ важи неравенството $r_n \le a_{n_0} \dfrac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}$, за $n \ge n_0$.

Решение. Од условот

$$a_{n_0+1} \le \rho a_{n_0}, a_{n_0+2} \le \rho a_{n_0+1}, \dots.$$

добиваме дека

$$r_n \le a_{n_0} \rho^{n-n_0+1}(1+\rho+\rho^2+\dots) = a_{n_0} \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}, \text{ за } n \ge n_0. \bullet$$

3.50. Колку членови од редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ треба да се отфрлат за сумата на остатокот на редот да биде помала од $\varepsilon = 10^{-6}$, ако:

а) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$; б) $a_n = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$; в) $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$.

Решение. а) Бројот на членови кои треба да се отфрлат е решението на неравенката $r_n < 10^{-6}$. Заради

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx,\ \frac{1}{(n+2)^2} < \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x^2}\,dx, \dots \frac{1}{(n+1)^2} < \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx,$$

имаме

$$r_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots < \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Тогаш

$$r_n < \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \le 10^{-6} \text{ за } n \ge 10^6.$$

Според тоа по отфрлањето на 10^6-те први члена на редот, збирот на остатокот ќе биде помал од 10^{-6}.

б) Од релациите

$$r_n = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\left(1+\frac{2}{n+3}+\frac{2^2}{(n+3)(n+4)}+...\right) < \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\left(1+\frac{2}{n+3}+\frac{2}{(n+3)^2}+...\right) =$$
$$= \frac{(n+3)2^{n+1}}{(n+2)!(n+1)} \le 10^{-6}$$

добиваме $n \ge 8$. Значи по отфрлањето на првите осум члена на редот, збирот на остатокот ќе биде помал од 10^{-6}.

в) Заради

$$r_n = \frac{1}{(2n+1)!}+\frac{1}{(2n+3)!}+... < \frac{1}{(2n+1)!}+\frac{1}{(2n+2)!}+\frac{1}{(2n+3)!}+... =$$
$$= \frac{1}{(2n+1)!}\left(1+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}+...\right) < \frac{1}{(2n+1)!}\left(1+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{(2n+2)^2}+...\right) =$$
$$= \frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2n+2}} = \frac{2n+2}{(2n+1)!(2n+1)} \le 10^{-6}$$

добиваме $n \ge 5$. По отфрлањето на првите пет члена на редот, збирот на остатокот ќе биде помал од 10^{-6}. ●

3.51. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ се дивергентни редови со ненегативни членови. Какви се тогаш редовите

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

Решение. а) Ако $a_n \le b_n$, за секое $n \in \mathbb{N}$, тогаш

$$\min(a_n, b_n) = a_n$$

па редот $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ дивергира.

Слично, ако $b_n \leq a_n$, за секое $n \in \mathbb{N}$, тогаш

$\min(a_n, b_n) = b_n$

па редот $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ дивергира.

Ако не е исполнет еден од овие два услови тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ може да конвергира. Така на пример,

$$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} + \dots \text{ и } \frac{1}{2^2} + 1 + \frac{1}{2^4 +} + \frac{1}{3} + \dots$$

се редови со позитивни членови, кои дивергираат, додека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

конвергира.

б) Од неравенствата $\max(a_n, b_n) \geq a_n \geq 0$ следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ секогаш дивергира. ●

3.52. Докажи дека ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ со опаѓачки членови конвергира, тогаш $\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$.

Решение. Од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, бидејќи остатокот тежи кон 0, следува дека за секое $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Бидејќи низата (a_n) е монотоно опаѓачка и позитивна низа од последното неравенство следува дека $p a_{n+p} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ако ставиме $p = n$ и $p = n+1$, тогаш добиваме дека $2n a_{2n} < \varepsilon$ и $(2n+1) a_{2n+1} < \varepsilon$ за $n > n_0$. Тогаш $n a_n < \varepsilon$ за секој $n > n_0$. ●

3.53. Ако редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ се конвергентни (дивергентни) редови со позитивни членови и ако $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, тогаш велиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ побавно конвергира (дивергира) од редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

а) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен ред со позитивни членови и нека $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$. Покажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ конвергира и тоа побавно од дадениот ред.

б) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е дивергентен ред со позитивни членови и нека $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Покажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ дивергира и тоа побавно од дадениот ред.

Решение. а) Бидејќи низата (r_n) монотоно опаѓа имаме

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} = \frac{\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)\left(\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}\right)}{\sqrt{r_n}} \le 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right).$$

Тогаш

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} \le 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}}\right) < 2\sqrt{r_1}$$

од каде што следува дека низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ е ограничена, односно редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ конвергира. Понатаму

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{r_n} = 0$$

од каде што следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ побавно конвергира од редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Да воочиме дека оваа постапката може да ја продолжиме. Според тоа не постои ред кој најбавно конвергира.

б) Бидејќи низата $\left(S_n\right)$ монотоно расте имаме

$$\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}=\frac{\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)\left(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\right)}{\sqrt{S_n}}\geq\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right),\ n>1.$$

Тогаш

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{S_k}}\geq\sqrt{S_n}-\sqrt{S_1}\to\infty$$

од каде што следува дека низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ е неограничена, односно редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ дивергира. Понатаму

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{S_n}=+\infty$$

од каде што следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ побавно дивергира од редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. ●

3.54. Нека е даден редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$. Ако постои границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$ тогаш за $q>1$ редот конвергира, а за $q<1$ редот дивергира.

Решение. Нека $q>1$. Тогаш за $q>\alpha>1$ постои природен број n_0 така што $\ln\frac{1}{a_n}>\alpha\ln n,$ за секој $n>n_0$. Оттука добиваме дека

$$a_n<\frac{1}{n^{\alpha}}, \text{за секој } n>n_0,$$

од каде што следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергира заради критериумот за споредување.

Нека $q<1$. Тогаш за $q<\alpha<1$ постои природен број n_0 така што $\ln\frac{1}{a_n}<\alpha\ln n,$ за секој $n>n_0$. Оттука добиваме дека

$a_n > \dfrac{1}{n^\alpha} > \dfrac{1}{n}$,за секое $n > n_0$,

од каде што следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира заради критериумот за споредување. ●

3.55. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^p n}{n^q}$, во зависност од реалните параметри p и q.

Решение. Ако $q = 0$ тогаш редот дивергира (задача 3.39. д)) за секое $p \in \mathbb{R}$3.

Ако $q < 0$ тогаш редот дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула.

Ако $q > 0$ тогаш е исполнет потребниот услов за конвергенција на разгледуваниот ред. За функцијата

$$f(x) = \frac{\ln^p x}{x^q}, x \geq 1$$

имаме

$f'(x) = \dfrac{x^{q-1} \ln^{p-1} x(p - q \ln x)}{x^{2q}} < 0, \quad x > e^{p/q}$ и со примена на Лопиталовото правило добиваме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^p x}{x^q} = 0$ од каде што заклучуваме дека после некое x_0, таа е непрекината, ненегативна и монотоно опаѓачка. Тогаш според интегралениот критерум

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} dx$$

е еквиконвергентен со редот

$$\sum_{n=[x_0]}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^q},\ q > 0, p \in \mathbb{R}.$$

Притоа, ако $q = 1$ интегралот

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x^q} dx = \int_{\ln x_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{-p}} dt$$

конвергира за $p < -1$.

Ако $q > 1$ тогаш од

$$\frac{1}{t^q \ln^p t} \le \frac{1}{t^\alpha},$$ за доволно големо t, и за $q \ge \alpha > 1$

со помош на критериумот за споредување може да заклучиме дека редот конвергира.

Слично, за $q < 1$ од

$$\frac{1}{t^q \ln^p t} \ge \frac{1}{t^\alpha},$$ за доволно големо t, и за $q \le \alpha < 1$

според критериумот за споредување може да заклучиме дека редот дивергира.

Конечно, заклучуваме дека дадениот ред конвергира за

$q = 1, p < -1$ или $q > 1, p \in \mathbb{R}$. ●

3.56. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$, ако $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, за $n \ge 3$.

Решение. Со методот на математичка индукција може да се докаже дека

$$\frac{3}{2} u_{n-1} \le u_n \le 2u_{n-1}$$

од каде што следува дека $u_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, т.е.

$$u_n^{-1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Бидејќи $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ е конвергентен геометриски ред, од критериумот за споредување следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ конвергира. ●

3.57. Нека (x_n) е монотоно растечка низа од позитивни членови, ограничена од горе. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ конвергира.

Решение. Дадената низа (x_n) е конвергентна бидејќи секоја монотоно растечка низа ограничена од горе е конвергентна. Тогаш постои границата

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Заради $1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}} \geq 0$ редот $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ е ред со ненегативни членови. За да покажеме дека тој конвергира потребно и доволно е да покажеме дека неговата низа парцијални суми $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{x_k}{x_{k+1}}\right)$ е ограничена од горе. Користејќи ја врската меѓу аритметичката и геометроиската средина имаме

$$S_n = \left(1-\frac{x_1}{x_2}\right)+\left(1-\frac{x_2}{x_3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = n-\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_{k+1}} \leq n - n\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{x_{n+1}}} =$$

$$n\left(1-\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_{n+1}}}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}}}-1}{\frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}}}\cdot\ln\frac{x_1}{x_{n+1}}$$

од каде што следува

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leq -\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}}}-1}{\frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}}}\cdot\ln\frac{x_1}{x_{n+1}} = \ln\frac{x}{x_1}.$$

Значи, редот $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ конвергира бидејќи низата парцијални суми $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{x_k}{x_{k+1}}\right)$ е ограничена од горе. ●

3.58. Докажи дека $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{y(y+1)(y+2)\cdots(y+n)} = 0$, ако $0<x<y$.

Решение. За да го докажеме искажаното тврдење доволно е да покажеме дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y(y+1)(y+2)\cdots(y+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = +\infty.$$

Од неравенствата $0<x<y$ следува дека $y = x+\varepsilon$, за некој $\varepsilon > 0$. Тогаш

$$\frac{y(y+1)(y+2)\cdots(y+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{(x+\varepsilon)}{x}\cdot\frac{(x+\varepsilon+1)}{x+1}\cdots\frac{(x+\varepsilon+n)}{x+n} =$$

$$= \left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{x+1}\right)\cdots\left(1+\frac{\varepsilon}{x+n}\right) = \exp\left(\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{x+1}\right)\cdots\left(1+\frac{\varepsilon}{x+n}\right)\right) =$$

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x+k}\right)\right).$$

Бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{x+n}$ дивергира од асимптотската формула

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x+k}\right)}{\frac{\varepsilon}{x+k}}=1,$$

следува дека таков е и редот $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x+n}\right)$. Тогаш од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y(y+1)(y+2)\cdots(y+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x+k}\right)\right)=$$
$$=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{x+k}\right)\right)=e^{+\infty}=+\infty$$

следува тврдењето во задачата. ●

3.59. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}n^p\int_0^{1/n}t^{1/t}dt$, во зависност од параметарот p.

Решение. Ако $p=-2$ тогаш од

$$\frac{1}{n^2}\int_0^{1/n}t^{1/t}dt\le\frac{e^{1/e}}{n^3}$$

според критериумот за споредување може да заклучиме дека разгледуваниот ред конвергира.

Ако $p\neq-2$ тогаш од

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p\int_0^{1/x}t^{1/t}dt}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{1/x}t^{1/t}dt}{\frac{1}{x^{2+p}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{-(2+p)}{x^{3+p}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(2+p)x^{x-p-1}}=0$$

следува дека редовите $\sum_{n=1}^{\infty}n^p\int_0^{1/n}t^{1/t}dt$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ се еквиконвергентни. Бидејќи $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ е конвергентен ред таков е и разгледуваниот ред. ●

3.60. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен ред и нека $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Докажи дека

а) $\sum_{k=1}^{n} k a_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}$; б) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = 0$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Решение. а) Со трансформација на десната страна добиваме:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1} = (r_1 - r_{n+1}) + (r_2 - r_{n+1}) + \dots + (r_n - r_{n+1}) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_2 + a_2 + \dots + a_n) + \dots + (a_{n-1} + a_n) + a_n =$$

$$= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + n a_n = \sum_{k=1}^{n} k a_k .$$

б) Со примена на претходнно докажаното равенство добиваме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n} - r_{n+1} \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n} - \lim_{n\to\infty} r_{n+1} = \lim_{n\to\infty} r_n - \lim_{n\to\infty} r_{n+1} = 0 - 0 = 0.$$

в) Нека $b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n}{n(n+1)}$. Тогаш

$$b_n = \left(a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n}{n} - \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n + (n+1) a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1}$$

од каде што следува дека парцијалната сума B_n на редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е еднаква на

$$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{a_1}{1} - \frac{a_1 + 2a_2}{2} + a_2 +$$

$$+ \frac{a_1 + 2a_2}{2} - \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{3} + a_3 + \dots + \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n}{n} -$$

$$- \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n + (n+1) a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1} =$$

$$= a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} - \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + n a_n + (n+1) a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1}.$$

Тогаш

$$B_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}) - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1} r_k - (n+1)r_{n+2}\right) = A_{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} r_k + r_{n+2}$$

каде што A_{n+1} е парцијална сума на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.Доказот на тврдењето следува од

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \bullet$$

3.61. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен ред со позитивни членови.

а) Докажи дека $\liminf_{n\to\infty} na_n = 0.$

б) Со примена на искажаното тврдење испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^{(-1)^n}}.$

Решение. а) Бидејќи дадениот ред конвергира $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ Тогаш низата (a_n) како низа од ненегативни членови која што конвергира кон нула содржи ненегативна монотоно опаѓачка подниза (a_{n_k}) која што исто така конвергира кон нула. Тогаш заради задачата 3.52. $\lim_{k\to\infty} ka_{n_k} = 0.$ Оттука следува дека

$$\liminf_{n\to\infty} na_n = 0.$$

б) Од $\liminf_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{2} \neq 0$ следува дека разгледуваниот ред дивергира. $\bullet$

3.62. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ со ненегативни членови конвергира, тогаш конвергира и редот $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^p, p \geq 1.$

Решение. Од конвергеницијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следува дека $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ Тогаш постои природен број n_0 така што

$$0 \leq a_n < 1, \text{ за секое } n \geq n_0.$$

Оттука следува дека за $p \geq 1$

$$0 \leq {a_n}^p < a_n, \text{ за секој } n \geq n_0.$$

Заради критерумот за споредување од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следува конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^p$, за $p \geq 1$. ●

3.63. Докажи дека ако конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ со позитивни членови, тогаш конвергира и редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{\alpha}}$, за $\alpha > \frac{1}{2}$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме $\frac{\sqrt{a_n}}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right), n \in \mathbb{N}$.

Бидејќи редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$, за $\alpha > \frac{1}{2}$, се конвергентни редови, таков е и редот $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$. Од критериумот за споредување следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{\alpha}}$, за $\alpha > \frac{1}{2}$ конвергира. ●

3.64. Најди ги сите позитивни реални броеви x и y за кои што конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+y^n}$.

Решение. Можни се следниве неколку случаи:

Ако $x < y$ тогаш од неравенството $\frac{x^n}{1+y^n} < \left(\frac{x}{y}\right)^n$ заради критериумот за споредување следува дека разгледуваниот ред конвергира, како ред мајориран со конвергентен геометриски ред.

Ако $x, y \in (0,1)$ тогаш од неравенството

$$\frac{x^n}{1+y^n} < x^n$$

заради критериумот за споредување следува дека разгледуваниот ред конвергира,

Ако $x \geq y$ и $x, y \in [1, +\infty)$ тогаш редот дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула.

Слично, ако $y \in (0,1)$ и $x \in [1, +\infty)$ редот дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула. ●

3.3. Редови со променлив знак

За редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ велиме дека **апсолутно конвергира** ако конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Секој апсолутно конвергентен ред е конвергентен ред.

Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ дивергира, а редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира тогаш велиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **условно конвергира.**

1. (Критериум за споредување или Ваерштрасов критериум) Ако за редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ важи $|a_n| \leq b_n$ и ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира.

2. (Лајбницов критериум) Редот $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвергира, ако $\left(a_n\right)$ е монотона низа од позитивни членови, која конвергира кон нула, т.е. $a_n \geq a_{n+1} > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогаш за остатокот r_n важи оценката $|r_n| \leq |a_{n+1}|$, за $n \geq n_0$.

3. (Абелов критериум) Редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергира, ако конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и низата $\left(a_n\right)$ е монотона и ограничена.

4. (Дирихлеов критериум) Редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергира, ако низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ограничена и низата $\left(b_n\right)$ монотоно конвергира кон нула.

5. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, тогаш секој ред добиен со разместување на неговите членови конвергира и има иста сума.

6. (Теорема на Риман) Нека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно конвергира. Тогаш за секој реален број A (вклучувајќи ги и симболите $-\infty$ и ∞) постои ред, добиен со размесување на членовите на дадениот ред, чијашто сума е еднаква на A.

3.65. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е апсолутно конвергентен, ако

а) $a_n = \dfrac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$; б) $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\operatorname{arctg}\dfrac{\sin n}{n}$.

Решение. а) Користејќи ги неравенствата $n+1 \le 2n$, $|\cos 2n| \le 1$ и $n^7+3n+4 > n^7$ добиваме дека

$$|a_n| = \left|\frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}\right| \le \frac{2}{n^{4/3}}.$$

Од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^{4/3}}$ според критериумот на Ваерштрас следува апсолутна конвергенција на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}.$$

б) Користејќи ги неравенствата $0 \le \ln(1+t) \le t$, за секој $t \ge 0$ и $|\operatorname{arctg} t| \le t$, за секој $t \in \mathbb{R}$ добиваме

$$|a_n| = \left|\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sin}{n}\right| \le \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n^{6/5}}.$$

Од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{6/5}}$ според критериумот на Ваерштрас следува апсолутна конвергенција на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sin n}{n}. \bullet$$

3.66. Испитај ја конвергенцијата на следниве редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln^2 n}{n}$ в) $1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{8}+\ldots$.

Решение. а) Низата (a_n), $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ е монотоно опаѓачка низа со позитивни членови и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, па според критериумот на Лајбниц редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ конвергира.

б) Ставаме $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$. Тогаш со примена на Лопиталовото правило за наоѓање на гранична вредност на функција добиваме

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0.$$

Понатаму од $f\,'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}(2 - \ln x) < 0,$ за секој $x > e^2$, следува дека разгледуваната функција е монотоно опаѓачка на интервалот $(e^2, +\infty)$. Според тоа низата (a_n) каде што $a_n = \dfrac{\ln^2 n}{n}$ е монотоно опаѓачка низа со позитивни членови и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^2 n}{n} = 0.$

Според критериумот на Лајбниц редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\ln^2 n}{n}$ конвергира.

в) Општиот член на дадениот ред гласи $b_n = (-1)^n \dfrac{2n+1}{2^n}.$

Низата (a_n) каде што $a_n = \dfrac{2n+1}{2^n}$ е монотоно опаѓачка низа со позитивни членови и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2^n} = 0.$

Според критериумот на Лајбниц може да заклучиме дека разгледуваниот ред конвергира. ●

3.67. Докажи дека ако конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, тогаш конвергираат и следниве редови:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n} a_n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\, a_n$.

Решение. а) Бидејќи низата $b_n = \dfrac{1}{\ln n}$ е монотоно опаѓачка и ограничена, според Абеловиот критериум следува дека разгледуваниот ред конвергира.

б) Низата $b_n = \dfrac{n+1}{n}$ е монотоно опаѓачка и ограничена. Според Абеловиот критериум може да се заклучи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n} a_n$ конвергира.

в) Слично како и во претходните случаи разгледуваниот ред конвергира според Абеловиот критериум, бидејќи низата $b_n = \sqrt[n]{n}$ е монотоно опаѓачка и ограничена. ●

3.68. Нека (a_n) е конвергентна низа. Дали може $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = +\infty$?

Решение. Не. Заради равенството $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$, од конвергенцијата на низата (a_n) следува конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$.

Ако претпоставиме дека

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = +\infty,$$

тогаш од дивергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ следува дивергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ што е противречност. ●

3.69. Дали е точно тврдењето: Редот $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ конвергира, ако (a_n) е низа од позитивни членови, која конвергира кон нула, т.е. $a_n > 0$, секој $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Решение. За да покажеме дека тврдењето не е точно ќе го разгледаме редот $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$. Од неравенствата

$$0 < \frac{2+(-1)^n}{n} \le \frac{3}{n},$$

следува дека низата $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ е низа од позитивни членови која што конвергира кон нула, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{n} = 0.$ Од равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}$$

може да се заклучи дека разгледуваниот ред е дивергентен како збир на конвергентен и дивергентен ред. ●

Забелешка. Наведениот пример покажува дека условот за монотоност на низата во Лајбницовиот критериум не може да биде изоставен.

3.70. Дали е точно тврдењето: Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = 1$ тогаш конвергира и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Решение. Да ги разгледаме редовите

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right).$$

Со примена на Лајбницовиот критериум може да се провери дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ конвергира. Понатаму,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Од равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right)$ дивергира како збир на конвергентен и дивергентен ред. Значи тврдењето не е точно. ●

3.71. Докажи дека сумата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p},\ p>0$ е број од интервалот $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

Решение. Според критериумот на Лајбниц може да заклучиме дека дадениот ред е конвергентен. Тогаш поднизите

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right) \text{ и}$$

$$S_{2n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p}\right)$$

од низата парцијални суми S_n конвергираат кон истата граница S кон која што конвергира низата парцијални суми. Притоа поднизата S_{2n} расте, а поднизата S_{2n-1} опаѓа, од каде што следуваат неравенствата $S_{2n} < S < S_{2n-1}$. Оттука $S < S_1 = 1$ со што докажавме дека сумата на дадениот ред е помала од 1. За оценка на сумата од долу ја разгледуваме поднизата S_{4n+1}. Од конкавноста на функцијата $f(x) = \frac{1}{x^p}, x > 0$ следуваат неравенствата

$$\frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} > \frac{2}{4^p}, \frac{1}{7^p} + \frac{1}{9^p} > \frac{2}{8^p}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{(4n-1)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} > \frac{2}{(4n)^p}.$$

Тогаш од

$$S_{4n+1} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(4n)^p} + \frac{1}{(4n+1)^p} >$$

$$> 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} - \ldots - \frac{1}{(4n-2)^p} + \frac{1}{(4n)^p} = 1 - \frac{1}{2^p} S_{2n}$$

следува

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{4n+1} \geq 1 - \frac{1}{2^p} \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1 - \frac{S}{2^p}.$$

Значи $S \geq \frac{2^p}{1+2^p} > \frac{1}{2}$, па заклучуваме дека сумата на дадениот ред е поголема од $\frac{1}{2}$. Значи, сумата на дадениот ред е број од интервалот $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. ●

3.72. Испитај ја апсолутната и условната конвергенција на следниве редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\ln \ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{(2n-1)^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{6n-5}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^3}$; ѓ) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$.

Решение. а) Од неравенството

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}\right| \le \frac{n}{2^n}$$

од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ и од критериумот на Ваерштрас, следува апсолутна конвергенција на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}.$$

б) Од неравенствата

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln\ln n}\right| > \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

според критериумот за споредување, следува дека редот $\sum_{n=3}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln\ln n}\right|$ дивергира, односно редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln\ln n}$ не конвергира апсолутно.

Низата $\left(a_n\right)$ каде што $a_n = \frac{1}{\ln\ln n}$ е монотоно опаѓачка низа со позитивни членови и $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln\ln n} = 0.$

Според Лајбницовиот критериум редот $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln\ln n}$ конвергира.

Значи, разгледуваниот ред конвергира условно.

в) Дадениот ред апсолутно конвергира, бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}3^n}{(2n-1)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n-1} = 0.$$

г) За низата реални броеви $x_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{6n-5}$ имаме

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^{2k+1}2k}{6\left(2k\right)-5} = -\frac{1}{6} \text{ и } \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^{2k+2}\left(2k+2\right)}{6\left(2k+2\right)-5} = \frac{1}{6},$$

па $\lim_{n\to\infty} x_n$ не постои. Значи, редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{6n-5}$ дивергира бидејќи неговиот општ член не тежи кон нула.

д) Слично како и во претходниот случај од

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1-1}\frac{3^{2n+1}}{\left(2n+1\right)^3}=\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty}(-1)^{2n-1}\frac{3^{2n}}{\left(2n\right)^3}=-\infty$$

следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n^3}$ дивергира.

ѓ) Од релациите $\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right|>\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ и критериумот за споредување, следува дека редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right|$ дивергира, односно редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ не конвергира апсолутно.

Низата $\left(a_n\right)$ каде што $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ е монотоно опаѓачка низа со позитивни членови и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0.$ Според Лајбницовиот критериум редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ конвергира.

Значи дадениот ред конвергира условно. ●

3.73. Испитај ја условната конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, ако:

а) $a_n=(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot 2^{2n}$;

б) $a_n=(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\right).$

Решение. а) Заради

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot 2^{2n+2}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot 2^{2n}}=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2}>1$$

следува дека $|a_{n+1}|>|a_n|$ од каде што заклучуваме дека низата $\left(|a_n|\right)$ не конвергира кон нула, па и низата $\left(a_n\right)$ не конвергира кон нула. Значи редот дивергира (и апсолутно) бидејќи општиот член не тежи кон нула.

б) Низата со општ член

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$$

е монотоно опаѓачка низа од позитивни реални броеви.

Тврдењето следува од

$$b_{n+1} < \frac{n+1}{\sqrt{\left(n+1\right)^3+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^3+n}} < b_n .$$

Неравенството

$$\frac{n+1}{\sqrt{\left(n+1\right)^3+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$$

е еквивалентно со $n^3 > -n^2+1$, што е очигледно точно.

Понатаму од

$$0 < b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} \to 0 \text{, кога } n\to\infty,$$

следува дека разгледуваната низа конвергира кон нула. Тогаш заради критериумот на Лајбниц дадениот ред конвергира.

Од $\left|b_n\right| = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \ge \frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$

и дивергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+n}}$ следува дека редот условно конвергира. ●

3.74. Испитај ја апсолутната и условната конвергенција на следниве редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^p n}$; в) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$; ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$.

Решение. а) Ако $p\le 0$ тогаш разгледуваниот ред дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула.

Нека $p>0$.

Ако $p>1$, тогаш од равенството $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p}$, според критериумот на Ваерштрас, од конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

апсолутно конвергира.

Ако, пак, $0 < p \leq 1$, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ дивергира од каде што следува дека разгледуваниот ред не конвергира апсолутно.

Редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ конвергира според Лајбницовиот критериум бидејќи низата со општ член $a_n = \frac{1}{n^p}$ е низа со позитивни членови која монотоно конвергира кон нула. Значи, во овој случај редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ условно конвергира.

б) Нека $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$, $x > 1$. Бидејќи $f'(x) = -\frac{\ln x + p}{x^2 \ln^{p+1} x} < 0$ за $x \geq e^{-p}$ и $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \ln^p x} = 0$ може да заклучиме дека низата со општ член $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$, $p \in \mathbb{R}$ е монотона низа од позитивни членови која конвергира кон нула. Според Лајбницовиот критериум може да заклучиме дека разгледуваниот ред конвергира за секој $p \in \mathbb{R}$.

За да испитаме апсолутната конвергенција на дадениот ред, според интегралниот критериум на Коши-Маклорен, доволно е да ја испитаме конвергенцијата на несвојствениот интеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dx}{t^p}$. Бидејќи овој интеграл конвергира за $p > 1$, а дивергира за $p \leq 1$ може да заклучиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^p n}$ конвергира апсолутно за $p > 1$ и условно за $p \leq 1$.

в) Слично како и во претходниот случај низата со општ член $a_n = \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$, $p \in \mathbb{R}$ е монотона низа од позитивни членови која конвергира кон нула. Според Лајбницовиот критериум може да заклучиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$ конвергира за секој $p \in \mathbb{R}$.

За да испитаме апсолутната конвергенција на дадениот ред, според интегралниот критериум на Коши-Маклорен, доволно е да ја испитаме конвергенцијата на несвојствениот интеграл

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln^p (\ln x)} = \int_{\ln\ln 3}^{\infty} \frac{dx}{t^p}.$$

Бидејќи овој интеграл конвергира за $p > 1$, а дивергира за $p \le 1$ може да заклучиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n (\ln\ln n)^p}$ конвергира апсолутно за $p > 1$ и условно за $p \le 1$.

г) Низата $a_n = \sin \frac{1}{n}$ е монотоно опаѓачка низа со позитивни членови и

$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{n} = 0$. Според Лајбницовиот критериум дадениот ред конвергира.

Конвергенцијата е условна бидејќи

$$\left| (-1)^n \sin \frac{1}{n} \right| = \sin \frac{1}{n} \;\text{ и }\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

а редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е дивергентен ред.

д) Прво ќе докажеме дека

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}\alpha \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

за секој $n \in \mathbb{N}$ и за секој $\alpha \ne 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Навистина, имаме

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos \alpha \left(k - \frac{1}{2} \right) - \cos \alpha \left(k + \frac{1}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(\cos \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \cos \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \cos \alpha \left(2 - \frac{1}{2} \right) - \cos \alpha \left(2 + \frac{1}{2} \right) + \cos \alpha \left(3 - \frac{1}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \cos \alpha \left(3 + \frac{1}{2} \right) + \dots + \cos \alpha \left(n - \frac{1}{2} \right) - \cos \alpha \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}\alpha \right)$$

Редот конвергира според Дирихлеовиот критериум бидејќи низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ е ограничена, т.е.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right| \le \frac{2}{\left|2\sin\frac{1}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|}$$, додека низата со општ член

$a_n = \dfrac{1}{n}$ монотно конвергира кон нула.

Дека конвергенцијата на дадениот ред е условна, следува од неравенството

$\dfrac{|\sin n|}{n} \ge \dfrac{\sin^2 n}{n} = \dfrac{1-\cos 2n}{2n}$, бидејќи редот $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n}{2n}$ е дивергентен како разлика на дивергентен и конвергентен ред.

ѓ) Редот конвергира според Дирихлеовиот критериум бидејќи низата парцијални суми на редот $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$ е ограничена, т.е.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|}$$

(се докажува слично како во д)) додека низата со општ член $a_n = \dfrac{1}{n}$ монотно конвергира кон нула.

Ќе докажеме дека конвергенцијата на редот е условна. Заклучокот следува од неравенството

$$\frac{|\cos n|}{n} \ge \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1+\cos 2n}{2n}$$

бидејќи редот $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n}{2n}$ е дивергентен како збир на дивергентен и конвергентниот ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$. ●

3.75. Испитај ја апсолутната и условната конвергенција на редот општ член:

а) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$; б) $a_n = \dfrac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$.

Решение. а) Ако $p \le 0$ тогаш редот дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула.

Нека $p>0$. Тогаш од $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{n^p}}=1$, следува дека разгледуваниот ред апсолутно конвергира за $p>1$. Ако $0<p\le 1$ општиот член на дадениот ред може да го запишеме во облик $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}\cdot\dfrac{1}{n^{1/n}}$.

Со примена на Лајбницовиот критериум може да заклучиме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ конвергира. Понатаму низата со општ член $a_n=\dfrac{1}{n^{1/n}}$ за $n\ge 3$, е монотоно растечка и ограничена од горе. Од Абеловиот критериум следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$ конвергира.

Значи, разгледуваниот ред апсолутно конвергира за $p>1$, условно конвергира за $0<p\le 1$, а дивергира за $p\le 0$.

б) Општиот член на дадениот ред може да го запишеме во облик

$$a_n=\frac{1}{n}\cdot(\sin n\cdot\sin n^2).$$

Низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n\cdot\sin n^2$ е ограничена бидејќи

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\cdot\sin k^2=\frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{n}(\cos(k(k-1))-\cos(k(k+1))\right|=\frac{1}{2}\left|1-\cos((n+1)n\right|\le 1$$

Понатаму низата со општ член $a_n=\dfrac{1}{n}$ монотоно конвергира кон нула. Според критериумот на Дирихле следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$ конвергира. ●

3.76. Испитај ја конвергенцијата на следниве редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^{100}n}{n}\cdot\sin\dfrac{n\pi}{4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n}$.

Решение. а) Конвергенцијата на дадениот ред може да ја утврдиме со помош на критериумот на Дирихле. Имено, низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{4}$ е ограничена, т.е.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{8} \sin \frac{(n+1)\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} \right| < \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}.$$

Ќе докажеме дека низата со општ член $a_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$ почнувајќи од некое $n \geq n_0$, монотоно опаѓа.

Навистина, да ја разгледаме функцијата $f\left(x\right) = \frac{\ln^{100} x}{x}$ на $\left(1,\infty\right)$. Имаме

$$f'\left(x\right) = \frac{\ln^{99} x\left(100 - \ln^{100} x\right)}{x^2} < 0 \text{ за } x > e^{\sqrt[100]{100}}.$$

Значи $n_0 = \left[e^{\sqrt[100]{100}}\right] + 1$.

Со стократна примена на Лопиталовото правило следува дека низата конвергира кон нула.

Бидејќи низата со општ член $a_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$ монотоно конвергира кон нула, според критериумот на Дирихле даденит ред конвергира.

