ЗБИРКА РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ОД МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 2

Марија Оровчанец
Мартин Шоптрајанов

Скопје, 2019

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
д-р Марија Оровчанец и д-р Мартин Шоптрајанов
Природно – математички факултет, Скопје

Рецензенти
1. Проф. д-р Живорад Томовски,
редовен професор на ПМФ, Скопје
2. Проф. д-р Ирена Стојковска,
вонреден професор на ПМФ, Скопје

Техничка обработка
д-р Марија Оровчанец и д-р Мартин Шоптрајанов

Лектура на македонски јазик:
Виолета Јовановска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

517(075.8)(076)

ОРОВЧАНЕЦ, Марија
Збирка решени задачи од математичка анализа 2 [Електронски извор] / Марија Оровчанец, Мартин Шоптрајанов. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј" - Скопје, 2020

Начин на пристап (URL): http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53
&glavno=41. - Текст во PDF формат, содржи 501 стр., илустр. - Наслов преземен од екранот. - Опис на изворот на ден 29.01.2020. -
Библиографија: стр. 500-501

ISBN 978-9989-43-438-9
1. Шоптрајанов, Мартин [автор]
а) Математичка анализа - Високошколски учебници - Вежби COBISS.MK-ID 112116746

Предговор

Оваа методичка збирка со решени задачи е наменета за студентите од втора година на Природно математичкиот факултет во Скопје, на насоката математика, но може да ја користат и студентите од другите факултети кои во математичките предмети го изучуваат обработениот материјал.

Збирката задачи се состои од четиринаесет поглавја. Во рамките на секое поглавје даден е краток преглед на теориските основи, дадени се детални решенија на внимателно одбрани задачи, како и задачи за самостојна работа, во врска со материјалот што се обработува во поглавјето. За проверка, решенијата на задачите за самостојна работа се поместени на крајот на книгата. Голем дел од решенијата на задачите се илустрирани со цртежи, што овозможува висок степен на нагледност во процесот на учење. Тоа ни дава за право да кажеме дека презентираниот материал во збирката им овозможува на студентите лесно да ги совладаат целите определени со студиската програма.

Изучувањето на која било математичка дисциплина не е можно без систематско самостојно решавање на задачи. Ќе дадеме совет како студетите да ја користат збирката. Им препорачуваме пред почетокот на секое поглавје да го совладаат теорискиотдел од соодветното поглавје, што значи треба да ги повторат поважните дефиниции и теореми во врска со обработениот материјал кои што се поместени на почеток од поглавјето. Потоа, да ги обработат решените задачи, со колку што е можно *повисок степен на самостојност, во смисла пред да го разгледаат реше-нието да се обидат сами да разработат свои идеи во врска со решението на задачата. Завршна и најважна етапа која треба да ја поминат студентите е решавањето на задачите за самостојна работа.*

На крајот, им се заблагодаруваме на сите коишто помогна во подготовката на овој ракопис, особено на рецензентите, проф. д-р Живорад Томовски и проф. д-р Ирена Стојковска. Тие го прочитаа ракописот внимателно и со корисните забелешки и сугестии дадоа значаен допринос за негово подобрување.

Скопје, јануари 2020 година *Авторите*

СОДРЖИНА

ГЛАВА 1

ГРАНИЧНИ ВРЕДНОСТИ И НЕПРЕКИНАТОСТ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Нека $A \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A'$ е точка на натрупување на множеството A и $f : A \to \mathbb{R}^m$ е зададена функција.

Дефиниција 1.1. Велиме дека векторот $b = (b_1 \cdots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ е *гранична вредност* (лимес) на функцијата f во точката a (кога x по множеството A се стреми кон a) ако за секоја околина $V \subset \mathbb{R}^m$ на точката b, постои околина $U \subset \mathbb{R}^n$ на точката a така што

$$(\forall x \in U \cap A, x \neq a) \Rightarrow (f(x) \in V) \ .$$

Користиме ознака:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b , \qquad \lim_{(x_1, \cdots, x_n) \to (a_1, \cdots, a_n)} f(x_1, \cdots, x_n) = (b_1, \cdots, b_m) \qquad \text{или}$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \vdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \cdots, x_n) = (b_1, \cdots, b_m) .$$

и ја викаме $n-$гранична вредност. Во случај кога $n = 2$, ќе ја викаме двојна граница.

Прво, ќе разгледуваме гранична вредност на реална функција со повеќе променливи.

Теорема 1.1. Нека $A \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A'$ е точка на натрупување на множество-то A, $f : A \to \mathbb{R}$ е зададена функција и $b \in \mathbb{R}$. Нека a и b се конечни точки. Следниве искази се еквивалентни:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$

2) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, (\, x(\neq a)\in A, \ \|x-a\|<\delta \Rightarrow |\, f(x)-b|<\varepsilon\,)$, (Коши)

3) $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, (\, x(\neq a)\in A, \ |x_i-a_i|<\delta, \forall i\in\{1,\cdots,n\} \ \Rightarrow |\, f(x)-b|<\varepsilon\,)$.

4) За секоја низа $\{x_k\}\subset A$, $x_k\to a$, $x_k\neq a \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=b$. (Хајне-Борел).

Ќе дефинираме граница на функција во бесконечно оддалечена точка.

Дефиниција 1.2. Велиме дека точката a е *бесконечно оддалечена ако* $\|a\|>\frac{1}{\varepsilon}, \forall\varepsilon>0.$ Множеството $T(\infty,\varepsilon)\overset{def.}{=}\left\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|>\frac{1}{\varepsilon}\right\}$ се нарекува $\varepsilon-$околина на бесконечно оддалечена точка.

Дефиниција 1.3. Нека X е неограничено подмножество од $\mathbb{R}^n$, $f:A(\subset X)\to\mathbb{R}^m$. Ако за секое $\varepsilon>0$ постои околина U на бесконечно оддалечената точка така што важи $\|f(x)-b\|<\varepsilon,$ за секое $x\in U\cap A$, тогаш велиме дека b *е гранична вредност на функцијата* f, *кога* x *се стреми кон бесконечно оддалечена точка* a и запишуваме:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

Теорема 1.2. Нека $A\subset\mathbb{R}^n$, a е бесконечно оддалечена точка, $f:A\to\mathbb{R}$ е зададена функција и $b\in\mathbb{R}$. Следниве искази се еквивалентни:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$

2) За секоја низа $\{x_k\}\subset A$, $x_k\to a \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=b$.

Теорема 1.3. Ако f има гранична вредост кога $x\to a$ по множеството A, тогаш постои (истата) гранична вредност кога $x\to a$ по множество $B\subset A$, т.е ако постои $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=b$, $B\subset A$ и $a\in B'$, тогаш постои $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)=b$.

Забелешка 1.1. Променливата x се стреми кон бројот a на произволен начин, односно за произволна низа $\{x_n\}\subset A$, $x_n\neq a$, која конвергира кон a, соодветната низа од вредности на функцијата $\{f(x_n)\}$ конвергира кон истиот број b. Во спротивно, ако постојат барем две низи што конвергираат кон бројот a, додека соодветните низи од вредностите на функцијата немаат иста граница, тогаш велиме дека функцијата f нема гранична вредност во точката a. Згодно е да ја користиме дефиницијата на гранична вредност преку низи кога треба да покажеме дека таа не постои во некоја точка. Во тој случај доволно е да се најдат две низи што конвергираат кон бараната точка, додека низите слики не конвергираат кон иста вредност или барем едната од низите слики не конвергира.

Пример 1.1. Ќе покажеме дека не постои граничната вредност на функцијата $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ во точката (0,0). Ги разгледуваме низите $\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\left\{\left(\dfrac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, и двете конвергираат кон (0,0), меѓутоа

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}}=1 \text{ и } \lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right)=-1.$$

Теорема 1.4. Нека $f,g,h:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ и нека $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$. Тогаш,

1) Граничната вредност на збирот $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ е еднаква на збирот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=b+c\,.$$

2) Граничната вредност на производот $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ е еднаква на производот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=b\cdot c.$$

3) Ако $c\neq 0$, граничната вредност на количникот $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ е еднаква на количникот од граничните вредности на функциите:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{b}{c},\quad g(x)\neq 0.$$

Теорема 1.5. Ако постои $\varepsilon>0$ така што важи $f(x)\le h(x)\le g(x)$ за секое $x\in A$, освен можеби за $x=a$, за кое важи $\|x-a\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}<\varepsilon$, тогаш

$$\lim_{x\to a} f(x)=b\le\lim_{x\to a} h(x)\le c=\lim_{x\to a} g(x)\,.$$

Истите правила важат и ако a е бесконечно оддалечена точка. Последното тврдење е познато како *сендвич теорема за граница на функција*. Како последица имаме дека ако $b=c$, тогаш имаме дека $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b.$

Дефиниција 1.4. Нека функција $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ е дефинирана во некоја околина на точката $a\in\mathbb{R}^n$. Граничната вредност, доколку постои:

$$\lim_{x_{i_1}\to a_{i_1}}\left(\lim_{x_{i_2}\to a_{i_{n=2}}}\left(\cdots\left(\lim_{x_{i_n}\to a_{i_n}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right)\cdots\right)\right)$$

каде што $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ е некоја пермутација на множеството $\{1,2,\cdots,n\}$, се вика *последователна гранична вредност на* f *во точката* a.

Теорема 1.6. Нека $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ и нека $(a,b) \in A'$ е точка на натрупување на доменот на f. Ако

а) Постои двојната граница $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y) = \alpha$

б) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists \lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x,y)\in A}} f(x,y) = \psi(y)$

тогаш постои последователната граница $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ и е еднаква на двојната.

Нека $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ е вектор вредносна функција. Тогаш, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ при што $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \cdots, m$. Да напоменеме дека барањето на граница на векторската функција се сведува на барање граници на реални функции со $n-$променливи (компонентните функции f_i). Важи следново тврдење:

Теорема 1.7. Векторот $b = (b_1 \cdots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ е гранична вредност (лимес) на функцијата $f = (f_1, \cdots, f_m)$ во точката a, ако и само ако $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f_i(x) = b_i$, $i = 1, \cdots, m$.

Непрекинатост

Нека $A \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A$ и $f: A \to \mathbb{R}$ е зададена функција.

Дефиниција 1.5. Велиме дека функцијата f е *непрекината во точката* a *по множеството* A ако е исполнето $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = f(a)$.

Функција f е непрекината на множество $X \subseteq A$ ако е непрекината во секоја негова точка.

Велиме дека функцијата f има прекин во точката a, ако не е непрекината во таа точка.

Дефиниција 1.6. Велиме дека функцијата f е непрекината во точката a по променлива x_i ако функцијата $\varphi_i(x) = f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a)$ со една променлива, е непрекината во точката a_i.

Теорема 1.8. Следниве искази се еквивалентни:

1) Функцијата f е непрекината во точката a

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (x \in A, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (x \in A, |x_i - a_i| < \delta, i \in \{1, \cdots, n\} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

4) За секоја низа $\{x_k\} \subset A$, $x_k \to a \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

Теорема 1.9. 1) Збир, производ, количник, композиција од непрекинати функции е непрекината функција.

2) Нека $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ е непрекината функција во точката $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A$ додека φ е реална функција со една променлива, која е непрекината во точката $f(a)$. Тогаш композицијата $g = \varphi \circ f$, дадена со $g(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$ е непрекината во точката a.

3) Алгебарски полиноми $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ се непрекинати функции во секоја точка од дефиниционата област.

4) Рационални функции $R(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \dfrac{P(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$ се непрекинати функции во секоја област од дефиниционата област освен во точките во кои полиномот $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ се анулира.