б) Користејќи дека $\sin^2 n = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2n\right)$ конвергенцијата на дадениот ред се сведува на конвергенција на редовите $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n}{n}$. Согласно критериумот на Дирихле редовите $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2n}{n}$ конвергираат. Навистина, од неравенствата

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \right| \leq 1 \text{ и } \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos 2k \right| \leq \left| -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2\cos 1} \cos(2n+1) \right| < \frac{1 + \cos 1}{2\cos 1}$$

следува дека низите парцијални суми на редовите $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos 2n$ се ограничени. Освен тоа низата со општ член $a_n=\frac{1}{n}$ монотно конвергира кон нула. Според тоа редовите $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n}{n}$ конвергираат.

в) Поаѓајќи од разложувањето

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

природата на почетниот ред се сведува на природата на редовите $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ и $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$.

Според Лајбницовиот критериум редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ конвергира, додека редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ дивергира, па може да заклучиме дека редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ дивергира како разлика на конвергентен и дивергентен ред.

г) Со примена на адиционите формули општиот член на дадениот ред може да го трансформираме во облик

$$a_n=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}-\pi n+\pi n\right)=\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}-\pi n\right)\cos\pi n=$$

$$=(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right).$$

За низата со општ член $b_n=\sin\left(\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}\right)$ имаме

$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}=0$ и $0<\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}<1$, за секој $n\geq n_0$, па следува дека $b_n>0$. Уште низата со општ член $c_n=\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}$ е монотоно опаѓачка а фунцијата $\sin x$ е растечка на $(0,1)$, па следува дека (b_n) е монотоно опаѓа.

Според Лајбницовиот критериум следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$ конвергира.

д) Со примена на адиционите формули општиот член на дадениот ред може да ги трансформираме во облик

$$a_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n} = \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2+\pi-\pi}{n+1}\right)}{\ln^2 n} = \frac{\cos\left(\frac{\pi(n-1)(n+1)}{n+1}+\frac{\pi}{n+1}\right)}{\ln^2 n} =$$
$$= \frac{\cos\left(\pi(n-1)+\frac{\pi}{n+1}\right)}{\ln^2 n} == \frac{(-1)^n}{\ln^2 n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Бидејќи редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln^2 n}$ конвергира според Лајбницовиот критериум, а низата $b_n = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ е монотона и ограничена, од Абеловиот критериум следува дека редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n}$ конвергира. ●

3.77. Докажи дека ако низата (a_n) монотно конвергира кон нула, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ конвергира за секој $\alpha\in\mathbb{R}$, а редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\alpha$ конвергира за $\alpha\neq 2\pi m, m\in\mathbb{Z}$.

Решение. Нека $B_n = \sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha$ и $C_n = \sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha.$

Тогаш

$$B_n = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(n\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \text{ и } C_n = \frac{\cos\left((n+1)\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(n\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)},\ \alpha\neq 2\pi m, m\in\mathbb{N}.$$

Ако $\alpha\neq 2\pi m, m\in\mathbb{Z}$, тогаш од неравенствата

$$B_n \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|} \quad \text{и } C_n \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}$$

според критериумот на Дирихле следува конвергенција на редовите $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$

Ако $\alpha = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, тогаш $\cos n2\pi m = 1,$ а $\sin n2\pi m = 0$ за секој $n \in \mathbb{Z}$. Според тоа за $\alpha = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ конвергира, додека редот

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може да конвергира или да дивергира во зависност од низата $\left(a_n\right)$. ●

3.78. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln(n+2)} \cos \frac{1}{n}.$

Решение. Заради **задача 3.77.** редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln(n+2)}$ конвергира, додека низата

$a_n = \cos \frac{1}{n}$ е монотна и ограничена. Според критериумот на Абел може да заклучиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln(n+2)} \cos \frac{1}{n}$ конвергира. ●

3.79. Испитај ја апсолутната и условната конвергенција на следниве редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{\sqrt[100]{n}(n+1)};$ б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n};$

Решение. а) Заради

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[100]{n}}} = 1,$$

следува дека дадениот ред не конвергира апсолутно.

За функцијата $f(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{x}}$ имаме $f'\left(x\right) = \frac{1+200x-x^2}{100\sqrt[100]{101}\left(1+x\right)^2} < 0$ за $x > x_0$

каде $x_0 = \max\left\{x_1, 1\right\}$, а x_1 е поголемото решение на равенката $1+200x-x^2 = 0$. Според тоа низата $\frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ монотоно опаѓа за $x > x_0 > 0$.

Значи, низата со општ член $\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[100]{n}}$ е низа од позитивни членови која монотоно конвергира кон нула. Според критериумот на Лајбниц редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n-1}{\sqrt[100]{n}(n+1)}$ конвергира.

б) Од неравенството

$$\left|\frac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}\right| \geq \frac{\sin^2\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\dfrac{n\pi}{6}}{2\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\dfrac{n\pi}{6}}{2\ln n}$$

бидејќи редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2\ln n}$ дивергира, а редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{6}}{\ln n}$ конвергира (**задача 3.77**.) следува дека редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\left|\sin\dfrac{n\pi}{12}\right|}{\ln n}$ дивергира како разлика на дивергентен и конвергентен ред. Според тоа редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}$ не конвергира апсолутно.

Но заради **задача 3.77** редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}$ конвергира. Значи, редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{12}}{\ln n}$ конвергира условно. ●

3.80. Испитај ја апсолутната и условната конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ во зависност од параметарот α, ако

а) $a_n=\dfrac{\cos(2n)}{(n^2+n+1)^{\alpha}}$;

б) $a_n=\dfrac{\sin n}{n\ln^{\alpha} n}$, $n\geq 2$;

в) $a_n=(-1)^n n^{\alpha}(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg} n)$

г) $a_n=\dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}}$.

Решение. а) Ако $\alpha\leq 0$, тогаш редот дивергира, бидејќи општиот член не тежи кон нула.

Нека $\alpha>0$. Тогаш редот конвергира според критериумот на Дирихле. Навистина, низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(2n)$ е ограничена, бидејќи

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos(2k)\right| = \left|\frac{\cos(n+1)\sin n}{\sin 1}\right| \le \frac{1}{\sin 1}$$

а низата $a_n = \dfrac{1}{(n^2+n+1)^{\alpha}}$ монотно конвергира кон нула. Понатаму, од неравенството $\left|\dfrac{\cos(2n)}{(n^2+n+1)^{\alpha}}\right| \le \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ следува дека разгледуваниот ред апсолутно конвергира за $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Ќе докажеме дека за $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2}$ редот условно конврвергира. Навистина, од релациите

$$\frac{|\cos(2n)|}{(n^2+n+1)^{\alpha}} \ge \frac{\cos^2(2n)}{(n^2+n+1)^{\alpha}} = \frac{1}{2}\frac{1}{(n^2+n+1)^{\alpha}} + \frac{1}{2}\frac{\cos(4n)}{(n^2+n+1)^{\alpha}}$$

како и од фактот дека редот $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+n+1)^{\alpha}}$ дивергира заради критериумот за споредување, а редот $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(4n)}{(n^2+n+1)^{\alpha}}$ конвергира според критериумот на Дирихле. Заклучуваме дека редот $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos(2n)|}{(n^2+n+1)^{\alpha}}$ дивергира. Тоа значи дека разгледуваниот ред условно конвергира за $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2}$.

б) Од оценката $\left|\dfrac{\sin n}{n\ln^{\alpha} n}\right| \le \dfrac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ и од фактот дека редот $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ конвергира за $\alpha > 1$ (заради интегралниот критериум за конвергенција) следува дека дадениот ред апсолутно конвергира за $\alpha > 1$.

Нека $\alpha \le 1$. Тогаш разгледуваниот ред конвергира според критериумот на Дирихле, бидејќи низата парцијални суми е ограничена, т.е

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right| = \frac{\left|\sin\left((n+1)\frac{1}{2}\right)\sin\left(n\frac{1}{2}\right)\right|}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \le \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

а низата $a_n = \dfrac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ монотоно конвергира кон нула.

Но конвергенцијата е условна, што може да се заклучи од релациците

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n\ln^{\alpha} n} \geq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n\ln^{\alpha} n} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha} n} - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{n\ln^{\alpha} n}$$

имајќи во вид дека редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ дивергира според интегралниот критериум, а редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{n\ln^{\alpha} n}$ конвергира според критериумот на Дирихле.

в) $a_n = (-1)^n n^{\alpha}(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n)$

Бидејќи $0 < \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n < \operatorname{arctg}(n+1) < \frac{\pi}{2}$ постои

$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n\right)$, па имаме

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(n+1)) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} n)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(n+1))\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} n)} = \frac{1}{n^2+n+1}$$

т.е. $\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n.$

Значи, $a_n = (-1)^n n^{\alpha}(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n) = (-1)^n n^{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}.$

Со примена на Лопиталовото правило добиваме дека општиот член на редот не конвергира кон 0 за $\alpha \geq 2$, па редот дивергира.

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n n^{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n^{2-\alpha}}}\right|$$

е конечен број за $2-\alpha > 1$, т.е. $\alpha < 1$ следува дека редот апсолутно конвергира, а за $\alpha \geq 1$ апсолутно дивергира.

Нека $1 \leq \alpha < 2$. Бидејќи

$$f'(x) = x^{-1+\alpha}\frac{-x-2x^2+\left(2\alpha+2\alpha x+3\alpha x^2+2\alpha x^3+\alpha x^4\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x+x^2}}{2+2x+3x^2+2x^3+x^4} <$$

$$< x^{-1+\alpha}\frac{-x-2x^2+\left(2\alpha+2\alpha x+3\alpha x^2+2\alpha x^3+\alpha x^4\right)\frac{1}{1+x+x^2}}{2+2x+3x^2+2x^3+x^4} <$$

$$
\begin{aligned}
&< x^{-1+\alpha}\frac{-x-2x^2+\left(2\alpha+2\alpha x+3\alpha x^2+2\alpha x^3+\alpha x^4\right)\dfrac{1}{x^2}}{2+2x+3x^2+2x^3+x^4}=\\
&=x^{-3+\alpha}\frac{2\alpha+2\alpha x+3\alpha x^2-x^3+2\alpha x^3-2x^4+\alpha x^4}{2+2x+3x^2+2x^3+x^4}=\\
&=x^{-3+\alpha}\frac{2\alpha+2\alpha x+3\alpha x^2+(-1+2\alpha)x^3+(-2+\alpha)x^4}{2+2x+3x^2+2x^3+x^4}<\\
&<\frac{2\alpha+2\alpha x+3\alpha x^2+(-1+2\alpha)x^3+(-2+\alpha)x^4}{2+2x+3x^2+2x^3+x^4}\to -2+\alpha<0, \qquad x\to\infty
\end{aligned}
$$

следува дека постои x_0 така што $f'\left(x\right)<0$ за секој $x>x_0$, па функцијата $f(x)=x^{\alpha}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2+x+1}$ монотоно опаѓа на $\left(x_0,\infty\right)$, од каде што следува дека низата $b_n=n^{\alpha}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1}$ е монотоно опаѓачка низа позитивни реални броеви. Со примена на Лопиталовото правило се докажува дека разгледуваната низа конвергира кон нула. Според тоа дадениот ред конвергира по критериумот на Лајбниц. Значи за $1\le\alpha<2$ разгледуваниот ред условно конвергира.

г) Ако $\alpha\le 0$, тогаш редот дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула. Понатаму од оценката

$$\frac{\left|\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\right|}{n^{\alpha}}\le\frac{1}{n^{\alpha}}$$

следува дека разгледуваниот ред апсолутно конвергира за $\alpha>1$.

Нека $0<\alpha\le 1$. Тогаш со примена на адиционите формули го добиваме равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos\dfrac{1}{n}}{n^{\alpha}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sin\dfrac{1}{n}}{n^{\alpha}}$$

од каде што следува дека дадениот ред конвергира како збир на два конвергентни реда.

Навистина, редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cos\dfrac{1}{n}}{n^{\alpha}}$$

конвергира според Абеловиот критериум, бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^{\alpha}}$ конвергира според критериумот на Дирихле, а низата $b_n = \cos\frac{1}{n}$ е монотона и ограничена. Конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n \sin\frac{1}{n}}{n^{\alpha}}$ следува од Ваерштасовиот критериум заради оценката

$$\frac{\left|\cos n \sin\frac{1}{n}\right|}{n^{\alpha}} \leq \frac{\left|\sin\frac{1}{n}\right|}{n^{\alpha}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

Конвергенцијата на разгледуваниот ред за $0 < \alpha \leq 1$ е условна. Заклучокот следува од релациите

$$\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\right|}{n^{\alpha}} \geq \frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{\cos\left(2n+\frac{2}{n}\right)}{n^{\alpha}}.$$

Редот $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ дивергира.

За редот

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n+\frac{2}{n}\right)}{n^{\alpha}}$$

имаме

$$\frac{\cos\left(2n+\frac{2}{n}\right)}{n^{\alpha}} = \frac{\cos 2n \cos\frac{2}{n}}{n^{\alpha}} - \frac{\sin 2n \sin\frac{2}{n}}{n^{\alpha}},$$

па конвергенцијата на $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n+\frac{2}{n}\right)}{n^{\alpha}}$ се докажува слично како и за редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}}. \bullet$$

3.81. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, каде што $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$, $p_1 = 1, p_1 < p_2 < \ldots$, добиен со групирање на членовите на дадениот ред, без промена на нивниот редослед, исто така конвергира.

Решение. За парцијалната сума на редот $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ имаме

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1}) + (a_{p_2} + \ldots + a_{p_3-1}) + \ldots + (a_{p_n} + \ldots + a_{p_{n+1}-1}) =$$
$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + \ldots + a_{p_{n+1}-1} = S_{p_{n+1}-1}$$

каде $\left(S_{p_n}\right)$ е подниза од низата парцијални суми $\left(S_n\right)$ на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, индексирана со $1 = p_1 < p_2 < \ldots$. Низата $\left(S_{p_n}\right)$ е конвергентна низа како подниза од конвергентната низа $\left(S_n\right)$. Уште повеќе низата $\left(S_{p_n}\right)$ и низата $\left(S_n\right)$ имаат иста граница. Со други зборови, од $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ следува дека

$$\lim_{n\to\infty}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \lim_{n\to\infty} S_{p_{n+1}-1} = S. \bullet$$

3.82. Редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, ако се исполнети следниве услови:

(i) $a_n \to 0$, кога $n \to \infty$;

(ii) редот $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, добиен со групирање на членовите на дадениот ред, без промена на нивниот редослед, конвергира.

(iii) бројот на собироци a_i кои ја формираат сумата $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$, $p_1 = 1, p_1 < p_2 < \ldots$, е ограничен.

Решение. Нека $\left(S_{n_k}^A\right) = \left(S_{n_k}^A \middle| n_k \in \mathbb{N}\right)$ е парцијална сума на редот $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогаш

$$S_{n_k}^A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + a_{p_2+1} \ldots + a_{p_3-1} + \ldots + a_{p_n} +$$
$$+ a_{p_{n+1}} + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{p_{n+1}-1} = S_k + a_{k+1} + \ldots + a_{p_{n+1}-1},\; p_n \le k \le p_{n+1} - 1,$$

каде што $\left(S_k\right)$ е низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Бидејќи $a_n \to 0$, кога $n \to \infty$ и бројот на членови на низата со општ член

$C_k = a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{p_{n+1}-1}$

е ограничен добиваме дека $C_k \to 0$, кога $k \to \infty$. Оттука следува дека

$\lim\limits_{k\to\infty} S^A_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. ●

3.83. Докажи дека редовите

$$a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right), a_i > 0, 1 = p_1 < p_2 < ......$$

имаат иста природа на конвергенција.

Решение. Нека редот $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$ конвергира. Тогаш конвергира низата парцијални суми на разгледуваниот ред.

Низата со општ член $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum\limits_{i=p_k}^{p_{k+1}-1} a_i\right)$ е подниза од низата од парцијални суми на редот $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$, која е конвергентна, па значи конвергира. Бидејќи низата со општ член $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum\limits_{i=p_k}^{p_{k+1}-1} a_i\right)$ е низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right)$, па заклучуваме декар редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right)$ конвергира.

Обратно, претпоставуваме дека конвергира редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right)$.

Тогаш $\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \to 0$, кога $n \to \infty$. Бидејќи по услов на задачата членовите a_i се позитивни, збирот $a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{p_{n+1}-1}$, каде $k \geq p_n$, исто така тежи кон нула и $\lim\limits_{k\to\infty} S^A_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$ од каде што следува дека редот

$$a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + ... + a_{p_3} + ...$$

конвергира. ●

3.84. Докажи дека сумата на конвергентен ред не се менува ако членовите на редот ги разместиме така што ниеден член од првобитната позиција не е оддалечен за повеќе од m места, каде што m е некој однапред даден природен број.

Решение. Нека S е сумата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогаш за секое $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0, така што за секој $n > n_0$ за низата парцијални суми $\left(S_n\right)$ на дадениот ред исполнети се неравенствата $S - \varepsilon < S_n < S + \varepsilon$.

Од условот во задачата за $n > n_0 + m$, за низата парцијални суми $\left(S'_n\right)$ на редот добиен со разместувањето на членовите исполнети се неравенствата

$S - \varepsilon < S'_n < S + \varepsilon$. Оттука следува дека $\lim_{n\to\infty} S'_n = S$. ●

3.85. Испитај ја конвергенцијата на следниве редови:

а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - ...;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}.$

Решение. а) Ако ги групираме членовите на дадениот ред без да го промениме редоследот на членовите добиваме

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\right) + ...$$

$$+ \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}\right) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} A_n$$

каде што $A_n = \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}$.

Низата $\left(A_n\right)$ е низа со позитивни членови. која монотоно опаѓа. Освен тоа од

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}\right) = 0$$

следува дека разгледуваната низа конвергира кон нула. Заради критериумот на Лајбниц следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n$ конвергира. Тогаш од задача 3.83 следува дека дадениот ред конвергира.

б) Ако ги групираме членовите на дадениот ред без да го промениме редоследот на членовите добиваме

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{15}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$$

каде што $A_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2+1}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)^2-1}$.

Низата $\left(A_n\right)$ е низа со позитивни членови. која монотоно опаѓа (Зошто?). Освен тоа од

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right)<\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2}=0$$

следува дека разгледуваната низа конвергира кон нула. Заради критериумот на Лајбниц следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$ конвергира. Тогаш од **задача 3.89** следува конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

в) Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{[e^{n-1}]+1}+\ldots+\frac{1}{[e^n]}\right)$$

добиен со групирање на членовите на дадениот ред дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула, што може да се заклучи од оценката

$$\frac{1}{[e^{n-1}]+1}+\ldots+\frac{1}{[e^n]}>\frac{[e^n]-[e^{n-1}]}{[e^n]}=1-\frac{[e^{n-1}]}{[e^n]}\to 1-\frac{1}{e}, \text{ кога } n\to\infty.$$

Тогаш од задача 3.83 следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$ дивергира.

г) Очигледно ако $p>1$ редот апсолутно конвергира, додека ако $p\le 0$ редот дивергира. Нека $0<p\le 1$. Ако ги групираме членовите на дадениот ред без да го промениме редоследот на членовите добиваме

$$-\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots+\frac{1}{8^p}\right)-\left(\frac{1}{9^p}+\frac{1}{10^p}+\ldots+\frac{1}{15^p}\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{1}{(n^2)^p}+\frac{1}{(n^2+1)^p}+...+\frac{1}{((n+1)^2-1)^p}\right)+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$$

каде што $A_n=\frac{1}{(n^2)^p}+\frac{1}{(n^2+1)^p}+...+\frac{1}{((n+1)^2-1)^p}$.

Ако $p>\frac{1}{2}$ низата $\left(A_n\right)$ е низа со позитивни членови. која монотоно опаѓа. Освен тоа од $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n^2)^p}+\frac{1}{(n^2+1)^p}+...+\frac{1}{((n+1)^2-1)^p}\right)<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^{2p}}=0$ следува дека разгледуваната низа конвергира кон нула. Заради критериумот на Лајбниц следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$ конвергира. Тогаш од задача 3.83 следува конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

Понатаму, ако $p\le\frac{1}{2}$ редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$ дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула. Имено заради $A_n>\frac{2n+1}{(n^2+2n)^p}$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty}A_n\ge\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{(n^2+2n)^p}\ne 0.$

Тогаш според задача 3.83. редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$ дивергира. ●

3.86. Размести ги членовите на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ така што добиениот ред да дивергира.

Решение. Да воочиме дадениот ред условно конвергира. Навистина, низата $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ е монотона низа со позитивни членови која што конвергира кон нула, од каде што заради критериумот на Лајбниц следува дека разгледуваниот ред конвергира. Од равенството $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}$ имајќи во вид дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира, следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right|$ дивергира. Значи, разгледуваниот ред конвергира условно. Постои разместување на членовите на дадениот ред за кое што добиениот ред дивергира. Да го разгледаме редот

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\dots$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\dots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

добиен со разместување на членовите на дадениот ред. Од неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{2}{\sqrt{6n-1}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}>0$$

следува дека

$$\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{2}{\sqrt{6n-5}},$$

односно, општиот член на редот добиен со разместување на членовите на дадениот ред е поголем од $\frac{1}{\sqrt{6n-5}}$. Бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ дивергира, таков е и редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

добиен со разместување на членовите на дадениот ред. ●

3.87. Докажи дека хармонискиот ред останува дивергентен, ако не менувајќи го редоследот на членовите, го промениме знакот така што после p позитивни члена, доаѓаат q негативни члена, за $p \neq q$, и.т.н. Со горната постапка добиваме конвергентен ред ако $p = q$.

Решение. Редот добиен од хармонискиот ред со погорната постапка гласи:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}-\dots-\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+q+1}+\dots+\frac{1}{2p+q}-\dots$$

Заради задача 3.83 добиениот ред конвергира или дивергира истовремено со редот

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\dots+\frac{1}{p+q}\right)+\left(\frac{1}{p+q+1}+\dots+\frac{1}{2p+q}\right)-\dots \qquad (1)$$

Нека $p>q$. Од оценките

$$S_2=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\dots+\frac{1}{p+q}\right)>1-\frac{q}{p}=\frac{p-q}{p}$$

$$S_4=S_2+\left(\frac{1}{p+q+1}+\dots+\frac{1}{2p+q}\right)-\left(\frac{1}{2p+q+1}+\dots+\frac{1}{2p+2q}\right)>$$

$$> S_2 + \frac{p}{2p+q} - \frac{q}{2p+q} > (p-q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q}\right)$$

....

$$S_{2n} > (p-q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p+q} + \ldots + \frac{1}{np+(n-1)q}\right) > 0$$

следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = +\infty$ од каде што може да се заклучи дека (1) дивергира.

Слично, ако $p < q$, тогаш од оценките

$$S_1 < p, \qquad S_2 < p - \frac{p}{p+q}, \qquad S_3 < p - \frac{q-p}{p+q},$$

$$S_4 < p - \frac{q-p}{p+q} - \frac{q}{2(p+q)}, \qquad S_5 < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

....

$$S_{2n} < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{q}{n(p+1)},$$

$$S_{2n+1} < p - \frac{q-p}{p+q}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = -\infty$ од каде што може да се заклучи дека (1) дивергира.

Ако $p = q$ тогаш редот (1) конвергира, што може да се докаже со Лајбницовиот критериум (доказот се остава на читателот). ●

3.88. Докажи дека низата (x_n) конвергира, ако:

а) $x_{n+1}^2 + x_n^2 \leq 2x_{n+1}x_n + a^n$, за секој $n \geq 1$ и $0 < a < 1$;

б) $x_{n+1}^2 + x_n^2 \leq 2x_{n+1}x_n + \dfrac{1}{n^3}$, за секој $n \geq 1$;

в) $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$;

Решение. а) Од дадениот услов за членовите на низата (x_n) следува дека

$$| x_{n+1} - x_n | \leq a^{n/2} = (\sqrt{a})^n.$$

Оттука заради критериумот на Ваерштрас може да заклучиме дека редот $x_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ апсолутно конвергира како ред кој е мајориран со конвергентниот геометриски ред $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{a})^n$. Тогаш редот $x_1+\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ е конвергентен, од каде што следува дека конвергентна е и неговата низа парцијални суми S_n. Заради

$$S_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = x_n$$

заклучуваме дека дадената низа е конвергентна.

б) Од дадениот услов за членовите на низата $\left(x_n\right)$ следува дека

$$|\, x_{n+1} - x_n \,| \leq \frac{1}{n^3}.$$

Оттука заради критериумот на Ваерштрас може да заклучиме дека редот $x_1+\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ апсолутно конвергира како ред мајориран со конвергентниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Тогаш редот $x_1+\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ е конвергентен, од каде што следува дека конвергентна е и неговата низа парцијални суми S_n. Заради

$$S_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) = x_n$$

следува дека дадената низа е конвергентна.

в) Заради $x_n = x_1 + \sum_{n=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$ имаме

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n} =$$

$$= -1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-2\sqrt{k+1}-1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-...-\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{k}\right)=$$

$$= -1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-2\sqrt{k+1}+2\sqrt{k}\right) = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\right)=$$

$$= -1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2}.$$

Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2}.$

Бидејќи редот $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)^2}$ конвергира заклучуваме дека таква е и дадената низа. ●

3.89. Нека $\left(a_n\right)$ е монотона низа од позитивни броеви и нека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}$ конвергира. Докажи дека следниве редови се конвергентни:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+p}$; в) $\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p b_p$, каде $b_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+p}$.

Решение. а) Бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}$ конвергира општиот член тежи кон нула, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n^{\,2} = 0$ од каде што следува дека $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ Тогаш од условот во задачата следува дека монотоната низа позитивни реални броеви $\left(a_n\right)$ е опаѓачка, што според критериумот на Лајбниц повлекува конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

б) Конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+p}$ следува од неравенствата

$$0 < a_n a_{n+p} \le a_n a_n = a_n^{\,2}$$

како и од претпоставката дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}$ конвергира.

в) Низата $\left(b_p\right)$ е низа позитивни реални броеви. Понатаму, од

$$b_p = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+p} \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+p+1} = b_{p+1}$$

следува дека низата $\left(b_p\right)$ е монотоно опаѓачка. За да ја утврдиме конвергенцијата на дадениот ред според критериумот на Лајбниц доволно е да покажеме дека $\lim_{n\to\infty} b_p = 0.$ Навистина, за секој $m \in \mathbb{N}$ имаме

$$0 \le b_p = \sum_{n=1}^{m} a_n a_{n+p} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n a_{n+p} \le \sum_{n=1}^{m} a_n a_{n+p} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^{\,2}$$

од каде што следува дека

$$0 \le \liminf_{p\to\infty} b_p \le \limsup_{p\to\infty} b_p \le \sum_{n=1}^{m} a_n \lim_{p\to\infty} a_{n+p} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^{\,2} = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^{\,2}, \text{ кога } p\to\infty.$$

Ако сега $m \to \infty$ добиваме

$$0 \le \liminf_{p\to\infty} b_p \le \limsup_{p\to\infty} b_p \le \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{n} a_n^{\ 2} = 0$$

од каде што следува дека $\lim_{p\to\infty} b_p = 0$. ●

3.90. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{(n^2+1)\pi}{n+1}\right)$, ако

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3}, n \ge 1.$$

Решение. Со методот на индукција може да се докаже дека

$$0 < a_n \le 2,\ \text{за секој } n \ge 1,$$

од каде што следува дека (a_n) е ограничена низа од позитивни реални броеви. Понатаму, од релациите

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3} = \frac{(a_n+1)(a_n-2)}{a_n+3} \le 0,\ \text{за секој } n \ge 1,$$

следува дека низта (a_n) е монотоно растечка.

Заради

$$\sin\left(\frac{(n^2+1)\pi}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{((n+1)^2-2n)\pi}{n+1}\right) = \sin\left((n+1)\pi - \frac{2n\pi}{n+1}\right) = -(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{2n\pi}{n+1}\right) =$$
$$= (-1)^n \sin\left(\frac{(2(n+1)-2)\pi}{n+1}\right) = (-1)^n \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)$$

дадениот ред може да го запишеме во облик $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)$.

Со помош на Лајбницовиот критериум може да се покаже дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)$ конвергира. Имајќи во вид дека низата (a_n) е монотона и ограничена, според Абеловиот критериум може да заклучиме дека разгледуваниот ред конвергира. ●

3.91. Нека (a_n) е низа реални броеви така што $a_{n+3} = a_n$, за секое $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ конвергира ако и само ако $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Решение. Нека $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Тогаш за низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ имаме

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 3k; \\ a_1 + a_2 = -a_3, & n = 3k-1; \\ a_1, & n = 3k-2; \end{cases}$$

од каде што следува дека $|S_n| \leq \max\{|a_1|, |a_3|\}$, т.е. низата (S_n) е ограничена. Бидејќи низата $b_n = \frac{1}{n}$ монотоно конвергира кон нула, редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ конвергира според критериумот на Дирихле.

Обратно, претпоставуваме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ конвергира. Тогаш конвергира и редот $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, каде што $A_n = \frac{a_1}{3n-2} + \frac{a_2}{3n-1} + \frac{a_3}{3n}$ добиен со групирање на членовите на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$, без промена на редоследот на членовите. Заради

$$A_n = \frac{a_1}{3n-2} + \frac{a_2}{3n-1} + \frac{a_3}{3n} = \frac{9(a_1 + a_2 + a_3)n^2 - 3(a_1 + 2a_2 + 3a_3)n + 2a_3}{(3n-2)(3n-1)3n} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3n\left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)} - \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{9n^2\left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)} + \frac{2a_3}{27n^3\left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)}$$

од конвергенцијата на редовите

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{9n^2\left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_3}{27n^3\left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)}$$

следува конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3n\left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)}$.

Ако $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$, тогаш заради

$$\left(a_1 + a_2 + a_3\right) \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{3n\left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)}}{\dfrac{1}{n}} = \left(a_1 + a_2 + a_3\right)\frac{1}{3}$$

редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3n\left(1 - \frac{2}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)}$ е дивергентен.

Значи, заклучуваме дека за да конвергира последниот ред, мора да биде исполнето равенството $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. ●

3.92. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$, ако

$$x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n + x_n^{\ 2}},\ \ n \geq 1.$$

Решение. Со методот на математичка индукција може да се докаже дека $x_n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Тогаш од $1 + x_n + x_n^{\ 2} > 1$ имаме $x_{n+1} < x_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$, од каде што може да се заклучи дека низата $\left(x_n\right)$ конвергира, како монотона и ограничена низа. Значи, постои $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Тогаш од $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n + x_n^{\ 2}}$, добиваме $x\left(x + 1\right) = 0$. Бидејќи $x_n > 0$ мора и $x \geq 0$, т.е. $x = 0$.

Тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ конвергира според Лајбницовиот критериум. ●

3.93. Нека $\alpha > 0$ и $\left(p_n\right)$ монотоно растечка низа од позитивни реални броеви. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^{\alpha}}$ конвергира.

Решение. Имаме $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}} - \frac{p_{n-1}}{p_n} \cdot \frac{1}{p_{n-1}^{\alpha}} \right)$. Од условот во задачата произлегуваат следниве две можности:

Ако $p_n \to \infty$ тогаш редот $\frac{1}{p_0^{\ \alpha}} - \frac{p_0}{p_1} \cdot \frac{1}{p_0^{\ \alpha}} + \frac{1}{p_1^{\ \alpha}} - \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{1}{p_1^{\ \alpha}} + ...$ конвергира според Лајбницовиот критериум, па следува дека конвергира и дадениот ред.

Ако $p_n \to p < +\infty$ тогаш за општиот член на дадениот ред имаме

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{p_n p_{n-1}^{\alpha}} \leq c(p_n - p_{n-1}),\ \text{бидејќи}\ \frac{1}{p_n p_{n-1}^{\alpha}} \leq c.$$

Од конвергенцијата на низата $\left(p_n\right)$ и равенството $p_n = p_0 + \sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k-1})$

следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}(p_k - p_{k-1})$ конвергира, од каде што според критериумот за споредување, заклучуваме дека дадениот ред конвергира. ●

3.94. Најди ја сумата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Решение. Дадениот ред апсолутно конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right|}{\frac{1}{(n+1)^2}}=1,$$

а редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$ конвергира.

Сумата на дадениот ред е границата на низата парцијални суми (S_n) или границата на која било нејзина подниза. Од

$$S_{2n}=\ln\frac{1\cdot 3}{2^2}-\ln\frac{2\cdot 4}{3^2}+...+\ln\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}-\ln\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}=$$

$$=\ln\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2(2n+1)-\ln\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{n+1}{2n+1}$$

добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2(2n+1)-\ln\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{n+1}{2n+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2(2n+1)-\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}-\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{2n+1}=$$

$$=\ln\frac{2}{\pi}-\ln\frac{\pi}{2}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{8}{\pi^2}.$$ ●

Забелешка. Во задачата ја применивме формулата на Валис

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

3.4. Бесконечни производи

Нека (p_n) е дадена низа реални броеви. Формалниот израз

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdot$$

означен со $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ се нарекува **бесконечен производ** со општ член p_n.

Производот на првите $n-$члена на производот се нарекува $n-$**ти парцијален производ** и се означува со P_n. Значи, $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$. Ако постои границата $\lim_{n\to\infty} P_n = P$, $P \neq 0$, $-\infty < P < +\infty$ тогаш велиме дека бесконечниот производот $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ **конвергира**, а бројот P се нарекува **производ** или **вредност на бесконечниот производ** и пишуваме $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$. Во спротивно велиме дека производот $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ **дивергира**.

1. Ако производот $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ конвергира тогаш $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

2. Бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, конвергира ако и само ако конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.

3.95. Испитај ја конвергенцијата на следниве бесконечни производи:

а) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; б) $\prod_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; в) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$; г) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Решение. а) Бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира бидејќи не е исполнет потребниот услов за конвергенција, т.е. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \neq 1$.

б) Бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ дивергира бидејќи низата парцијални производи со општ член $P_n = \prod_{k=1}^{n}(-1)^k$ дивергира.

в) За низата парцијални производи на разгледуваниот производ имаме

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

од каде што добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ што значи дека бесконечниот производ дивергира.

г) Бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ дивергира бидејќи низата парцијални производи дивергира. Поточно, заради

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1$$

имаме $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} n+1 = +\infty$ од каде што заклучуваме дека разгледуванниот бесконечен производ дивергира. ●

3.96. Докажи дека следниве бесконечни производи конвергираат и најди ги:

а) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; б) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$; в) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n}$, $0<\alpha<\pi$.

Решение. а) За низата парцијални производи на дадениот производ имаме:

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdots\frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2-1}{n^2} =$$

$$= \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdots\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

од каде што добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Значи, разгледуваниот бесконечен производ конвергира и неговата вредност е $P = \frac{1}{2}$.

б) Дадениот бесконечен производ конвергира бидејќи

$$P_n=\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{(n-1)^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)=$$

$$=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n-1)}{(n-2)n}\cdot\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}=\frac{2n}{n+1}$$

од каде што следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2.$

Вредноста на разгледуваниот бесконечен производ е $P=2$.

в) По низа тригонометриски трансформации имаме

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2^2\sin\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2}=2^2\sin\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2}=\ldots=$$

$$=2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

од каде што следува дека $P_n=\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\dfrac{\alpha}{2^n}=\dfrac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$

Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

од каде што може да се заклучи дека бесконечниот производ конвергира и неговата вредност е $P=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$. ●

3.97. Докажи дека ако конвергираат бесконечните производи $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$, $p_n,q_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш конвергираат и бесконечните производи $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_nq_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p_n}{q_n}$. Што може да се каже за вредноста на бесконечните производи $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_nq_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p_n}{q_n}$.

Решение. Од условот во задачата следува дека вредностите на бесконечните производи $P=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}p_k$ и $Q=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}q_k$ се конечни позитивни броеви. Заради комутативноста и асоцијативноста на операцијата множење на реални броеви имаме

$$\prod_{k=1}^{n} p_k q_k = \prod_{k=1}^{n} p_k \prod_{k=1}^{n} q_k \quad \text{и} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} p_k}{\prod_{k=1}^{n} q_k}.$$

Користејќи ги својствата на конвергентните низи добиваме

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k q_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k \prod_{k=1}^{n} q_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} q_k = PQ \quad \text{и}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} p_k}{\prod_{k=1}^{n} q_k} = \frac{\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k}{\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} q_k} = \frac{P}{Q}$$

од каде што може да заклучиме дека бесконечните производ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ конвергираат и има вредност PQ и $\frac{P}{Q}$, соодветно.

3.98. Докажи ја формулата на Валис $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Ако неравенството $\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$ за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ го интегрираме од 0 до $\frac{\pi}{2}$ добиваме

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx.$$

Бидејќи

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

ги добиваме неравенствата $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$, т.е.

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.$$

Ако ставиме

$$x_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \text{ и } y_n = \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

тогаш од

$$0 < y_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \le \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0 \text{, кога } n \to \infty,$$

следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Оттука, заради

$$x_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)(2n-1)(2n+1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}$$

добиваме дека $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n^2}{4n^2-1} = \dfrac{\pi}{2}$, што требаше да се докаже. ●

3.99. Докажи ги следниве равенства:

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} = \dfrac{3}{7}$; б) $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right) = 2$; в) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.

Решение. а) Треба да докажеме дека дадениот бесконечен производ конвергира кон бројот $\dfrac{3}{7}$. Имаме

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)(2k+7)}{(2k+3)(2k+5)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}\cdots\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{7}\cdot\frac{2n+7}{2n+3} = \frac{3}{7}.$$

б) Во дадениот случај имаме

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Тогаш од $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{1}{2^{2^k}}\right) = \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right) = \ldots = 1-\dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}$

добиваме дека

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right) = \frac{1-\dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}}{1-\dfrac{1}{2}}$$

од каде што следува

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^k}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$$

в) Со примена на формулата на Валис имаме

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-1}{4n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)^{-1}=\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}\right)^{-1}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{\pi}. \bullet$$

3.100. Најди ја вредноста на бесконечниот производ $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)$.

Решение. Во дадениот случај имаме $P_n=(1+x)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)$.

Нека $|x|<1$. Тогаш од $(1-x)P_n=\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)\cdots\left(1+x^{2^n}\right)=1-x^{2^{n+1}}$ добиваме

дека $P_n=\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$, па $\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$.

Ако $|x|\geq 1$, тогаш општиот член на редот не конвергира кон 1.

Од погорната дискусија може да се заклучи дека

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & |x|<1;\\ +\infty, & |x|\geq 1,\end{cases} \bullet$$

3.101. Докажи дека $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(a+kb)}}{\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb)}=0$, за секои $a,b>0$.

Решение. Со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(a+kb)}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb)$$

имаме

$$0<\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(a+kb)}}{\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb)}\leq\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb)}{\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb)}=\frac{1}{n}\to 0,\text{ кога } n\to\infty$$

од каде што следува дека

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(a+kb)}}{\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb)}=0. \bullet$$

3.102. Бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n)$, $p_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$, конвергира ако и само ако конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$.

Решение. Нека бесконечниот производ $\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n)$, $p_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$, конвергира. Тогаш $\lim_{n\to\infty}\left(1+p_n\right)=1$, па $\lim_{n\to\infty}p_n=0$. Притоа конвергира редот и $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+p_n)$. Од $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+p_n)}{p_n}=1$ следува дека редовите $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+p_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ имаат иста природа, па значи и редот $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ конвергира.

Обратно. Нека редот $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ конвергира, па важи $\lim_{n\to\infty}p_n=0$. Од $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+p_n)}{p_n}=1$ следува дека редовите $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+p_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ имаат иста природа, па значи и редот $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+p_n)$ конвергира, па и $\prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n)$ конвергира. ●

3.103. Испитај ја конвергенцијата на следниве бесконечни производи:

а) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$; б) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$; в) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^2-1}$.

Решение. а) Дадениот бесконечен производ конвергира бидејќи конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

б) Од конвергенцијата не геометрискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ следува дека конвергира и разгледуваниот бесконечен производ.

в) Од равенството $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^2-1}=\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n^2-1}\right)$, како и од фактот дека од конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2-1}$, следува конвергенција на бесконечниот производ $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n^2-1}\right)$. Заклучуваме дека разгледуваниот бесконечен производ конвергира. ●

3.104. Испитај ја конвергенцијата, во зависност од реалниот параметар α, на следниве бесконечни производи:

а) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$;　　б) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\right)$;　　в) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n\ln^{\alpha} n}\right)$.

Решение. а) Имајќи во вид дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ конвергира за $\alpha>1$, а дивергира за $\alpha\leq 1$, разгледуваниот бесконечен производ конвергира за $\alpha>1$, а дивергира за $\alpha\leq 1$.

б) Редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$ конвергира за $\alpha>1$, а дивергира за $\alpha\leq 1$. Според тоа дадениот бесконечен производ конвергира за $\alpha>1$, а дивергира за $\alpha\leq 1$.

в) Разгледуваниот бесконечен производ конвергира за $\alpha>1$, а дивергира за $\alpha\leq 1$, бидејќи редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$ конвергира за $\alpha>1$, а дивергира за $\alpha\leq 1$. ●

IV. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ

4.1. Функционални низи

Секое пресликување $n \mapsto f_n, n \in \mathbb{N}$, од множеството природни броеви во множеството од функции дефинирани на подмножество X од реални броеви се нарекува **функционална низа** и се означува со (f_n)

За функционалната низа (f_n) велиме дека **конвергира по точки (точкасто)** кон функцијата f на множеството X, ако

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ за секој } x \in X.$$

Функционалната низа (f_n) рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството X, ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $n_0 \in \mathbb{N}$, така што за секој $n \geq n_0$ и за секој $x \in X$ важи $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

1. Функционалната низа (f_n) **рамномерно конвергира** кон функцијата f на множеството X, ако и само ако

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

2. Ако низата (f_n) од непрекинати функции на $[a,b]$ **рамномерно конвергира** кон функцијата f на $[a,b]$, тогаш важат равенствата

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right), x_0 \in [a,b];$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{x_0} f_n(t)dt = \int_0^{x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)dt, x_0 \in [a,b].$$

3. Ако низата (f_n) од непрекинато диференцијабилни функции на $[a,b]$ конвергира барем во една точка $c \in [a,b]$ и ако низата (f_n') **рамномерно конвергира**

на $[a,b]$, тогаш функционалната низа $\left(f_n\right)$ рамномерно конвергира на $[a,b]$ и притоа важи равенството

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)', \text{ за секој } x \in [a,b].$$

4.1. Најди ја граничната функција на следниве функционални низи:

а) $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$; б) $f_n(x) = x^n - 4x^{n+1} + 3x^{n+2},\ x \in [0,1]$;

в) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in (-\infty,+\infty)$; г) $f_n(x) = \dfrac{n^2}{n^2+x^2},\ x \in (-\infty,+\infty)$;

д) $f_n(x) = x\sin\dfrac{1}{nx},\ x \in (0,+\infty)$; ѓ) $f_n(x) = \ln\left(3 + \dfrac{n^2e^x}{n^4e^{2x}}\right),\ x \in [0,+\infty)$.

Решение. а) Ако $x \in [0,1)$ тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, а ако $x = 1$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$. Според тоа дадената функционална низа точкасто конвергира кон функцијата

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{ако } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{ако } x = 1 \end{cases}.$$

б) Користејќи го претходно добиениот резултат добиваме

$\lim\limits_{n\to\infty}(x^n - 4x^{n+1} + 3x^{n+2}) = 0$, за $0 \le x < 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x^n - 4x^{n+1} + 3x^{n+2}) = 0$, за $x = 1$.

Според тоа за граничната функција добиваме

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n - 4x^{n+1} + 3x^{n+2}) = 0,\ x \in [0,1].$$

в) Ако $x \ne 0$, тогаш од неравенството

$$\left|f_n(x)\right| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| < \left|\frac{nx}{n^2x^2}\right| = \frac{1}{\left|nx\right|}$$

следува дека $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ако $x = 0$, тогаш $f_n(x) = 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Според тоа разгледуваната функционална низа точкасто конвергира кон функцијата

$f(x) = 0,\ x \in (-\infty,+\infty)$.

г) Од

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2} = 1 - \frac{x^2}{n^2+x^2}$$

следува дека бараната гранична функција е

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+x^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2+x^2}\right)=1,\ \ x\in(-\infty,+\infty).$$

д) Имајќи ја предвид дека

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{nx}}{x\frac{1}{xn}}=\frac{1}{x},$$

па следува граничната функција е $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$.

ѓ) Користејќи дека

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(3+\frac{n^2e^x}{n^4e^{2x}}\right)=\ln 3+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{n^2e^x}{3(n^4+e^{2x})}\right)}{\frac{n^2e^x}{3(n^4+e^{2x})}}\frac{n^2e^x}{3(n^4+e^{2x})}=\ln 3,$$

следува дека разгледуваната функционална низа конвергира кон функцијата

$$f(x)=\ln 3,\ x\in\left[0,+\infty\right).\ \bullet$$

4.2. Докажи по дефиниција дека следниве функционални низи се рамномерно конвергентни:

а) $f_n(x)=x^n,\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; б) $f_n(x)=\dfrac{1}{n+x},\ x\in(0,+\infty)$;

в) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}, x\in[0,1]$; г) $f_n(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}, x\in[0,+\infty)$.

Решение. а) Дадената функционална низа конвергира точкасто на разгледуваниот интервал кон функцијата

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=0,\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Ќе докажеме дека конвергенцијата е рамномерна. Нека $\varepsilon>0$ е произволно. Избираме $n_0=\left[\dfrac{|\ln\varepsilon|}{\ln 2}\right]+1$. Тогаш за секој $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|x\right|^n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n<\varepsilon,\ \text{за секој } n\ge n_0,$$

од каде што следува дека дадената функционалната низа рамномерно конвергира на интервалот $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

б) Дадената функционална низа конвергира точкасто на разгледуваниот интервал кон функцијата

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+n}=0,\ x\in(0,+\infty).$$

Нека $\varepsilon>0$ е произволно. Избираме $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Тогаш

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\frac{1}{x+n}\right|\le\frac{1}{n}<\varepsilon,\ \text{за секои } n\ge n_0,\ x\in(0,+\infty),$$

од каде што следува дека низата рамномерно конвергира на интервалот $(0,+\infty)$.

в) Граничната функција на дадената функционална низа е

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}=0,\ \text{за секој } x\in\left[0,1\right].$$

Нека $\varepsilon>0$ е произволно. Избираме $n_0=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$. Тогаш од $\left(1-nx\right)^2\ge 0$ и

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\frac{x}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n}<\varepsilon,\ \text{за секои } n\ge n_0,\ x\in\left[0,1\right],$$

следува дека дадената функционалната низа рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал.

г) Дадената функционална низа точкасто конвергира кон функцијата

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x+\frac{1}{n}}=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty).$$

Нека $\varepsilon>0$ е произволно. Избираме $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$. Тогаш за секој $n\ge n_0$ и за секој $x\in[0,+\infty)$ важи

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right|=\frac{\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{n\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

од каде што следува дека разгледуваната функционална низа рамномерно конвергира на интервалот $[0,+\infty)$. ●

4.3. Дали рамномерно конвергираат следниве функционални низи:

а) $f_n(x)=x^n,\ x\in[0,1)$; б) $f_n(x)=x^n,\ x\in[0,1]$;

в) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ x\in[0,2]$; г) $f_n(x)=\ln\left(3+\dfrac{n^2e^x}{n^4+e^{2x}}\right), x\in[0,+\infty)$?

Решение. а) Дадената функционална низа точкасто конвергира кон граничната функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x^n=0,\ x\in[0,1).$$

Ќе докажеме дека конвергенцијата не е рамномерна, т.е. постои $\varepsilon>0$ така што за секој $n_0\in\mathbb{N}$ постои $x_{n_0}\in\left[0,1\right)$ така што $\left|f_{n_0}(x_{n_0})-f(x_{n_0})\right|\geq\varepsilon.$

Нека $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ и нека $n_0\in\mathbb{N}$ е произволен и нека $x_{n_0}=\dfrac{1}{\sqrt[n_0]{2}}$. Јасно, $x_n\in[0,1)$.

Тогаш $\left|f_{n_0}(x_{n_0})-f(x_{n_0})\right|=\left(\dfrac{1}{\sqrt[n_0]{2}}\right)^{n_0}=\dfrac{1}{2}=\varepsilon.$

Значи конвергенцијата на разгледуваната низа не е рамномерна.

б) Дадената функционална низа $f_n(x)=x^n$ е низа од непрекинати функции. Да воочиме дека граничната функција,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{ако } 0\leq x<1\\ 1, & \text{ако } x=1\end{cases},$$

не е непрекината функција. Бидејќи функционална низа од непрекинати функции, при рамномерна конвергенција, конвергира кон непрекината функција, заклучуваме дека конвергенцијата на дадената низа на разгледуваниот интервал не е рамномерна.

в) Дадената функционална низа точкасто конвергира кон граничната функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0.$$

Нека $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Избираме низа реални броеви со општ член $x_n = \frac{1}{n}$. Тогаш

$x_n \in [0,2]$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \dfrac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$

Според тоа, конвергенцијата на разгледуваната низа не е рамномерна.

г) Граничната функција за дадената функционална низа е

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(3 + \frac{n^2 e^x}{e^{2x} + n^4}\right) = \ln 3,\ x \in [0,+\infty).$$

Нека $\varepsilon = \ln\frac{7}{6} > 0$. Избираме низа реални броеви со општ член $x_n = 2\ln n$.

Тогаш $x_n \in [0,+\infty)$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и

$$\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = \left|\ln\left(3 + \frac{n^2 e^{2\ln n}}{e^{4\ln n} + n^4}\right) - \ln 3\right| = \ln\left(3 + \frac{n^4}{2n^4}\right) - \ln 3 = \ln\frac{7}{6} = \varepsilon.$$

Значи, конвергенцијата на разгледуваната низа не е рамномерна. ●

4.4. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални низи:

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+2},\ x \in [0,1]$; б) $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ x \in [0,1]$;

в) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^3x^2},\ x \in (-\infty,+\infty)$, г) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2},\ x \in [0,1]$.

Решение. а) Граничната функција на дадената функционална низа е

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(x^n - x^{n+2}) = \lim_{n\to\infty} x^n(1 - x^2) = 0$, за секој $x \in [0,1]$.

Бидејќи разгледуваната функционална низа е низа од непрекинати функции на затворен интервал точно е равенството $\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x) - f(x)\right| = \max_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)\right|$.

За да ги определиме максимумите на секоја од функциите $f_n, n \in \mathbb{N}$, ќе го побараме првиот извод на функциите:

$$f_n'(x) = (x^n - x^{n+2})' = nx^{n-1} - (n+2)x^{n+1} = x^{n-1}(n - (n+2)x^2),\ x \in [0,1].$$

Лесно се проверува дека функциите f_n, $n \in \mathbb{N}$, имаат максимум во точките

$$x_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}} \in (0,1),\ n \in \mathbb{N},$$

соодветно, а нивните вредности во тие точки се

$$f_n(x_n) = f_n\left(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right)^n \left(1 - \left(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right)^2\right) = \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{2}{n+2}.$$

Според тоа

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{2}{n+2} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0,$$

од каде што следува дека дадената функционална низа рамнонерно конвергира на интервалот $[0,1]$.

б) Дадената функционална низа има гранична функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^n - x^{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = 0,\ x\in[0,1].$$

За првиот извод на функциите f_n, $n\in\mathbb{N}$ во интервалот $[0,1]$ имаме

$$f_n'(x) = (x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - (2n)x^{2n-1} = x^{n-1}(n - 2nx^n),\ x\in[0,1].$$

Лесно се проверува дека функциите f_n, $n\in\mathbb{N}$, имаат максимум во точките

$$x_n = \frac{1}{2^{1/n}} \in [0,1],\ n\in\mathbb{N},$$

соодветно, а нивните вредности во тие точки се

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{1}{2^{1/n}}\right) = \left(\frac{1}{2^{1/n}}\right)^n - \left(\frac{1}{2^{1/n}}\right)^{2n} = \frac{1}{4}.$$

Според тоа

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left|(x^n - x^{2n}) - 0\right| = \frac{1}{4}$$

од каде што следува дека конвергенцијата на дадената низа на разгледуваниот интервал не е рамномерна.

в) Функционалната низа конвергира точкасто кон граничната функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^3x^2} = 0,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

За првиот извод на функциите f_n, $n\in\mathbb{N}$, имаме

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2},\ x \in (-\infty, +\infty),$$

од каде што следува дека дадените функции имаат максимум во точките $x_n^1 = n^{3/2}$, а минимум во точките $x_n^2 = -n^{3/2},\ n \in \mathbb{N}$.

Од $f(x_n^1) = -f(x_n^2) = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, добиваме дека

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n^{3/2}}}{1 + n^3 \cdot \frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0.$$

Значи, разгледуваната функционална низа рамномерно конвергира на целата реална права.

г) Дадената функционална низа има гранична функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0,\ x \in [0,1].$$

Од

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left| f_n(x) - f(x) \right| \geq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

следува дека конвергенцијата на дадената низа на разгледуваниот интервал не е рамномерна. ●

4.5. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални низи:

а) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}},\ \ x \in (-\infty, +\infty)$;   б) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right),\ \ x \in (0, +\infty)$.

Решение. а) Граничната функција на дадената функционална низа е

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = |x|,\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Разгледуваната функционална низа го исполнува потребниот и доволен услов за рамномерна конвергенција на целата реална бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \frac{\left|\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)^2 - |\,x\,|^2\right|}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|\,x\,|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \frac{1}{n^2\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|\,x\,|\right)} \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2\cdot\frac{1}{n}} = 0.$$

б) Дадената функционална низа има гранична функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$x \in (0,+\infty)$.

Заради

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} \left|\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,+\infty)} \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)^2} = +\infty$$

(бидејќи $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)^2} = +\infty$) следува дека конвергенцијата на дадената низа на разгледуваниот интервал не е рамномерна. ●

4.6. Испитај ја рамномерната конвергенција на следните функционални низи на наведените интервали:

а) $f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}$, $x\in[0,+\infty)$; б) $f_n(x) = nxe^{-n^3x^2}$, $x\in[0,+\infty)$;

в) $f_n(x) = e^{-2n^2-nx}$, $x\in(0,2)$; г) $f_n(x) = e^{-2x^2-nx}$, $x\in(2,+\infty)$.

Решение. а) За произволно $x\in[0,+\infty)$ имаме

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^2xe^{-n^2x^2} = 0.$$

Функциите $f_n, n \in \mathbb{N}$, имаат максимум во точките $x_n = \dfrac{1}{n\sqrt{2}}$ и нивните вредности се $f_n(x_n) = \dfrac{n}{\sqrt{2e}}$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|f_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2e}} = +\infty,$$

од каде што следува дека конвергенцијата на дадената низа не е рамномерна.

б) Дадената функционална низа точкасто конвергира кон функцијата

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nxe^{-n^3x^2} = 0,\ x \in [0,+\infty).$$

Функциите $f_n, n \in \mathbb{N}$, имаат максимум во точките $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n^3}}$. Вредностите на функциите во тие точки се $f_n(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2ne}}$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,+\infty)} \left|f_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n^3}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2ne}} = 0,$$

од каде што заклучуваме дека разгледуваната низа рамномерно конвергира на интервалот $[0,+\infty)$.

в) За произволно $x \in (0,2)$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-2x^2-nx} = 0,$

од каде што заклучуваме дека $f(x) = 0,\ x \in (0,2)$. Функциите $f_n, n \in \mathbb{N}$, имаат максимум во точките $x_n = -\dfrac{n}{4} \notin (0,2)$, па според тоа функциите $f_n, n \in \mathbb{N}$, опаѓаат на интервалот $(0,2)$. Заради

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,2)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,2)} \left|f_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1 \neq 0$$

добиваме дека дадената низа не конвергира рамномерно на интервалот $(0,2)$.

г) На интервалот $(2,+\infty)$ функциите $f_n, n \in \mathbb{N}$, опаѓаат откаде што следува дека

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(2,+\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(2,+\infty)} \left|f_n(x)\right| = \lim_{n\to\infty} f_n(2) = \lim_{n\to\infty} e^{-8-2n} = 0.$$

Според тоа дадената низа рамномерно конвергира на интервалот $(2,+\infty)$. ●

4.7. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални низи:

а) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n},\ x \in (-\infty, +\infty)$; б) $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n}\right),\ x \in (-\infty, +\infty)$;

в) $f_n(x) = n\sin\left(\dfrac{1}{nx}\right),\ x \in [1, +\infty)$; г) $f_n(x) = \sin\left(x + \dfrac{1}{n}\right),\ x \in (-\infty, +\infty)$.

Решение. а) Граничната функција на дадената функционална низа е

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0,\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Заради

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \frac{|\sin(nx)|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,\ x \in (-\infty, +\infty)$$

следува дека дадената низа конвергира рамномерно.

б) Дадената функционална низа точкасто конвергира кон функцијата

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = 0, \text{ за секој } x \in \left(-\infty, +\infty\right).$$

Заради

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| = 1 \neq 0, \text{ за } x = x_n = \frac{n\pi}{2}(2k+1),$$

следува дека разгледуваната низа не конвергира рамномерно на множеството реални броеви.

в) Од $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{nx}\right)}{x\dfrac{1}{nx}} = \dfrac{1}{x}$ за $x \geq 1$ следува дека граничната функција на дадената функционална низа е $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{x}$, за $x \geq 1$.

Понатаму, заради Маклореновата формула

$\sin t = t + \dfrac{t^2}{2}\sin''\left(\theta t\right),\ \theta \in (0,1)$, добиваме $\left|\sin t - t\right| \leq \dfrac{t^2}{2}$, $t \in \mathbb{R}$. Според тоа

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} n\left|\sin\left(\frac{1}{nx}\right) - \frac{1}{nx}\right| \leq \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{2(nx)^2} = 0$$

од каде што следува дека разгледуваната низа рамномерно конвергира на интервалот $\left[1, +\infty\right)$.

г) Дадената функционална низа точкасто конвергира кон функцијата

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(x+\frac{1}{n}\right)=\sin x,\text{ за секое } x\in(-\infty,+\infty).$$

Уште повеќе дадената фунционална низа конвергира рамномерно, бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\sin\left(x+\frac{1}{n}\right)-\sin x\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|2\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\cos\left(\frac{2nx+1}{2n}\right)\right|\leq\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|2\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\right|\leq\lim_{n\to\infty}2\frac{1}{2n}=0.\ \bullet$$

4.8. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални низи:

а) $f_n(x)=\arcsin\dfrac{x^n}{1+x^n},\ x\in[0,1)$; б) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx,\ x\in(0,+\infty)$;

в) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx,\ x\in(0,+\infty)$; г) $f_n(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n+x}},\ x\in(0,+\infty)$.

Решение. а) Од

$$\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{x^n}{1+x^n}=0\,,$$

за граничната функција на разгледуваната функционална низа добиваме

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{x^n}{1+x^n}=0,\ x\in[0,1).$$

Понатаму, бидејќи функциите $f_n(x)=\arcsin\dfrac{x^n}{1+x^n}$, $n\in\mathbb{N}$ се растечки на интервалот $[0,1)$ имаме

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1)}\left|\arcsin\frac{x^n}{1+x^n}\right|=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

од каде што може да заклучиме конвергенцијата на функционалната низа кон граничната функција не е рамномерна.

б) Функционалната низа конвергира точкасто кон граничната функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} nx=\frac{\pi}{2},\ x\in(0,+\infty).$$

Заради

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)]}\left|\operatorname{arctg} nx-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}$$

следува дека разгледуваната низа не конвергира рамномерно на интервалот $x \in (0,+\infty)$.

в) Граничната функција на дадената функционална низа е

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x\operatorname{arctg} nx=\frac{\pi x}{2},\ x\in(0,+\infty).$$

Со примена на неравенството $\operatorname{arctg} x < x,$ за $x>0$, и равенството

$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ (лесно се докажува со помош на изводи)

добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)]}\left|x\operatorname{arctg} nx-\frac{\pi x}{2}\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)]}\left|x(\operatorname{arctg} nx-\frac{\pi}{2})\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)]}\left|x\operatorname{arctg}\frac{1}{nx}\right|\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)]} x\cdot\frac{1}{nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

од каде што следува дека разгледуваната функционална низа конвергира рамномерно на интервалот $x\in(0,+\infty)$.

г) Дадената функционална низа има гранична функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n+x}}=0,\ x\in(0,+\infty).$$

Разгледуваната функционална низа конвергира рамномерно на интервалот $x\in(0,+\infty)$, бидејќи е исполнет потребниот и доволен услов за рамномерна конвергенција, односно

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)]}\left|\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n+x}}-0\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)]}\left|\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n+x}}\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2\sqrt[3]{n}}=0.$$

●

4.9. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални низи:

а) $f_n(x)=\ln\left(x^2+\dfrac{1}{n}\right),\ x\in(a,+\infty),\ a>0;$ б) $f_n(x)=\dfrac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}},\ x\in[1,+\infty);$

в) $f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n,\ x\in(-\infty,+\infty);$ г) $f_n(x)=\left(1+\dfrac{1}{nx}\right)^{nx}\ x\in(0,1).$

Решение. а) Граничната функција на дадената функционална низа е

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(x^2+\frac{1}{n}\right)=\ln x^2,\ x\in(a,+\infty).$$

Заради

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(a,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(a,+\infty)}\left|\ln\left(x^2+\frac{1}{n}\right)-\ln x^2\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(a,+\infty)}\ln\frac{x^2+\frac{1}{n}}{x^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(a,+\infty)}\ln\left(1+\frac{1}{x^2n}\right)\le\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{a^2n}\right)=0$$

добиваме дека разгледуваната низа конвергира рамномерно.

б) Со примена на Лопиталовото правило добиваме дека граничната функција на дадената функционална низа е

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}=0,x\in[1,+\infty).$$

За првиот извод на функциите $f_n(x)=\dfrac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}},\ n\in\mathbb{N}$ имаме

$$f_n'(x)=\frac{2-\ln nx}{2x\sqrt{nx}},x\in[1,+\infty).$$

од каде што следува дека дадените функкци имаат максимум во точката $x=\dfrac{e^2}{n}$ еднаков на $f_n\left(\dfrac{e^2}{n}\right)=\dfrac{2}{e}$. Разгледуваната функционална низа не конвергира рамномерно бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[1,+\infty)}\left|\frac{\ln(nx)}{\sqrt{nx}}\right|=\frac{2}{e}\ne 0.$$

в) Дадената функционална низа има гранична функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,x\in(-\infty,+\infty).$$

За првиот извод на функциите

$$\phi_n(x)=f(x)-f_n(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,n\in\mathbb{N},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

имаме

$$\phi_n\,'(x)=e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1},x\in(-\infty,+\infty).$$

откаде што следува дека функциите ϕ_n имаат минимум во точката $x=0$ еднаков на $\phi_n(0)=0.$ Според тоа низата функции $\phi_n,\ n\in\mathbb{N}$, расте на интервалот $(0,+\infty)$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\phi_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\geq\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|=+\infty$$

од каде што следува дека конвергенцијата на дадената функционална низа е рамномерна.

г) Граничната функција на дадената функционална низа е

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx}=e,\ x\in(0,1).$$

Тогаш имаме

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{nx}-e\right|\geq\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\left(1+\frac{1}{n\dfrac{1}{n}}\right)^{n\frac{1}{n}}-e\right|=$$

$$=e-2\neq 0$$

од каде што следува дека конвергенцијата на разгледуваната фунционална низа не е рамномерна. ●

4.10. Докажи дека функционалната низа со општ член $f_n(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{x}$ рамномерно конвергира на интервалот $x\in(0,a],0<a<\infty,$ но не конвергира рамномерно на интервалот $(0,+\infty)$.

Решение. Дадената функционална низа точкасто конвергира кон функцијата

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n}{x}=\frac{\pi}{2},\ x\in(0,a].$$

Со примена на неравенството $\operatorname{arctg}x<x,$ за $x>0$ и равенството

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,a]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,a]}\left|\operatorname{arctg}\frac{n}{x}-\frac{\pi}{2}\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,a]}\left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right|\leq$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,a]}\frac{x}{n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0,\ \text{за } x\in(0,a]$$

од каде што следува дека разгледуваната низа конвергира рамномерно на интервалот $(a,0]$.

На интервалот $(0,+\infty)$ дадената низа не конвергира рамномерно бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\operatorname{arctg}\frac{n}{x}-\frac{\pi}{2}\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right|=\frac{\pi}{2}. \bullet$$

4.11. Испитај ја рамномерната конвергенција на функционалната низа

$$f_n(x)=\ln\left(1+\sin\left(\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right)\right)$$

на следниве интервали:

а) $(0,1)$; б) $(1,a), a>1$; в) $(1,+\infty)$.

Решение. Функционална низа конвергира точкасто кон граничната функцијата

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\sin\left(\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right)\right)=0 \ x\in(0,+\infty).$$

а) Ако $x\in(0,1)$, тогаш дадената функционална низа рамномерно конвергира бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\left|\ln\left(1+\sin\left(\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right)\right)\right|\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\left|\sin\left(\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right)\right|\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\frac{x}{\dfrac{x^2}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}\frac{x}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

б) Слично, дадената функционална низа рамномерно конвергира на интервалот $(1,a)$, $a>1$ бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(1,a)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(1,a)}\left|\ln\left(1+\sin\left(\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right)\right)\right|\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(1,a)}\left|\sin\left(\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right)\right|\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(1,a)}\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(1,a)}\frac{x}{\dfrac{x^2}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(1,a)}\frac{x}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{n}}=0.$$

в) Ќе докажеме дека разгледуваната функционална низа не конвергира рамномерно на интервалот $(1,+\infty)$. Навистина, функциите f_n, имаат максимум во точките $x_n = \sqrt{n}$ (зошто?) и нивните вредности се $f_n(x_n) = \ln\left(1+\sin\frac{1}{2}\right)$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(1,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(1,+\infty)}\left|\ln\left(1+\sin\left(\frac{x\sqrt{n}}{x^2+n}\right)\right)\right| = \ln\left(1+\sin\frac{1}{2}\right) \neq 0. \bullet$$

4.12. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални низи во зависност од реалниот параметар α, ако

а) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}, x\in(-\infty,+\infty)$;

б) $f_n(x) = \dfrac{\ln(nx)}{n^\alpha x}, x\in(0,1]$;

в) $f_n(x) = n^\alpha\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right),\ x\in(0,+\infty), \alpha>0$

г) $f_n(x) = \dfrac{x^2 e^{-(n+3)x^2}}{n^\alpha},\ x\in(0,+\infty)$.

Решение. а) Ако $\alpha \le 0$ тогаш дадената функционална низа нема гранична функција на реалната права.

Ако $\alpha > 0$, тогаш функционална низа точкасто конвергира кон граничната функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{n^\alpha} = 0,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Заради

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{|\sin(nx)|}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0, x\in(-\infty,+\infty)$$

следува дека дадената низа конвергира рамномерно.

б) Ако $\alpha \le 0$ тогаш дадената функционална низа нема гранична функција на разгледуваниот интервал.