5) Векторска функција $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$ е непрекината ако и само ако е непрекината функцијата $f_i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

Дефиниција 1.7. Функција $f: A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ е рамномерно непрекината на некое множество $E \subseteq A$ ако важи:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (\forall x' = (x_1', x_2', \cdots, x_n'), x'' = (x_1'', x_2'', \cdots, x_n'') \in E) \ \|x' - x''\| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon .$$

ЗАДАЧИ

Задача 1.1. Пресметај ги лимесите на функциите кога $(x, y) \to (0,0)$:

1) $f(x,y) = \dfrac{5x^3 - 7y^3}{x^2 + y^2}$ 2) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$

3) $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 4) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

Решение. Во секоја од задачите 1) - 4) дефиниционата област за функцијата $f(x,y)$ е пунктираната рамнина, т.е. множеството $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1) Одиме со оценка на броителот во дадената функција:

$$\left|5x^3 - 7y^3\right| \le 5|x|^3 + 7|y|^3 < 7\left(|x|^3 + |y|^3\right) = 7\left(x^2|x| + y^2|y|\right) \le$$

$$\le 7\left(x^2\sqrt{x^2+y^2} + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right) = 7\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

откаде имаме дека:

$$|f(x,y)| \le \frac{7\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = 7\sqrt{x^2+y^2} \; .$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \dfrac{\varepsilon}{7} > 0$. Тогаш за сите $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ за кои важи $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, следува дека $\left|f(x) - 0\right| \le 7\sqrt{x^2+y^2} < 7\delta = \varepsilon.$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$

2) Одиме со оценка на броителот во дадената функција:

$$\left|x^4 + y^4\right| \le |x|^3|x| + |y|^3|y| \le |x|^3\sqrt{x^2+y^2} + |y|^3\sqrt{x^2+y^2} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\left(|x|^3 + |y|^3\right) \le \sqrt{x^2+y^2}\left(x^2\sqrt{x^2+y^2} + y^2\sqrt{x^2+y^2}\right) = \left(x^2+y^2\right)^2$$

откаде имаме дека:

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right| \le \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 .$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Тогаш за сите $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ за кои важи $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, следува дека $|f(x)-0| \le x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon.$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$

3) Одиме со оценка на броителот во дадената функција:

$$\left|xy(x^2-y^2)\right| \le |x|^3|y| + |y|^3|x| \le |x|^3\sqrt{x^2+y^2} + |y|^3\sqrt{x^2+y^2} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\left(|x|^3+|y|^3\right) \le \left(x^2+y^2\right)^2$$

откаде имаме дека:

$$|f(x,y)-0| \le \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 .$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Тогаш, за сите $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ за кои важи $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, Следува дека $|f(x)-0| \le x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon.$

Како во претходната задача, заклучуваме дека $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0.$

4) Нека $\varepsilon > 0$ е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Тогаш за сите $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ за кои важи $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ следува дека:

$$|f(x,y)-0| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon .$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$

Задача 1.2. Според дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left(x^2+2y\right)=5$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x+y\right)=0$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4-y^4}{3x^2+3y^2}=0$

Пресметај го δ, ако $\varepsilon=0,01$.

Решение. 1) Нека ε е произволен позитивен реален број. Ја разгледуваме околината

$$U_\delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0<|x-1|<\delta, 0<|y-2|<\delta, 0<\delta<1\right\}\subset\mathbb{R}^2$$

на точката $(1,2)$, за некое $\delta>0$ што дополнително ќе го определиме.

Горните неравенства ги запишуваме во еквивалентен облик:

$$1-\delta<x<1+\delta,\quad 2-\delta<y<2+\delta,\quad x\neq 1,\ y\neq 2$$

Оттука добиваме:

$$1-2\delta+\delta^2<x^2<1+2\delta+\delta^2,\quad 4-2\delta<2y<4+2\delta,\ x\neq 1,\ y\neq 2$$

Ги собираме горните неравенства:

$$5-4\delta+\delta^2<x^2+2y<5+4\delta+\delta^2\ \Leftrightarrow -4\delta+\delta^2<x^2+2y-5<4\delta+\delta^2$$

Претпоставуваме дека $0<\delta<1$, па $\delta^2\leq\delta$. Следува:

$$-5\delta<-4\delta<-4\delta+\delta^2<x^2+2y-5<4\delta+\delta^2<5\delta\quad\Leftrightarrow\left|x^2+2y-5\right|<5\delta.$$

Оттука, изборот за δ го правиме со $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{5},1\}$. Добивме дека важи следново:

$$(x,y)\in U_\delta\Rightarrow\left|x^2+2y-5\right|<\varepsilon\text{, односно } f(x,y)=x^2+2y\in(5-\varepsilon,5+\varepsilon).$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\left(x^2+2y\right)=5$.

За $\varepsilon=0,01$ имаме дека $\delta=0,002$.

2) Нека $\varepsilon>0$ е произволен позитивен реален број. Ја рагледуваме околината:

$$U_\delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<|x|<\delta, 0<|y|<\delta\right\}\subset\mathbb{R}^2$$

на точката $(0,0)$, за некое $\delta>0$. Од неравенствата:

$$-\delta<x<\delta,\quad -\delta<y<\delta,\quad x\neq 0,\ y\neq 0$$

добиваме: $-2\delta < x+y < 2\delta$ т.е $0 < |x+y| < 2\delta$. Оттука, избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Добивме дека:

$$\text{Ако } (x,y)\in U_\delta \text{ тогаш } f(x,y) = x+y \in (-\varepsilon,\varepsilon).$$

Според дефиницијата за граница на функција имаме $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)=0$. За $\varepsilon = 0{,}01$ имаме дека $\delta = 0{,}005$.

3) Ползувајќи го неравенството $x^2+y^2 \geq 2xy$, добиваме дека:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\frac{x^2y}{2xy}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{2}\right| = 0.$$

4) Да забележиме дека: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^4-y^4}{3x^2+3y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{3x^2+3y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{3} = 0.$

Ќе докажеме дека нулата е навистина гранична вредност според дефиницијата за граница на функција. Нека $\varepsilon > 0$ е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta = \sqrt{3\varepsilon} > 0$. Тогаш, за сите $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ за кои важи $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, следува дека:

$$|f(x,y)-0| = \left|\frac{x^4-y^4}{3x^2+3y^2}\right| \leq \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}{3\left(x^2+y^2\right)} = \frac{x^2-y^2}{3} < \frac{\delta^2}{3} = \varepsilon,$$

што требаше да се докаже. За $\varepsilon = 0{,}01$ имаме дека $\delta = \sqrt{0{,}03}$. ●

Задача 1.3. Пресметај ги следниве граници:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin^2 x(e^y-1)}{x^2+3y^2}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{4x^4+y^6}\right)$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x-y+1)}{x-y+1}$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Решение. 1) Да забележиме дека:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin^2 x(e^y-1)}{x^2+3y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+3y^2}\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{(e^y-1)}{y} =$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+3y^2}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin^2 x}{x^2}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(e^y-1)}{y}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+3y^2}$$

Последниот лимес постои и е еднаков на нула. Навистина, нека $\varepsilon>0$ е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta=2\sqrt{3}\varepsilon>0$. Тогаш, за сите $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ за кои важи $\sqrt{x^2+y^2}<\delta,$ следува дека:

$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+3y^2}-0\right|\le\left|\frac{x^2y}{2\sqrt{3}xy}\right|=\frac{|x|}{2\sqrt{3}}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{3}}<\frac{\delta}{2\sqrt{3}}=\varepsilon\ .$$

Значи, добивме дека $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin^2 x(e^y-1)}{x^2+3y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+3y^2}=0$.

2) Во оваа задача ќе го користиме фактот дека експоненцијалната функција ($:x\mapsto e^x$) е непрекината, па важи:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4x^4+y^6}\right)=\exp\left(-\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{4x^4+y^6}\right).$$

За да го пресметаме лимесот во заградата, ќе воведеме поларни координати:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{4x^4+y^6}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}{4\rho^4\cos^4\varphi+\rho^6\sin^6\varphi}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\rho^2(4\cos^4\varphi+\rho^2\sin^6\varphi)}\ .$$

Ги ползуваме следниве неравенствата:

$$\rho^2(4\cos^4\varphi+\rho^2\sin^6\varphi)\le\rho^2(4\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)\le\ \rho^2\max\left\{4,\rho^2\right\}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho^2\max\left\{4,\rho^2\right\}.$$

Уште повеќе, ако $\rho<2$, можеме да заклучиме дека:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{4x^4+y^6}=\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\rho^2(4\cos^4\varphi+\rho^2\sin^6\varphi)}>\lim_{\rho\to0}\frac{1}{4\rho^2}=\infty\ .$$

Конечно, добиваме:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4x^4+y^6}\right)=\exp\left(-\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{4x^4+y^6}\right)=0.$$

3) Дефиниционата област на функцијата е множеството $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y+1\neq 0\right\}$. Нека $\left\{(x_k,y_k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ е произволна низа во A која конвергира кон (0,1). Низата од вредностите на функцијата ќе биде $\left\{\dfrac{\sin(x_k-y_k+1)}{x_k-y_k+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Ако ставиме $t_k=x_k-y_k+1$, тогаш, очигледно $t_k\to 0$, па имаме $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sin(x_k-y_k+1)}{x_k-y_k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sin t_k}{t_k}=$. Од произволноста на низата $\left\{(x_k,y_k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ следува дека двојната граница е $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x-y+1)}{x-y+1}=1.$

4) Дефиниционата област на функцијата $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ е множеството:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\neq(0,0)\right\}=\mathbb{R}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}.$$

Низата $\left\{\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира кон $(0,0)$ додека соодветната низа од вредности на функцијата f ќе конвергира кон 2:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}{\sqrt{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}+1}-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{k^2}}{\sqrt{\frac{2}{k^2}+1}-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2}{k^2}\left(\sqrt{\frac{2}{k^2}+1}+1\right)}{\frac{2}{k^2}}=2\,.$$

Значи, двојната граница, ако постои, мора да биде 2.

Ќе покажеме дека $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=2$. Нека $\varepsilon>0$ е произволен позитивен реален број. Избираме $\delta=\sqrt{(\varepsilon+1)^2-1}>0$. Тогаш за сите $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}$ за кои важи оценката $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ имаме дека:

$$\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}-2\right|=\left|\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}-2\right|=\left|\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right|<\sqrt{\delta^2+1}-1=\varepsilon\,.$$

Значи, добиваме дека $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=2$. ☻

Задача 1.4. Пресметај ги следниве граници:

$$1)\ \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} \qquad 2)\ \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

$$3)\ \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \qquad 4)\ \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

Решение. 1) Границата на функцијата $f(x_1,\cdots,x_n)$ при услови $x_k\to\infty$ ($x_k\to\infty$ или $x_k\to-\infty$) и $x_i\to a_i,\ i\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{k\}$ ќе ја разгледуваме како граница на функцијата $f(x_1,\cdots,x_{k-1},\frac{1}{t},x_{k+1},\cdots,x_n)$, кога $t\to 0$ ($t\to 0^+$ или $t\to 0^-$) и $x_i\to a_i,\ i\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{k\}$. Ако повеќе координати од точката x се стремат кон бесконечност, тогаш тие координати ги заменуваме со $\frac{1}{t_1},\frac{1}{t_2}$, итн.