Нека $\alpha > 0$. Тогаш функционална низа точкасто конвергира кон функцијата

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(nx)}{n^\alpha x} = 0,\ x\in(0,1].$$

Конвергенцијата на дадената низа не е рамномерна на интервалот $(0,1]$, бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1]}\left|\frac{\ln(nx)}{n^\alpha x}-0\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1]}\left|\frac{\ln(nx)}{n^\alpha x}\right| = +\infty.$$

в) Ако $\alpha < \frac{1}{2}$, тогаш дадената функционална низа има гранична функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = 0, x\in(0,+\infty).$$

Заради

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|n^{\alpha}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{n^{\alpha-1}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1/2} = 0$$

следува дека конвергенцијата на дадената низа на разгледуваниот интервал е рамномерна.

Ако $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ тогаш граничната функција е

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = 0,\ x\in(0,+\infty),$$

но разгледуваната низа не конвергира рамномерно бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|n^{\alpha}\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\frac{n^{\alpha-1}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1/2} \neq 0.$$

За $\alpha = 1$ дадената функционална низа не конвергира рамномерно (з**адача 5).**

Ако $\alpha > 1$ тогаш тогаш дадената функционална низа нема граничната функција на разгледуваниот интервал.

Значи, дадената функционална низа рамномерно конвергира за $\alpha < \frac{1}{2}$.

г) За било која вредност на реалниот параметар α, граничната функција на дадената функционална низа е

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{-(n+3)x^2}}{n^\alpha}=0, x\in(0,+\infty).$$

Ако $\alpha>-1$, тогаш разгледуваната низа рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал. Навистина, функциите f_n, имаат максимум за $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\frac{x^2e^{-(n+3)x^2}}{n^\alpha}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-(n+3)(n+3)^{-1}}}{(n+3)n^\alpha}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-1}}{(n+3)n^\alpha}=0.$$

Ако $\alpha\le-1$, тогаш разгледуваната функционална низа не конвергира рамномерно бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,+\infty)}\left|\frac{x^2e^{-(n+3)x^2}}{n^\alpha}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-(n+3)(n+3)^{-1}}}{(n+3)n^\alpha}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-1}}{(n+3)n^\alpha}\neq 0. \bullet$$

4.13. Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на функционалната низа

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le \dfrac{1}{n}\\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right), & \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{2}{n}\\ 0, & \dfrac{2}{n}\le x\le 1\end{cases}$$

на $[0,1]$.

Решение. Бидејќи

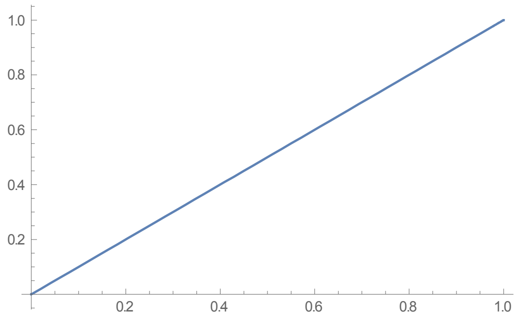
$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^+} f_n(x)=n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)=n,\ \lim_{x\to\frac{1}{n}^-} f_n(x)=n^2\frac{1}{n}=n,\ f_n\left(\frac{1}{n}\right)=n$$

$$\text{и} \lim_{x \to \frac{2}{n}^{+}} f_n(x) = 0, \ \lim_{x \to \frac{2}{n}^{-}} f_n(x) = n^2\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n}\right) = 0, \ f_n\left(\frac{2}{n}\right) = 0$$

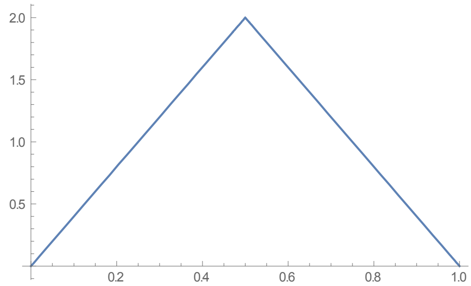
следува дека f_n е непрекината за секој $n \in \mathbb{N}$.

Исто така $f_n(x) \geq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0,1]$.

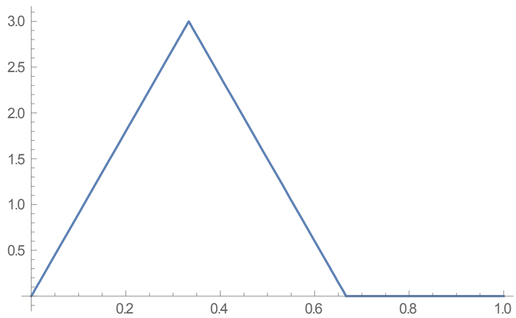
Графиците на функциите $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), f_5(x)$ изгледаат вака



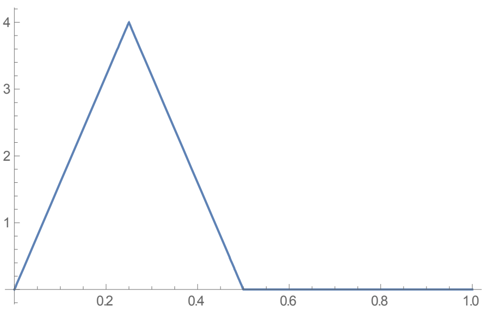
$f_1(x)$



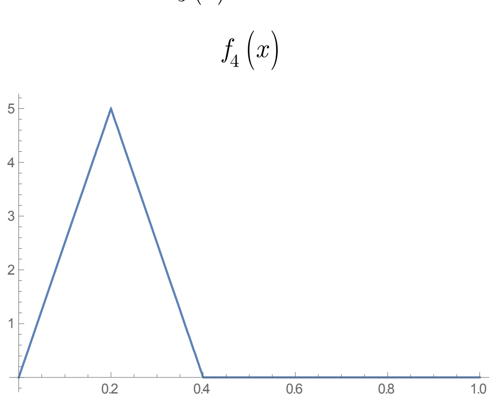
$f_2(x)$



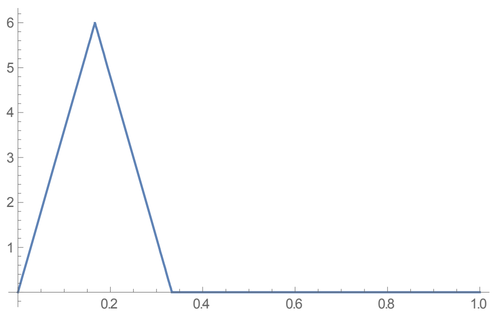
$f_3(x)$



$f_4(x)$



$f_5(x)$



$f_6(x)$

Ако $x = 0$, тогаш $f_n\left(x\right) = 0$.

Нека $x \neq 0$. Тогаш постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\dfrac{2}{n_0} < x$. Според тоа, за секој $n \geq n_0$ важи $f_n\left(x\right) = 0$. Следува дека

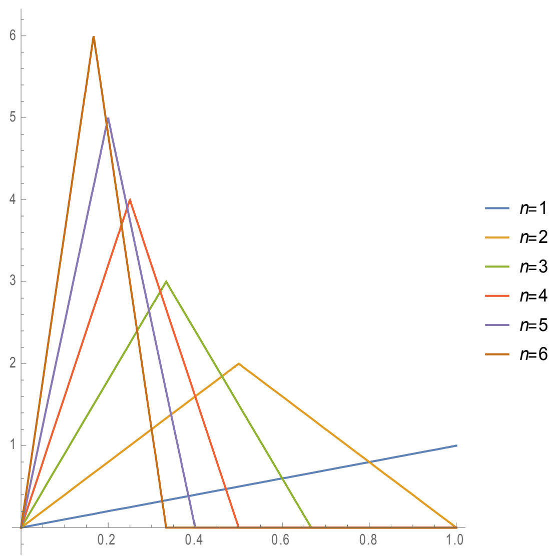
$$f\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = 0.$$

Значи, дадена функционална низа конвергира по точки кон функцијата $f\left(x\right) = 0$, $x \in \left[0,1\right]$.

Натаму, $b_n = \sup\limits_{x\in\left[0,1\right]} \left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| = \sup\limits_{x\in\left[0,1\right]} f_n\left(x\right) \geq f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = n$, па $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Според тоа конвергенцијата не е рамномерна.

На ист цртеж графиците на функциите $f_1\left(x\right), f_2\left(x\right), f_3\left(x\right), f_4\left(x\right), f_5\left(x\right), f_5\left(x\right)$ и $f_6\left(6\right)$ изгледаат вака



4.14. Докажи дека функционалната низа $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ конвергира на интервалот $[0,1]$ но

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

Решение. Дадената функционална низа конвергира точкасто кон граничната функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}=0, x\in[0,1].$$

Според тоа

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 0dx=0.$$

Од друга страна, со примена на методот на замена имаме: $-nx^2=t$ од каде што следува $nxdx=-\frac{1}{2}dt$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2}\lim_{n\to-\infty}\int_0^{-n} e^t dt=-\frac{1}{2}\lim_{n\to-\infty}(e^{-n}-1)=\frac{1}{2}.$$

Да воочиме дека конвергенцијата на разгледуваната функционална низа кон граничната функција е не е рамномерна бидејќи важи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|nxe^{-nx^2}\right|\neq 0\,.$$ ●

4.15. Докажи дека функционалната низа $f_n(x)=nx(1-x)^n$ не конвергира рамномерно на интервалот $[0,1]$, но

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

Решение. Функционалната низа конвергира кон граничната функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n=0, x\in[0,1].$$

Оттука следува дека

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 0dx=0.$$

Од друга страна, со примена на методот на замена добиваме: $1-x=t$ од каде што следува $dx=-dt$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx=\lim_{n\to-\infty} n\int_0^1(1-t)t^n dx=\lim_{n\to-\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=0.$$

Конвергенцијата на разгледуваната функционална низа кон граничната функција не рамномерна бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|nx(1-x)^n\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}\neq 0.\ \bullet$$

4.16. Докажи дека функционалната низа $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$ конвергира кон непрекината функција на интервалот $[0,1]$, но

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx\neq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

Решение. Функционалната низа конвергира кон непрекината граничната функција, бидејќи

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}nx(1-x)^n=0,x\in[0,1].$$

Тогаш имаме

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 0dx=0.$$

Од друга страна, со примена на методот на замена добиваме: $1-x^2=t$ од каде што следува $xdx=-\frac{1}{2}dt.$ Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n dx=\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{2}n\int_0^1 t^n dx=\lim_{n\to-\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}.$$

Конвергенцијата на разгледуваната функционална низа кон граничната функција не рамномерна. Навистина, функциите $f_n(x)$ имаат максимум во точките $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ чии вредности се $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$,од каде што следува

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|nx(1-x^2)^n\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=+\infty.\ \bullet$$

4.17. За кои вредности на реалниот параметар α, функционалната низа $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$

а) конвергира на интервалот $[0,1]$;

б) конвергира рамномерно на интервалот $[0,1]$;

в) Во кој случај е допуштен граничен премин под знакот за интеграл?

Решение. а) Со примена на Лопиталовото правило добиваме дека за секоја реална вредност на параметарот α граничната функција е

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}xe^{-nx}=0, x\in[0,1].$$

б) Заради

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|n^{\alpha}xe^{-nx}\right|=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}=\begin{cases}0, & \alpha<1;\\ \dfrac{1}{e}, & \alpha=1;\\ +\infty, & \alpha>1;\end{cases}$$

разгледуваната функционална низа конвергира рамномерно за $\alpha<1$.

в) Имаме

$$\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 0dx=0,$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^{\alpha}xe^{-nx}dx=\lim_{n\to-\infty}n^{\alpha}\left(\frac{1}{n^2}-e^{-n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)\right)$$

од каде што следува дека граничен премин под знакот за интеграл е допуштен само за $\alpha<2$. ●

4.18. Докажи дека функционалната низа $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n$ конвергира рамномерно на целата реална права, но

$$\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f_n{}'(1).$$

Решение. Дадената низа конвергира кон граничната функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n=0, x\in(-\infty,+\infty).$$

Оттука добиваме дека

$$\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'_{x=1}=0.$$

За низата изводни функции $\left(f_n'\right)$ имаме $f_n{}'(x)=\dfrac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}, x\in(-\infty,+\infty)$, од каде што добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}f_n{}'(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+1^{2n}}=\dfrac{1}{2}$.

Конвергеција на разгледуваната низа е рамномерна бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n\right|=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Провери дали низата $\left(f_n'\right)$ рамномерно конвергира. ●

4.19. Докажи дека функционалната низа $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, рамномерно конвергира на целата реална права и притоа за секој реален број $x \neq 0$ важи равенството $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Решение. Функционалната низа конвергира кон граничната функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0, x \in (-\infty, +\infty).$$

Конвергенцијата на разгледуваната функционална низа кон граничната функција е рамномерна бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|\frac{x}{1+nx^2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0.$$

Имајќи во вид дека $f'(x) = 0$, за секој реален број x, заради

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

следува дека за секој реален број $x \neq 0$ важи равенството $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n\,'(x)$.

4.20. Докажи дека функционалната низа $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ рамномерно конвергира на целата реална права, но притоа $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)\right)' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)$.

Решение. Функционалната низа конвергира кон граничната функција

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0, x \in (-\infty, +\infty).$$

Според тоа $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)\right)' = 0.$

Конвергенцијата на разгледуваната функционална низа кон граничната функција е рамномерна бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Низата изводни функции $\left(f_n'\right)$ има општ член $f_n{}'(x)=\sqrt{n}\cos(nx)$. Заради $f_n{}'(0)=\sqrt{n}$ може да заклучиме дека $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)\right)' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n{}'(0)$. ●

4.21. Докажи дека функционалната низа

$$f_n(x)=x^3+\frac{1}{n}\sin\left(nx+\frac{n\pi}{2}\right),$$

рамномерно конвергира на целата реална права, но притоа $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n{}'(x)$.

Решение. Функционалната низа конвергира кон граничната функција

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(x^3+\frac{1}{n}\sin\left(nx+\frac{n\pi}{2}\right)\right)=x^3, x\in(-\infty,+\infty).$$

Според тоа $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = 3x^2$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

Конвергенцијата на разгледуваната функционална низа кон граничната функција е рамномерна бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|f_n(x)-f(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\left(x^3+\frac{1}{n}\sin\left(nx+\frac{n\pi}{2}\right)\right)-x^3\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{1}{n}\sin\left(nx+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Низата изводни функции $\left(f_n'\right)$ има општ член $f_n{}'(x)=3x^2+\cos\left(nx+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Границата $\lim\limits_{n\to\infty} f_n{}'(x)$ не постои или не е конечен за ниту еден реален број x. ●

4.2. Функционални редови

Нека $\left(f_n(x)\right)$ е функционална низа на множеството X. Формалниот израз

$$f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...$$

или $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ се нарекува **функционален ред** на множеството X.

Функцијата $S_n(x)$ дефинирана со

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_n(x),\ x\in X, n\in\mathbb{N},$$

се нарекува $n-$**та парцијална сума** на функционалниот ред. Функционалната низа $\left(S_n(x)\right)$ се нарекува функционална низа од парцијални суми.

1. За функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ велиме дека конвергира кон својата сума $S(x)$ на множеството X, ако низата парцијални суми $\left(S_n(x)\right)$ **точкасто конвергира** кон функцијата $S(x)$ на множеството X, односно

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x\in X.$$

2. За функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ велиме дека **рамномерно конвергира** кон функцијата F на множеството X, ако низата парцијални суми $\left(S_n(x)\right)$ рамномерно конвергира кон сумата $S(x)$ на множеството X.

3. (Ваерштрасов критериум) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е функционален ред на множеството X и нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен ред со позитивни членови. Ако постои природен број n_0 така што за секој $n\geq n_0$ е исполнето

$$\left|f_n(x)\right|\leq a_n, x\in X$$

тогаш функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рамномерно конвергира.

Функционалната низа $(f_n(x))$ е **рамномерно ограничена** на множеството X ако постои реален број M така што $|f_n(x)| \leq M,\ x \in X,\ n \in \mathbb{N}$.

4. (Абелов критериум) Функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ рамномерно конвергира на множеството X, ако рамномерно конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ и ако низата $(b_n(x))$ е монотона за секој $x \in X$ и рамномерно ограничена на множеството X.

5. (Дирихлеов критериум) Функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ рамномерно конвергира на множеството X, ако низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ е рамномерно ограничена и ако низата $(b_n(x))$ е монотона и рамномерно конвергира кон нула на множеството X.

6. Нека $(f_n(x))$ е функционална низа од непрекинати функции на множеството X и нека функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рамномерно конвергира кон сумата $S(x)$ на множеството X. Тогаш сумата $S(x)$ е непрекината на множеството X.

7. Нека $(f_n(x))$ е функционална низа од непрекинати функции на интервалот $[a,b]$ и нека функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$. Тогаш $\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$ за произволно $x_0 \in [a,b]$.

8. Нека $(f_n(x))$ е функционална низа од непрекинати функции на интервалот $[a,b]$ и нека функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$. Тогаш функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt$ рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$ и притоа важи

$$\int_a^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right),\ x\in[a,b].$$

9. Нека $\left(f_n\left(x\right)\right)$ е функционална низа од диференцијабилни функции на интервалот $[a,b]$ и нека функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n{}'(x)$ рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$. Ако постои $x_0\in[a,b]$ за која редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(c)$ конвергира тогаш и функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$. Сумата $S(x)$ е непрекинато диференцијабилна функција на $[a,b]$ и притоа

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}f_n{}'(x),\ x\in[a,b].$$

4.22. Најди ја областа на конвергенција и апсолутна конвергенција на следниве редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^n x}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(8-x^2)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$; ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{tg}^n x}{1+\sqrt{n}}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+2^n}$.

Решение. а) Геометрискиот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ конвергира за $|\,q\,|<1$, а дивергира за $|\,q\,|\le 1$. Според тоа, редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}$ конвергира апсолутно за $\dfrac{1}{|\,x\,|}<1$, односно за $|\,x\,|>1$, а дивергира за $|\,x\,|\le 1$.

б) Со примена на Кошиевиот критериум може да се покаже дека бројниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{q^n}{n}$ конвергира за $|\,q\,|<1$. Според тоа дадениот функционален ред апсолутно конвергира за $|\ln x\,|<1$, односно за $e^{-1}<x<e$.

За $x=e^{-1}$ го добиваме редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ кој конвергира според Лајбницовиот критериум, додека за $x=e$, се добива хармонискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, кој дивергира.

Значи, разгледуваниот функционален ред апсолутно конвергира за $e^{-1}<x<e$, условно конвергира за $x=e^{-1}$, а дивергира за $x<e^{-1}$ и $x\geq e$.

в) Со примена на Даламберовиот критериум може да се покаже дека за секој $x>0$ редот $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$ апсолутно конвергира. За секој $x\leq 0$, добиениот броен ред дивергира бидејќи општиот член не тежи кон нула.

г) Со помош на Кошиевиот критериум може да се покаже дека дадениот ред апсолутно конвергира за $|8-x^2|<1$, односно за $\sqrt{7}<|x|<3$, а дивергира за $|x|>3$ и $|x|<\sqrt{7}$. За $x=3$ го добиваме редот $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ кој дивергира, а за $x=\sqrt{7}$ се добива $\sum_{n=1}^{\infty}1^n$ кој исто така дивергира. Значи, разгледуваниот функционален ред апсолутно конвергира за $\sqrt{7}<|x|<3$, а дивергира за $x\leq\sqrt{7}$ и $x\geq 3$.

д**)** Со примена на Кошиевиот критериум може да се утврди дека дадениот ред апсолутно конвергира за $\frac{|x+1|}{2}<1$, т.е за $-3<x<1$, а дивергира за $\frac{|x+1|}{2}>1$, т.е за $x<-3$ и $x>1$. За $x=-3$ го добиваме редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ кој според Лајбницовиот критериум конвергира, додека $x=1$ го добиваме редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ кој дивергира.

ѓ) Според Даламберовиот критериум редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}q^n$ апсолутно конвергира за $|q|<1$, а дивергира за $|q|>1$. За $q=1$ редот конвергира според критериумот на Лајбниц, додека за $q=-1$ дивергира. Според тоа дадениот ред апсолутно конвергира за секој реален број x кој го задоволува неравенството $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$. Бидејќи разгледуваното неравенство е задоволено за секој $x>0$, добиваме дека дадениот ред апсолутно конвергира за секое $x>0$, а дивергира за секој $x<0$. Лесно се утврдува дека дадениот ред условно конвергира за $x=0$ (т.е. $q=1$).

е) Согласно критериумот на Коши, редот апсолутно конвергира за $|\operatorname{tg} x|<1$, т.е за $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$. За $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ редот дивергира, а за $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ условно конвергира.

ж) Од равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{9}{2}x(1-x)\right)^n$$

со примена на Кошиевиот критериум следува дека разгледуваниот ред конвергира за секој реален број x кој го задоволува неравенството $\left|\frac{9}{2}x(1-x)\right|<1$. Бидејќи разгледуваното неравенство е задоволено за секој

$$x\in\left(\frac{1-\frac{\sqrt{17}}{3}}{2},\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{1+\frac{\sqrt{17}}{3}}{2}\right),$$

добиваме дека дадениот ред апсолутно конвергира за секој

$$x\in\left(\frac{1-\frac{\sqrt{17}}{3}}{2},\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{1+\frac{\sqrt{17}}{3}}{2}\right).$$

Слично, дадениот ред дивергира за секој реален број x кој го задоволува неравенството $\left|\frac{9}{2}x(1-x)\right|>1$, односно за секој

$$x\in\left(-\infty,\frac{1-\frac{\sqrt{17}}{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1+\frac{\sqrt{17}}{3}}{2},+\infty\right).$$

Со примена на критериумите за испитување на конвергенција на бројни редови може да се докаже дека добиените бројни редови за

$$x=1-\frac{\sqrt{17}}{3},\ x=\frac{1}{3}, x=\frac{2}{3} \text{ и } x=1+\frac{\sqrt{17}}{3},$$

дивергираат.

з) Поаѓајќи од равенството

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{1+\dfrac{n}{2^n}}$$

со примена на Кошиевиот критериум може да заклучиме дека разгледуваниот ред апсолутно конвергира за $|x|<2$, а дивергира за $|x|>2$. За $x=\pm 2$ општиот член на добиениот броен ред не конвергира кон нула, па според тоа редот диверира. ●

4.23. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1},\quad x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right];$

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n},\quad x\in[-q,q],\ q>0;$

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n}-x^{n+1},\ \ x\in[0,1];$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}\ ,x\in(0,+\infty);$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},\ \ [1,+\infty);$

ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n}}-\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sqrt[3]{n+1}}\right), x\in(-\infty,+\infty).$

Решение. а) Низата од парцијални суми на дадениот функционален ред гласи

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=\frac{1-x^n}{1-x},x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Низата од парцијални суми на разгледуваниот ред точкасто конвергира кон граничната функција

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x},x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Заради

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1/2,1/2]}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1/2,1/2]}\left|\frac{1-x^n}{1-x}-\frac{1}{1-x}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[-1/2,1/2]}\left|\frac{x^n}{1-x}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$$

следува дека низата од парцијални суми на редот рамномермо конвергира кон граничната функција на разгледуваниот интервал, од каде што заклучуваме дека редот рамномерно конвергира.

б) Ако $x=1$, тогаш редот дивергира.

Нека $x \neq 1$. Тогаш за низата од парцијални суми на дадениот ред имаме:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},\ x \in [-q,q],\quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ако $|\,x\,| > 1$ или $x = -1$, тогаш низата парцијални суми на редот дивергира. Ако $|\,x\,| < 1$, тогаш низата парцијални суми на редот точкасто конвергира кон граничната функција:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x},\ |\,x\,| < 1.$$

Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-q,q]} \left|S_n(x) - S(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-q,q]} \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| =$$

$$=, \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-q,q]} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = 0, 0 < q < 1.$$

Значи, низата од парцијални суми на функционалниот ред рамномерно конвргира кон нула на интервалот $[-q,q]$, $0 < q < 1$, од каде што следува дека дадениот функционален ред рамномерно конвергира на интервалот $[-q,q]$ за секој $0 < q < 1$.

в) Низата од парцијални суми на дадениот ред

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (x^k - x^{k+1}) = 1 - x + x - x^2 + \ldots + x^n - x^{n+1} = 1 - x^{n+1},\ x \in [0,1]$$

точкасто конвергира кон граничната функција $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

Тогаш од $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|S_n(x) - S(x)\right| = 1$ следува дека конвергенцијата на низата од парцијални сума, а со тоа и на дадениот ред, не е рамномерна на интервалот $[0,1]$.

г) Низата од парцијални суми на дадениот функционален ред

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1}\right) = 1 - \frac{1}{nx+1},$$

$x \in (0,+\infty)$, точкасто конвергира кон граничната функција

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1, x \in (0,+\infty).$$

Бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(0,+\infty)} \left|S_n(x) - S(x)\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(0,+\infty)} \dfrac{1}{nx+1} = 1$, низата од парцијални суми не конвергира рамномерно кон нула на разгледуваниот интервал. Според тоа дадениот ред не конвергира рамномерно на интервалот $(0,+\infty)$.

д) Низата од парцијални суми на дадениот функционален ред е

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)} =$$

$$= \frac{x}{1+x} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(k-1)x)} - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(k-1)x)(1+kx)} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)},\ x \in [1,+\infty)$$

од каде што ја наоѓаме граничната функција $S(x) = 1,\ x \in [1,+\infty)$.

Дадениот функционален ред рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал бидејќи низата од парцијални суми рамномерно конвергира кон граничната функција на интервалот $[1,+\infty)$, што следува од равенствата

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} \left| S_n(x) - S(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,+\infty)} \left| \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+(n-1)x)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1)(1+2\cdot 1)\cdots(1+(n-1)\cdot 1)} = 0.$$

ѓ) Низата од парцијални суми на дадениот ред гласи:

$$S_n(x) = \sin x - \frac{\sin((n+1)x)}{\sqrt[3]{n+1}},\ x \in (-\infty,+\infty)$$

од каде што заклучуваме дека гранична функција е

$$S(x) = \sin x,\ x \in (-\infty,+\infty)$$

Заради

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left| r_n(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} \left| \frac{\sin((n+1)x)}{\sqrt[3]{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = 0,\ x \in (-\infty,+\infty)$$

следува дека разгледуваниот ред рамномерно конвергира на множеството реални броеви. ●

4.24. Докажи дека функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ каде што

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 2^{-(n+1)};\\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & 2^{-(n+1)}<x<2^{-n};\\ 0, & 2^{-n}\le x\le 1;\end{cases}$$

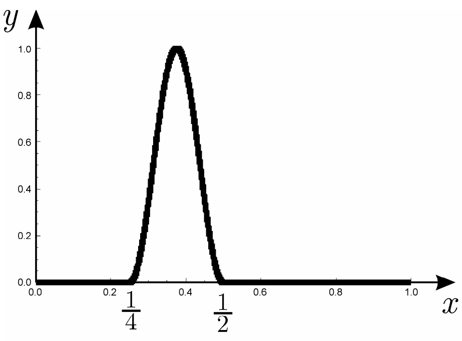
рамномерно конвергира на интервалот $[0,1]$.

Решение. Да забележиме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ функцијата $f_n(x)$ е непрекината во секој $x\in\left[0,1\right]$, заради

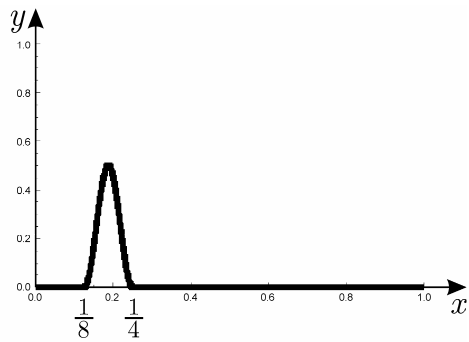
$$\lim_{x\to\frac{1}{2^{n+1}}^-} f_n\left(x\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2^{n+1}}^+} f_n\left(x\right)=0=f_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \text{ и}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2^{n}}^-} f_n\left(x\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2^{n}}^+} f_n\left(x\right)=0=f_n\left(\frac{1}{2^{n}}\right).$$

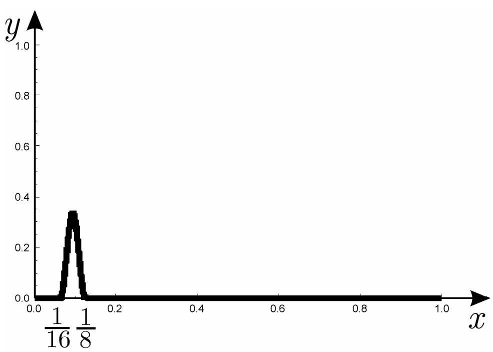
За $n=1,2,3,4$ соодветните функции изгледаат вака



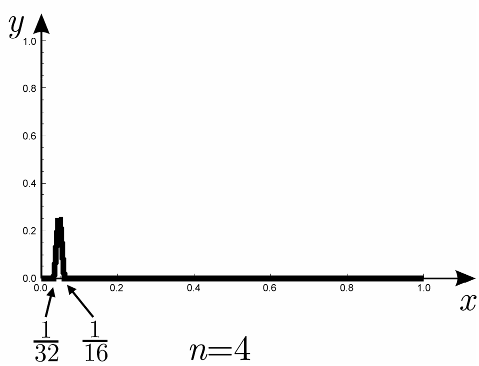
n=1



n=2

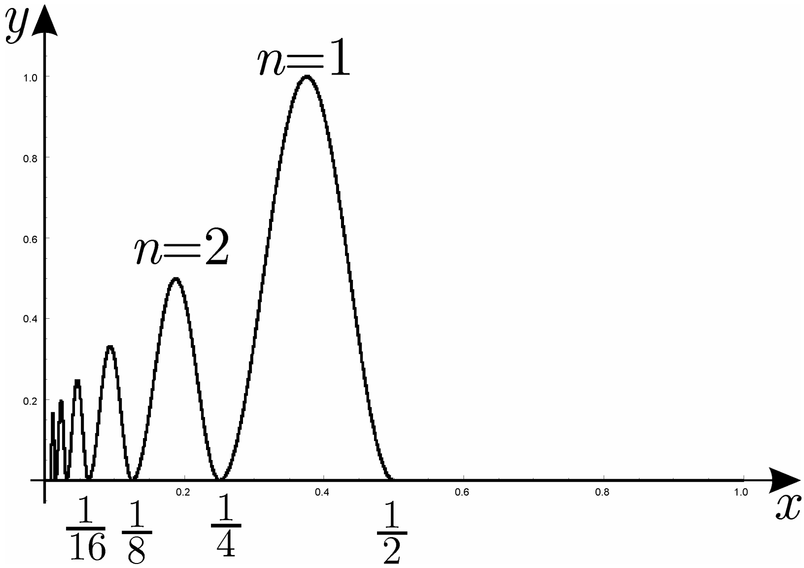


n=3



n=4

или на еден цртеж



Нека $n \in \mathbb{N}$. Тогаш за секој $x \in [0,1]$ постои $k \in \{1, 2, ...n\}$ така што $x \in \left[2^{-(k+1)}, 2^{-k}\right]$

или $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ или $x \in \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Па

$$S_n\left(x\right) = \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), x \in \left[2^{-(k+1)}, 2^{-k}\right],$$

$$S_n(x) = 0 \ \text{ за } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \text{ или } x \in \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Според тоа, општиот член на низата парцијални суми на дадениот ред е

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & x \in \left[2^{-(k+1)}, 2^{-k}\right] \\ 0, & 0 \le x \le 2^{-(n+1)} \end{cases}$$

Нека $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Тогаш $S_n(x) = 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Да забележиме дека на последниот цртеж е претставена функцијата $S_6\left(x\right)$.

Ако $x = 0$ повторно $S_n(x) = 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека $0 < x \le \frac{1}{2}$. Тогаш постои $k \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{2^{k+1}} \le x \le \frac{1}{2^k}$.

Оттука добиваме дека $S_n(x) = \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x)$ за секој $n \ge k$.

Следува дека

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & x \in \left[2^{-(k+1)}, 2^{-k}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

е граничната функција кон која што точкасто конвергира низата парцијални суми на редот.

Нека $n \in \mathbb{N}$.

Ако $x > \frac{1}{2^{n+1}}$ имаме $S_n(x) - S(x) = 0$.

Ако $x = 0$, повторно $S_n(x) - S(x) = 0$.

Ако $\frac{1}{2^{k+1}} \le x \le \frac{1}{2^k}$ за некој $k \ge n+1$, тогаш $\left|S_n(x) - S(x)\right| = \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x)$.