Со смената $x=\frac{1}{t}$, $x\to\infty, y\to 3$ станува $(t,y)\to(0,3)$, па имаме:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}}\frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{\substack{t\to 0 \\ y\to 3}}\frac{1}{t^2(\frac{1}{t}+y)}\ln(1+t)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\lim_{\substack{t\to 0 \\ y\to 3}}\frac{1}{1+ty}=1$$

Следува дека:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}}e^{\frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 3}}\frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^1=e\,.$$

2) Ползувајќи го неравенството $x^2-xy+y^2\ge xy$, (за $x\neq 0, y\neq 0$) и смената $x=\frac{1}{t_1}$, $y=\frac{1}{t_2}$, каде што условот $x\to\infty, y\to\infty$ станува $(t_1,t_2)\to(0,0)$, добиваме:

$$\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\left|\frac{x+y}{xy}\right|\le\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}=|t_1|+|t_2|\to 0\,,$$

кога $x\to\infty, y\to\infty$ ($(t_1,t_2)\to(0,0)$), од каде што следува:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0 .$$

3) Ползувајќи го неравенството $x^2+y^2\geq 2xy$, имаме (за $x\neq 0,\ y\neq 0$)

$$0\leq \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{xy}{2xy}\right| = \frac{1}{2},$$

од каде што следува

$$0\leq \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|^{x^2} \leq \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0 .$$

Добивме дека бараниот лимес е $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$.

4) Со воведување на поларна смена $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ добиваме:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho^2}{\rho^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} = \lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{\rho^2(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi)} = 0$$

бидејќи изразот во заградата во именителот е секогаш позитивен (поголем или еднаков на $\frac{1}{2}$). ●

Задача 1.5. Провери дали постојат границите:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$

Решение. 1) Функцијата $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ е дефинирана на множеството $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Ќе побараме граница на функцијата f, кога $(x,y)\to(0,0)$ по подмножества $B,C\subset A$

такви што $(0,0)\in B'\cap C'$. Нека $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=\alpha t,\ y=\beta t,\ \alpha^2+\beta^2>0\right\}$ е права што минува низ точката $(0,0)$ и $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=x^2,\ x^2+y^2\neq 0\right\}$ е параболата $y=x^2$.

Границата на функцијата f по правата B е:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in B}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t^3}{\alpha^4t^4+\beta^2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta^2}=0\,,$$

а границата на функцијата f по параболата C е:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in C}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\,.$$

Според тоа, заклучуваме дека функцијата нема граница во точката $(0,0)$.

2) За функцијата $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не постои граничната вредност. Навистина, ако ставиме $x=t,\ y=t$, ќе имаме:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}\ .$$

Меѓутоа, ако ставиме $x=t,\ y=-t$, ќе имаме:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{2t^2}=-\frac{1}{2}\ .$$

Ова е доволно да заклучиме дека не постои граничната вредност, бидејќи видовме дека таа зависи од начинот на приближување кон точката $(0,0)$, што е во спротивност од дефиницијата за гранична вредност.

3) Функцијата $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ е дефинирана на множеството $\mathbb{R}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}$. Ќе побараме граница на функцијата f, кога $(x,y)\to(0,0)$. Ги разгледуваме низите $\left\{\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и

$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Тие конвергираат кон $(0,0)$, меѓутоа, за соодветните низи од вредности на функцијата имаме дека $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}+0}=1$.

Заклучуваме дека функцијата нема граница во точката $(0,0)$.

4) Функцијата $f(x,y)=\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$ е дефинирана на множеството $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Ако се приближуваме кон точката $(0,0)$ по $y-$оската, т.е го фиксираме $x=0$ а y се стреми кон 0 тогаш добиваме:

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{-3y^2}{y^2}=-3.$$

Ако пак се приближуваме кон точката $(0,0)$ по $x-$оската ($y=0$ а x се стреми кон 0), тогаш добиваме

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

Значи, граничната вредност на функцијата во дадената точка зависи од начинот на кој и' се приближуваме, па заклучуваме дека не постои граничната вредност $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2x^2-3y^2}{x^2+y^2}$. ●

Задача 1.6. Пресметај ја границата по дадените криви:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x+y}{x-y}$ по правата $y=mx$;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy-y^2}{x+y^2}$ по правите $y=mx$ и $x=0$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\frac{x+y-3}{x^2-1}$ по правите: $y=x+1$ и $y=2$.

Решение. 1) Граничната вредност на функцијата по правата $y = mx$ ја пресметуваме со:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+mx}{x-mx} = \frac{1+m}{1-m}.$$

Бидејќи горната граница зависи од изборот на m, секоја граница е различна, што значи дека не постои двојната граница.

2) Граничната вредност на функцијата по правата $y = mx$ е:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy-y^2}{x+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{xy-y^2}{x+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2-m^2x^2}{x+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m(1-m)x}{1+m^2x} = 0.$$

Граничната вредност на функцијата по правата $x = 0$ е:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy-y^2}{x+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Бидејќи горните граници не се еднакви, не постои двојната граница.

3) Граничната вредност на функцијата по правата $y = 2$ е:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=2}} \frac{x+y-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

Граничната вредност на функцијата по правата $y = x+1$ е:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y=2}} \frac{x+y-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+x+1-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 1.$$

Горните граници не се еднакви, па не постои двојната граница. ●

Задача 1.7. Дадена е реална функција $f : A(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in A'$. Пресметај ги последователните лимеси: $\lim\limits_{x\to a_1}(\lim\limits_{y\to a_2} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to a_2}(\lim\limits_{x\to a_1} f(x,y))$. Дали постои двојната граница $\lim\limits_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x,y)$?

1) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ во точката $(0,0)$;

2) $f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ во $(0,0)$;

3) $f(x,y)=\left(x+y\right)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, во $(0,0)$; 4) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$ во $(\infty,0)$;

5) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ во $(0,0)$; 6) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$ во (∞,∞).

Решение. 1) Од дефиницијата на функцијата $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ добиваме:

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))=\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y})=\lim_{x\to 0}(1)=1.$$

Слично, имаме

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))=\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y})=\lim_{x\to 0}(-1)=-1.$$

Забележуваме дека последователните граници се различни, па двојната граница не постои.

2) Ги пресметуваме последователните граници за функцијата $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ во точката $(0,0)$:

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y})=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)=1,$$

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y})=\lim_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y}=\lim_{x\to 0}\left(y-1\right)=-1.$$

Ќе покажеме дека не постои двојната граница.

Ги разгледуваме низите $\left\{\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\left(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ во $\mathbb{R}^2$. Тие конвергираат кон точката $(0,0)$. Меѓутоа, границите на нивните слики:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{3n}=\frac{1}{3}$$

се различни. Заклучокот следува.

3) Забележуваме дека $\sin\frac{1}{x}$, $\sin\frac{1}{y}$ ги примаат сите вредности од интервалот $[-1,1]$ во произволна околина на точката 0. Следува дека последователните лимеси во точката $(0,0)$ не постојат. Од друга страна:

$$0 \le |f(x,y)| \le |x+y|\left|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \le |x|+|y|$$

па следува дека $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

4) Во овој случај последователните граници се различни:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = \lim_{y\to 0}(1) = 1.$$

5) Во овој случај, последователните гранични вредности се исти, а двојната граница не постои:

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}) = 0 \text{ и } \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}) = 0.$$

Исто како во задачата 5 (2), ги разгледуваме низите $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ во $\mathbb{R}^2$. Тие конвергираат кон $(0,0)$, додека

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5}.$$

6) Ќе ја искористиме непрекинатоста на функцијата $: x\mapsto \sin x$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sin\lim_{y\to\infty}\frac{\pi x}{2x+y}\right) = \lim_{x\to\infty}(\sin 0) = 0$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\right) = \lim_{y\to\infty}\left(\sin\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x}{2x+y}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Последователните граници се различни, па не постои двојната граница. ●

Задача 1.8. Нека $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ е произволна пермутација на множеството $\mathbb{N}_n = \{1,2,...,n\}$. Дали постои следниов лимес: $\lim\limits_{\substack{x_i \to 0 \\ i\in\{1,2,...,n\}}} \dfrac{x_1^1 + x_2^2 + ... + x_n^n}{x_{\sigma(1)}^1 + x_{\sigma(2)}^2 + ... + x_{\sigma(n)}^n}$?

Решение: Ако $\sigma = 1 = id$ тогаш лимесот постои и: $\lim\limits_{\substack{x_i \to 0 \\ i\in\{1,2,...,n\}}} \dfrac{x_1^1 + x_2^2 + ... + x_n^n}{x_{\sigma(1)}^1 + x_{\sigma(2)}^2 + ... + x_{\sigma(n)}^n} = 1$

Нека $\sigma \neq 1 = id$. Ќе разгледаме две можности:

а) Пермутацијата σ не е разместување, т.е. постои $m \in \{1,2,...,n\}$ така што $\sigma(m) = m$. Тогаш за $x_j = 0, \left(j \neq m\right)$ изразот го добива обликот:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^i} = \frac{x_1^1 + x_2^2 + ... + x_n^n}{x_{\sigma(1)}^1 + x_{\sigma(2)}^2 + ... + x_{\sigma(n)}^n} = 1$$

Но од претпоставката $\sigma \neq 1$, па постои $p \in \mathbb{N}_n$ така што $\sigma(p) \neq p$. Ако $\sigma(p) > p$ тогаш изразот за $x_j = 0, \left(j \neq \sigma(p)\right)$ го добива обликот:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^i} = \frac{x_{\sigma(p)}^{\sigma(p)}}{x_{\sigma(p)}^{p}} = x_{\sigma(p)}^{\sigma(p)-p} \to 0,\ x_{\sigma(p)} \to 0$$

од каде следува заклучокот дека лимесот не постои.

Ако пак $\sigma(p) < p$ тогаш изразот за $x_j = 0, \left(j \neq \sigma(p)\right)$ го добива обликот:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^i} = \frac{x_{\sigma(p)}^{\sigma(p)}}{x_{\sigma(p)}^{p}} = \frac{1}{x_{\sigma(p)}^{p-\sigma(p)}} \to \infty,\ x_{\sigma(p)} \to 0$$

од каде повторно следува заклучокот дека лимесот не постои.

б) Пермутацијата σ е разместување, т.е. $\sigma(i) \neq i, \forall i \in \{1,2,...,n\}$. Но тогаш $\sigma(1) > 1$ и $\sigma(n) < n$. Слично како во дискусијата под а) правиме избор $x_j = 0, \left(j \neq \sigma(1)\right)$, односно

$x_j = 0, \left(j \neq \sigma(n) \right)$ од каде добиваме две различни тенденции за изразот $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^i}{\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^i}$ (нула односно бесконечност).

Имено, за $x_j = 0, \left(j \neq \sigma(1) \right)$ изразот го добива обликот:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^i}{\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^i} = \frac{x_{\sigma(1)}^{\sigma(1)}}{x_{\sigma(1)}^1} = x_{\sigma(1)}^{\sigma(1)-1} \to 0,\ x_{\sigma(1)} \to 0$$

додека за $x_j = 0, \left(j \neq \sigma(n) \right)$ изразот го добива обликот:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^i}{\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}^i} = \frac{x_{\sigma(n)}^{\sigma(n)}}{x_{\sigma(n)}^n} = \frac{1}{x_{\sigma(n)}^{n-\sigma(n)}} \to \infty,\ x_{\sigma(n)} \to 0$$

Заклучуваме дека лимесот не постои. ☻

Задача 1.9. Дали постои следниов лимес:

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \to 0}} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{x_1^2 - x_2^2 + \ldots + (-1)^{n+1} x_n^2} ?$$

Решение. Ги воведуваме смените:

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_n = m x_1,$$

каде m е произволен параметар. Со директна замена во изразот добиваме:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{x_1^2 - x_2^2 + \ldots + (-1)^{n+1} x_n^2} = \frac{x_1^2 + m^2 x_1^2 + \ldots + m^2 x_1^2}{x_1^2 - m^2 x_1^2 + \ldots + (-1)^{n+1} m^2 x_1^2} = \frac{1 + m^2 (n-1)}{1 + \dfrac{-m^2 + (-1)^{n+1} m^2}{2}}$$

Последниов израз зависи од m, па лимесот не постои. ☻

Задача 1.10. Дадена е функција $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ така што $g(0,0)=0$ и g е непрекината во точката $(0,0)$. Дефинираме функција $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ со:

$$f(x,y)=\begin{cases} g(x,y)\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \; x=y=0 \end{cases}$$

Испитај ја непрекинатоста на f во точката $(0,0)$.