Значи

$$| S_n(x) - S(x) | = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2^{n+1}} < x \le 1 \\ \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x), & x \in \left[2^{-(k+1)}, 2^{-k}\right]. \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Натаму, за $k \ge n+1$ и $\frac{1}{2^{k+1}} \le x \le \frac{1}{2^k}$ имаме

$$\sup_{x\in\left[2^{-(k+1)},2^{-k}\right]} \left|S_n(x) - S(x)\right| = \sup_{x\in\left[2^{-(k+1)},2^{-k}\right]} \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi x) = \frac{1}{k}\sin^2(2^{k+1}\pi \frac{3}{2^{k+2}}) = \frac{1}{k}$$

па според тоа ако $k_1 > k_2$ следува дека

$$\sup_{x\in\left[2^{-(k_1+1)},2^{-k_1}\right]} \left|S_n(x) - S(x)\right| < \sup_{x\in\left[2^{-(k_2+1)},2^{-k_2}\right]} \left|S_n(x) - S(x)\right|.$$

добиваме дека $\sup_{x\in[0,1]} \left|S_n(x) - S(x)\right|$ се достигнува за на интервалот $\left[2^{-(n+2)}, 2^{-(n+1)}\right]$ (и тоа во неговата средина) и тој изнесува

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|S_n(x)-S(x)\right| = \sup_{x\in\left[2^{-(n+2)},2^{-(n+1)}\right]}\left|S_n(x)-S(x)\right| =$$
$$= \sup_{x\in\left[2^{-(n+2)},2^{-(n+1)}\right]}\frac{1}{n+1}\sin^2(2^{n+2}\pi\frac{3}{2^{n+3}}) = \frac{1}{n+1}.$$

Конечно,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|S_n(x)-S(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

од што следува дека разгледуваниот ред рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал. ●

4.25. Со помош на критериумот на Ваерштрас докажи дека следните редови рамномерно конвергираат:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\ x\in[-1,1]$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2},\ x\in[0,+\infty)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(2nx)}{\sqrt[3]{n^7+x^2}},\ x\in(-\infty,+\infty)$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n^2x)}{n\sqrt[3]{n}+x^4},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n},\ x\in(-1,3)$; ѓ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\cos(n^2x)}{(1+nx^2)\sqrt{2+n^2}},x\in(-\infty,+\infty)$;

Решение. а) Неравенството $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$

е исполнето за секој $x\in\left[-1,1\right]$. Бидејќи бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира, заради Ваерштрасовиот критериум следува дека дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $[-1,1]$.

б**)** Од релацијата

$$\left|\frac{1}{(n+x)^2}\right| = \frac{1}{(n+x)^2}\le\frac{1}{n^2},\ x\in[0,+\infty)$$

и од конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ следува рамномерната конвергенција на дадениот ред на интервалот $[0,+\infty)$.

в) Заради неравенството $\left|\frac{\sin^2(2nx)}{\sqrt[3]{n^7+x^2}}\right|\le\frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}$, имајќи во вид дека бројниот редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^7}}$ конвергира, според критериумот на Ваерштрас следува дека разгледуваниот ред рамномерно канвергира на множеството реални броеви.

г) Неравенството $\left|\frac{\operatorname{arctg}(n^2x)}{n\sqrt[3]{n}+x^4}\right| \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^{4/3}}$ е исполнето за секој реален број x. Од конвергенцијата на бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ следува рамномерна конвергенција на разгледуваниот ред на множеството реални броеви.

д) Заради неравенството

$$\left|\frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}\right| \le \frac{2^n}{(3n+1)5^n} < \left(\frac{2}{5}\right)^n, \quad x\in(-1,3),$$

и фактот дека бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ конвергира следува дека дадениот функционален ред рамномерно конвергира на интервалот $(-1,3)$.

ѓ) Од неравенството $1+nx^2 \ge \sqrt{n}\mid x\mid$ добиваме

$$\left|\frac{x\cos(n^2x)}{(1+nx^2)\sqrt{2+n^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n(2+n^2)}} \le \frac{1}{n^{3/2}}$$

заради критериумот на Ваерштас добиваме дека разгледуваниот ред рамномерно конвергира на множеството реални броеви. ●

4.26. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}, x\in(-\infty,+\infty);$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right), x\in(-\infty,+\infty);$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}, x\in(-\infty,+\infty);$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right), x\in[0,+\infty);$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}, x\in[0,+\infty);$ ѓ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right].$

Решение. а) Функцијата $\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|,\ n\in\mathbb{N}$, својот супремум го достигнува за $x_n=\pm\frac{1}{n^{5/2}}$ и притоа важи

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \max_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \frac{n^{-3/2}}{2} = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Бидејќи редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ конвергира, според Вајерштрасовиот критериум следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ рамномерно конвергира на множеството реални броеви.

б) Да воочиме дека е точно неравенството

$$\left|\sin\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)\right| \le \left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Функцијата $\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|, n\in\mathbb{N}$, има супремум на множеството реални броеви за $x_n = \pm\frac{1}{n^2}$ и притоа важи

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| = \max_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| = \frac{1}{2n^2}.$$

Оттука следува дека

$$\left|\sin\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)\right| \le \left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \le \frac{1}{2n^2}, x\in(-\infty,+\infty).$$

Според критериумот на Ваерштрас, од конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ следува рамномерна конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{1+n^4x^2}\right)$ на интервалот $[0,\infty)$.

в) Прво да воочиме дека секој реален број x го задоволува неравенството

$$\left|\frac{x}{1+n^2x^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right| < \left|\frac{x}{1+n^2x^4}\cdot\frac{x}{n}\right|,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Функцијата $\frac{x^2}{n(1+n^2x^4)}$, $n\in\mathbb{N}$, го достигнува својот супремум за $x_n = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ и притоа важи

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{1}{n}\cdot\frac{x^2}{1+n^2x^4} = \max_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{1}{n}\cdot\frac{x^2}{1+n^2x^4} = \frac{1}{2n^2}.$$

Бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ конвергира, од каде што според критериумот на Ваерштрас следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^4}\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$ конвергира рамномерно на множеството реални броеви.

г) Од неравенството

$$\ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right)<\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)^2,\ x\in[0,+\infty).$$

Функцијата $\frac{x}{1+n^2x^2}$, $n\in\mathbb{N}$, својот супремум на интервалот $[0,+\infty)$ го достигнува во точката $x_n=\frac{1}{n}$ и неговата вредност е

$$\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{x}{1+n^2x^2}=\max_{x\in[0,\infty)}\frac{\sqrt{x}}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}.$$

Значи

$$\ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right)<\frac{1}{4n^2},\quad n\in\mathbb{N}\,,\ x\in[0,\infty).$$

Тогаш од конвергенцијата на бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ следува конвергенција на разгледуваниот функционален ред на интервалот $[0,\infty)$.

д) Функцијата x^2e^{-nx}, $n\in\mathbb{N}$, својот супремум на интервалот $[0,+\infty)$ го достигнува во точките $x_n=\frac{2}{n}$ и притоа важи

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}x^2e^{-nx}=\max_{x\in[0,+\infty)}x^2e^{-nx}=\frac{4e^{-2}}{n^2},x\in[0,+\infty)$$

од каде што следува рамномерна конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ на разгледуваниот интервал.

ѓ) Функцијата x^n+x^{-n}, $n\in\mathbb{N}$, својот супремум на интервалот $\left[\frac{1}{2},2\right]$ го достигнува во точката $x_n=1$ и притоа важи

$$\sup_{x\in\left[\frac{1}{2},1\right]}(x^n+x^{-n})=\max_{x\in\in\left[\frac{1}{2},1\right]}(x^n+x^{-n})=2,x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$$

Оттука следува дека $\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}) \leq \frac{2n^2}{\sqrt{n!}}$. Бидејќи бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{\sqrt{n!}}$ конвергира според Даламберовиот критериум, редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ конвергира рамномерно на интервалот $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

4.27. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+nx)^2}, \quad x \in (0,\infty)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\sin(nx), x \in (-\infty,+\infty)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)^4, \ x \in [1,+\infty)$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x \in (0,+\infty)$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0,1]$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}, \quad x \in (0,+\infty)$.

Решение. а) Од неравенството $0 < \frac{1}{(1+nx)^2} < \frac{1}{n^2x^2}, \ x \in (0,+\infty), n \in \mathbb{N}$

следува дека за секој фиксен $x \in (0,\infty)$, добиениот броен ред конвергира.

Нека $\varepsilon_0 = \frac{1}{9}, \ p = n, \ x = \frac{1}{n} \in (0,+\infty)$.

Тогаш од

$$| S_{2n}(x) - S_n(x) | = \frac{1}{\left(1+(n+1)\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+(n+2)\frac{1}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(1+2n\frac{1}{n}\right)^2} > \frac{1}{\left(1+2n\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{9}$$

заради Кошиевиот критериум следува дека конвергенцијата на дадениот ред не е рамномерна на интервалот $(0,\infty)$.

б) Заради неравенството

$$\left|e^{-n^2x^2}\sin(nx)\right| < e^{-n^2x^2}, \ x \in (-\infty,+\infty), \ n \in \mathbb{N},$$

следува дека за секој фиксен $x \in (-\infty,+\infty)$, добиениот ред конвергира.

Нека $\varepsilon = e^{-1}\sin 2, \ p = n, \ x = \frac{1}{n} \in (-\infty,+\infty)$. Тогаш од

$$| S_{2n}(x) - S_n(x) | =$$

$$= \left| e^{-(n+1)^2 \frac{1}{n^2}} \sin\left((n+1)\frac{1}{n}\right) + e^{-(n+2)^2 \frac{1}{n^2}} \sin\left((n+2)\frac{1}{n}\right) + ... + e^{-(2n)^2 \frac{1}{n^2}} \sin\left(2n\frac{1}{n}\right) \right| =$$

$$= e^{-(n+1)^2 \frac{1}{n^2}} \sin\left((n+1)\frac{1}{n}\right) + e^{-(n+2)^2 \frac{1}{n^2}} \sin\left((n+2)\frac{1}{n}\right) + ... + e^{-(2n)^2 \frac{1}{n^2}} \sin\left(2n\frac{1}{n}\right) >$$

$$> e^{-(2n)^2 \frac{1}{n^2}} \sin\left(2n\frac{1}{n}\right) = e^{-4} \sin 2.$$

следува дека дадениот ред не конвергира рамномерно на интервалот $(-\infty, \infty)$.

в) секој фиксен $x \in [1, +\infty)$ добиениот броен ред конвергира

$$0 < \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right)^4 < \frac{x^4}{n^8},\ x \in [1, +\infty).$$

Разгледуваниот ред не конврегира рамномерно на интервалот $[1, +\infty)$. Навистина, за $\varepsilon = \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4}\right)^4$ $p = n,\ x = n^2 \in [1, +\infty)$ добиваме дека

$$| S_{2n}(x) - S_n(x) | = \left| \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2}{(n+1)^2}\right)^4 + \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2}{(n+2)^2}\right)^4 + ... + \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2}{(2n)^2}\right)^4 \right| >$$

$$> \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2}{(2n)^2}\right)^4 > \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{4}\right)^4$$

г) Дадениот функционален ред е конвергентен броен ред за секој фиксен $x \in (0, \infty)$. Конвергенцијата на дадениот функционален ред не е рамномерна на интервалот $(0, \infty)$, бидејќи за $\varepsilon = 1,\ p = n,\ x = \sqrt[2n]{(2n!)} \in (0, +\infty)$ добиваме дека

$$| S_{2n}(x) - S_n(x) | = \left| \frac{(\sqrt[2n]{(2n)!})^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(\sqrt[2n]{(2n)!})^{n+2}}{(n+2)!} + ... + \frac{(\sqrt[2n]{(2n!)})^{2n}}{(2n)!} \right| > \frac{(\sqrt[2n]{(2n!)})^{2n}}{(2n)!} = 1.$$

е) Дадениот ред конвергира за секој фиксен $x \in [0, 1]$. Имено,

$$\frac{x}{1 + n^2 x^2} = 0, \text{ за } x = 0 \text{ и } 0 < \frac{x}{1 + n^2 x^2} < \frac{x}{(nx)^2} = \frac{1}{n^2 x} \text{ за } x \in (0, 1].$$

Ќе докажеме дека конвергенцијата на дадениот ред не е рамномерна на интервалот $[0, 1]$. Нека е $\varepsilon = \frac{1}{5}$, $p = n$ и $x = \frac{1}{n}$. Тогаш имаме

$$\left|S_{2n}-S_n\right| = \left|\frac{\frac{1}{n}}{1+(n+1)^2\frac{1}{n^2}} + \frac{\frac{1}{n}}{1+(n+2)^2\frac{1}{n^2}} + \ldots + \frac{\frac{1}{n}}{1+(2n)^2\frac{1}{n^2}}\right| =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{(n+1)^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{(n+2)^2}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{(2n)^2}{n^2}}\right) \geq \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{1+\frac{4n^2}{n^2}} = \frac{1}{5}$$

од каде што според Кошиевиот критериум следува дека разгледуваниот ред не конвергира рамномерно на интервалот $[0,1]$.

ж) За секој фиксен $x \in (0,+\infty)$, од

$$\left|2^n \sin\frac{1}{3^n x}\right| < \frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

следува дека дадениот ред конвергира.

Ќе докажеме дека конвергенцијата на дадениот ред на разгледуваниот интервал не е рамномерна. Нека $\varepsilon = 1,\ p = n,\ x = \frac{1}{3^n}$. Тогаш имаме

$$\left|S_{2n}-S_n\right| = \left|2^{n+1}\sin\frac{1}{3} + 2^{n+2}\sin\frac{1}{3^2} + \ldots + 2^{2n}\sin\frac{1}{3^n}\right| > 2^{n+1}\sin\frac{1}{3} > 1$$

од каде што следува дека конвергенцијата на дадениот ред на интервалот $(0,+\infty)$.

●

4.28. Со примена на Абеловиот критериум докажи дека следниве редови рамномерно конвергираат:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}, \quad x \in [1,+\infty);$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot \operatorname{arctg} x^n, \quad x \in [1,+\infty);$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}\cdot\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right), \quad x \in [-4,4];$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad x \in [0,\infty).$

Решение. а) Нека $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ и $b_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.

Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ конвергира по Лајбницовиот критериум.

Функционалната низа $\left(b_n(x)\right)$, $x \in [1,+\infty)$ е рамномерно ограничена бидејќи неравенството $\dfrac{x^n}{1+x^n} < 1$ важи за секој $x \in [1,+\infty)$ и $n \in \mathbb{N}$. Уште повеќе разгледуваната низа е монотона бидејќи за секој $x \in [1,\infty)$ низата расте по n. Тоа може да се заклучи од првиот извод на функцијата $\phi(t) = \dfrac{x^t}{1+x^t}$ кој е еднаков на $\phi'(t) = \dfrac{x^t \ln x}{\left(1+x^t\right)^2}, t > 1.$

Оттука според Абеловиот критериум следува дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \cdot \dfrac{x^n}{x^n+1}$ рамномерно конвергира на интервалот $[1,+\infty)$.

б) Нека $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ и $b_n(x) = \operatorname{arctg} x^n$, $x \in [1,\infty), n \in \mathbb{N}$.

Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ конвергира по Лајбницовиот критериум.

Функционалната низа $\left(b_n(x)\right)$, $x \in [1,+\infty)$ е рамномерно ограничена бидејќи неравенството $\operatorname{arctg} x^n < \dfrac{\pi}{2}$ важи за секој $x \in [1,+\infty)$ и $n \in \mathbb{N}$. Од првиот извод на функцијата $\phi(t) = \operatorname{arctg} x^t$, $t > 0$ може да се заклучи дека разгледуваната низа монотоно расте по n за секој $x \in [1,+\infty)$.

Врз основа на Абеловиот критериум, заклучуваме дека редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{arctg} x^n$ рамномерно конвергира на интервалот $[1,+\infty)$.

в) Дадениот ред може да го запишеме во обликот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n} \cdot \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 4^n} \cdot \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}, \quad x \in [-4,4].$$

Нека $a_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2 4^n}$ и $b_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}$.

Од неравенството $\left|\dfrac{x^n}{4^n n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, x \in [-4,4]$ може да заклучиме дека функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{4^n n^2}$ рамномерно конвергира на интервалот $[-4,4]$.

Функционалната низа $\left(b_n(x)\right)$, $x \in [-4,4]$ е рамномерно ограничена на интервалот $[-4,4]$ бидејќи $\left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} \le \left(1+\dfrac{4^2}{n^2}\right)^{n^2} < e^{16}, \ x \in [-4,4]$ односно

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} < \ln e^{16} = 16, \ x \in [-4,4].$$

Од првиот извод на функцијата $\phi(t) = \ln\left(1+\dfrac{x^2}{t^2}\right)^{t^2}$, $t \ge 1$ може да се заклучи дека разгледуваната низа монотоно расте по n за секој $x \in [-4,4]$. Имено, функцијата има позитивен прв извод

$$\phi'\left(t\right) = \frac{2\left(-tx^2 + t^3\ln\left(1+\dfrac{x^2}{t^2}\right) + tx^2\ln\left(1+\dfrac{x^2}{t^2}\right)\right)}{t^2+x^2} > \frac{2\left(-tx^2 + t^3\left(\dfrac{x^2}{t^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^4}{t^4}\right) + tx^2\left(\dfrac{x^2}{t^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^4}{t^4}\right)\right)}{t^2+x^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{x^4}{t}\left(1-\dfrac{x^2}{t^2}\right)}{t^2+x^2} > 0, \ \text{за } t > |\, x \,|.$$

Притоа, го користевме неравенството $\ln(1+p) > p - \dfrac{p^2}{2}, \ p > 0.$

Врз основа на Абеловиот критериум, разгледуваниот ред рамномерно конвергира интервалот $[-4,4]$.

г) Нека $a_n = \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ и $b_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-1/2}$.

Редот $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ конвергира (зошто?).

Низата $\left(b_n(x)\right)$ $[0,+\infty)$ расте по n за секој $x \in [0,+\infty)$. Освен тоа разгледуваната низа е рамномерно ограничена, што следува од неравенството

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1/2} \le 1, x \in [0,+\infty).$$

Оттука, врз основа на Абеловиот критериум дадениот ред рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал. ●

4.29. Со примена на Дирихлеовиот критериум докажи дека следниве редови рамномерно конвергираат:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, x \in [0,1];$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2}, x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], 0 < \varepsilon < 1;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin(nx)}{\sqrt{n+x}}, x \in [0,\infty);$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, x \in [0,1].$

Решение. а) Нека $a_n(x) = (-1)^{n+1} x^n = -(-x)^n,\ x \in [0,1]$ и $b_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$.

Низата на парцијалната сума на редот $\sum_{n=1}^{\infty} -(-x)^n$ е рамномерно ограничена на $[0,1]$ бидејќи $\left| -\sum_{k=1}^{n} (-x)^k \right| = \left| \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} - 1 \right| = \left| (-x) \frac{1+(-x)^n}{1+x} \right| \le 2, \quad x \in [0,1].$

Низата (b_n) е монотоно опаѓачка бројна низа која конвергира кон 0 кога $n \to \infty$.

Според Дирехлеовиот критериум следува дека разгледуваниот ред рамномерно конвергира интервалот $[0,1]$.

б) Нека $a_n(x) = \sin(nx)$ и $b_n = \frac{1}{1+n^2}, n \in \mathbb{N}$.

Парцијалната низа на сумите на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ е рамномерно ограничена на интервалот $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, што следува од

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin(xk) \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \le \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \le \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi - \varepsilon}{2}\right)}, \ x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon].$$

Низата (b_n) е монотоно опаѓачка бројна низа која конвергира кон 0 кога $n \to \infty$.

Според Дирихлеовиот критериум дадениот ред конвергира рамномерно на интервалот $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, за секое $0 < \varepsilon < 1$.

в) Нека $a_n(x)=\sin x\sin(nx)$ и $b_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$, $x\in[0,+\infty)$, $n\in N$.

Заради

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin(kx)\right|=\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\cos(k-1)x-\cos(k+1)x]\right|=2\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\right|\le 2,$$

добиваме дека низата на парцијалните суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ е рамномерно ограничена на $[0,\infty)$.

Низата $\left(b_n\right)$ е монотоно опаѓачка по n, за секое $x\in[0,\infty)$, бидејќи

$$b_n(x)-b_{n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}-\frac{1}{\sqrt{n+1+x}}=\frac{1}{\sqrt{n+x}+\sqrt{n+1+x}}>0.$$

Понатаму од $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,+\infty)}\left|\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

следува дека функционалната низа со општ член $\left(b_n\right)$ рамномерно конвергира кон нула на разгледуваниот интервал.

Според тоа, врз основа на Дирихлеовиот критериум, дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $[0,+\infty)$.

г) Нека $a_n(x)=(-1)^n$ и $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$, $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$.

Низата на парцијалната сума на редот $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ е рамномерно ограничена на $[0,1]$ бидејќи $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|=1,\quad x\in[0,1]$.

Низата $\left(b_n\right)$ е монотоно опаѓачка по n, за секое $x\in[0,1]$, бидејќи

$$b_n(x)-b_{n+1}(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1+x}=\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}>0.$$

Понатаму од $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{1}{n+x}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ следува дека функционалната низа со општ член $\left(b_n\right)$ рамномерно конвергира кон нула на разгледуваниот интервал.

Според тоа, врз основа на Дирихлеовиот критериум, дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $[0,1]$. ●

4.30. Испитај ја рамномерната конвергенција на следниве функционални редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty,+\infty);$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2},\ x \in [-a,a],\ \ a>0$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)\cos\left(\dfrac{1}{n(x^2+1)}\right)}{\ln\ln(x^2+2+n)}, x \in (-\infty,+\infty);$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^{\alpha}},\ x \in [0,2\pi]$

Решение. а) Нека $a_n=(1-)^n$ и $b_n=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}, x \in (-\infty,+\infty),\ n \in \mathbb{N}$.

Низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ е рамномерно ограничена.

Функционалната низа $b_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n},\quad x \in (-\infty,+\infty),\ n \in \mathbb{N}$ е монотоно опаѓачка по n, на множеството реални броеви и рамномерно конвергира кон нула кога $n \to \infty$. Според тоа, врз основа на Дирихлеовиот критериум, редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ рамномерно конвергира на множеството реални броеви.

б) Дадениот функционални ред може да го запишеме во облик

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^2+n^2}\left(\frac{x}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right),\ x \in [-a,a],\ \ a>0.$$

Нека е $a_n(x)=\dfrac{x}{n^2}+\dfrac{(-1)^n}{n}$ и $b_n(x)=\dfrac{n^2}{x^2+n^2}, x \in [-a,a], n \in \mathbb{N}$.

Функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{n^2}+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ рамномерно конвергира на интервалот $[-a,a],\ \ a>0.$

Функционалната низа $b_n=\dfrac{n^2}{x^2+n^2},\ x \in [-a,a], n \in \mathbb{N}$ е рамномерно ограничена на интервалот $[-a,a]$, што следува од неравенството $\frac{n^2}{x^2+n^2} \leq 1, x \in [-a,a], n \in \mathbb{N}$.

Освен тоа разгледуваната низа е монотоно растечка по n. Врз основа на Абеловиот критериум дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $[-a,a]$.

в) Функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln\ln(x^2+2+n)}$ рамномерно конвергира по Дирихлеовиот критериум, бидејќи низата на парцијалните суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ е рамномерно ограничена на множеството реални броеви, а функционалната низа $b_n(x) = \frac{1}{\ln\ln(x^2+2+n)}$, $x \in (-\infty,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ е монотона опаѓачка и рамномерно конвергира кон нула на множеството реални броеви.

За низата $c_n\left(x\right) = \cos\left(\frac{1}{n(x^2+1)}\right)$ важи $\left|\cos\left(\frac{1}{n(x^2+1)}\right)\right| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, од каде следува рамномерната ограниченост.

Бидејќи постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\frac{1}{n(x^2+1)} \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ за $n > n_0$ следува дека низата $c_n\left(x\right)$ е монотона за секој $x \in \mathbb{R}$.

Заклучуваме дека почетниот ред рамонерно конвергира, според критериумот на Абел.

г) Ако е $\alpha > 1$, тогаш дадениот ред, врз основа на Вајерштрасовиот критериум рамномерно конвергира на множеството реални броеви.

Ќе докажеме дека за $0 < \alpha \leq 1$, дадениот ред не конвергира рамномерно на интервалот $[0,2\pi]$.

Според Кошиевиот критериум за $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $p = n, x = \frac{1}{n}$ имаме

$$| S_{2n}(x) - S_n(x) | = \left| \frac{\sin((n+1)/n)}{(n+1)^\alpha} + \frac{\sin((n+2)/n)}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{\sin((2n)/n)}{(2n)^\alpha} \right| =$$

$$= \frac{\sin(1+1/n)}{(n+1)^\alpha} + \frac{\sin(1+2/n)}{(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{\sin 2}{(2n)^\alpha} \geq n \cdot \frac{\sin 1}{(2n)^\alpha} \geq n^{1-\alpha} \frac{\sin 1}{2^\alpha} > \frac{1}{4}$$

од каде што следува дека разгледуваниот ред не конвергира рамномерно на множеството реални броеви. ●

4.31. Најди ја сумата на редот

а) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $x \in [0,1]$;

и докажи дека таа е непрекината функција на дадениот интервал.

Решение. а) Членовите на дадениот функционален ред се непрекинати функции на интервалот $(-1,1)$. Уште повеќе редот рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал. Според тоа сумата на редот е непрекината функција на интервалот $(-1,1)$. Со примена на формулата за пресметување на сума на бесконечен геометриски ред, за сумата на дадениот ред наоѓаме

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \ \ x \in (-1,1).$$

б) Слично како и во претходниот случај членовите на дадениот функционален ред се непрекинати функции на интервалот $[0,1]$. Редот рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал, па според тоа сумата е непрекината функција на интервалот $[0,1]$. Со примена на формулата за пресметување на сума на бесконечен геометриски ред, за сумата на дадениот ред наоѓаме

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} - 1 \right) = x^2 \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1 \right) = \frac{x^2}{e^x - 1}, \ \ x \in (0,1].$$

За $x = 0$ имаме $S(0) = 0$. ●

4.32. Одреди ја дефиниционата област и испитај непрекинатост на следните функции:

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$; б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2}$;

в) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^4 x^2} \sin(\sqrt{n}x)$; г) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n} \right)^n$;

д) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{(1+x^2)^n}$; ѓ) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n\sqrt{n} + x^2}$.

Решение. Ако функцијата f е дадена како збир на функционален ред, т.е. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, тогаш за дефинициона област на функцијата f го земаме множеството D на коешто редот конвергира. Ако функциите a_n, $n \in \mathbb{N}$ се непрекинати на D, тогаш множеството на кое што функцијата f е непрекината, го содржи множество на кое што дадениот ред е рамномерно конвергентен.

а) Функционалниот ред конвергира на интервалот $(-1,1)$, што следува од Кошиевиот коренски критериум $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}|x| = |x| < 1$.

Според тоа, доменот на разгледуваната функција е интервалот $(-1,1)$.

Од Ваерштрасовиот критериум следува дека дадениот ред рамномерно конвергира на секој интервал $[-q,q]$, $0 < q < 1$ од каде што следува дека функцијата f е непрекината на целиот интервал $(-1,1)$.

б) Функционалниот ред конвергира на интервалот $\left(\frac{1}{e}, e\right)$, што следува од Кошиевиот коренски критериум

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\ln^n x}{n^2}\right|^n} = \lim_{n\to\infty}|\ln x| = |\ln x| < 1.$$

Дадениот функционален ред конвергира исто така и во точките за $x = \frac{1}{e}$ и $x = e$.

Според тоа, доменот на разгледуваната функција е интервалот $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

Заради Ваерштрасовиот критериум добиваме дадека дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ од каде што следува дека функцијата f е непрекината на целиот интервал $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

в) Да воочиме дека за секој $x \in (-\infty, +\infty)$, важи равенството

$$|e^{-n^4x^2}\sin(\sqrt{n}x)| \leq \sqrt{n}\,|x|\,e^{-n^4x^2}.$$

Функцијата $f_n(x) = e^{-n^4x^2}\sin(\sqrt{n}x)$ го достигнува својот супремум на множеството реални броеви за $|x_n| = \frac{1}{\sqrt{2}n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ и притоа важи

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\sqrt{n}\,|x|\,e^{-n^4x^2} = \max_{x\in(-\infty,+\infty)}\sqrt{n}\,|x|\,e^{-n^4x^2} = \frac{1}{\sqrt{2e}\,n^{3/2}}$$

од каде што следува дека редот $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^4x^2}\sin(\sqrt{n}x)$ рамномерно конвергира на множеството реални броеви. Според тоа функцијата f е дефинирана на множеството реални броеви и е непрекината на целата дефинициона област, т.е. на множеството реални броеви.

г) Ако $|x| \geq 1$, тогаш општиот член на дадениот ред не тежи кон нула, па според тоа добиениот ред дивергира.

Ако $|x| < 1$, тогаш заради Кошиевиот коренски критериум имаме

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x + \frac{1}{2n}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|x + \frac{1}{2n}\right| = |x| < 1.$$

Тогаш дадениот ред конвергира на интервалот $(-1,1)$, па според тоа доменот на функцијата f е интервалот $(-1,1)$.

Дадениот функционален ред рамномерно конвергира на интервалот $[-q,q], 0 < q < 1$, според Вајерштрасовиот критериум, бидејќи

$$\left|\left(x + \frac{1}{2n}\right)^n\right| \leq \left(q + \frac{1}{n}\right)^n, \; x \in [-q,q], \; 0 < q < 1.$$

Оттука следува дека функцијата f е непрекината на целиот интервал $(-1,1)$.

д) Дадениот функционални ред може да го запишеме во облик

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + x(-1)^n}{x^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^2 + n^2}\left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}\right), x \in [-a,a], \; a > 0.$$

Функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ рамномерно конвергира според интервалот $[-a,a], \; a > 0$. Функционалната низа

$$b_n = \frac{n^2}{x^2 + n^2}, \; x \in [-a,a], n \in \mathbb{N}$$

е рамномерно ограничена на интервалот $[-a,a]$, што следува од неравенството

$$\frac{n^2}{x^2 + n^2} \leq 1, \; x \in [-a,a], \; n \in \mathbb{N}.$$

Освен тоа разгледуваната низа е монотоно растечка по n. Според Абеловиот критериум дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $[-a,a], a > 0$. Бидејќи a е произволен реален број, функцијата f е дефинирана на множеството реални броеви и е непрекината на целата дефинициона област, т.е. на множеството реални броеви.

ѓ) Од неравенството

$$\left|\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n\sqrt{n}+x^2}\right| < \frac{\pi}{2n^{3/2}},\ x\in(-\infty,+\infty),$$

заради критериумот на Ваерштрас следува дека дадениот ред рамномерно конвергира на множеството реални броеви. Според тоа дадената функција е дефинирана на множеството реални броеви е непрекината на целата дефинициона област, т.е. на множеството реални броеви. ●

4.33. Докажи дека сумата на редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}((n+1)xe^{-(n+1)x}-nxe^{-nx})$ е непрекината функција на интервалот $[0,1]$ и покрај тоа што конвергенцијата на дадениот ред не е рамномерна на интервалот $[0,1]$.

Решение. Низата на парцијални суми на дадениот ред е

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)xe^{-(k+1)x}-kxe^{-kx}\right)=(n+1)xe^{-(n+1)x},$$

чија што гранична функција е $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0,\ x\in[0,1]$.

Граничната функција на низата парцијални суми, односно сумата на дадениот ред е непрекината функција. Меѓутоа, од равенството

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|S(x)-S_n(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}(n+1)xe^{-(n+1)x}=\frac{1}{e},$$

следува дека конвергенцијата на дадениот ред на интервалот $[0,1]$ не е рамномерна. ●

4.34. Докажи дека редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(n(n+1)x^2-1)}{(1+n^2x^2)(1+(n+1)^2x^2)}$$

конвергира, но не рамномерно кон непрекината функција на интервалот $[0,1]$.

Решение. Дадениот ред може да се запише во облик

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(n(n+1)x^2-1)}{(1+n^2x^2)(1+(n+1)^2x^2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}\right),$$

од каде што добиваме дека низата на парцијални суми може да се запише во облик

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kx}{1+k^2x^2}-\frac{(k+1)x}{1+(k+1)^2x^2}\right)=\frac{x}{1+x^2}-\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2},\ n\in\mathbb{N}.$$

Оттука следува дека сумата на дадениот ред, односно граничната функција на низата парцијални суми, има облик

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}\right)=\frac{x}{1+x^2},\quad x\in[0,1],$$

и таа е непрекината функција на интервалот $[0,1]$. Меѓутоа, конвергенцијата на дадениот ред не е рамномерна на интервалот $[0,1]$. Имено, за $x_n=\dfrac{1}{n+1}$ имаме

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|S(x)-S_n(x)\right|\geq\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\dfrac{1}{n+1}}{1+(n+1)^2\cdot\dfrac{1}{(n+1)^2}}=\frac{1}{2}. \bullet$$

4.35. Најди ги следниве гранични вредности:

а) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+2^nx^2}$; г) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^nn^x}$.

Решение. а) Според Абеловиот критериум може да се утврди дека дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $[0,+\infty)$. Според тоа, допуштен е граничен премин под знакот за сума. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1^-}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{x^n}{1+x^n}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{2}\ln2.$$

б) Дадениот ред не конвергира рамномерно на интервалот $[0,1]$. Според тоа не е допуштен граничен премин под знакот за сума. Од тие причини за да ја најдеме вредноста на границата, претходно ќе ја најдеме сумата на дадениот ред. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})=\lim_{x\to1^-}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x^k-x^{k+1})\right)=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left(\lim_{n\to\infty}\left(x-x^{n+1}\right)\right)=\lim_{x\to1^-}\begin{cases}1, & 0\leq x<1;\\ 0, & x=1.\end{cases}=1$$

в) Заради Ваерштрасовиот критериум следува дека дадениот ред рамномерно конвергира на множеството реални броеви, бидејќи

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{x^2}{1+2^nx^2}\leq\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\frac{x^2}{2^nx^2}\leq\frac{1}{2^n}.$$

Според тоа, допуштен е граничен премин под знакот за сума. Тогаш добиваме дека

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+2^n x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+2^n x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

г) Со примена на Ваерштрасовиот критериум се добива дека дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $[0,+\infty)$, така што лимесот и сумата можат да си ги променат местата $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{3^n n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$. ●

4.36. Најди ја сумата на редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, а потоа пресметај ја сумата на редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

Решение. Редот $x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ конвергира на интервалот $(-1,1)$ кон функцијата $\frac{x}{1+x^2}$. На интервалот $[-q,q]$, $0<q<1$ редот рамномерно конвергира.