Решение: За произволно $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ така што:

$$\|(x,y)-(0,0)\|=\|(x,y\|<\delta \Rightarrow |g(x,y)-g(0,0)|=|g(x,y)|<\varepsilon$$

Од неравенството:

$$2|xy|<x^2+y^2 \Rightarrow \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|<\frac{1}{2}$$

добиваме:

$$\|(x,y)-(0,0)\|=\|(x,y\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|=\left|g(x,y)\frac{xy}{x^2+y^2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Следува дека f е непрекината во $(0,0)$. ☻

Задача 1.11. Испитај непрекинатост на функцијата $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинирана со:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Решение: Испитуваме непрекинатост во точката $(0,0)$. Воведуваме смена по правец $"m"$ со $y=mx$. Добиваме:

$$f(x,mx)=\frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}, \; x\neq 0$$

Забележуваме дека вредноста на функцијата зависи од правецот $"m"$. Заклучуваме дека функцијата е прекината во точката $(0,0)$. Непрекинатоста во точките $(x,y)\neq(0,0)$ следува од воведната теорема 1.9. ☻

Задача 1.12. Дали може функцијата $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ да се продолжи по непрекинатост во точката $(0,0)$?

Решение. Да забележиме дека $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=0$, па единствената можност за продолжување по непрекинатост во $(0,0)$ е $f(0,0)=0$. Сега добиваме:

$$0\le |f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|=\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|=\left|x\frac{x^2}{x^2+y^2}-y\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|\le |x|+|y|$$

од каде заклучуваме дека f е непрекината во $(0,0)$. ☻

Забелешка: Можевме да воведеме и поларни координати, па би добиле:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\varphi-\sin^3\varphi)}{r^2}=0$$

Задача 1.13. Нека $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ е непрекината адитивна функција. Докажи дека f е линеарен функционал.

Решение: Треба да докажеме дека f е хомогена функција. Фиксираме $x\in\mathbb{R}^n$. Од равенството:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^n,$$

најпрво заклучуваме дека $f(0)=0$. Имено ако $x=y=0$ добиваме дека $f(0)=2f(0)$ односно $f(0)=2f(0)-f(0)=0$. Ќе докажеме дека:

$$f(nx)=nf(x),\ \forall n\in\mathbb{N}$$

со принципот на математичка индукција.

Базата за индукција е тривијална, имено за $n=1$ имаме:

$$f(1x)=f(x)=1f(x)$$

Претпоставуваме дека за $n\le k$ важи:

$$f(nx) = nf(x)$$

За $n = k+1$ имаме:

$$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x)$$

Оттука заклучуваме дека:

$$f(zx) = zf(x),\ \forall z \in \mathbb{Z}.$$

Имено од адитивноста на функцијата и $f(0) = 0$ имаме:

$$0 = f(0) = f(y - y) = f(y + (-y)) = f(y) + f(-y) \Rightarrow f(-y) = -f(y), \forall y \in \mathbb{R}^n$$

од каде следува претходниот заклучок.

Нека $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Тогаш:

$$nf(rx) = f(mx) = mf(x) \Rightarrow f(rx) = rf(x)$$

Останува да го дискутираме случајот кога $t \in I$ е произволен ирационален број. Да забележиме дека постои низа од рационални броеви $r_n \in \mathbb{Q}$ таква што конвергира кон t, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = t$. Оттука $\lim\limits_{n\to\infty} r_n x = tx$ па од непрекинатоста на f добиваме:

$$f(tx) = f(\lim_{n\to\infty} r_n x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = tf(x)$$

Доказот е комплетиран. ☻

Задача 1.14. Нека $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ги задоволува следниве два услова:

(i) Ако $K \subseteq \mathbb{R}^m$ е компактно множество тогаш $f(K)$ е компактно.

(ii) Ако $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е опаѓачка низа од компактни подмножества од $\mathbb{R}^m$ тогаш:

$$f(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$$

Докажи дека f е непрекинато пресликување.

Доказ: Одбираме произволно $x \in \mathbb{R}^m$ и $\varepsilon > 0$. Нека T ни означува отворена топка со центар во $f(x)$ и радиус ε. Дефинираме низа K_n од затворени топки со центар во x и радиус $\frac{1}{n}$. Од условот (ii) добиваме дека $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n) = \{f(x)\}$. Од условот (i) заклучуваме дека множествата $P_n = \mathbb{R}^m \setminus T \cap f(K_n)$ се компактни за произволно $n \in \mathbb{N}$. Забележуваме дека низата $\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е опаѓачка, па за пресекот добиваме $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = \varnothing$. Заклучуваме дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што:

$$\mathbb{R}^m \setminus T \cap f(K_{n_0}) = \varnothing$$

(во спротивно фамилијата ќе биде центрирана, па $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing$).

Оттука добиваме дека:

$$|y - x| < \frac{1}{n_0} \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Следува дека функцијата f е непрекината во точката x. ☻

Задача 1.15. Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е реално вредносна функција со следниве особини:

(i) За секој $y_0 \in \mathbb{R}$ функцијата $x \to f(x, y_0)$ е непрекината.

(ii) За секој $x_0 \in \mathbb{R}$ функцијата $y \to f(x_0, y)$ е непрекината.

(iii) Ако $K \subseteq \mathbb{R}^2$ е компактно множество тогаш $f(K)$ е компактно.

Докажи дека функцијата f е непрекината.

Доказ: Ќе докажеме дека f е непрекината во точката $(0,0)$. За општиот случај доволно е да се сменат променливите, па да се повикаме на непрекинатоста во точката $(0,0)$. Да забележиме и дека може да претпоставиме дека $f(0,0) = 0$, со додавање на константа ако е неопходно. Да претпоставиме спротивно, т.е. нека функцијата е прекината во точката $(0,0)$. Тогаш постои $\varepsilon > 0$ и низа $(x_n, y_n) \to (0,0)$ таква што

$|f(x_n, y_n)| \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Со оглед на тоа што f е непрекината во однос на првата променлива според (i) постои $\delta > 0$ такво што ако $|x| < \delta$ тогаш $|f(x,0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ако го примениме ова на нашата низа заклучуваме дека постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што за сите $n \geq n_0$ важи $|x_n| < \delta$, односно $|f(x_n, 0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Претпоставуваме дека $y_n > 0, \forall n$. (евентуално преку премин на подниза). Дискусијата за другиот случај е аналогна.

Да забележиме дека од условот (ii) имаме дека за секое n, $f(x_n, y)$ е непрекината по втората променлива, па од теоремата за средна вредност Т2 постои $t_n,\ 0 < t_n < y_n, \forall n \geq n_0$ такво што $f(x_n, t_n) = \frac{n\varepsilon}{n+1}$. Од тоа што низата $y_n \to 0$ заклучуваме дека и низата $t_n \to 0$. Ова значи дека множеството $K = \{(x_n, t_n) \mid n \geq n_0\} \cup \{(0,0)\}$ е компактно. Оттука заклучуваме дека $f(K)$ е компактно според условот (iii). Но за множеството $f(K)$ имаме дека $f(K) = \{\frac{n\varepsilon}{n+1} \mid n \geq n_0\} \cup \{0\}$. Ова значи дека ε е точка на акумулација за множеството $f(K)$, но $\varepsilon \notin f(K)$. Последново е противречност. Заклучуваме дека f е непрекината во $(0,0)$ и готови сме. ☻

Задача 1.16. Нека $f: T_n \to T_n$ е непрекината функција, каде $T_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Претпоставуваме дека $\|f(x)\| < \|x\|, \forall x \in T_n \setminus \{0\}$. Нека x_0 е произволен ненулти вектор од T_n. Дефинираме низа (x_n) со релацијата:

$$x_n = f(x_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Докажи дека $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Доказ: Прво да забележиме дека од непрекинатоста на f и од условот на задачата следува дека $f(0) = 0$. Сега, ако постои $n_0 \in \mathbb{N}$ така што $x_{n_0} = 0$ тогаш нули ќе бидат и сите следни членови на низата, па заклучокот следува. Затоа претпоставуваме дека $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Тогаш низата $(\|x_n\|)$ е опаѓачка низа од позитивни реални броеви, па има ненегативна граница што ја означуваме со c. Претпоставуваме дека $c > 0$. Низата (x_n) е ограничена, па постои конвергентна подниза (x_{n_j}), со граница што ја означуваме со α. Тогаш $\|\alpha\| = \lim_{j\to\infty}\|x_{n_j}\| = c$. Следува дека $\|f(\alpha)\| < c$. Но од непрекинатоста на f имаме:

$$f(\alpha) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} x_{n_j+1}.$$

Сега од $\|x_{n_j+1}\| \geq c, \forall j$ добиваме контрадикција. Заклучокот следува. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Пресметај ги граничните вредности: (1-6)

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$; **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$; **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

4. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(x^2+y^2\right)^{-(x+y)}$; **5.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$; **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

Пресметај ги лимесите на функциите, кога $(x,y)\to(0,0)$: (7-12)

7. $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; **8.** $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; **9.** $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

10. $f(x,y)=\dfrac{3x^2-y^3+5}{x^2+y^2+2}$; **11.** $f(x,y)=\dfrac{e^y\sin x}{x}$; **12.** $f(x,y)=\dfrac{x^2-2y^3+1}{x^2+y^2+7}$.

Пресметај ги следниве граници: (13-20)

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 4}}\sqrt{x^2+y^2-1}$; **14.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \ln 2}} e^{x-y}$;

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{x\sin y}{x^2+1}$; **16.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{5x-y}-3}{5x-y-9}$;

17. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$; **18.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x}{x+y}$;

19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^4\sin\dfrac{1}{x^2+|y|}$; **20.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}$.

Провери дали постојат границите: (21-24)

21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$; **22.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x}{x+y}$;

23. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{\ln^2 x-\ln^2 y}{\ln^2 x+\ln^2 y}$; **24.** $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{x-y+1}$.

25. Покажи дека граничната вредност на функцијата $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2-y}$ во точката (0,0) долж правите $y=kx,(k\neq 0)$ е нула, а функцијата нема гранична вредност во таа точка.

Пресметај ги последователните лимеси $\lim\limits_{x\to a_1}(\lim\limits_{y\to a_2} f(x,y)),\ \lim\limits_{y\to a_2}(\lim\limits_{x\to a_1} f(x,y))$:

Дали постои двојната граница $\lim\limits_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x,y)$? (26.-29.)

26. $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}tg\dfrac{xy}{1+xy}$ во $(0,\infty)$;

27. $f(x,y)=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$ во $(0,0)$;

28. $f(x,y)=\log_x(x+y),\ x>0,\ x+y>0,\ x\neq 1$ во $(1,0)$;

29. $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{y}$ во (∞,∞).

Испитај во кои точки од рамнината функцијата е непрекината: (30-33)

30. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$; **31.** $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$;

32. $f(x,y)=\sin(x+y)$; **33.** $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$.