Низата $b_n(x)=\frac{1}{2n+1}$ е монотона и рамномерно ограничена на $(-1,1)$.

Заклучуваме дека редот $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ рамномерно конвергира на $(-1,1)$.

Бидејќи неговите членови се непрекинати функции, допуштен е премин на знакот за интеграл под знакот за сума, т.е. редот може почлено да се интегрира. Така добиваме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}x,\quad x\in(-1,1).$$

Оттука за $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ добиваме дека $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ од каде што следува $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}=\frac{\pi}{6}\sqrt{3}$.

4.37. Докажи дека функцијата $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$ е непрекината на множеството реални броеви, потоа пресметај $\int\limits_0^{2\pi}f(x)dx$.

Решение. Со примена на критериумот на Ваерштрас може да заклучиме дека дадениот ред рамномерно конвергира на множеството реални броеви. Членовите на дадениот функционален ред се непрекинати функции од каде што следува дека сумата на редот е непрекината функција. Според тоа допуштен е премин на знакот за интеграл под знакот за сума. Тогаш

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n(n+1)} = \pi. \bullet$$

4.38. Докажи дека функцијата $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ е непрекината на интервалот $(0,+\infty)$, а потоа пресметај $\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)dx$.

Решение. Дадениот ред конвергира на интервалот $(0,+\infty)$, но со примена на Кошиевиот критериум може да се докаже дека не конвергира рамномерно на интервалот $(0,+\infty)$. Според тоа редот неможе почлено да се интегрира. Од

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{-kx} - e^{-x}\sum_{k=1}^{n} ke^{-kx} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} - ne^{-(n+1)x}$$

добиваме дека

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{-kx}(1-e^{-x}) = \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} - ne^{-(n+1)x}$$

од каде што следува

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{-kx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} - \frac{e^{-(n+1)x}}{(1-e^{-x})^2} - \frac{ne^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$

Тогаш за сумата на редот добиваме

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ke^{-kx} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} - \frac{e^{-(n+1)x}}{(1-e^{-x})^2} - \frac{ne^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}.$$

Оттука заклучуваме дека граничната функција, односно сумата на редот е непрекината функција на интервалот $(0,+\infty)$. Со примена на методот на замена наоѓаме дека $\int_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{e^{-x}dx}{(1-e^{-x})^2} = \frac{3}{4}. \bullet$

4.39. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{2(n+1)} - x^{2n})$ не конвергира рамномерно на интервалот $[-1,1]$, но тој може да се интегрира почлено.

Решение. Општиот член на низата парцијалната сума на дадениот ред е

$$S_n(x) = x^4 - x^2 + x^6 - x^4 + \ldots + x^{2(n+1)} - x^{2n} = -x^2 + x^{2(n+1)}, x\in[-1,1],\ n\in\mathbb{N},$$

а граничната функција, односно сумата на дадениот ред е

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x\in\{-1,1\};\\ -x^2, & -1<x<1.\end{cases}$$

Членовите на дадениот ред се непрекинати функции, додека сумата $S(x)$ на разгледуваниот ред не е непрекината функција на $[-1,1]$ што значи дека конвергенцијата на дадениот ред на интервалот $[0,1]$ не е рамномерна. За интегралот на граничната функција добиваме

$$\int_{-1}^{1}S(x)dx=-\frac{2}{3}.$$

Од друга страна,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1}(x^{2(n+1)}-x^{2n})dx=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+1}\right)=-\frac{2}{3}.$$

Значи, дадениот ред може почлено да се интегрира. ●

4.40. Дали може на редот $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{1/(2n-1)}-x^{1/(2n+1)})$ почлено да се интегрира на интервалот $[0,1]$?

Решение. Општиот член на низата парцијалната сума на дадениот ред е

$S_n(x)=x-x^{1/3}+x^{1/3}+x^{1/5}-\cdots-x^{1/(2n+1)}=x-x^{1/(2n+1)}, x\in[0,1], n\in\mathbb{N}$,

а граничната функција, односно сумата на дадениот ред е

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ x-1, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

Сумата $S(x)$ на разгледуваниот ред не е непрекината функција на $[0,1]$ што значи дека конвергенцијата на дадениот ред на интервалот $[0,1]$ не е рамномерна. За интегралот на гранчната функција добиваме

$$\int_{0}^{1}S(x)dx=-\frac{1}{2}.$$

Од друга страна,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\left(x^{1/(2n-1)}-x^{1/(2n+1)}\right)dx=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Значи, дадениот ред може почлено да се интегрира, но не може да се примени теоремата за почлено интегрирање. ●

4.41. Најди ја сумата на следниве редови:

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \quad x\in[-1,1);$ б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, \quad x\in[-1,1].$

Решение. а) Членовите на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ се диференцијабилни функции, редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ чии членови се изводи на членовите на појдовниот ред, конвергира рамномерно на интервалот $[-q,q]$, каде $0<q<1$. За $x_0=0$ почетниот ред има општ член 0, па е конвергентен.

Според тоа редот $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ може почлено да го диференцираме. Тогаш добиваме $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ од каде што следува

$$\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x), x\in[-q,q].$$

Според тоа $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x), \quad x\in(-1,1).$

Посебно за $x=-1$ имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\lim_{x\to-1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\lim_{x\to-1^+}\ln(1-x)=-\ln 2.$$

б) Членовите на дадениот ред се диференцијабилни функции на интервалот $[-1,1]$. Од неравенството $\left|\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right|\le\frac{1}{n(n+1)}$, $x\in[-1,1]$ следува дека дадениот ред апсолутно конвергира за сите $x\in[-1,1]$ и рамномерно конвергира на $[-1,1]$. Оттука следува дека функцијата f како сума на дадениот ред е непрекината на $[-1,1]$. Бидејќи редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ е апсолутно конвергентен на $(-1,1)$ и рамномерно конвергентен на $[-q,q]$, за секој $0<q<1$ дадениот ред може почлено да се диференцира. Користејќи го претходниот резултат добиваме дека

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ x\in[-q,q].$$

Оттука следува дека

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = -\int_0^x \ln(1-t)dt = x + (1+x)\ln(1-x),\ x \in [-q,q].$$

Според тоа $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x),\ x \in (-1,1).$

Во рабните точки $x = 1$ и $x = -1$, имаме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x \to 1^-} (x + (1-x)\ln(1-x)) = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = \lim_{x \to -1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \lim_{x \to -1^+} (x + (1-x)\ln(1-x)) = -1 + 2\ln 2. \bullet$$

4.42. Најди ја дефиниционата област и испитај ја диференцијабилноста на следниве функции:

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$; б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$.

Решение. а) Низата функции $f_n(x) = \frac{x}{n+x},\ n \in \mathbb{N}$, монотоно опаѓа по n и конвергира кон нула за секое $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Врз основа на Лајбницовиот критериум дадениот ред конвергира во секоја точка од множеството D, што значи дека граничната функција f е дефинирана на множеството D.

Функциите f_n се непрекинати на множеството D, и нивните изводи се $f_n'(x) = \frac{n}{(n+x)^2}$. Според тоа, изводниот ред има облик $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n+x)^2}$.

Низата парцијални суми на редот $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ е ограничена, а низата $\left(f_n'(x)\right)$ монотоно по n конвергира кон нула на секој затворен интервал содржан во D. Тогаш, врз основа на Дирихлеовиот критериум, изводниот ред рамномерно конвергира на секој затворен интервал кој не содржи точки од обликот $-n, n \in \mathbb{N}$.

Според тоа, допуштено е почлено диференцирање на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$ за секој $x \neq -n$, така што имаме $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2},\ x \in D.$

б) Функциите $f_n(x)=\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$, $n\in\mathbb{N}$, се непрекинати функции на множеството реални броеви. Бидејќи за произволно $M>0$ важи неравенството

$$\left|f_n(x)\right|\le\frac{M}{n^2},\ x\in[-M,M],\ n\in\mathbb{N},$$

врз основа на Ваерштрасовиот критериум следува дека дадениот ред рамномерно конвергира и на секој ограничен интервал. Според тоа граничната функција, односно сумата f на разгледуваниот ред е дефинирана на множеството реални броеви.

За првиот извод на функцијиите f_n, $n\in\mathbb{N}$ имаме

$$f_n'\ (x)=\frac{n^2\operatorname{sgn}x+x\,|\,x\,|}{(n^2+x^2)^2},x\ne0,n\in\mathbb{N}.$$

Оттука добиваме дека

$$\left|f_n'(x)\right|\le\frac{n^2+M^2}{n^4}\le\frac{2}{n^2},\quad x\in[-M,M],\quad x\ne0,n\in\mathbb{N}.$$

од каде што според Ваерштрасовиот критериум следува дека изводниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'\ (x)$ на дадениот ред рамномерно конвергира на секој ограничен затворен интервал кој не ја содржи точката $x=0$. Според тоа, на множеството $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ е дозволено диференцирање член по член на дадениот ред и важи

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\operatorname{sgn}x+x\,|\,x\,|}{(n^2+x^2)^2},\quad x\ne0.$$

Останува уште да се испита диференцијабилноста на функцијата f во точката нула. Според дефиниција имаме

$$f\,'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+h^2}.$$

Според Ваерштрасовиот критериум, редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+h^2}$ рамномерно конвергира (по h) на интервалот $[-M,M]$, од каде што следува дека е допуштен граничен премин под знакот за сума, односно

$$\lim_{h\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+h^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{h\to0}\frac{1}{n^2+h^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Според тоа левиот и десниот извод на функцијата f во точката $x=0$ не се еднакви, односно

$$f_{+}'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ и } f_{-}'(0)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

што значи дека функцијата f не е диференцијабилна во нулата. ●

4.43. Докажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2\ln^2(n+1)}$ може почлено да се диференцира на множеството реални броеви.

Решение. Со примена на Ваерштрасовиот критериум се добива дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2\ln^2(n+1)}$ рамномерно конвергира на множеството реални броеви. Функциите $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n^2\ln^2(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$ се непрекинати на множеството реални броеви од каде што следува дека и функцијата $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ е непрекината на множеството множеството реални броеви.

Изводниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n\ln^2(n+1)}$, врз основа на Ваерштрасовиот критериум рамномерно конвергира на множеството реални броеви. Според тоа дадениот ред може почлено да се диференцира, односно

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2\ln^2(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(nx)}{n^2\ln^2(n+1)}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n\ln^2(n+1)},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

4.44. Докажи дека сумата на редот $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ е непрекината функција интервалот $[0,+\infty)$ и диференцијабилна на интервалот $(0,+\infty)$.

Решение. Функциите $f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $x\in[0,+\infty)$, $n\in\mathbb{N}$ се непрекинати на интервалот $[0,\infty)$. Според Ваерштрасовиот критериум, а поради неравенството

$$\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\le\frac{1}{n^2},\ x\in[0,+\infty)$$

редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ рамномерно конвергира на интервалот $[0,\infty)$ па функцијата f е непрекината на интервалот $[0,+\infty)$.

Понатаму, функциите $f_n'(x)=\dfrac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ се непрекинати на интервалот $[0,+\infty)$, а редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ рамномерно конвергира на секој интервал $[\delta,+\infty), \delta>0$. Според тоа, дадениот ред може почлено да се диференцира на секој интервал од облик $[\delta,\infty)$, $\delta>0$, односно на интервалот $(0,+\infty)$. Тогаш имаме

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-nx}}{1+n^2},\ x\in(0,+\infty). \bullet$$

4.45. Дали редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n^2}$ може почлено да се диференцира на множеството реални броеви?

Решение. Од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{n^2}}{\dfrac{x}{n^2}}=1$$

следува дека дадениот ред конвергира за секој фиксен $x\in\mathbb{R}$.

Со примена на Ваерштрасовиот критериум и неравенството

$$\left|\frac{n^2}{n^4+x^2}\right|\le\frac{1}{n^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

следува дека изводниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^4+x^2}$ рамномерно конвергира на множеството реални броеви. Според тоа дадениот ред може почлено да се диференцира, односно

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2},\ x\in(-\infty,+\infty). \bullet$$

4.46. Докажи дека Римановата функција $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ е бесконечно диференцијабилна на интервалот $(1,+\infty)$.

Решение. Функциите $f_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$, $x\in(1,+\infty)$, $n\in\mathbb{N}$ имаат изводи од произволниот ред $p\in\mathbb{N}_0$ кои се дадени со $f_n^{(p)}(x)=(-1)^p\dfrac{\ln^p n}{n^x}$.

Врз основа на неравенството

$$\frac{\ln^p n}{n^x} \leq \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}, \qquad x \geq x_0 > 1, \quad p \in \mathbb{N}_0,$$

и конвергенцијата на бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^{x_0}}, \;\; x_0 > 1, \;\; p \in \mathbb{N}_0$, заради Ваерштрасовиот критериум, следува рамномерна конвергенција на функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}, \;\; [x_0, +\infty), \; x_0 > 1, \;\; p \in \mathbb{N}_0$.

Бидејќи функциите $f_n, \, n \in \mathbb{N}$ се непрекинати, од рамномерната конвергенција на погорниот ред следува дека функциите кои ги претставуваат изводите од ред p на функцијата ζ дадени со

$$\zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^p n}{n^x}, \;\; p \in \mathbb{N}_0,$$

се непрекинати на секој од интервалите $[x_0, +\infty), \;\; x_0 > 1,$ а според тоа и на интервалот $(1, +\infty)$. ●

4.47. Докажи дека **тета функцијата** дадена со $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ е дефинирана и бесконечно диференцијабилна на интервалот $(0, +\infty)$.

Решение. Од неравенството

$$e^{-\pi n^2 x} \leq e^{-\pi n x}, \;\; x \in (0, +\infty)$$

следува дека дадениот ред конвергира за секој фиксен $x \in (0, +\infty)$. Според тоа, тета функцијата е дефинирана на интервалот $(0, \infty)$.

Изводите на функцијата $e^{-\pi n^2 x}$ од ред $k \in \mathbb{N}$ се од обликот $(-1)^k \pi^k n^{2k} e^{-\pi n^2 x}$. Од неравенството $n^{2k} e^{-\pi n^2 x} \leq n^{2k} e^{-\pi n^2 a}, x \in [a, +\infty), a > 0, \, k \in \mathbb{N}$, и конвергенцијата на редот $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k} e^{-\pi n^2 a}, \;\; k \in \mathbb{N}$ следува дека редот $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k} e^{-\pi n^2 x}$ рамномерно конвергира на интервалот $[a, +\infty), \;\; a > 0$. Според тоа, тета функцијата има извод од произволен ред $k \in \mathbb{N}$ за $x \in [a, +\infty), \;\; a > 0$, односно θ е бесконечно диференцијабилна функција на интервалот $(0, +\infty)$. ●

4.3. Степенски редови

Функционален ред од облик $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, каде што $\left(a_n\right)$ е низа реални броеви и x_0 реален број се нарекува **степенски ред** по $x - x_0$ со коефициенти $a_n,\ n \in \mathbb{N}$.

За секој степенски ред постои реален број $R > 0$ така што редот апсолутно конвергира за секој x што го задоволува неравенството $|x - x_0| < R$, а дивергира за секој x што го задоволува неравенството $|x - x_0| > R$.

Радиусот на конвергенција R на степенскиот ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ се определува по формулата на **Коши-Адамар** $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ или по формулата на **Даламбер** $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

1. (Теорема на Абел) Ако степенскиот ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ има радиус на конвергенција R и ако конвергира во точката $x = x_0 + R$, тогаш тој рамномерно конвергира на интервалот $[x_0, x_0 + R]$ и притоа важи

$$\lim_{x\to(x_0+R)-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Нека функцијата f дефинирана на интервалот $(x_0 - r, x_0 + r),\ r > 0$, и нека ги има сите изводи во точката $x_{0.}$ Степенскиот ред од облик $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ се нарекува **Тајлоров ред** на функцијата f во точката x_0.

Специјално, ако $x_0 = 0$, Тајлоровиот ред се нарекува **Маклоренов ред.**

Реалната функција f се нарекува аналитичка на интервалот $(x_0 - r, x_0 + r)$, ако е еднаква на сумата на својот Тајлоров ред на тој интервал.

Во продолжение ќе дадеме неколку примери на аналитички функции во околина на точката $x_0 = 0$, нивните Маклоренови редови и соодветниот радиус на конвергенција R.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}\,,\ R = +\infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,\ -1 < x \le 1,\ R = 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ -1 \le x < 1,\ R = 1$$

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n,\ |\, x \,|< 1,\ R = 1$$

и притоа $\binom{m}{n} = \dfrac{m \cdot \big(m-1\big) \cdots \big(m-(n-1)\big)}{n!}$ каде $m \in \mathbb{R}$.

Специјално, за $m = -1$, и $-x$ наместо x имаме $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n,\ |\, x \,|< 1,\ R = 1.$

4.48. Најди ги интервалите на конвергенција на следниве степенски редови:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} x^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3^n + (-2)^n)}{n} x^n$; ѓ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{3^n} x^n$.

Решение. а) Со примена на формулата на Даламбер за радиусот на конвергенција добиваме

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1.$$

Според тоа, дадениот степенски ред апсолутно конвергира на интервалот $(-1,1)$.

За $x = 1$ и $x = -1$ се добиваат бројните редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3$, соодветно, чии општи членови не тежат кон нула, па според тоа редовите дивергираат.

Според Абеловата теорема дадениот степенски ред рамномерно конвергира на секој затворен интервал кој што се содржи во интервалот $(-1,1)$.

б) Со примена на формулата на Коши-Адамар за радиусот на конвергенција на дадениот ред добиваме $\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$, од каде што следува дека дадениот степенски ред апсолутно конвергира на интервалот $(-1,1)$.

За $x=1$ се добива хармонискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ кој што дивергира, а за $x=-1$ се добива редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ кој е условно конвергентен.

Според тоа, дадениот степенски ред конвергира на интервалот $[-1,1)$. Врз основа на Абеловата теорема разгледуваниот ред рамномерно конвергира на секој затворен интервал кој што е содржан во интервалот $[-1,1)$.

в) За радиусот на конвергенција на дадениот степенски ред имаме

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n!)^2}}{\frac{1}{\left((n+1)!\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)^2=+\infty$$

од каде што следува дека редот апсолутно конвергира на множеството реални броеви. Според Абеловата теорема дадениот ред рамномерно конвергира на множеството реални броеви.

г) Според Даламберовата формула за радиусот на конвергенција на степенскиот ред имаме

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2(2n+2)!}{(2n)!((n+1)!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4$$

од каде што следува дека дадениот степенски ред апсолутно конвергира на интервалот $(-4,4)$.

За $x=4$ се добива бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, каде што $b_n=\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$, кој е дивергентен бидејќи општиот член не тежи кон нула, што може да се заклучи од релациите

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\frac{(n!)4^n}{(2n)!}}{\frac{((n+1)!)^2 4^{n+1}}{(2n+2)!}}=1-\frac{1}{2n}+\frac{2}{2n(n+1)}<1.$$

За $x=4$ се добива бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$, и тој дивергира.

Според тоа, разгледуваниот ред заради Абеловата теорема конвергира рамномерно на секој затворен интервал што се содржи во интервалот $(-4,4)$.

д) Со примена на формулата на Коши-Адамар за радиусот на конвергенција на дадениот степенски ред се добива

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2k]{\frac{9^k+4^k}{2k}}=3$$

од каде што може да се заклучи дека степенскиот ред апсолутно конвергира на интервалот $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

За $x=-\frac{1}{3}$ добиваме условно конвергентен броен ред, бидејќи тој може да се запише како збир на условно и апсолутно конвергентен ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

За $x=\frac{1}{3}$ добиваме дивергентен ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, што може да се заклучи од релациите

$$\frac{3^n+(-2)^n}{3^n\cdot n}=\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}>\frac{1}{4n}.$$

Значи, интервалот на конвергенција на дадениот степенски ред е $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Редот рамномерно конвергира на секој затворен сегмент што се содржи во интервалот $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

ѓ) Дадениот степенски ред конвергира само во точката $x=0$ бидејќи за радиусот на конвергенција R имаме:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!}{3^n}}{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0. \bullet$$

4.49. Најди ги интервалите на конвергенција на следнива степенски редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(x-1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x+1)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2+2}(x-1)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\left(x-1\right)^n$; ѓ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n^2\sqrt{3}+3}\right)^{-n}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n$.

Решение. а) Од

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}}=1,$$

следува дека дадениот ред апсолутно конвергира за $\left|x-1\right|<1$,односно за $0<x<2$.

За $x=0$ и $x=2$ ги добиваме бројните редови $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$, соодветно кои што апсолутно конвергираат. Значи, дадениот ред рамномерно конвергира на интервалот $[0,-2]$.

б) Користејќи го равенството

$$\sin(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$$

за радиусот на конвергенција на дадениот степенски ред добиваме

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=1$$

следува дека дадениот ред апсолутно конвергира за $\left|x+1\right|<1$, т.е. за $-2<x<0$.

За $x=-2$ го добиваме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$$

кој е условно конвергентен бидејќи општиот член монотоно конврегира кон нула.

За $x=0$ го добиваме редот $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$ кој што дивергира, што следува од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}=1$$

и дивергенцијата на $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

Според тоа, интервалот на конвергенција на дадениот степенски ред е $[-2,0)$. Редот рамномерно конвергира на секој затворен интервал што се содржи во интервалот $[-2,0)$.

в) Заради формулата на Даламбер за радиусот на конвергенција на степенскиот ред добиваме

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{3n^2+2}}{\frac{2n+3}{3n^2+6n+5}}=1$$

од каде што следува дека редот апсолутно конвергира за $\left|x-1\right|<1$, односно на интервалот $(0,2)$.

За $x=2$ се добива редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2+2}$ кој што дивергира.

За $x=0$ се добива редот $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{3n^2+2}$ кој што според Лајбницовиот критериум конвергира.

Значи, интервалот на конвергенција на разгледуваниот ред е $[0,2)$. Редот рамномерно конвергира на секој затворен интервал што се содржи во интервалот $[0,2)$.

г) Заради $\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

добиваме дека степенскиот ред апсолутно конвергира за $|x|<\frac{1}{e}$, т.е. интервалот на апсолутната конвергенција е $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

За $x=\frac{1}{e}$ го добиваме бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$ кој што дивергира бидејќи неговиот општ член не тежи кон нула. Навистина

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=\lim_{n\to\infty}e^{-n+n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

За $x=-\frac{1}{e}$ го добиваме бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}$ кој што дивергира од исти причини.

д) Според формулата на Коши-Адамар имаме

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\frac{(3+(-1)^{2k})^{2k}}{2k}}=4$$

од каде што следува дека радиусот на конвергенција е $R=\frac{1}{4}$, т.е. дадениот ред апсолутно конвергира за $x\in\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$.

За $x=\frac{5}{4}$ добиваме дивергентен броен ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ бидејќи за парцијалната сума S_{2n} важи

$$S_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

од каде што следува дека $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$.

Слично, за $x=\frac{3}{4}$ добиваме дивергентен ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3+(-1)^n)^n}{n4^n}$, чија што парцијална сума S_{2n} може да се запише како

$$S_{2n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{2k-1}(2k-1)}$$

од каде што следува дека $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$.

ѓ) Од равенството

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n^2\sqrt{3}+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n^2\sqrt{3}+3}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$$

следува дека радиусот на конвергенција е $R=\frac{\pi}{6}$. Значи, дадениот ред апсолутно конвергира на интервалот $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$. За $x=\frac{\pi}{6}$ и $x=\frac{\pi}{2}$ ги добиваме бројните редови

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n^2\sqrt{3}+3}\right)^{-n}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n^2\sqrt{3}+3}\right)^{-n}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n$$

соодветно. Добиените бројни редови дивергираат бидејќи од

$$\operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n^2\sqrt{3}+3}<\operatorname{arctg}\frac{n^2}{n^2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

следува дека

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{n^2+1}{n^2\sqrt{3}+3}\right)^{-n}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n>\frac{(\pi/6)^n}{(\pi/6)^n}=1. \bullet$$

4.50. Најди ги интервалите на конвергенција за степенскит редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}(x-1)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin 2n}\right)^n$.

Решение. а) Врз основа на формулата на Коши-Адамар имаме

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-1/\sqrt{n}}}{\sqrt[2n]{n^2+1}}=1$$

од каде што следува дека радиусот на конвергенција е $R=1$. Според тоа, дадениот ред конвергира за $|x-1|<1$, т.е. за $0<x<2$.

За $x=0$ се добива бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}}$ кој што апсолутно конвергира бидејќи

$$\left|\frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}}\right|<\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

За $x=2$ се добива бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}}$ кој што исто така апсолутно конвергира.

б) Врз основа на формулата на Коши-Адамар наоѓаме

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

од каде што следува дека дадениот ред апсолутно конвергира за $|x| < 1$, односно за $-1 < x < 1$.

За $x = -1$ го имаме бројниот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}(-1)^n = \sum_{n\neq 4,9,16,..}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Првиот ред конвергира условно, а вториот конвергира апсолутно, од каде што следува дека разгледуваниот ред конвергира условно.

За $x = 1$ го добиваме бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ кој конвергира условно.

в) Врз основа на формулата за пресметување на радиус на конвергенција наоѓаме дека

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sin 2n}\right|^n} = +\infty$$

од каде што следува дека радиусот на конвергенцијата на дадениот ред $R = 0$. Оттука заклучуваме дека редот конвергира само за $x = 0$. ●

4.51. Да се одредат интервалите на конвергенција за редовите:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n x^{2n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2n + 2} \ln^n x$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\pi^n (n+1)} \arcsin^n x$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$.

Решение. а) Ставајќи $t = \frac{1}{x^2}$ го добиваме редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} t^n$. Од

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2^n}}{\frac{n+1}{2^{n+1}}} = 2$$

следува дека редот апсолутно конвергира за $0 < \frac{1}{x^2} < 2$, односно за $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

За $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ го добиваме дивергентен броен ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n.$

б) Дадениот ред е степенски ред по $t=\ln x.$ Од

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n^2+2n+2}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2+2(n+1)+3}}\right|=1$$

следува дека дадениот ред апсолутно конвергира за $|\ln x|<1,$ односно за

$$e^{-1}<x<e.$$

За $x=e$ и $x=e^{-1}$ добиваме апсолутно конвергентни бројни редови

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2n+2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+2}.$$

в) Во овој случај имаме степенски ред по $t=\arcsin x.$ Од

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{\pi^n(n+1)}\right|}=\frac{2}{\pi}$$

следува дека дадениот ред конвергира за $|\arcsin x|<\frac{\pi}{2},$ односно за $-1<x<1.$

За $x=1$ и $x=-1$ ги добиваме бројните редови

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

соодветно, од кои првиот дивергира, а вториот условно конвергира.

ѓ) Ова е степенски ред по $\frac{x-1}{x+1}.$ Од

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{n+1}{(n+1)^2+1}}=1$$

следува дека редот апсолутно конвергира за $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1,$ односно за $x>0.$

За $x=0$ го добиваме условно конвергентниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}.$ ●

4.52. Најди ги Маклореновите редови за следниве функции:

а) $f(x)=e^{2x+1};$ б) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}};$

в) $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; г) $f(x)=\ln(x+e)$;

а потоа одреди го радиусот на конвергенција за секој од добиените редови.

Решение. а) Од равенството $e^{2x+1}=e\cdot e^{2x}$ имајќи го во вид развојот

$e^{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{n!},\ x\in\mathbb{R}$, $R=+\infty$ добиваме дека $e^{2x+1}=e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n}}{n!}x^{n},\ x\in\mathbb{R}$.

Радиусот на конвергенција на добиениот ред е $R=+\infty$.

б) Заради равенството $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=(1+(-x))^{-1/2}$ и развојот

$$(1+x)^{m}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}x^{n},\ |\,x\,|<1,\ R=1$$

добиваме дека

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\binom{-1/2}{n}x^{n},|\,x\,|<1.$$

Бидејќи

$$\binom{-1/2}{n}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}=(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{2^{n}n!},\quad n\in\mathbb{N}$$

добиваме дека $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{2^{n}n!}x^{n},|\,x\,|<1.$

Радиусот на конвергенција на добиениот ред е $R=1$.

в) Врз основа на

$$f^{(n)}(x)=2^{n}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2}\right)\text{ и }f^{(n)}(0)=2^{n}\sin\left((2+3n)\frac{\pi}{6}\right),\ n\in\mathbb{N},$$

добиваме дека $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n}}{n!}\sin\left((2+3n)\dfrac{\pi}{6}\right)x^{n},x\in\mathbb{R}$.

Радиусот на конвергенција на добиениот ред е $R=+\infty$.

г) Имајќи го во вид равенството $\ln(x+e)=1+\ln(1+x/e)$ и развојот

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n},\ -1<x\leq 1,\ R=1$$

добиваме дека

$$\ln(x+e) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{ne^n} x^n, | x |< e.$$

Радиусот на конвергенција на добиениот ред е $R = e$. ●

4.53. Најди ги Маклореновите редови за следниве функции:

а) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}, a > 0;$ б) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2},\ a > 0;$

в) $f(x) = e^{a^2 - x^2};$ г) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x^2}{2}\right).$

Решение. а) Користејќи го равенството

$$\frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + x^2 / a^2},$$

ако во развојот $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ | x |< 1,\ R = 1$ наместо x ставиме $-\dfrac{x^2}{a^2}$ добиваме

$$\frac{1}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2n}} x^{2n}, | x |< a.$$

Радиусот на конвергенција на добиениот ред е $R = a$.

Специјално за $a = 1$ имаме

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},\ \ | x |< 1.$$

б) Врз основа на формулата

$$(1+x)^m = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n} x^n,\ | x |< 1,\ R = 1$$

имаме $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n,\ \ | x |< 1.$

Имајќи во вид дека

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(1/2)\cdot(1/2-1)\cdots(1/2-(n-1))}{n!} =$$

$$= \frac{(1/2)\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)\cdots(-(2n-3)/2)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!}$$

каде што $(2n-3)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)$, $n \geq 2$

добиваме дека $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!} x^n,\ | x |< 1.$

Радиусот на конвергенција на последниот ред е $R = 1$.

За функцијата f важи $\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+x^2/a^2}$. Ако во развојот

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!}x^n, \ |x|<1$$

наместо x замениме $\dfrac{x^2}{a^2}$ добиваме

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^n\right)$$

$$= a+\frac{x^2}{2a}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!\,a^{2n-1}}x^{2n}, \ |x|<a.$$

Радиусот на конвергенција на добиениот ред е $R=a$.

в) Користејќи го равенството $e^{a^2-x^2} = e^{a^2}\cdot e^{-x^2}$, како и развојот

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$, $R=+\infty$ добиваме дека

$$e^{a^2-x^2} = e^{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}, x\in\mathbb{R}.$$

Радиусот на конвергенција е $R=+\infty$.

г) Врз основа на развојот $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$, можеме да запишеме

$$\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2/2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)!}x^{4n+2}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Радиусот на конвергенција е $R=+\infty$.

4.54. Најди ги Маклореновите редови за следните функции:

а) $f(x)=(x^2+5)e^{3x}$; б) $f(x)=\dfrac{(x^2+3e^x)}{e^{2x}}$; в) $f(x)=(x+2)\sqrt{1-x}$;

г) $f(x)=\ln\dfrac{2-3x}{3+2x}$; д) $f(x)=shx$; ѓ) $f(x)=chx$

и определи ги радиусите на конвергенција на така добиените редови.

Решение. а) Заради равенството $(x^2+5)e^{3x} = x^2e^{3x}+5e^{3x}, x\in\mathbb{R}$ добиваме

$$f(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}+5\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{n-2}x^n}{(n-2)!}+5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}+5+15x=$$

$$= 5 + 15x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3^{n-2}}{(n-2)!} + 5\frac{3^n}{n!}\right)x^n = 5 + 15x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3^{n-2}}{n!}(n(n-1) + 5\cdot 9)\right)x^n$$

Радиусот на конвергенција е $R = +\infty$.

б) Во овој случај за $x \in \mathbb{R}$ имаме

$$f(x) = x^2 e^{-2x} + 3e^{-x} = x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!}\right) + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{n-2}x^n}{(n-2)!} + 3 - 3x + 3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!} = 3 - 3x + \sum_{n=2}^{\infty}(3 + n(n-1)2^{n-2})\frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

Радиусот на конвергенција е $R = +\infty$.

в) Од релацијата

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!}x^n, \ |\, x \,| < 1.$$

добиваме

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}x^n, |\, x \,| < 1.$$

Според тоа

$$(x+2)\sqrt{1-x} = x - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2n-5)!!}{2^{n-1}(n-1)!}x^n + 2 - x - \frac{x^2}{4} - 2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}x^n =$$

$$= 2 - \frac{3x^2}{4} - 6\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2n-5)!!(n-1)}{2^n n!}x^n, |\, x \,| < 1.$$

Радиусот на конвергенција е $R = 1$.

г) Заради

$$\ln\frac{2-3x}{3+2x} = \ln 2 - \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{3x}{2}\right) - \ln\left(1 + \frac{2x}{3}\right),$$

од релациите

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, -1 < x \le 1, R = 1$$

и

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, -1 \le x < 1, R = 1$$

за $|\, x \,| < \dfrac{2}{3}$ може да запишеме

$$f(x)=\ln 2-\ln 3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^n n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n x^n}{3^n n}=\ln 2-\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-4)^n-9^n)}{6^n n}x^n.$$

Радиусот на конвергенција е $R=\dfrac{2}{3}$.