Испитај во кои точки од $\mathbb{R}^3$ функцијата е непрекината: (34-37)

34. $f(x,y,z)=\cos\dfrac{1}{xyz}$; **35.** $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$;

36. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$; **37.** $f(x,y,z)=xy\sin\dfrac{1}{z}$.

Со помош на поларни координати, определи ги границите: (38-39)

38. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$; **39.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

40. Определи ги последователните граници за функцијата $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ во точката (0,0). Дали постои двојната граница?

41. Определи ги последователните граници за функцијата $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{\left(x^2+y\right)^2}$ во точката (0,0). Дали постои двојната граница?

Определи ги последователните граници: (42-43)

42. $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y},\ (+\infty,0)$; **43.** $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y},\ (+\infty,+\infty)$.

44. Испитај ја непрекинатоста на функцијата $f(x,y)=\dfrac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ во точката (1,0).

45. Определи ги точките на прекин на функцијата $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

ГЛАВА 2

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА ФУНКЦИИ СО ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Диференцијабилност на вектор вредносна функција со една променлива:

Нека $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$, со компоненти $f_1, \cdots, f_m$,. Велиме дека f е диференцијабилна во $x \in I$ ако постои:

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Лесно се покажува дека f е диференцијабилна во $x \in I$ ако и само ако $f_i : I \to \mathbb{R}$ е диференцијабилна во $x \in I$ за секој $i \in \{1, \cdots, m\}$. Исто така, f е диференцијабилна во $x \in I$, ако и само ако, постои линеарно пресликување $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ така што

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Lh}{h} = 0.$$

Диференцијабилност на реална функција со повеќе променливи:

Како да го генерализираме концептот на диференцијабилност на функција со повеќе променливи, да речеме функција $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$? Природна идеја е да се замрзне едната променлива, да речеме y, дефинираме $g(x) := f(x, y)$ и проверуваме дали функцијата g е диференцијабилна во x. Ова не’ води до поимот за парцијални изводи. Меѓутоа, постоење на парцијални изводи не гарантира непрекинатост на функцијата, како што е случај кај функциите со една променлива.

Парцијални изводи

Нека $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Секогаш ќе претпоставуваме дека Ω е отворено и сврзано подмножество од $\mathbb{R}^n$ (домен).

Дефиниција 2.1. Нека $\Omega\subset\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ е отворено, сврзано множество, $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\Omega$ и $f:\Omega\to\mathbb{R}$ е реална функција со n променливи. Изразот $\Delta_i f = f(a+h)-f(a)$, каде што $h=(0,\cdots,h_i,\cdots 0)\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ е такво што $a+h\in\Omega$, го викаме *парцијален прираст по* $i-$*та променлива на функцијата* f *во точката* a.

Дефиниција 2.2. Граничната вредност, ако постои,

$$\lim_{h_i\to 0}\frac{f(a_1,\cdots,a_i+h_i,\cdots a_n)-f(a_1,\cdots,a_i,\cdots a_n)}{h_i}$$

ја викаме *парцијален извод по* $i-$*та променлива на функцијата* f *во точката* a.

Ознака 2.1. Означуваме $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ или $f'_{x_i}(a)$.

Извод во правец на вектор:

Дефиниција 2.3. Нека $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Ако постои,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

тогаш велиме дека граничната вредност е *извод на функцијата* f *во правец на векторот* v *во точката* x и означуваме со $\dfrac{df}{dv}(x)$ или $f'_v(x)$.

Дефиниција 2.4. **(Градиент)** Нека $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и нека постојат сите парцијални изводи во точка $x\in\Omega$. *Градиент на* f *во* x е векторот $\nabla f(x)\in\mathbb{R}^n$ зададен со:

$$gradf(x)=\nabla f(x):=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}.$$

Парцијални изводи за вектор вредносни функции со повеќе променливи

Дефиниција 2.5. Нека $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Велиме дека $i-$тиот парцијален извод за f во $x\in\Omega$ постои, ако постои за сите компоненти $f_1,\cdots,f_m$. Во тој случај пишуваме:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\end{pmatrix}.$$

Дефиниција 2.6. (Јакобиева матрица) Нека $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ и нека постојат сите парцијални изводи во $x\in\Omega$. Тогаш $(m\times n)-$матрицата

$$Df(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

се вика *Јакобиева матрица* за f во точката x.

Ако $n=m$, тогаш детерминантата на Јакобиевата матрица, $J_f(x):=\det Df(x)$, ја викаме *Јакобијана* за f во точката x.

$$Df(x)=\begin{pmatrix}(\nabla f_1(x))^T\\ \vdots\\ (\nabla f_m(x))^T\end{pmatrix}.$$

(T означува транспозиција)

Парцијални изводи на имплицитно зададени функции

Нека $F(x,y)=0$ е реална функција со една променлива дадена во имплицитен облик. Се поставува прашањето како да се одреди изводот на зависно променливата ако не можеме да ја изразиме во експлицитен облик како $y=f(x)$.

Теорема 2.1. Нека F е дефинирана на отворено множество $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ што ја содржи точката (x_0,y_0) и нека важи:

1) $F(x_0,y_0)=0$,

2) Парцијалните изводи $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}$ постојат и се непрекинати во некоја околина на точката (x_0,y_0),

3) $\dfrac{\partial F\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} \neq 0$.

Тогаш $F\left(x, y\right) = 0$ имплицитно го дефинира y како функција од x во околина на точката $\left(x_0, y_0\right)$ и

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Теорема за имплицитно зададена функција со две променливи:

Теорема 2. 2. Нека F е дефинирана на отворено множество $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ што ја содржи точката $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и нека важи:

1) $F\left(x_0, y_0, z_0\right) = 0$,

2) Парцијалните изводи $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ постојат и се непрекинати во некоја околина на точката,

3) $\dfrac{\partial F\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial z} \neq 0$.

Тогаш $F\left(x, y, z\right) = 0$ имплицитно го дефинира z како функција од x и y во околина на точката $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Парцијални изводи од повисок ред

Дефиниција 2.7. Нека $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Парцијални изводи од ред k индуктивно се дефинирани со $\dfrac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} := \dfrac{\partial}{\partial x_{j_1}}\left(\dfrac{\partial^{k-1} f(x)}{\partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}\right)$, каде што $j_1, \cdots j_k \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

Теорема 2.3. (Теорема на Шварц) Нека $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е таква што $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ постојат и се непрекинати. Тогаш, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Дефиниција 2.8. Со $C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$ го означуваме множеството од сите непрекинати функции на Ω со непрекинати парцијални изводи заклучно до ред k.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x),\ \forall f\in C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)\ \text{ за } k\geq 2\ .\ \square$$

Теорема на Ојлер

Велиме дека функцијата $(x,y)\mapsto f(x,y):\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е хомогена со со степен n, ако за секој реален фактор k важи:

$$f(kx,ky)=k^n f(x,y).$$

За хомогена диференцијабилна хомогена функција со степен n важи релацијата (теорема на Ојлер):

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=nf(x,y).$$

Диференцијабилност на функција во точка

Дефиниција 2.9. Нека $\Omega\subset\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ е отворено, сврзано множество, $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\Omega$ и $f:\Omega\to\mathbb{R}$ е реална функција со n променливи. Изразот $\Delta f = f(a+h)-f(a)$, каде што $h=(h_1,\cdots,h_i,\cdots h_n)\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ е такво што $a+h\in\Omega$, го викаме *тотално* (*потполно*) *нараснување на функцијата* f *во точката* a.

Дефиниција 2.10. (**принцип на локална линеарна апроксимација)** Велиме дека функција $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ е диференцијабилна во точката $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\Omega$ ако тоталното нараснување $\Delta f = f(a+h)-f(a)$ може да се претстави во вид:

$$\Delta f(a)=\sum_{i=1}^{n}A_i h_i+\varepsilon(h)\|h\|$$

каде што $A_1,\cdots,A_n$ се константи, $\|h\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}h_i^2}$ и $\varepsilon(h)$ е функција дефинирана на Ω, непрекината во точката 0 и $\lim\limits_{\substack{h_1\to 0\\ \vdots \\ h_n\to 0}}\varepsilon(h)=\varepsilon(0)=0$.

Теорема 2.4. Ако функцијата f е диференцијабилна во точката a, тогаш таа е и непрекината во таа точка.

Теорема 2.5. (потребен услов за диференцијабилност) Ако функцијата f е диференцијабилна во точката a, тогаш:

1) Постојат парцијалните изводи по секоја променлива во точката a

2) $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Теорема 2.6. (доволен услов за диференцијабилност на функција во точка) Ако функцијата f ги има парцијалните изводи $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ во некоја околина на точката a и тие се непрекинати во a, тогаш функцијата е диференцијабилна во таа точка.

Тотален (потполн) диференцијал: Линеарниот член во тоталниот прираст на диференцијабилната функција f во точката a се вика диференцијал (тотален диференцијал) и означуваме:

$$df(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} dx_n.$$

За функција со две независни променливи диференцијал од втор ред е:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Ако $x_1, \cdots, x_n$ се независно променливи, диференцијал од ред m на функција $\left(x_1, \cdots, x_n\right) \mapsto f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ гласи:

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m f.$$

Дефиниција 2.11. Нека функцијата $\left(x_1, \cdots, x_n\right) \mapsto f\left(x_1, \cdots, x_n\right)$ во некоја околина ги има сите парцијални изводи заклучно до $r-1$-ви ред. Ако сите парцијани изводи од $r-1$-ви ред за функцијата f се диференцијабилни во точка a, тогаш тоталниот диференцијал од r-ти ред на функцијата f во точката a го дефинираме како:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^r f.$$

$$d^k f(a) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{t_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \frac{\partial^r f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_r}} dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_r}$$

Пример 2.1. Нека f е функција со две променливи. Под претпоставка дека f во некоја околина на точката (a,b) има непрекинати парцијални изводи од втор ред, според теоремата на Шварц, за $r = 2$ имаме:

$$d^2 f(a,b) = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial x} dxdx + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} dydx + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial y} dydy =$$

$$=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(dy)^2 .$$

За $r=3$ имаме:

$$d^3 f(a,b)=\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x\partial x\partial x}dxdxdx+\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x\partial x\partial y}dxdxdy+\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x\partial y\partial x}dxdydx+\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x\partial y\partial y}dxdydy+$$

$$+\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial y\partial x\partial x}dydxdx+\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial y\partial x\partial y}dydxdy+\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial y\partial y\partial x}dydydx+\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial y\partial y\partial y}dydydy=$$

$$=\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x^3}(dx)^3+3\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x^2\partial y}(dx)^2 dy+3\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2+\frac{\partial^3 f(a,b)}{\partial y^3}(dy)^3 .$$

Определување на функција со зададен тотален диференцијал: Да го разгледаме прашањето за определување на функцијата $(x,y)\mapsto f(x,y)$ дефинирана на област D ако е зададен нејзиниот тотален диференцијал:

$$df(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy .$$

Теорема 2.7. Нека $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ се непрекинати функции на област $D\subset\mathbb{R}^2$. Тогаш изразот $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ е тотален диференцијал на некоја функција $(x,y)\mapsto f(x,y)$, ако и само ако: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Диференцирање на сложена функција

Теорема 2.8. Нека $z=f(u,v)$ е диференцијабилна функција во точката (u_0,v_0) а $u(t)$ и $v(t)$ се диференцијабилни функции во точката t_0, каде што $u_0=u(t_0)$, $v_0=v(t_0)$. Тогаш сложената функција $z(t)=f(u(t),v(t))$ има извод во точката $t=t_0$ и притоа важи:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} .$$

Теорема 2.9. Нека $z=f(u,v)$ е диференцијабилна функција во точката (u_0,v_0) и нека функциите $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ ги имаат парцијалните изводи $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ во точката (x_0,y_0), каде што $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$. Тогаш сложената функција $z(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$ ги има изводите $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ во точката (x_0,y_0) и притоа важи

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}. \tag{2.1}$$

Ако во диференцијалот $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ ги внесеме вредностите од (2.1), можеме да напишеме:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

Теорема за средна вредност. Нека $f:A\subset\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ е непрекината функција и диференцијабилна во околина $U(a)$ на точката $a=(a_1,\cdots,a_n)\in A$. Тогаш, за секое $x=(x_1,\cdots,x_n)\in U(a)$ постои $\theta\in(0,1)$ така што:

$$f(x_1,\cdots,x_n)-f(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(a_1+\theta(x_1-a_1),\cdots,a_n+\theta(x_n-a_n)\big).$$

ЗАДАЧИ

Задача 2.1. Испитај дали функцијата $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинирана со:

а) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ б) $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

има парцијални изводи во сите точки од својата дефинициона област.

Решение: а) Според правилата за формално определување на изводи, добиваме

$$\text{и } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ за } (x,y)\neq(0,0).$$

Во точката (0,0) парцијалните изводи ќе ги определиме по дефиниција;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2}-0}{\Delta x}=\lim_{t\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \text{ и}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\Delta y^2}-0}{\Delta y}=\lim_{t\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}.$$

Во двата случаи последната гранична вредност може да биде +1 или -1, во зависност од тоа дали $\Delta x\to 0^+\left(\Delta y\to 0^+\right)$ или $\Delta x\to 0^-\left(\Delta y\to 0^-\right)$. Значи, парцијалните изводи $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ во точката (0,0) не постојат.

б) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

Задача 2.2. Докажи дека функцијата:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

има прекин во точката $(0,0)$, но парцијалните изводи во таа точка постојат.

Решение: За да покажеме дека функцијата е прекината во точката $(0,0)$ ја разгледуваме низата $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}\right)\right\}$. Оваа низа конвергира кон $(0,0)$, додека:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n^3}}{\left(\frac{1}{n}\right)^6+\left(\frac{1}{n^3}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{2}{n^6}}=\frac{1}{2}\neq 0=f\left(0,0\right).$$

Парцијалните изводи во точката $(0,0)$ ги пресметуваме по дефиниција:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$ ☻

Задача 2.3. Докажи дека функцијата $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ дефинирана со:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

во околина на точката $(0,0)$ ги има парцијалните изводи $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, кои имаат прекин во $(0,0)$ и се неограничени во која било нејзина околина, но сепак е диференцијабилна во точката $(0,0)$.

Решение: Ако $x^2+y^2\neq 0$, тогаш:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=2x\,sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=2y\,sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Ако $x^2+y^2=0$ тогаш парцијалните изводи ќе ги најдеме по дефиниција:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\,sin\frac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\,sin\frac{1}{\Delta x^2}=0,$$

(да напоменеме дека во последниот лимес користиме ограниченост на синусната функција)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

Значи,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x\, sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2} cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\, sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2y}{x^2+y^2} cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

За да покажеме дека парцијалните изводи имааат прекин во $(0,0)$, ја разгледуваме низата $\left\{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)\right\}$. Оваа низа конвергира кон $(0,0)$, додека:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}} sin\, 2n\pi - 2\sqrt{n\pi}\, cos\, 2n\pi\right) = -\infty .$$

Значи, функцијата $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ има прекин во $(0,0)$ и е неограничена во која било околина на $(0,0)$.

На ист начин, истото се покажува и за парцијалниот извод по y.

Сега, ќе покажеме дека, и покрај тоа, функцијата е диференцијабилна во точката $(0,0)$.

Ќе покажеме дека тоталното нараснување

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)$$

може да се претстави како

$$\Delta f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\cdot \rho$$

каде што $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$.

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right) sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot \Delta y + \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\, sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\ .$$

$$\varepsilon\left(\Delta x, \Delta y\right) = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\, sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

Го пресметуваме лимесот:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\, sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2} = 0$$

откаде заклучуваме дека функцијата е диференцијабилна во $(0,0)$. ☻

Забелешка: Диференцијабилноста на функцијата f во точката $(0,0)$ може да ја заклучиш и од задачата 2.10.

Задача 2.4. Испитај дали функцијата

$$\left(x,y\right)\mapsto f(x,y)=\sqrt[n]{x^n+y^n}\ ,$$

каде што n е непарен природен број е диференцијабилна во точката (0,0).

Решение: Ако функција $\left(x,y\right)\mapsto f(x,y)$ е диференцијабилна во точка $\left(x_0,y_0\right)$ тогаш, нејзиното тотално нараснување

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta \mathrm{y}) - f(x_0,y_0)$$

може да се претстави како

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\Delta \mathrm{x} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \varepsilon(x_0,y_0)\cdot\rho$$

каде што $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ и $\varepsilon(x_0,y_0)\to 0$ кога $\rho\to 0$.

Од $f(x,0)=x,\ f(0,y)=\mathrm{y}$ добиваме дека $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$, па имаме

$$\Delta f(0{,}0)=\sqrt[n]{\Delta x^n+\Delta y^n}=\Delta x+\Delta y+\varepsilon(x_0,y_0)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \tag{2.2}$$

Ако $n=1$, тогаш од (2.2), $\Delta f(0{,}0)=\Delta x+\Delta y=\Delta x+\Delta y+\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ па добиваме $\varepsilon=0$. Значи, за $n=1$ функцијата е диференцијабилна во точката (0,0).

Нека $n>1$ и $\Delta x=\Delta y>0$. Од (2.2) добиваме

$$\sqrt[n]{2\Delta x^n}=2\Delta x+\varepsilon\cdot\sqrt{2\Delta x^2}=\Delta x\left(2+\varepsilon\cdot\sqrt{2}\right)$$

од каде што следува дека

$$\varepsilon=\left(\frac{\sqrt[n]{2}\cdot\Delta x}{\Delta x}-2\right)\Big/\sqrt{2}=\frac{\sqrt[n]{2}-2}{\sqrt{2}}$$

односно

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon\neq 0\,.$$

Значи, ако $n>1$ е непарен природен број, тогаш функцијата не е диференцијабилна во точката $(0,0)$.

Да забележиме дека за $n=2m$ парцијалните изводи во точката $(0,0)$ не постојат:

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{\sqrt[2m]{h^{2m}+0^{2m}}-\sqrt[2m]{0^{2m}+0^{2m}}}{h}=\frac{|h|}{h}=sgn\, h$$

Ова значи дека функцијата за парни вредности на $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ не е диференцијабилна. ☻

Задача 2.5. Пресметај ги парцијалните изводи $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ ако:

$$(x,y)\mapsto f(x,y)=(xy)^{1/3}$$

Дали f е диференцијабилна во точката $(0,0)$?

Решение: Одиме со пресметка на парцијалниот извод по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0\,.$$

На ист начин се покажува дека $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Функцијата f е диференцијабилна во точката $(0,0)$ ако тоталното нараснување може да се претстави во облик:

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x\cdot\Delta y)^{1/3}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot\Delta x+\frac{(\Delta x\cdot\Delta y)^{1/3}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot\Delta x+\varepsilon\rho$$

каде што

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\quad\text{и}\quad\varepsilon(\Delta x\cdot\Delta y)=\frac{(\Delta x\cdot\Delta y)^{1/3}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\to 0\quad\text{кога}\quad\rho\to 0.$$

Ќе покажеме дека:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x\cdot\Delta y)^{1/3}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq 0\,,$$

што значи дека функцијата не е диференцијабилна во $(0,0)$.

Да ја разгледаме низата $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$. Оваа низа конвергира кон $(0,0)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{\sqrt{2}}=\infty\,.$$ ☻

Задача 2.6. Дали функцијата $f\left(x,y\right)=\left|x^2-y^2\right|$ е диференцијабилна во точката $(0,0)$?

Решение: Функција која е дефинирана во околина на точката (a,b) е диференцијабилна во таа точка ако нејзиното тотално нараснување може да се претстави како:

$$\Delta f(a,b)=f(x,y)-f\left(a,b\right)=A_1\left(x-a\right)+A_2\left(y-b\right)+\varepsilon\left(x-a,y-b\right)\sqrt{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2}$$

каде што A_1, A_2 се константи и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\varepsilon\left(x-a,y-b\right)=0$, односно, во нашиот случај:

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f\left(0,0\right)=\left|\Delta x^2-\Delta y^2\right|=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)\cdot\Delta y+\frac{\left(\Delta x\cdot\Delta y\right)^{1/3}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)\cdot\Delta y+\varepsilon\rho$$

каде што:

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\quad\text{и}\quad\varepsilon\left(\Delta x\cdot\Delta y\right)=\frac{\left(\Delta x\cdot\Delta y\right)^{1/3}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\to 0\quad\text{кога}\quad\rho\to 0.$$

Ќе покажеме дека

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\left(\Delta x\cdot\Delta y\right)^{1/3}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq 0\,,$$

што значи дека функцијата не е диференцијабилна во $(0,0)$.

Да ја разгледаме низата $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$. Оваа низа конвергира кон $(0,0)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{\sqrt{2}}=\infty\,. \quad ☻$$

Задача 2.7. Испитај диференцијабилност на функцијата $(x,y)\mapsto f(x,y)=|xy|^k$, $k>0$ во точката $(0,0)$?

Решение: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$.

За да испитаме дали функцијата е диференцијабилна во точката $(0,0)$ да го претставиме нараснувањето во облик:

$$\Delta f(0,0)=f(x,y)-f(0,0)=|xy|^k=\frac{|xy|^k}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y+\frac{|xy|^k}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y+\varepsilon\rho\,.$$

Функцијата е диференцијабилна во $(0,0)$ ако важи:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|xy|^k}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\,.$$

Ако ставиме $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ имаме

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|xy|^k}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{2k}|\sin\theta\cos\theta|^k}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho^{2k-1}|\sin\theta\cos\theta|^k=0$$

а тоа е можно ако и само ако $2k-1>0$, односно $k>\frac{1}{2}$. ☻

Задача 2.8. Докажи дека функцијата $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ дефинирана со $f(x)=\|x\|$ е диференцијабилна секаде освен во точката $x=0$.

Решение: Ако $x\in\mathbb{R}^m, x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, тогаш $f(x)=\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}$. Според правилата за формално определување на изводи, добиваме:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}}\,,\ i=1,2,\cdots,m \text{ за } x\neq 0\,.$$

Во точката (0,...,0) парцијалните изводи ќе ги определиме по дефиниција:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,0)=\lim_{t_i\to 0}\frac{f(0,\cdots,t_i,\cdots,0)-f(0,\cdots,0,\cdots,0)}{t_i}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t_i^{\,2}}-0}{t_i}=\lim_{t\to 0}\frac{|t_i|}{t_i}=\pm 1$$

Значи, функцијата нема парцијални изводи во точката $x=0$, па следува дека не е диференцијабилна во таа точка. ☻

Задача 2.9. Може ли функцијата $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\dfrac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$, да се продолжи по диференцијабилност во точката $(0,0,0)$? Образложи!