д) Бидејќи $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, од развојот

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}\,,\ R=+\infty$$

следува дека

$$shx=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Радиусот на конвергенцијата е $R=+\infty$.

ѓ) Од равенството $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$ и релацијата

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}\,,\ R=+\infty$$

имаме дека

$$chx=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Радиусот на конвергенција е $R=+\infty$. ●

4.55. Најди ги Маклореновите редови за следните функции:

а) $f(x)=\dfrac{2x-6}{(x-1)(x-5)}$;   б) $f(x)=\dfrac{-x^2+7x+3}{2x^3-3x^2+18x-27}$;

в) $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{2+x-x^2}$;   г) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$;   ѓ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

Решение. а) Дадената рационална функција може да се напише како збир на елементарните дропки

$$\frac{2x-6}{(x-1)(x-5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}.$$

Од релацијата $2x-6=A(x-5)+B(x-1)$, добиваме дека е $A=1$ и $B=1$. Според тоа, функцијата f може да се запише како

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-5}=-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{5}},\qquad x\neq 1,\qquad x\neq 5.$$

Врз основа на развојот

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |\,x\,|<1, R=1$$

добиваме дека

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{5^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{5^{n+1}}\right)x^n,\ |\,x\,|<1.$$

Радиусот на конвергенција е $R=1$.

б) Дадената рационална функција може да се запише како збир на елементарните дропки

$$f(x)=\frac{-x^2+7x+3}{2x^3-3x^2+18x-27}=\frac{A}{2x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+9},\ x\neq\frac{3}{2}$$

од каде што со изедначување на соодветните коефициенти добиваме $A=1$, $B=-1$ и $C=2$. Оттука е

$$f(x)=\frac{1}{2x-3}+\frac{-x+2}{x^2+9}=-\frac{1}{3\left(1-\dfrac{2x}{3}\right)}+\frac{-x+2}{9\left(1+\dfrac{x^2}{9}\right)}.$$

Врз основа на развојите

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ |\,x\,|<1, R=1\ \text{ и }\ \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ |\,x\,|<1.$$

можеме да запишеме

$$f(x)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n+\frac{-x+2}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^{2n},|\,x\,|<\frac{3}{2}.$$

Радиусот на конвергенција на добиениот ред е $R=\dfrac{3}{2}$.

в) Дадената рационална функција може да ја претставиме во облик

$$\frac{1-2x^2}{2+x-x^2}=2+\frac{-7}{3(2-x)}+\frac{-1}{3(1+x)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2,-1\}.$$

Оттука добиваме дека

$$f(x)=2-\frac{7}{6}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^n2^{n+1}-7}{3\cdot 2^{n+1}}x^n,\ |\,x\,|<1.$$

Радиусот на конвергенција е $R=1$.

г) Заради равенството

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x^2}+\frac{3}{1+x}\right)$$

добиваме

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}+3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)x^{2n}}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((-1)^{n+1}-3)x^{2n+1}}{2}, |\,x\,|<1.$$

Радиусот на конвергенција е $R=1$.

д) Заради

$$f(x)=\frac{1}{x^4+x^3+x^2+x+1}=\frac{x-1}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}=\frac{1}{1-x^5}-\frac{x}{1-x^5},$$

следува дека

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{5n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{5n+1}=1-x+x^5-x^6+x^{10}-x^{11}+\cdots, |\,x\,|<1.$$

Радиусот на конвергенција е $R=1$.

ѓ) Постапувајќи слично како во претходниот случај добиваме

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1}=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+\cdots.$$

Радиусот на конвергенција е $R=1$. ●

4.56. Најди ги Маклореновите редови за следниве функции:

а) $f(x)=\ln(x^3+x^2+x+1)$; б) $f(x)=\ln(6+11x+6x^2+x^3)$;

в) $f(x)=\ln\dfrac{3x+1}{27-27x+9x^2-x^3}$; г) $f(x)=\ln\sqrt[5]{6x^2-2x^3-x+3}$.

Решение. а) Од равенството $\ln(x^3+x^2+x+1)=\ln(1+x)+\ln(1+x^2),\ x>-1$

следува дека за $|\,x\,|<1$ имаме

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left((-1)^{n-1}+2\sin\left((n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)x^n.$$

Радиусот на конвергенција е $R=1$.

б) Од равенството

$$\ln(6+11x+6x^2+x^3)=\ln(3+x)+\ln(2+x)+\ln(1+x),\ x>-1,$$

следува дека

$$f(x) = \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} =$$

$$= \ln 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n6^n} (2^n + 3^n + 6^n), |\, x \,| < 1.$$

Радиусот на конвергенција е $R = 1$.

в) Дадената функција е дефинирана за $-\frac{1}{3} < x < 3$. Бидејќи е

$$\ln \frac{3x+1}{-x^3 + 9x^2 - 27x + 27} = \ln(1+3x) - 3\ln(3-x),$$

за $|\, x \,| < \frac{1}{3}$ имаме

$$f(x) = -3\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^{n-1}} .$$

Радиусот на конвергенција е $R = \frac{1}{3}$.

г) За $x < 3$ имаме

$$\ln \sqrt[5]{6x^2 - 2x^3 - x + 3} = \frac{1}{5}(\ln(3-x) + \ln(1+2x^2)) = \frac{1}{5}\left(\ln 3 + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ln(1+2x^2)\right).$$

Оттука следува дека

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^{2n}}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\ln 3 - \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}} + \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(-1)^{n+1}18^n - 1)x^{2n}}{3^{2n}2n}, |\, x \,| < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Радиусот на конвергенција на добиениот ред е $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ●

4.57. Претстави ги со степенски ред следниве функции:

а) $f(x) = \sin^2 x$; б) $f(x) = \sin^3 x$; в) $f(x) = \sin^4 x$; г) $f(x) = \sin^5 x$;

д) $f(x) = \cos^2 x$; ѓ) $f(x) = \cos^3 x$; е) $f(x) = \cos^4 x$; ж) $f(x) = \cos^5 x$.

Решение. а) Од равенството

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}, \; x \in \mathbb{R} ,$$

користејќи го развојот

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}\ ,\ R = +\infty$$

добиваме дека

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \cdots, x \in \mathbb{R}\ .$$

б) Имајќи го во вид равенството $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin(3x))$, а врз основа на развојот

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}\ ,\ R = +\infty$$

добиваме дека

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (1-3^{2n}) x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 - \cdots, x \in \mathbb{R}\ .$$

в) Врз основа на равенството $\sin^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4\cos(2x) + \cos(4x))$добиваме дека

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(3 - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n} x^{2n}}{(2n)!}\right) = \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2^2)^n (-4 + 2^{2n}) x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{4}{21}x^8 - \cdots, x \in \mathbb{R}\ .$$

г) Од равенството $\sin^5 x = \frac{1}{16}(10\sin x - 5\sin(3x) + \sin(5x))$ добиваме

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}\left(10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - 5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) =$$

$$= \frac{5}{16}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(2 - 3^{2n+1} + 5^{2n}) x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x^5 - \frac{5}{6}x^7 - \cdots, x \in \mathbb{R}\ .$$

д) Од равенството $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$ добиваме дека

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 - \cdots, x \in \mathbb{R}\ .$$

ѓ) Од равенството $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))$ добиваме дека

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right) = 1 + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(1+3^{2n-1})x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{61}{240}x^6 - \cdots,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

е) Користејќи дека $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}(3 + 4\cos(2x) + \cos(4x))$ добиваме

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(3 + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4x)^{2n}}{(2n)!}\right) = 1 + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n(4+4^n)x^{2n}}{8(2n)!} =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{5}{3}x^4 - \frac{34}{45}x^6 - \cdots,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

ж) Од равенството $\cos^5 x = \dfrac{1}{16}(10\cos + 5\cos(3x) + \cos(5x))$ добиваме

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}\left(10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right) =$$

$$= 1 + \frac{5}{16}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2+3^{2n}+5^{2n-1})x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{65}{24}x^4 - \cdots,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Во сите разгледани случаи радиусот на конвергенција е $R = +\infty$. ●

4.58. Развиј ги во Маклоренов ред следниве функции:

а) $f(x) = x^3\cos^2 x$; б) $f(x) = \sin^2 x\cos^2 x$; в) $f(x) = \sin^4 + \cos^4 x$;

г) $f(x) = x^2 sh^2 x$; д) $f(x) = x ch^2 x$; ѓ) $f(x) = shx \cdot ch2x$.

Решение. а) Бидејќи $x^3\cos^2 x = x^3 \cdot \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ имаме

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n+3}}{(2n)!} = x^3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-3}}{(2n-2)!}x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

б) Заради равенството $\sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{1}{8}(1 - \cos(4x))$ имаме

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{4n-3}}{(2n)!}x^{2n},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

в) Од равенството $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{4}(3 + \cos(4x))$ следува дека

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n-2}}{(2n)!} x^{2n},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

г) Од равенството

$$sh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} ch(2x),$$

врз основа на развојот

$$chx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ \ x \in \mathbb{R}$$

добиваме дека

$$x^2 sh^2 x = \frac{x^2}{2} \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n+2},\ \ x \in \mathbb{R}\ .$$

д) Заради равенството $ch^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} ch(2x)$ следува дека

$$xch^2 x = \frac{x}{2} \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}\ .$$

ѓ) Бидејќи $shx \cdot ch(2x) = \dfrac{e^{3x} - e^x + e^{-x} - e^{-3x}}{4} = \dfrac{1}{2} shx$, имаме

$$shx \cdot ch(2x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2(2n+1)!} (3^{2n+1} - 1), x \in \mathbb{R}\ .$$

Во сите случаи радиусите на конвергенција се $R = +\infty$. ●

4.59. Претстави ги со степенски ред следниве функции:

а) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; б) $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; г) $f(x) = \arcsin x$;

д) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; ѓ) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), a > 0$.

Решение. а) Бидејќи $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x} \right)'$, $\ x \neq 1$ бараниот ред може да се добие со диференцирање на Маклореновиот ред за функцијата $\dfrac{1}{1-x}$. Тогаш имаме

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1},\ \ |\, x \,| < 1.$$

б) Заради $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, а врз основа на развојот

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ \mid x \mid < 1.$$

следува дека

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} nx^{2n-1}, \quad \mid x \mid < 1.$$

в) Врз основа на развојот

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = \int_0^x f'(t)dt + f(0) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ \mid x \mid < 1$$

бидејќи $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

г) Од $f'(x) = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ користејќи го развојот

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{-1/2}{n} x^n, \mid x \mid < 1$$

добиваме дека

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}, \mid x \mid < 1.$$

Оттука за $\mid x \mid < 1$ имаме

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}t^{2n}\right)dt = x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}t^{2n}dt.$$

Бидејќи е $f(0) = \arcsin 0 = 0$, добиваме дека

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}, \mid x \mid < 1.$$

д) Бидејќи е

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad \left|x\right| < 1,$$

по интеграцијата и користењето на равенството $f(0)=0,$ имаме

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!}x^{2n+1},\ |\,x\,|<1.$$

ѓ) Бидејќи за $a>0$ и $|\,x\,|<a$ важи равенството

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln a+\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right),$$

по замената на x со $\dfrac{x}{a}$ во развојот

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!1}x^{2n+1},\ |\,x\,|<1$$

имаме

$$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})=\ln a+\frac{x}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1},\quad \left|x\right|<a.\ \bullet$$

4.60. Развиј ги во Маклоренов ред следниве функции:

а) $f(x)=x\ln(x^2+\sqrt{9+x^4});$ б) $f(x)=\ln(x^3+\sqrt{64+x^6});$

в) $f(x)=(x^2-1)\arcsin(2x^2);$ г) $f(x)=\ln(e^{1+2x}(x^2+\sqrt{1+x^4})).$

Решение. а) Ако во развојот

$$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})=\ln a+\frac{x}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1},\quad |\,x\,|<a$$

x се замени со $x^2,$ за $a=3$ се добива

$$x\ln(x+\sqrt{9+x^2})=x\ln 3+\frac{x^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{3^{2n+1}(2n+1)(2n)!!}x^{4n+3},\ |\,x\,|<\sqrt{3}$$

Радиусот на конвергенција е $R=\sqrt{3}$.

б) Во овој случај имаме

$$\ln(x^3+\sqrt{64+x^6})=3\ln 2+\frac{x^3}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{3^{7n+3}(2n+1)n!!}x^{6n+3},\ |\,x\,|<2.$$

Радиусот на конвергенција е $R=2.$

в) Кога во развојот

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\,n!(2n+1)}x^{2n+1},|\,x\,|<1.$$

наместо x ставиме $2x^2$ за $|\,2x^2\,|<1$ се добива

$$\arcsin(2x^2) = 2x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,2^{2n+1}\,x^{4n+2}}{2^n\,n!(2n+1)} = 2\left(x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,2^n\,x^{4n+2}}{n!(2n+1)}\right).$$

Тогаш имаме

$$(x^2-1)\arcsin(2x^2) = 2\left(x^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,2^n\,x^{4n+4}}{n!(2n+1)} - x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,2^n\,x^{4n+2}}{n!(2n+1)}\right) =$$

$$= 2x^4 - 2x^2 + x^4 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,2^n}{n!(2n+1)}(x^{4n+4} - x^{4n+2}),\ \ |\,x\,| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Радиусот на конвергенција е $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

г) Врз основа на равенството

$$\ln(e^{1+2x}(x^2 + \sqrt{1+x^4})) = (1+2x) + \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}),$$

имаме

$$\ln(e^{1+2x}(x^2 + \sqrt{1+x^4})) = 1 + 2x + x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{4n+2}, |\,x\,| < 1.$$

Радиусот на конвергенција е $R = 1$. ●

4.61. Развиј ги во Маклоренов ред следниве функции:

а) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

б) $f(x) = 2x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln(1+x^2)$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x$;

г) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2} + x\right)e^{-2x} - \left(\dfrac{1}{2} - x\right)e^{2x}$;

д) $f(x) = \ln(2+x)^{2+x} + \ln(2-x)^{2-x}$;

ѓ) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{2}$.

Решение. а) Бидејќи

$$f'(x) = \left(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

врз основа на развојот

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n\,n!(2n+1)} x^{2n+1}, |\,x\,| < 1.$$

имаме

$$\arcsin x + \sqrt{1-x^2} = f(0) + \int_0^x \arcsin t\,dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\,x^{2n+2}}{2^n\,n!(2n+2)(2n+1)}, |\,x\,| < 1.$$

б) Од релациите

$$f'(x) = (2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2))' = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x,$$

врз основа на развојот

$$\operatorname{arctg} x \;= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \;|\, x \,|< 1$$

следува дека

$$2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}, |\, x \,|< 1.$$

в) За првиот извод на функцијата f имаме

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}, |\, x \,|< 1.$$

Оттука добиваме дека

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}, |\, x \,|< 1.$$

г) Бидејќи $f(x) = -sh(2x) + 2xch(2x)$, од развојот

$$shx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in \mathbb{R}\,.$$

имаме

$$f'(x) = 4xsh(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+3} x^{2n+2}}{(2n+1)!}, \; x \in \mathbb{R}\,.$$

Заради $f(0) = 0$ добиваме

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + x\right)e^{-2x} - \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+3} x^{2n+3}}{(2n+3)(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}\,.$$

д) Заради равенството $f(x) = (2+x)\ln(2+x) + (2-x)\ln(2-x)$ имаме

$$f'(x) = \ln(2+x) - \ln(2-x) = \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{2^n n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^{2n-2}(2n-1)}, \; |\, x \,|< 2.$$

Сега од равенството $f(0) = 4\ln 2$ следува дека

$$f(x) = 4\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{2n-1} n(2n-1)}, |\, x \,|< 2.$$

ѓ) Од равенството

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!\,x^{2n}}{(2n)!!},$$

врз основа на развојот

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n\,n!} x^n, \ |\, x \,|< 1$$

и равенството $f(0) = 0$, следува дека е

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!\,x^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!!}, |\, x \,|< 1. \bullet$$

4.62. Развиј ги во Тајлоров ред во околина на точката x_0 следниве функции

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$, $x_0 = -3$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-4x+6)^2}$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = \dfrac{x^3-7x^2+16x-9}{x^2-6x+10}$, $x_0 = 3$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+28}}$, $x_0 = 1$;

д) $f(x) = \sin^3 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

ѓ) $f(x) = \ln(x^2+4x+6)$, $x_0 = -2$.

а потоа најди го радиусот на конвергенција на добиениот ред.

Решение. а) Ако ја извршиме следната трансформација

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+3)-2} - \frac{1}{(x+3)-1},$$

а потоа ја воведеме смената $t = x+3$, добиваме

$$\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{t}{2}} + \frac{1}{1-t} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Радиусот на конвергенција од прв ред е $R_1 = 2$, а радиусот на вториот ред е $R_2 = 1$; радиусот на нивниот збир е $R_2 = 1$. Оттаму добиваме дека

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(x+3)^n, \ |\, x+3 \,|< 1.$$

б) Во овој случај имаме

$$\frac{1}{(x^2-4x+6)^2} = \frac{1}{((x-2)^2+2)^2} = \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{(1+(x-2)^2\,/\,2)^2}.$$

Да го најдеме Маклореновиот ред за функцијата $g(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$. За таа цел, ако воочиме дека $\dfrac{1}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, од развојот

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{2n-1},\quad |x|<1$$

следува дека

$$\frac{1}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{t}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^{2n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nt^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n+1)t^{2n}, |t|<1.$$

Според тоа

$$\frac{1}{(x^2-4x+6)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(x-2)^{2n}}{2^n},\ \left|x-2\right|<\sqrt{2}.$$

в) Имаме,

$$\frac{x^3-7x^2+16x-9}{x^2-6x+10}=x-1+\frac{1}{x^2-6x+10}=2+(x-3)+\frac{1}{(x-3)^2+1}=$$

$$=2+(x-3)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-3)^{2n},\ |x-3|<1.$$

г) Ако тргнеме од равенството

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+28}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{27}}\right)^2+1}}$$

и ако ја развиеме во Маклоренов ред функцијата $\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2+1}}$, добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t^2+1}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/3}{n}t^{2n}.$$

Бидејќи за $n\geq 1$ имаме

$$\binom{-1/3}{n}=\frac{(-1/3)(-1/3-1)(-1/3-2)\cdots(-1/3-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^n}{3^n n!}1\cdot 4\cdots(3n-2)$$

добиваме дека

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t^2+1}} = 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^n n!}t^{2n},\ \ |\,t\,|<1$$

од каде што следува дека

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+28}} = \frac{1}{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-2)(x-1)^{2n}}{3^n 27^n n!}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3^{4n+1}n!}(x-1)^{2n},\qquad \left|x-1\right|<3\sqrt{3}$$

Радиусот на конвергенцијата е $R=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

д) Ако ја воведеме смената $t=x-\dfrac{\pi}{4}$, односно $x=t+\dfrac{\pi}{4}$, добиваме

$$\sin^3(t+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}\left(3\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\sin 3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}(3+3^{2n+1})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}(3+3^{2n})\right)$$

од каде што следува дека

$$\sin^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!}(3+3^{2n+1})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\pi/4)^{2n}}{(2n)!}(3+3^{2n})\right),$$

$x\in\mathbb{R}$.

ѓ) $\ln(x^2+4x+6)=\ln((x+2)^2+2)=\ln 2+\ln\left(1+\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2\right)=$

$$= \ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x+2)^{2n}}{n2^n},\left|x+2\right|<\sqrt{2}. \bullet$$

4.64. Најди ја сумата на редот $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$.

Решение. Прво да забележиме дела редот апсолутно и рамномерно конвергира на интервалот [-1,1]. Ако е $f(x)$ неговата сума за $|\,x\,|<1$, тогаш имаме

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{x},|\,x\,|<1,$$

$x\neq 0$. Ако е $g(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$, $|\,x\,|<1$, тогаш прво со почлено диференцирање на овој ред, а потоа со интеграција на неговиот збир се добива дека е $g(x)=-\ln(1-x)$.

Понатаму,

$$f(x)=\frac{1-x}{x^2}\ln(1-x)+\frac{1}{x},\quad x\neq 0,\ \ |x|<1.$$

Оттука добиваме дека $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}$. Врз основа на Абеловата теорема се добива

$$f(-1)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=2\ln 2-1\,,\ \text{и}\ \ f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=1\,,$$

Значи,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}2\ln 2-1, & x=-1;\\ 1/2, & x=0;\\ \dfrac{1-x}{x^2}\ln(1-x)+\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, |x|<1;\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

●

4.65. Најди ја сумата на редот $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}$.

Решение. Заради равенството

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

за $x\neq 0$ и $|x|<1$ имаме

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{x}{2}g_1(x)-\frac{1}{2x}g_2(x).$$

Тогаш имаме

$$g_1'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right),$$

односно

$$g_1(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1,$$

бидејќи е $g_1(0)=0$.

Понатаму

$$g_2'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right),$$

односно

$$g_2(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1.$$

Значи,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x}\ln\dfrac{1-x}{1+x}, & x\neq 0,\ \mid x\mid<1;\\[2ex] 0, & x=0.\end{cases}\qquad\bullet$$

4.66. Пресметај ги следниве суми

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2+3n+1}{n!}$.

Решение. а) Прво да забележиме дека дадениот ред конвергира по Лајбницовиот критериум. За да ја најдеме неговата сума дефинираме функција f која е збир на степенскиот ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$, конвергентен на интервалот [-1,1]. Имаме,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}\text{, т.е. } f(x)=arctgx+C,\quad \mid x\mid<1.$$

Од $f(0)=0$ следува $C=0$. Понатаму, за секој $x\in(-1,1)$ имаме

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=\operatorname{arctg}x.$$

Сега, од Абеловата теорема следува дека $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\operatorname{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}.$

б) Од развојот $e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}$ добиваме дека $e=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}$. Имаме,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+3n+1}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}+3\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}+3e+(e-1)=6e-1.\ \bullet$$

4.67. Најди ја сумата на редот $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8\cdot 9}+\ldots$.

Решение. Нека функцијата f дефинирана со степенскиот ред

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{3n(3n-1)(3n-2)}.$$

Радиусот на конвергенција на редот е $R=1$, т.е. тој апсолутно конвергира на интервалот (-1,1). Во точките $x=$ -1 и $x=1$ исто така редот конвергира, па врз основа на Абеловата теорема тој конвергира апсолутно и рамномерно на интрвалот [-1,1]. Заради равенството

$$\frac{1}{3n(3n-1)(3n-2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3n},$$

добиваме дека

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{3n-2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{3n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{3n},\ |\,x\,| < 1.$$

Нека

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{3n-2}, f_2(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{3n-1} \text{ и } f_3(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{3n},\ |\,x\,| < 1.$$

Тогаш $f(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x), |\,x\,| < 1$. Ако ставиме

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{3n-2} = \frac{x^2}{2}\cdot g_1(x),$$

тогаш е $g_1(0) = 0$. Добиениот степенски ред ред може почлено да се диференцира на интервалот $(-1,1)$. Така добиваме дека

$$g_1'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^{3n-2}}{3n-2}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty}x^{3n-3} = \frac{1}{1-x^3},\ |\,x\,| < 1.$$

Оттука следува

$$g_1(x) = \int_0^x\frac{dt}{1-t^3} = \left(-\frac{1}{3}\ln(1-t) + \frac{1}{6}\ln(1+t+t^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_o^x =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \quad |\,x\,| < 1.$$

Аналогно f_2 може да се напише како

$$f_2(x) = x\cdot g_2(x),$$

каде што $g_2(0) = 0$. Слично како за g_1, наоѓаме дека

$$g_2'(x) = \frac{x}{1-x^3},\ |\,x\,| < 1,$$

од каде што следува дека

$$g_2(x) = \int_0^x\frac{tdt}{1-t^3} = \left(-\frac{1}{3}\ln(1-t) + \frac{1}{6}\ln(1+t+t^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_o^x =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \quad |x| < 1.$$

Аналогно имаме

$$f_3(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2 dt}{1-t^3} = -\frac{1}{6}\ln(1-x^3) = -\frac{1}{6}\ln(1-x) - \frac{1}{6}\ln(1+x+x^2), \quad |x| < 1.$$

Така за $|x| < 1$ добиваме дека

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{6}\ln(1-x) + \frac{x^2-2x-2}{12}\ln(1+x+x^2) + \frac{x^2+2x}{2\sqrt{3}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12\sqrt{3}}(x^2+2x),$$

Со примена на Абеловата теорема добиваме дека бараната сума на дадениот броен ред е еднаква на

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{\ln 3}{4}. \bullet$$

4.68. Најди го интервалот на конвергенција и сумата на степенскиот ред

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n^2-1)}.$$

Решение. Непосредно се добива дека редот е апсолутно конвергентен на интервалот [-1,1]. Од равенството

$$\frac{1}{n(n^2-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1},$$

следува дека сумата на дадениот ред е еднаква на

$$S(x) = -\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

За $x \in (-1,1)$ имаме $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$, од каде што добиваме дека

$$-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - x\right) = x + \ln(1-x),\ x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} = \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1} = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\frac{1}{2x}\ln(1-x),$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{2x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ln(1-x)\right), \quad x \neq 0.$$

Со оглед дека

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2x}(x + x^2 + \ln(1-x))\right) = 0,$$

имаме:

$$S(x)=\begin{cases} \ln 4-5/4, & x=-1; \\ -\dfrac{(1-x)^2}{2x}\ln(1-x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}, & x\in(-1,1),\quad x\neq 0. \\ 0, & x=0; \\ 1/4, & x=1. \end{cases} \bullet$$

4.69. Најди ги сумите на следниве степенски редови

а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^n$.

Решение. а) Редот конвергира за $|x|<1$. Нека S е неговата сума. Ако ставиме

$$S_1(x)=\frac{S(x)}{x},\ x\neq 0$$

тогаш имаме

$$\int_0^x\frac{S(t)}{t}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2t^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}nx^n=x\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=$$

$$=\left(x\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^n\right)'=x\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{x}{(1+x)^2}.\quad |x|<1,\quad x\neq 0.$$

Со диференцирање на добиените равенства, наоѓаме дека

$$S(x)=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3},\quad |x|<1,\quad x\neq 0.$$

б) Дадениот ред конвергира за $|x|<1$. Ако S е неговата сума, тогаш

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n+1}=x^2\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}\right)=x^2\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\right)'=x^2\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x^2}{(1-x)^2},$$
$|x|<1$

бидејќи $S(0)=0$. Така добиваме $S(x)=\dfrac{2x}{(1+x)^3},\quad |x|<1.$ ●

V. Задачи од писмени испити

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 20.04.2002 год.

1. Пресметај:

$$а)\ \int \frac{x^3+x}{3x^6-6x^4+6x^2+30x^3-3}dx \quad б)\ \int x^4\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

2. Пресметај: а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x dx$.

3. Испитај конвергенција на интегралот

$$\int\limits_{0^+}^{\infty} \frac{dx}{x^p+x^q} \quad ; p,q\in\mathbb{R}.$$

4. Испитај конвергенција на редовите

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ ако 1) (a_n) е аритметичка низа

2) (a_n) е геометриска низа

б) $\sum\limits_{n=27}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$; $p,q\in\mathbb{R}$

5. Претстави го $\sqrt{5}$ како ред користејќи го развојот во маклоренов ред на функција од облик $f(x)=\frac{1}{(ax+b)^p}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 21.12.2001 год.

1. (15) Пресметај ги интегралите:

$$а)\ \int \frac{2x+3}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+x+1}}dx \quad б)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$$

2. (15) Пресметај $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2n} x dx$, каде $n\in ô$.

3. (20) Испитај конвергенција на интегралите:

$$а)\ \int\limits_0^1 \frac{1}{\ln x}dx \qquad б)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha x\cos^\beta x} \qquad в)\ \int\limits_0^1 \ln x dx$$

4. (15) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно конвергентен ред и нека $\alpha_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ и

$\beta_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

а) Пресметај $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ и $\lim_{n\to\infty} \beta_n$.

б) Докажи дека барем еден од редовите $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ е дивергентен.

5. (20) Испитај конвергенција и рамномерна конвергенција на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$$

а) на $(0, \infty)$ б) $[4, \infty]$.

6. (15) Пресметај ги сумите на редовите

а) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots$ б) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n sh(5n+5)$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)	6.02.2002 год.

1. (15) Дадени се множествата $A = \left\{ \frac{3}{3n-1} \middle| n \in N \right\}$ и $B = \left\{ 1 + \frac{2(-1)^n}{n} \middle| n \in N \right\}$.

Одреди $\sup A, \inf A, \sup B, \inf B$ (со образложение). Дали A и B имаат најголем и најмал елемент? Во случај на потврден одговор најди ги.

2. (20) а) Испитај конвергенција на низата $a_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$.

б) Одреди $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ и $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ за низата $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{2}$.

3. (20) Определи го реалниот број a (ако постои) така што функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на R, каде

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} & , \quad x \neq -1 \\ a & , \quad x = -1 \end{cases} \text{ и } g(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

4. (15) Пресметај ја левата и десната гранична вредност на функцијата

$f(x) = \frac{1}{x^2 + e^{\frac{1}{3-x}}}$ во точката $x_0 = 3$.

5. (15) Најди прв извод на функцијата $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$.

6. (15) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x+1}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 26.06.2002 год.

1. Пресметај ги интегралите:

$$\text{а) } \int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \quad \text{б) } \int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$$

2. Пресметај: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^{2n}xdx$, n е природен број.

б) $\int\limits_0^{\pi}\sin nx\sin^n xdx$, n е природен број.

3. Испитај конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\sin\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{2}{n}-\cos\sqrt{\frac{2}{n}}\right)\right|^{\alpha}$ каде α е реален број.

4. Нека (a_n) е монотоно опаѓачка низа од позитивни реални броеви и нека $b_n=2^n a_{2^n}$.

Докажи дека редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ имаат иста природа т.е. истовремено конвергираат или дивергираат.

5. Даден е фунционалниот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x(x-1)^n$.

а) Најди ја областа на конвергенција на редот.

б) Докажи дека редот рамномерно конвергира на интервалот $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 13.06.2002

1. (15) Пресметај а) $\int\frac{x-1}{x^2}e^x dx$ b) $\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

2. (15) Докажи го неравенството: $1<\int\limits_0^1\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}dx<\frac{43}{42}$.

3. (20) Испитај ја конвергенцијата на редовите:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p \ln^q n}$; $p,q\in\mathbb{R}$.

4. (15) Определи ја областа на коввергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 2^n (x+2)^n}$.

5. (15) Претстави го $\sqrt[9]{522}$ како ред чии членови се рационални броеви.

6. (20) Испитај ја конвергенцијата на интегралите:

a) $\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$; $p\in\mathbb{R}$ b) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$; $p,q\in\mathbb{R}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 19.XI-2002 год.

1. Пресметај: а) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ б) $\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

2. За секој $m\in\mathbb{N}$ важи $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cos(m+2)xdx=0$. Докажи!

3. Испитај ја конвергенцијата на интегралите а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^4 x\sqrt{\cos x}}$ б) $\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$.

4. а) Испитај ја апсолутната и обичната конвергенција на редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$, $p>0$;

   б) Испитај ја конвергенцијата на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}an\left(\frac{\sin^2 1}{1+a^2+\cos^2 1}\cdot\frac{\sin^2 2}{1+a^2+\cos^2 2}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin^2 n}{1+a^2+\cos^2 n}\right),\ a\in\mathbb{R}.$$

5. Пресметај ги сумите на редовите: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{-n}}{3n^2-4n-2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}sh\big((n+3)\big)a$, $a\in\mathbb{R}$

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 26.10.2001 год.

1. Пресметај: а) $\int\frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ б) $\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

2. а) Докажи $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-5\sin x}dx<\frac{\pi}{10}(1-e^{-5})$

б) Ако $a_n = \int\limits_0^1 x^n \sin \pi x dx, \quad n \in \mathbb{N}$ пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. Испитај конвергенција на интегралите:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha x \cos^\beta x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$

4. Испитај конвергенција на редовите:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n^2\pi}{n+1}}{\ln^2 n}$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$

5. а) Испитај рамномерна конвергенција на функционалната низа

$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

б) Испитај рамномерна конвергенција на функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ на

$\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ и на $[2,3]$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 25.10.2002 год.

1. Пресметај ги интегралите: а) $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$ б) $\int \frac{x-1}{x^2} e^x dx$

2. Пресметај: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2n} x dx$, n е природен број б) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

3. Испитај конвергенција на редовите: а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n^2\pi}{n+1}}{\ln^2 n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{a}{n}\right)$ $; a > 0$.

4. Даден е функционалниот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(x-1)^n$.

а) Најди ја областа на конвергенција на редот.

б) Докажи дека редот рамномерно конвергира на интервалот $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

5. Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ б) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) септември 2001 прв рок

1. (20) Пресметај ги неопределените интеграли:

а) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(3-x)}}$

2. (20) Нека f е диференцијабилна функција на $[a,b]$,

$f(a)=0$ и $M=\sup\left\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\right\}$. Докажи:

$$M^2 \leq (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx.$$

3. (16) Испитај конвергенција на интегралите:

а) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$

б) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^a}dx$ во зависност од параметарот a.