Решение: Прво да забележиме дека:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}=0\,. \tag{2.3}$$

Ќе го докажеме ова на два начина:

Прв начин: Од неравенството меѓу квадратната и геометриската средина:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}\geq\sqrt[3]{xyz}\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\geq\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3\geq x^2y^2z^2.$$

Од последново неравенство добиваме:

$$0\leq\frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}\leq\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{27}\,.$$

Ако побараме лимес од двете страни според сендвич-принципот го добиваме (2.3).

Втор начин: Ќе воведеме смена со сферни координати:

$$x=r\cos\varphi\sin\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\theta\,.$$

Функцијата го добива обликот:

$$f(r,\theta,\varphi)=\frac{r^6\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\theta\cos^2\theta}{r^2}=r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^4\theta\cos^2\theta\,;$$

Уште да забележиме дека $(x,y,z)\to(0,0,0)\Leftrightarrow r\to 0$.

Од непрекинатоста на парцијалните изводи во точките $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ заклучуваме дека функцијата f е диференцијабилна во тие точки. Останува да ја испитаме диференцијабилноста во $(0,0,0)$:

Прво ги пресметуваме парцијалните изводи во $(0,0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0,0)-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0\,.$$

Слично ги пресметуваме и останатите два:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=0\,.$$

Диференцијабилноста во точката $(0,0,0)$ ја испитуваме според принципот на локална линеарна апроксимација на нараснувањето Δf . Улогата на линеарно пресликување е доделена на диференцијалот df .

$$\Delta f(0,0,0)=df+\varepsilon\rho=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)h_2+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)h_3+\varepsilon\rho=\varepsilon\rho\,.$$

Оттука следува дека $\varepsilon=\dfrac{\Delta f(0,0,0)}{\rho}=\dfrac{h_1^2h_2^2h_3^2}{\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Сега условот за диференцијабилност го добива обликот:

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)}\varepsilon(h_1,h_2,h_3)=0 \tag{2.4}$$

Слично на почетната дискусија заклучуваме дека условот (2.4) е исполнет. Заклучуваме дека функцијата може да се продолжи по диференцијабилност во точката $(0,0,0)$. ☻

Задача 2.10. Нека за функцијата $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е исполнет условот:

$$|f(x,y)|\leq\left(|x|+|y|\right)^2,\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Испитај ја диференцијабилноста на f во $(0,0)$.

Решение: Прво да забележиме дека $f(0,0)=0$. Имено од условот:

$$0\leq|f(0,0)|\leq\left(|0|+|0|\right)^2$$

следува заклучокот. Слично за парцијалните изводи добиваме:

$$\left|f(h,0)-f(0,0)\right|=\left|f(h,0)\right|\leq\left(|h|+|0|\right)^2 \Rightarrow 0\leq\left|\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right|\leq|h|$$

односно,

$$\left|f(0,h)-f(0,0)\right|=\left|f(0,h)\right|\leq\left(|0|+|h|\right)^2 \Rightarrow 0\leq\left|\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\right|\leq|h|.$$

Оттука имаме дека $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Останува да го провериме ЛЛА принципот:

$$\Delta f = f(h_1,h_2)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2+\varepsilon\rho=0h_1+0h_2+\varepsilon\rho=\varepsilon\rho$$

Следува дека:

$$|\varepsilon|=\left|\frac{\Delta f}{\rho}\right|=\left|\frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|\leq\frac{\left(|h_1|+|h_2|\right)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\frac{2h_1^2+2h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=2\sqrt{h_1^2+h_2^2}\to 0$$

Значи функцијата е диференцијабилна во точката $(0,0)$. ☻

Забелешка: Можевме да ја ползуваме теоремата според која произволни две норми на $\mathbb{R}^2$ се еквивалентни меѓусебно, па постои $m>0$ така што.

$$\left|f(x,y)\right|\leq\left(|x|+|y|\right)^2=\left\|(x,y)\right\|_1^2\leq m\left\|(x,y)\right\|^2,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

од каде ќе го добиевме истиот заклучок.

Задача 2.11. Дали постои функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ т.ш. е диференцијабилна само во една точка?

Решение: Да, постои. На пример функцијата на Дирихле:

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & x,y\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{во спротивно}\end{cases}$$

Функцијата е диференцијабилна во точката $(0,0)$ според претходната задача. Во сите останати точки има прекин. Доказот следува директно преку низа третманот. ☻

Задача 2.12. Нека функцијата $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ е со следниве особини:

(a) f е непрекината во $\underline{0}$ и диференцијабилна на $\mathbb{R}^n\setminus\{\underline{0}\}$.

(б) $\lim\limits_{p\to \underline{0}} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)=0,\ \forall j=1,2,...,n$.

Докажи дека f е диференцијабилна во $\underline{0}$.

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Од условите постои $\delta>0$ така што.

$$\|df(w)\|<\varepsilon \text{, ако } \|w\|<\delta$$

Сега за $\|x\|<\delta$, според теоремата за средна вредност применета на сегментот што ги поврзува $\underline{0}$ и x имаме:

$$\|f(x)-f(\underline{0})\|\le\|df(\theta x)\|\|x-\underline{0}\|<\varepsilon\|x\|,\ \text{за некој } 0<\theta<1$$

Оттука следува диференцијабилност во $\underline{0}$. ☻

Задача 2.13. Нека f е диференцијабилна функција од една променлива. Провери дали

1) $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 2) $z=f(x^2-y^2)$ 3) $z=yf\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ги задоволуваат равенствата, соодветно:

1) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 2) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 3) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$

Решение: 1) $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$, $t=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=f(t)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=f'(t)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=f'(t)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=f'(t)\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0.$$

2) $z=f(x^2-y^2)$, $t=x^2-y^2$, $z=f(t)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=f'(t)2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=-f'(t)2y$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=2f'(t)-2f'(t)=0.$$

3) $z=yf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $t=\dfrac{y}{x}$, $z=f(t)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{y^2}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-x\frac{y^2}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)=yf\left(\frac{y}{x}\right)=z\,.$$

Задача 2.14. Пресметај $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, ако $z=x+yg(z)$ каде што g е диференцијабилна функција.

Решение: $\frac{\partial z}{\partial x}=1+yg'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\left(1-yg'(z)\right)}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=g(z)+yg'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{g(z)}{\left(1-yg'(z)\right)}\,.$$

Задача 2.15. Нека функцијата $u=u\left(x,y\right)$ е непрекинато диференцијабилна, ја задоволува равенката $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ и $u\left(x,2x\right)=x$, $\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,2x\right)=x^2$. Пресметај ги: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,2x\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(x,2x\right)$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,2x\right)$.

Решение: Го диференцираме по x равенството $u\left(x,2x\right)=x$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,2x\right)+2\frac{\partial u}{\partial y}\left(x,2x\right)=1$$

Заменуваме $\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,2x\right)=x^2$:

$$x^2+2\frac{\partial u}{\partial y}\left(x,2x\right)=1.$$

Повторно диференцираме по x:

$$2x+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(x,2x\right)+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,2x\right)=0\,.$$

Од условот на задачата, имаме $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, па добиваме:

$$x+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\left(x,2x\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x,2x\right)=0$$

односно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,2x)+2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=-x \tag{2.5}$$

Сега, го диференцираме по x равенството $\frac{\partial u}{\partial x}(x,2x)=x^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)+2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,2x)=2x \tag{2.6}$$

Со решавање на системот (2.5) и (2.6), добиваме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,2x)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,2x)=-\frac{-4}{3}x \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,2x)=\frac{5}{3}x. \quad ☻$$

Задача 2.16. Определи го решението $z=z(x,y)$ на ПДР-равенката $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ кое го задоволува условот $z(x,x^2)=1$.

Решение. Со интегрирање на равенката $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$, добиваме:

$$z(x,y)=\int(x^2+2y)dy+\varphi(x)=x^2y+y^2+\varphi(x). \tag{2.7}$$

Од условот $z(x,x^2)=1$ следува дека важи $x^2y+y^2+\varphi(x)=x^4+x^4+\varphi(x)=1$, односно $\varphi(x)=1-2x^4$. Заменуваме во (2.7):

$$z(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4. \quad ☻$$

Задача 2.17. Со равенките:

1) $f(x,y)=0,\ y=y(x)$

2) $F(x,y,z)=0,\ z=z(x,y)$

имплицитно се одредени функциите y и z соодветно.

Определи: 1) y' 2) $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение: 1) $0=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$.

$$2)\ 0=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$ ☻

Задача 2.18. Пресметај $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ ако функцијата $z=z\left(x,y\right)$ е зададена со равенката:

$$x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$$

Решение. Прв начин: Ја означуваме левата страна со $F(x,y,z)$ и ги наоѓаме парцијалните изводи $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$. Ја применуваме формулата од теорема 2 и добиваме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\ \text{ и }\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

односно

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2-yz}{z^2-xy}\quad\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{6y^2-3xz-2}{3z^2-3xy}.$$

Втор начин: Со диференцирање на зададената равенка добиваме:

$$3x^2dx+6y^2dy+3z^2dz-3yzdx-3xzdy-3xydz-2dy=0\ ,$$

односно

$$3\left(x^2-3yz\right)dx+\left(6y^2-3xz-2\right)dy+3z^2dz=0\ .$$

$$dz=-\frac{x^2-3yz}{z^2-xy}dx-\frac{6y^2-3xz-2}{3z^2-3xy}dy.$$

Последното го споредуваме со формулата $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ и добиваме:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x^2-yz}{z^2-xy}\quad\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{6y^2-3xz-2}{3z^2-3xy}.$$ ☻

Задача 2.19. Докажи дека функцијата $z = z(x,y)$ определена со $F(x-z, y-z) = 0$ ја задоволува равенката $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$

Решение: Со смената: $\xi = x - z, \quad \rho = y - z$ имаме:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\left(\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \rho}\right) \text{ и}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \rho}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \rho}}{\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \rho}}.$$ ☻

Задача 2.20. Пресметај ги $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ за функцијата зададена со $u = (x+y)^{(y+z)^{(x+z)}}$.

Решение: $ln u = (y+z)^{(x+z)} ln(x+y)$

$$ln(ln u) = ln\left((y+z)^{(x+z)} ln(x+y)\right) = (x+z) ln(y+z) + ln\left(ln(x+y)\right)$$

$$\frac{1}{ln u} \cdot \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x} = ln(y+z) + \frac{1}{ln(x+y)}\frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \, ln u \left(ln(y+z) + \frac{1}{ln(x+y)}\frac{1}{x+y} \right) =$$

$$= (x+y)^{(y+z)^{(x+z)}} (y+z)^{(x+z)} ln(x+y) \left(ln(y+z) + \frac{1}{ln(x+y)^{(x+y)}} \right).$$

Слично,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x+y)^{(y+z)^{(x+z)}} (y+z)^{(x+z)} ln(x+y) \left(\frac{x+z}{y+z} + \frac{1}{ln(x+y)^{(x+y)}} \right) \text{ и}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x+y)^{(y+z)^{(x+z)}} (y+z)^{(x+z)} ln(x+y) \left(ln(y+z) + \frac{x+z}{y+z} \right).$$ ☻

Задача 2.21. Пресметај го тоталниот диференцијал на функцијата:

1) $z = arctg\dfrac{y}{x}$ 2) $z = arctg\dfrac{y}{x} + arctg\dfrac{x}{y}$.

Решение: 1) Тоталниот диференцијал може да се пресмета на два начина: со барање парцијални изводи или по правилата за пресметување тотален диференцијал.