4. (24)Испитај конвергенција на редовите:

а) $\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ б)$\sum_{n=1}^\infty\left(1-\cos\frac{a}{x}\right)$ $;a>0$

в) $\sum_{n=2}^\infty \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$ г) $\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{(n+a)\ln n}$ $a>0$

5. (20) Испитај рамномерна конвергенција на:

а) функционалната низа $f(x)=\begin{cases} n^2x & ; \quad 0\leq x\leq \frac{1}{n} \\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right) & ; \quad \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n} \\ 0 & ; \quad \frac{2}{n}\leq x\leq 1 \end{cases}$

б) функционалниот ред $\sum_{n=1}^\infty \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ на секој интервал $[-a,a]$, $a>0$.

Писмен испит по метематчка анализа I (втор дел) 7.02.2003 год.

1. Пресметај ги интегралите а) $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$ б) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$

2. Нека $a_n = \int\limits_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$.

а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; б) Докажи дека $a_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2}{(n+1)(n+2)} a_{n+1}$

3. Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{10}}dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^5 x \cos^4 x}$.

4. Испитај ја конвергенцијата на редовите а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$, $p > 0$.

5. Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на

а) функционалната низа $f(x) = \begin{cases} n^2 x, 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right), \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0, \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$ на $[0,1]$;

б) функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^5 x^2} \sin nx$ на $\mathbb{R}$

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) јуни 2003 втор рок

1. (15) Пресметај ги интегралите: а) $\int \frac{2x+3}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+x+1}}dx$ б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

2. (15) а) Објсни зошто постои $\int\limits_{-5}^{3} x^2[x]dx$ ($[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x).

б) Пресметај $\int\limits_{-5}^{3} x^2[x]dx$.

3. (20) Испитај конвергенција на редовите: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^6}$

4. (15) Определи ја областа на коввергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 2^n (x+2)^n}$.

5. (15) Даден е редот $\sum_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x})$.

а) Дали редот конвергира по точки на $[0,1]$? Најди ја неговата сума.

б) Дали конвергенцијата е рамномерна на $[0,1]$?

в) дали сумата на овој ред е непрекината функција на $[0,1]$?

6. (20) а) Користејќи го развојот на функцијата $f(x)=(1+x)^p$ или директно определи го маклореновиот ред на функцијата $(ax+b)^p$.

б) Колку е радиусот на конвергенција на овој ред?

в) Со избирање на a,b и p пресметај го приближно $\sqrt{5}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)

1. (20) а) Пресметај $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

б) Докажи дека функцијата $f(x)=\begin{cases}2, x\in\mathbb{Q}\\ -2\ ,\ \ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ не е интеграбилна на интервалот $[0,2]$.

2. (15) Докажи го неравенството $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}<\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\pi+\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx<\frac{3}{2}$.

3. (15) а) Објсни зошто постои $\int\limits_{-5}^{3}x[x]dx$ ($[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x).

б) Пресметај $\int\limits_{-5}^{3}x[x]dx$.

4. (15) Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x^{10}}dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^7 x\cos^8 x}$.

5. (20) Испитај ја конвергенцијата на редовите а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{5}{n}\right)$.

6. (15) Испитај конвергенција и рамномерна конвергенција на функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^5x^2}\sin nx$ на $\mathbb{R}$.

Прв колоквиум по математичка анализа I (втор дел) 2002/2003

1. Пресметај ги неопределените интеграли

а) $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$ б) $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

2. а) Определи ги сумите на Дарбу за функцијата $f(x)=e^{-x}$ на интервалот $[0,1]$за

поделбата $\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right\}$.

б) Докажи дека не постои $\int\limits_0^2 D(x)dx$, каде $D(x)=\begin{cases} 1, x\in Ð \\ -1, x\in Ñ\setminus Ð \end{cases}$.

3. Докажи го неравенството $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}<\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\pi+\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx<\frac{3}{2}$.

4. Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{x^8}dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^5 x\cos^4 x}$.

5. а) Пресметај $\int\limits_{-1}^{1}|\,x\,|\,dx$

б) Дали постои реална функција $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, таква што f не е ограничена, а

$\int\limits_0^\infty f(x)dx$ да постои.

Втор колоквиум по математичка анализа I (втор дел) 2002/2003 год.

1. Даден е функционалниот ред $x-\frac{x^3}{5}+\frac{x^5}{5^2}-\frac{x^7}{5^3}+\dots$.

а) Најди го радиусот и интервалот на конвергенција

б) Испитај конвергенција на краевите од интервалот

2. Испитај апсолутна и условна конвергенција на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^6}$

3. Испитај рамномерна конвергенција на:

а) функционалната низа $f_n(x)=\frac{\operatorname{arctg}nx}{\sqrt{n+x}}$ на $[0,\infty)$.

б) функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin nx}{(1+nx^2)\sqrt{1+n^2}}$ на $\mathbb{R}$.

4. Пресметај ги сумите на редовите: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{3n^2-4n-2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} sh\Big((n+3)\Big)a$, $a \in \mathbb{R}$

5. Дадена е функционалната низа $f_n(x) = x^n$ на интервалот $[0,1]$.

а) Најди функција $f(x)$ на $[0,1]$ така што f_n конвергира по точки кон f на $[0,1]$.

б) За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди n_0 така што за $n \geq n_0$ важи $\left|f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$.

в) За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди n_0 така што за $n \geq n_0$ важи $\left|f_n\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \varepsilon$.

г) Докажи дека низата (f_n) не конвергира рамномерно кон функцијата f на $[0,1]$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел) 20.III-2003 год.

1. Пресметај ги интегралите: а) $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$ б) $\int \frac{1+x^2}{3+x^4} dx$.

2. а)Пресметај $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, каде n е природен број;

б) Нека f е непрекината функција на интервалот $[0,1]$ за која важи $0 < s \leq f(x) \leq t$ за секој $x \in [0,1]$. Докажи дека важи $st\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq s + t - \int_0^1 f(x)dx$.

3. Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int_0^1 \ln x dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x \cos^6 x} dx$.

4. Испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, каде $a_n = \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \ldots$

5. Испитај ја конвергенцијата на

а) функционалната низа $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ б) функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5 x^2} \sin nx$.

Писмен испит по математичка анализа I (2 дел)

1. (15) Пресметај: а) $\int \frac{1+x^2}{x^4+3x^3+3x^2-3x+1} dx$ б) $\int \sqrt{3+2x^2} dx$

2. (10) Докажи го неравенството: $1 < \int\limits_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}dx < \frac{43}{42}$.

3. (15) Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, ако:

а) $a_n = \frac{5^n}{2^n \operatorname{arctg}^n 10}$;   б) $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$

4. (15) Даден е бројниот ред $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$.

а) Дали редот е конвергентен?   б) Пресматај ја сумата на редот.

в) Почнувајќи од кој n важи $\left|\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} - \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)}\right| < 10^{-4}$?

5. (15) Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно конвергентен ред и нека $\alpha_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$ и

$\beta_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$.

б) Докажи дека барем еден од редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ е дивергентен.

6. (15) Даден е фунционалниот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(x-1)^n$.

а) Најди ја областа на конвергенција на редот.

б) Докажи дека редот рамномерно конвергира на интервалот $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

7. (15) Испитај ја конвергенцијата на интегралите:

а) $\int\limits_0^{\infty} e^{4x} \cos 6x dx$;   б) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx$;   .

Писмен испит по математичка анализа 1

1. Пресметај а) $\int \frac{3\sin x + 5\cos x + 4}{\cos x + 5\sin x + 7} dx$; б) $\int \frac{5x^2 + 7x + 2}{\sqrt{3x^2 + 9x + 3}} dx$.

2. Докажи дека $\frac{\ln 2}{3} \le \int\limits_2^3 \frac{\ln x}{2 + \sin x} dx \le 3$.

3. а) Определи ја областа на конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 2^n (2x+5)^n}$.

б) Испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^6}$

4. (20) а) Пресметај ја сумата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{n^2+3n+2}$

б) Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$. Ако редот конвергира,

пресметај ја неговата сума. За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $|\sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{i(i-1)}| < \varepsilon$, за

сите $n \geq n_0$ и p природен број

5. Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на функционалната низа

$$f(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right), & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{на } [0,1];$$

6. Даден е редот $\sum_{n=1}^{\infty} (nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x})$.

а) Дали редот конвергира по точки на $[0,1]$? Најди ја неговата сума.

б) Дали конвергенцијата е рамномерна на $[0,1]$?

в) дали сумата на овој ред е непрекината функција на $[0,1]$?

7. Испитај ја конвергенцијата на интегралите:

а) $\int_0^{\infty} e^{4x}\cos 6x dx$; б) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x^2}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)

1. Пресметај: а) $\int \frac{5x+3}{x+\sqrt{1-x-3x^2}} dx$ б) $\int \frac{2\sin x + 3\cos x + 1}{4\sin x + \cos x + 2} dx$

2. Нека $f(x)=\begin{cases}\ln|x|, x<0\\ \sin x,\ 0\le x\le 3\\ [x^2],\ x>3\end{cases}$.

а) Дали функцијата е интеграбилна на $[-1,4]$?

б) Пресметај $\int_1^5 f(x)\,dx$.

в) Пресметај ги сумите на Дарбу за f на $\left[\frac{1}{2},5\right]$ за поделбата $\pi=\left\{\frac{1}{2},1,2,\frac{5}{2},3,4,5\right\}$.

3. Дадена е функцијата $f(x)=\begin{cases}2, x\in\mathbb{Q}\\ -2, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

а) Најди ги сумите на Дарбу за f на $[0,1]$ за поделбата $T=\left\{\frac{i}{n}\middle| i=0,1,2,\dots,n\right\}$;

б) Докажи дека f не е интеграбилна на $[0,1]$.

4. Даден е редот $\sum_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x})$.

а) Дали редот конвергира по точки на $[0,1]$? Најди ја неговата сума.

б) Дали конвергенцијата е рамномерна на $[0,1]$?

в) Дали сумата на овој ред е непрекината функција на $[0,1]$?

5. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$. Ако редот конвергира, пресметај ја неговата сума. За $\varepsilon=10^{-3}$ најди $n_0\in\mathbb{N}$ така што $\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}\frac{1}{i(i-1)}\right|<\varepsilon$, за сите $n\ge n_0$ и p природен број.

6. Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на:

а) функционалната низа $f_n(x)=\frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$ на $[0,\infty)$.

б) функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^5x^2}\sin nx$ на $\mathbb{R}$

Писмен испит по математичка анализа I (2 дел)

1. Пресметај: а) $\int \frac{3x+5}{\left(4x^2+7x-3\right)^3}dx$; б) $\int \frac{1+x^2}{x^4+3x^3+3x^2-3x+1}dx$

2. Нека $f(x) = \begin{cases} \ln|x|, x<0 \\ \sin x,\ 0 \le x \le 3 \\ [x^2],\ x>3 \end{cases}$.

а) Дали функцијата е интеграбилна на $[-1,4]$?

б) Пресметај $\int\limits_1^5 f(x)\,dx$.

в) Пресметај ги сумите на Дарбу за f на $\left[\frac{1}{2},5\right]$ за поделбата $\pi = \left\{\frac{1}{2},1,2,\frac{5}{2},3,4,5\right\}$.

3. Докажи дека $\frac{\ln 2}{3} \le \int\limits_2^3 \frac{\ln x}{2+\sin x}dx \le 3$

4. Испитај ја конвергенцијата на редовите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^6}$

6. Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно конвергентен ред и нека $\alpha_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ и $\beta_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$.

а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$.

б) Докажи дека барем еден од редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n$ е дивергентен.

7. Даден е фунционалниот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(x-1)^n$.

а) Најди ја областа на конвергенција на редот.

б) Докажи дека редот рамномерно конвергира на интервалот $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

8. Испитај ја конвергенцијата на интегралите:

а) $\int\limits_0^{\infty} e^{4x}\cos 6x\,dx$; б) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x^2}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)

1. (15) Пресметај а) $\int \frac{3\sin x+5\cos x+4}{\cos x+5\sin x+7}dx$; б) $\int \frac{5x^2+7x+2}{\sqrt{3x^2+9x+3}}dx$.

2. (20) а) Дали постои $\int\limits_{-2}^{5} D(x)dx$, каде $D(x)=\begin{cases}15, & x\in\mathbb{Q}\\ 14, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$? Образложи го одговорот.

б) Дали постои $\int\limits_{-3}^{3} x^4\left[\frac{x}{5}\right]dx$ ($[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x).

в) Пресметај го следниов лимес, користејќи ја дефиницијата за определен интеграл

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

3. (15) Испитај ја конвергенцијата на интегралите а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^4 x\sqrt{\cos x}}$ б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\ln x}$.

4. (10) Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на функционалната

низа $f(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le \frac{1}{n}\\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right), & \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n}\\ 0, & \frac{2}{n}\le x\le 1\end{cases}$ на $[0,1]$;

5. (15) Испитај конвергенција на редовите: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{5}{n}\right)$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^6}$

6. (15) Даден е редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x})$.

а) Дали редот конвергира по точки на $[0,1]$? Најди ја неговата сума.

б) Дали конвергенцијата е рамномерна на $[0,1]$?

в) дали сумата на овој ред е непрекината функција на $[0,1]$?

7. (10) Докажи го неравенството $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}<\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\pi+\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx<\frac{5}{4}$.

2 колоквиум по математичка анализа I (2 дел)

1. (20) Бројни редови.

2. (20) Степенски редови.

3. (20) Испитај ја конвергенцијата на редовите: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

4. (20) а) Даден е бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Дали редот е конвергентен? Пресметај ја сумата на редот

б) Пресметај ја сумата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{-n}}{n(n+1)}$.

5. (20) Дадена е функционалната низа $f_n(x) = x^n$ на интервалот $[0,1]$.

а) Најди ја функцијата $f(x)$ на $[0,1]$ така што f_n конвергира по точки кон f на $[0,1]$.

б) За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди n_0 така што за $n \geq n_0$ важи $\left|f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon$.

в) За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди n_0 така што за $n \geq n_0$ важи $\left|f_n\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \varepsilon$.

г) Докажи дека низата (f_n) не конвергира рамномерно кон функцијата f на $[0,1]$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)

1. Пресметај

а) $\int \frac{3\sin x + 5\cos x + 4}{\cos x + 5\sin x + 7}\,dx$; б) $\int \frac{5x^2 + 7x + 2}{\sqrt{3x^2 + 9x + 3}}\,dx$.

2. а) Пресметај $\lim_{n\to\infty} a_n$, каде $a_n = \int_0^1 x^{10n} \sin^2(3\pi x)\,dx$.

б) Пресметај го следниов лимес, користејќи ја дефиницијата за определен интеграл

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{2}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

3. а) Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на функционалната низа

$$f(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le \dfrac{1}{n} \\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right), & \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{2}{n} \\ 0, & \dfrac{2}{n}\le x\le 1 \end{cases} \qquad \text{на } [0,1];$$

б)Определи ја областа на коввергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2 2^n (2x+5)^n}$.

4. Испитај конвергенција на редовите: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{5}{n}\right)$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^6}$

5. Даден е редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x})$.

а) Дали редот конвергира по точки на $[0,1]$? Најди ја неговата сума.

б) Дали конвергенцијата е рамномерна на $[0,1]$?

в) дали сумата на овој ред е непрекината функција на $[0,1]$?

6. Испитај ја конвергенцијата на интегралите а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^4 x\sqrt{\cos x}}$ б) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\ln x}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)

1. Пресметај а) $\int\dfrac{3\sin x+5\cos x+4}{\cos x+5\sin x+7}dx$; б) $\int\dfrac{5x^2+7x+2}{\sqrt{3x^2+9x+3}}dx$.

2. а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, каде $a_n=\int\limits_0^1 x^{10n}\sin^2(3\pi x)\,dx$.

б) Пресметај го следниов лимес, користејќи ја дефиницијата за определен интеграл

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\dots+\frac{2}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

3. а) Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на функционалната низа

$$f(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le \dfrac{1}{n} \\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right), & \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{2}{n} \\ 0, & \dfrac{2}{n}\le x\le 1 \end{cases} \qquad \text{на } [0,1];$$

4. Испитај ја конвергенцијата на редовите: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

5. а) Даден е бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Дали редот е конвергентен? Пресметај ја сумата на редот

б) Пресметај ја сумата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{-n}}{n(n+1)}$.

6. Дадена е функционалната низа $f_n(x)=x^n$ на интервалот $[0,1]$.

а) Најди ја функцијата $f(x)$ на $[0,1]$ така што f_n конвергира по точки кон f на $[0,1]$.

б) За $\varepsilon=10^{-3}$ најди n_0 така што за $n\ge n_0$ важи $\left|f_n\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$.

в) За $\varepsilon=10^{-3}$ најди n_0 така што за $n\ge n_0$ важи $\left|f_n\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)\right|<\varepsilon$.

г) Докажи дека низата (f_n) не конвергира рамномерно кон функцијата f на $[0,1]$.

Писмен испит по математичка анализа 1 (втор дел)

1. (20) Пресметај а) $\int\frac{3\sin x+5\cos x+4}{\cos x+5\sin x+7}dx$; б) $\int\frac{5x^2+7x+2}{\sqrt{3x^2+9x+3}}dx$.

2. (15) Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на функционалната низа

$$f(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\le x\le \dfrac{1}{n} \\ n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right), & \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{2}{n} \\ 0, & \dfrac{2}{n}\le x\le 1 \end{cases} \qquad \text{на } [0,1];$$

3. (20) Испитај ја конвергенцијата на редовите: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

4. (20) а) Даден е бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Дали редот е конвергентен? Пресметај ја сумата на редот

б) Пресметај ја сумата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{-n}}{n(n+1)}$.

5. (25) Дадена е функционалната низа $f_n(x) = x^n$ на интервалот $[0,1]$.

а) Најди ја функцијата $f(x)$ на $[0,1]$ така што f_n конвергира по точки кон f на $[0,1]$.

б) За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди n_0 така што за $n \geq n_0$ важи $\left| f_n\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \varepsilon$.

в) За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди n_0 така што за $n \geq n_0$ важи $\left| f_n\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right) \right| < \varepsilon$.

г) Докажи дека низата (f_n) не конвергира рамномерно кон функцијата f на $[0,1]$.

Писмен испит по математичка анализа 1

1. (15) Испитај ја рамномерната непрекинатост на функцијата $f(x) = \ln(x+2)$ на $(-2,\infty)$.

2. (20) Пресметај а) $\int \frac{dx}{\left(x^2+3x+4\right)^3}$ б) $\int \frac{3x+4}{\left(2x^2+3x+2\right)\sqrt{2x^2+x-1}}dx$

3. (15) Докажи дека $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{x+\frac{1}{2}}{e^{x^2}} dx \leq 1$

4. (10) Определи ги сумите на Дарбу за функцијата $f(x) = \sin 2x$ на интервалот $[0,5]$ за поделбата $\{0,1,2,3,5\}$.

5. (20) Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на:

а) функционалната низа $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$ на $[0,\infty)$.

б) функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^5 x^2} \sin nx$ на $\mathbb{R}$

6. (20) Испитај ја конвергенцијата на интегралите:

а) $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} 10x}{x^{10}}dx$ б) $\int\limits_0^1 \ln 10x dx$

Прв колоквиум по математичка анализа I (втро дел)

1. Пресметај а) $\int \frac{x^4+3x^2+2x+5}{x^3+x^2+x+1}dx$ б) $\int \frac{3x+4}{(2x^2+3x+2)\sqrt{2x^2+x-1}}dx$

в) $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ г) $\int \frac{1+x^2}{3+x^4}dx$

2. Докажи дека $4\sqrt{\frac{3e}{2}} \le \int\limits_1^5 \left(\sqrt{x+1}\right)e^x dx \le 12e^8$.

3. Определи ги сумите на Дарбу за функцијата $f(x)=\sin 2x$ на интервалот $[0,5]$за поделбата $\{0,1,2,3,5\}$.

4. а) Дали функцијата $f(x)=[x^2]$ е интеграбилна на $[-2,4]$? Во случај на потврден одговор пресметај $\int\limits_{-2}^4 f(x)dx$.

($[x]$ е најмалиот цел број кој не е поголем од x)

б) Пресметај $\int\limits_{-1}^1 |\, x \,|\, dx$

Втор колоквиум по математичка анализа I (втор дел)

1. а) (10) Промена на редоследот на лимеси

б) (5) Наведи пример на функционална низа кај која редоследот на лимеси не може да се смени

2. (10) Бројот π да се претстави како сума на ред на два начина

3. (10) Ред на Тејлор (без аналитички функции)

4. (5) Како гласи критериумот на Маклорен? Испитај конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$, за $s>0$.

5. (15) Даден се бројните редови $\sum\limits_{n=3}^\infty \frac{2}{3n^2-9n+6}$ и $\sum\limits_{n=3}^\infty \frac{1}{9^n n!}$. Дали редовите се конвергентни? Пресметај ги сумите на оние од нив што се конвергентни.

6. (15) Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на:

а) функционалната низа $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$ на $[0,\infty)$.

б) функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^5x^2} \sin nx$ на $\mathbb{R}$

7. (15) Нека $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(3^n x^n + \dfrac{x^{n+2}}{n+1}\right)$

а) Најди ја дефиниционата област на f.

б) Пресметај ја сумата на дадениот ред.

8. (15) Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{x^{20}} dx$ б)

$\int\limits_0^1 \ln 3x dx$

II колоквиум по математичка анализа 1

I (20) Ред на Тејлор

II (15) Промена на редоследот на лимесите (заедно со примери)

1. (15) Испитај ја конвергенцијата на интегралите а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sin^4 x\sqrt{\cos x}}$ б) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\ln x}$.

2. (15) Испитај конвергенција на редовите: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{5}{n}\right)$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^6}$

3. (20) Даден е редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x})$.

а) Дали редот конвергира по точки на $[0,1]$? Најди ја неговата сума.

б) Дали конвергенцијата е рамномерна на $[0,1]$?

в) Дали сумата на овој ред е непрекината функција на $[0,1]$?

4. (15) Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)n}$. Ако редот конвергира,

пресметај ја неговата сума. За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}\dfrac{1}{i(i-1)}\right| < \varepsilon$, за

сите $n \geq n_0$ и p природен број.

I колоквиум по математичка анализа I

1. Пресметај: а) $\int \frac{x^3 - x}{x^6 - x^5 + 4x^4 + 4x^2 - x + 1} dx$ б) $\int \frac{7x^2 + x + 10}{\sqrt{3x^2 + 7x + 3}} dx$

в) $\int \frac{5x+3}{x + \sqrt{1 - x - 3x^2}} dx$ г) $\int \frac{2\sin x + 3\cos x + 1}{4\sin x + \cos x + 2} dx$

2. Докажи дека $\frac{\ln 2}{3} \le \int\limits_2^3 \frac{\ln x}{2 + \sin x} dx \le 3$

3. Нека $f(x) = \begin{cases} \ln |x|, x < 0 \\ \sin x,\ 0 \le x \le 3 \\ [x^2],\ x > 3 \end{cases}$.

а) Дали функцијата е интеграбилна на $[-1, 4]$?

б) Пресметај $\int\limits_1^5 f(x)\, dx$.

в) Пресметај ги сумите на Дарбу за f на $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ за поделбата $\pi = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}, 3, 4, 5\right\}$.

4. Дадена е функцијата $f(x) = \begin{cases} 2, x \in \mathbb{Q} \\ -2, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

а) Најди ги сумите на Дарбу за f на $[0,1]$ за поделбата $T = \left\{ \frac{i}{n} \middle| i = 0, 1, 2, \ldots, n \right\}$;

б) Докажи дека f не е интеграбилна на $[0,1]$.

Прв колоквиум по математичка анализа 1

1. Пресметај ги интегралите

а) $\int \frac{10x^4 + x + 10}{\sqrt{3x^2 + 7x + 3}} dx$ б) $\int \frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 5}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$ в) $\int \frac{3x^2 + 5x + 7}{(x^2 + 5x + 1)^3} dx$

г) $\int \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ д) $\int \frac{5x+3}{x + \sqrt{1 - x - 3x^2}} dx$ ѓ) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{100}\, x dx$

2. Дадена е функцијата $f(x) = [x^2]$ ($[t]$ е најголемиот цел број што не е поголем од t)

а) Дали функцијата е интеграбилна на $[-2, 4]$? Во случај на потврден одговор пресметај

$\int\limits_{-2}^{3} f(x)\, dx$.

б) Пресметај ги сумите на Дарбу за поделбата $\left\{-3,-2,-\frac{2}{3},-\frac{1}{2},0,1,2\right\}$ за оваа функција.

в) Пресметај по дефиниција $\int\limits_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx$.

3. Докажи дека $4\sqrt{\frac{3e}{2}} \le \int\limits_1^5 \left(\sqrt{x+1}\right)e^x dx \le 12e^8$.

4. користејќи определен интеграл, докажи дека $\frac{e-1}{2} \le \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{i}{n}}}{n+i} \le e-1$.

Втор колоквиум по математичка анализа 1

I. (20) Критериуми за конвергенција со количник и делење

II. (20) Функционални низи и редови.

1. (15) Испитај ја конвергенцијата на интегралите:

а) $\int\limits_0^1 x^{\beta}\ln\alpha x dx$, $\alpha, b > 0$, б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x\sqrt{\cos x}}$

2. (10) Пресметај ја сумата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(n+1\right)100^{-n}$.

3. (10) Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

4. (5) Нека $a_n > 0$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$ конвергира за $\alpha=\alpha_0$, тогаш

конвергира и за секој $\alpha > \alpha_0$.

5. (10) Дадена е функцијата $f\left(x\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 3^n (3x+7)^n}$.

а) Определи ја дефиниционата област D_f на f.

б) Испитај ја рамномерната конвергенција на дадениот ред на D_f.

7. (10) Испитај ја рамномерната конвергенција на функционалната низа $f_n\left(x\right)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

на $\left(0,\infty\right)$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)

1. (15) Пресметај а) $\int \frac{3\sin x + 5\cos x + 4}{\cos x + 5\sin x + 7}dx$; б) $\int \frac{5x^2+7x+2}{\sqrt{3x^2+9x+3}}dx$.

2. (10+10) а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, каде $a_n = \int\limits_0^1 x^{10n}\sin^2(3\pi x)\,dx$.

б) Пресметај го следниов лимес, користејќи ја дефиницијата за определен интеграл

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+...+\frac{2}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

3. (15) Испитај ја конвергенцијата на интегралите а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x\sqrt{\cos x}}$ б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

4. (10+10) а) Испитај ја конвергенцијата и рамномерната конвергенција на

функционалната низа $f(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right), & \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n}\le x\le 1 \end{cases}$ на $[0,1]$;

б) Определи ја областа на коввергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 2^n(2x+5)^n}$.

5. (15) Испитај конвергенција на редовите: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{5}{n}\right)$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^6}$

6. (15) Даден е редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x})$.

а) Дали редот конвергира по точки на $[0,1]$? Најди ја неговата сума.

б) Дали конвергенцијата е рамномерна на $[0,1]$?

в) дали сумата на овој ред е непрекината функција на $[0,1]$?

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)

1. (15) Пресметај ги интегралите

а) $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$ б) (5) $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ в) (5) $\int \frac{1}{x^4+1}dx$

2. (20) а) Дали постои $\int\limits_{-2}^{5} D(x)dx$, каде $D(x)=\begin{cases}15, & x\in\mathbb{Q}\\ 14, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$? Образложи го одговорот.

б) Дали постои $\int\limits_{-3}^{3} x^4[\frac{x}{5}]dx$ ($[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x).

Во случај на потврден одговор, пресметај ги наведените интеграли.

3. (20) Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{2x}dx$ б) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$,

в) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x^{20}}dx$

4. (10) а) Докажи го неравенството $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi+\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx < \frac{5}{4}$.

б) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, каде $a_n = \int\limits_{0}^{1} x^{10n}\sin^2(3\pi x)\,dx$.

5. (15) Определи ја областа на коввергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 2^n (2x+5)^n}$.

6. (20) а) Пресметај ја сумата на ртедот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{n^2+3n+2}$

б) Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$. Ако редот конвергира, пресметај ја неговата сума. За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди $n_0 \in \mathbb{N}$ така што

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}\right| < \varepsilon$$

Писмен испит по математичка анализа I (2 дел)

1. Пресметај: а) $\int \frac{3x+5}{\left(4x^2+7x-3\right)^3}dx$; б) $\int \frac{1+x^2}{x^4+3x^3+3x^2-3x+1}dx$

в) $\int \sqrt{3+2x^2}dx$

2. Пресметај го следниов лимес, користејќи ја дефиницијата за определен интеграл

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+...+\frac{2}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

3. Докажи го неравенството: $1<\int\limits_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}dx<\frac{43}{42}$.

4. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, ако:

а) $a_n=\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-1}}$; б) $a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

5. Даден е бројниот ред $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n+2)}$.

а) Дали редот е конвергентен?

б) Пресматај ја сумата на редот.

в) Почнувајќи од кој n важи $\left|\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n+2)}-\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-2)(k+2)}\right|<10^{-4}$?

6. Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно конвергентен ред и нека $\alpha_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}$ и $\beta_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}$.

а) Пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$.

б) Докажи дека барем еден од редовите $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n$ е дивергентен.

7. Даден е фунционалниот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(x-1)^n$.

а) Најди ја областа на конвергенција на редот.

б) Докажи дека редот рамномерно конвергира на интервалот $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

8. Испитај ја конвергенцијата на интегралите:

а) $\int\limits_0^\infty e^{4x}\cos 6x dx$; б) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x^2}$.

Писмен испит по математичка анализа I (втор дел)

1. (25) Пресметај ги интегралите

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ б) $\int \frac{1}{x^4+1}dx$ в) $\int \frac{3\sin x+5\cos x+4}{\cos x+5\sin x+7}dx$.

2. (15) Дали постои $\int\limits_{-3}^{10} x^4[\frac{x}{5}]dx$ ($[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x).

Во случај на потврден одговор, пресметај ги наведените интеграли.

3. (25) Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^2 x}{2x}dx$ б) $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$,

в) $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} 3x}{x^{20}}dx$.

4. (15) Докажи го неравенството $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi+\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx < \frac{5}{4}$.

5. (10) Пресметај ја сумата на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-e)^{-n}}{n^2+3n+2}$.

6. (10) Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}$. Ако редот конвергира, пресметај ја

неговата сума. За $\varepsilon = 10^{-3}$ најди $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}\frac{1}{3^i}\right| < \varepsilon$, за сите $n \geq n_0$ и за секој

p природен број.

Писмен испит по математичка анализа 1

1. Пресметај: а) $\int \frac{1+x^2}{x^4+3x^3+3x^2-3x+1}dx$ б) $\int \sqrt{3+2x^2}dx$

2. Испитај ја рамномерната непрекинатост на функцијата $f(x)=\ln(x+2)$ на $(-2,2)$.

3. Докажи го неравенството: $1 < \int\limits_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}dx < \frac{43}{42}$.

4. Испитај ја конвергенцијата на редот $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, ако: а) $a_n = \dfrac{5^n}{2^n \operatorname{arctg}^n 10}$;

б) $a_n = \dfrac{e^n n!}{n^n}$

5. Даден е бројниот ред $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$.

а) Дали редот е конвергентен? б) Пресматај ја сумата на редот.

в) Почнувајќи од кој n важи $\left| \sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)(n+1)} - \sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{(k-1)(k+1)} \right| < 10^{-4}$?

6. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е условно конвергентен ред и нека $\alpha_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$ и $\beta_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$.

а) Пресметај $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ и $\lim_{n\to\infty} \beta_n$.

б) Докажи дека барем еден од редовите $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ е дивергентен.

7. Даден е фунционалниот ред $\sum_{n=0}^{\infty} x(x-1)^n$.

а) Најди ја областа на конвергенција на редот.

б) Докажи дека редот рамномерно конвергира на интервалот $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

8. Испитај ја конвергенцијата на интегралите: а) $\int_0^{\infty} e^{4x} \cos 6x dx$; б) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$; .

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Шекутковски, *Математичка анализа 1*, Просветно дело ад Скопје, 2008
2. Н. Шекутковски, *Редови и аналитички функции*, УКИМ, Скопје, 2002
3. Н. Ивановски, *Математичка анализа I*, Универзитет "Кирил и Методиј", Скопје 1991
4. Н. Ивановски, Н. Речковски, *Математика III*, Универзитет "Кирил и Методиј" Скопје 1984
5. И.И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач, *Справочное пособие по математическому анализу I,* издательского объединеня "Виша школа" Киев 1984
6. И.И Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач, *Справочное посебие по математическому анализу II,* издательство объединеня "Виша школа" Киев 1984
7. Б. П, Демидович, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, издательство Наука, Москва 1969
8. Г. Н. Берман, *Сборник задач по курсу математического анализа*, издательство Наука, Москва 1972
9. В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин, *Математический анализ в вопросах и задачах,* Москва Высшая школа, 1988
10. D. Adnadjevic, Z. Kadelburg. , *Matematicka analiza 1*, Naucna Knjiga, Beograd, 1989
11. Г. М. Фихтенгольц, *Курс диференциалного и интегралного исчисления*, т. I, II, III, Наука, Москва, 1969
12. Л. Д. Кудриявцев, *Курс математического анализа, т I, II*, Высшая школа, Москва 1981
13. S. Kurepa, *Matematicka analiza 1, 2, diferenciranje i integriranje*, Tehnicka Kniga, Zagreb 1977
14. Б .А. Зорич, *Математический анализ*, т. I, II, Наука, Москва, 1981
15. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Mc Graw Hill, 1964
16. M.Mrsevic, D.Dugoshija, *Zbirka reshenih zadataka iz matematicke analize 1*, Grad.Knjiga,, Beograd, 1978
17. Lj. Gajic, S. Pilipovic, *Zbirka zadataka iz Analize I*, Novi Sad, 1990

СОДРЖИНА