Прв начин: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, па имаме

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Втор начин: $dz = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \cdot d\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\dfrac{xdy-ydx}{x^2} = \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2}\right) + \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \dfrac{1}{y} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^2} = 0$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow \quad dz = 0. \quad ☻$$

Задача 2.22. Пресметај го тоталниот диференцијал од прв и втор ред на функцијата:

$$z = \left(\frac{x}{y}\right)^2 ln(3x-2y). \qquad .$$

Решение: Ако ставиме $u = \dfrac{x}{y}$ и $v = 3x - 2y$, пресметуваме:

$$dz = (2u\,ln\,v)du + \frac{u^2}{v^2}dv$$

каде што

$$du = \frac{ydx - xdy}{y^2} \quad \text{и} \quad dv = 3dx - 2dy.$$

Ако изразиме преку основните прменливи, добиваме:

$$dz=\left(\frac{2x}{y^2}ln\left(3x-2y\right)+\frac{3x^2}{y^2\left(3x-2y\right)}\right)dx-\left(\frac{2x^2}{y^3}ln\left(3x-2y\right)+\frac{3x^2}{y^2\left(3x-2y\right)}\right)dy.$$

Од овде можеме да ги прочитаме парцијалните изводи $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. За вежба, пресметајте ги прво парцијалните изводи. ☻

Задача 2.23. Пресметај ги парцијалните изводи и тоталниот диференцијал на функцијата

$$z=u\cdot e^{\frac{u}{v}},$$

каде што $u=x^2+y^2$ и $v=xy$.

Решение: Ќе побараме парцијални изводи за $ln\,z=ln\,u+\frac{u}{v}$:

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

од каде што следува

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2y^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\left(x^4+2x^3y-y^4\right) \text{ и}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2y^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\left(y^4+2y^3x-x^4\right).$$ ☻

Задача 2.24. Ако $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, докажи дека $d^2u\geq 0$.

Решение: Нека $\varphi=x^2+y^2+z^2$. Тогаш,

$$du=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\left(xdx+ydy+zdz\right),$$

$$d^2u=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)-\frac{\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\left(2xdx+2ydy+2zdz\right)}{\sqrt{\varphi^2}}\left(xdx+ydy+zdz\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)-\frac{1}{\sqrt{\varphi^3}}\left(xdx+ydy+zdz\right)^2=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi^3}} \left(\varphi\left(dx^2 + dy^2 + dz^2 \right) - \left(xdx + ydy + zdz \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi^3}} \left(\left(x^2 + y^2 + z^2 \right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2 \right) - \left(xdx + ydy + zdz \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varphi^3}} \left(\left(xdy - ydx \right)^2 + \left(xdz - zdx \right)^2 + \left(ydz - zdy \right)^2 \right) \geq 0 . \quad ☻$$

Задача 2.25. Нека $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е дефинирана со:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Докажи дека функцијата f во точката $(0,0)$ има извод во произволен правец (посебно постојат парцијалните изводи по двете променливи), непрекината е во точката $(0,0)$, но сепак не е диференцијабилна во $(0,0)$.

Решение: Нека $v = (a,b)$ е произволен ненулти вектор. За изводите во правец на векторот $v = (a,b)$ имаме:

$$\frac{df}{dv}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3ab^2}{t^2(a^2+b^2)} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

Специјално, за $a = 1, b = 0$ и $a = 0, b = 1$ добиваме $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Непрекинатоста следува од неравенството:

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| x \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| .$$

Функцијата не е диференцијабилна во точката $(0,0)$ затоа што:

$$\frac{df}{dv}(0,0) \neq df(0,0)(v) . \quad ☻$$

Задача 2.26. Пресметај го изводот на функцијата $f:(x,y,z) \mapsto x+y+z$ во правец на надворешната нормала на сферата, во точката $\mathrm{M}(a,b,c)$ од сферата.

Решение: Сферата е со центар во координатниот почеток и радиус еден. Значи, единечниот вектор на надворешната нормала на сферата во точката $\mathrm{M}(a,b,c)$ е еднаков на радиус векторот во точката M: $\vec{n}=(a,b,c)$. $gradf\left(a,b,c\right)=\left(1,1,1\right)$

$$\Rightarrow \frac{df}{d\vec{n}}\left(a,b,c\right)=\left\langle \left(a,b,c\right),\left(1,1,1\right)\right\rangle =a+b+c.$$ ☻

Задача 2.27. Нека $f:(-1,1)\to\mathbb{R}^2$ е C^1- функција така што. $f(0)=0$ и $f'(0)\neq 0$. Докажи дека постои $\varepsilon\in(0,1)$ така што. $\|f(t)\|$ е растечка функција по t на $(0,\varepsilon)$.

Решение: Го запишуваме $f=(f_1,f_2)$ во компонентна форма. Од правилата за диференцирање имаме:

$$\frac{d}{dt}\|f(t)\|^2=2f_1f_1'(t)+2f_2f_2'(t) \tag{2.8}$$

Претпоставуваме дека $t>0$. Од теоремата за средна вредност десната страна на (2.8) ја запишуваме во облик:

$$2t(\,f_1'(\beta_1)\,f_1'(t)+f_2'(\beta_2)\,f_2'(t))$$

Каде што $0<\beta_1=\beta_1(t)<t$ и $0<\beta_2=\beta_2(t)<t$. Ако побараме лимес на последниов запис по $t\to 0$ ползувајќи ја непрекинатоста на f' добиваме:

$$f_1'(\beta_1)f_1'(t)+f_2'(\beta_2)f_2'(t)\to\|f'(0)\|^2>0.$$

Оттука постои $\varepsilon>0$ така што. $\frac{d}{dt}\|f(t)\|^2>0$, за $0<t<\varepsilon$. Заклучокот следува. ☻

Задача 2.28. Нека $f(x,t)$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е C^1- функција за која важи. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}$. Претпоставуваме дека $f(x,0)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Докажи дека $f(x,t)>0$, $\forall x,t\in\mathbb{R}$.

Решение: Одбираме произволно $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. Го разгледуваме сегментот S што ги поврзува точките (x,t) и $(x+t,0)$. Според теоремата за средна вредност, постои точка (θ_1,θ_2) од S така што:

$$f(x,t)-f(x+t,0)=(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1,\theta_2),\frac{\partial f}{\partial t}(\theta_1,\theta_2))\cdot((x,t)-(x+t,0))=$$

$$=(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1,\theta_2),\frac{\partial f}{\partial t}(\theta_1,\theta_2))\cdot(-t,t)=t(\frac{\partial f}{\partial t}(\theta_1,\theta_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_1,\theta_2))=0.$$

Следува дека $f(x,t)=f(x+t,0)>0$. ☻

Задача 2.29. Нека $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е од класата C^1 и со особина:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \le K,\ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall j = 1,2,...,n$$

Докажи дека $|f(x) - f(x)| \le \sqrt{n}K\|x - y\|$.

Решение: Да забележиме дека за произволни точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ може да дефинираме искршена линија од n сегменти паралелни со координатните оски што ги поврзува овие две точки (со подесување на секоја координата поодделно). Ако ја примениме теоремата за средна вредност на секој од овие сегменти поодделно добиваме:

$$|f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, y_{i+1}, ..., y_n) - f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, y_i, y_{i+1}, ..., y_n)| \le K|x_i - y_i|.$$

Оттука следува:

$$|f(x) - f(y)| \le \sum_{i=1}^{n} |f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, y_{i+1}, ..., y_n) - f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, y_i, y_{i+1}, ..., y_n)| \le K\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|.$$

Сега од неравенството на Коши-Шварц применето на векторите $(1,1,...,1)$ и $x - y$ добиваме:

$$|f(x) - f(y)| \le K\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \le K\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2} = K\sqrt{n}\,\|x - y\|.$$

Доказот е комплетиран. ☻

Задача 2.30. Дали постои функција f така што

$$df = (3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy\ ?$$

Решение: Ќе ја примениме теоремата за потполн диференцијал. Ги воведуваме ознаките:

$$P(x, y) = 3x^2y - 2y^2 \text{ и } Q(x, y) = x^3 - 4xy + 6y^2$$

Според теоремата изразот $Pdx + Qdy$ е потполн диференцијал акко $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ги пресметуваме соодветните парцијалните изводи и споредуваме:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - 4y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - 4y.$$

Оттука следува потврден одговор, да таква функција постои.

Функцијата f ја определуваме со помош на методот на групирање:

$$\begin{aligned} df &= (3x^2y-2y^2)dx+(x^3-4xy+6y^2)dy=(3x^2ydx+x^3dy)-(2y^2dx+4xydy)+6y^2dy \\ &= d(x^3y)-d(2xy^2)+d(2y^3)=d(x^3y-2xy^2+2y^3) \\ &= d(x^3y-2xy^2+2y^3+c). \end{aligned}$$

Значи $f = x^3y-2xy^2+2y^3+c$. ☻

Задача 2.31. Трансформирај ја равенката $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (a\neq 0)$, со премин на нови променливи α и β, ако $\alpha = x-at$ и $\beta = x+at$.

Решение: Со примена на формулата за диференцирање на сложени функции, имаме:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right);$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right).$$

Со примена на истите формули, повторно диференцираме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial \beta}{\partial t}=a\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)=$$

$$=-a\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)a+a\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)a=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial \beta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}.$$

Заменуваме во зададената равенка и добиваме:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}=0.$$ ☻

Задача 2.32. Трансформирај го изразот $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$ во поларна форма.

Решение: Воведуваме поларна смена $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. Според теоремата за диференцирање на сложени функции добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial V}{\partial y}\sin\varphi\\ \frac{\partial V}{\partial \varphi}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial V}{\partial x}r\sin\varphi+\frac{\partial V}{\partial y}r\cos\varphi.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Втората равенка од релациите (2.9) ја делиме со r:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}=-\frac{\partial V}{\partial x}\sin\varphi+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi \tag{2.10}$$

Ги квадрираме првата релација од (2.9) и (2.10) а потоа ги собираме:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial V}{\partial y}\sin\varphi\right)^2+\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\sin\varphi+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 .$$ ☻

Задача 2.33. Трансформирај го изразот $x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}$ во сферна форма.

Решение: Воведуваме сферни координати:

$$x=r\cos\varphi\sin\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\theta .$$

Според теоремата за диференцирање на сложени функции добиваме:

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \tag{2.11}$$

Да забележиме дека:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi\sin\theta=\frac{x}{r},\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi\sin\theta=\frac{y}{r},\ \frac{\partial z}{\partial r}=\cos\theta=\frac{z}{r}.$$

Со замена во (2.11) добиваме:

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{x}{r}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{y}{r}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{z}{r}.$$

Оттука следува дека:

$$x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}=r\frac{\partial V}{\partial r}.$$ ☻

Задача 2.34. Докажи ја теоремата на Ојлер за хомогени функции:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+...+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=kf\ ,\ k=deg\ f$$

Решение: Од условот за хомогеност на функцијата $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ имаме:

$$f(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,...,x_n) \tag{2.12}$$

Воведуваме смени: $v_i=tx_i, i=1,2,...n$. Ја диференцираме релацијата (2.12) по променливата t:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial v_i}x_i=kt^{k-1}f\ .$$

Специјално, за $t=1$ ја добиваме теоремата на Ојлер. ☻

Задача 2.35. Ако $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е хомогена функција со степен на хомогеност n, докажи дека и парцијалните изводи се хомогени функции со степен на хомогеност $n-1$.

Решение: Од условот за хомогеност на функцијата f имаме: $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

Ако ставиме $t=\frac{1}{x}$, добиваме $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^n}f(\ \ x) \Rightarrow f(x,y)=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, каде што $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=nx^{n-1}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-x^{n-2}y\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)=x^{n-1}\left(n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)=f_1(x,y).$$

Функцијата f_1 е хомогена функција со степен на хомогеност $n-1$:

$$f_1(tx,ty)=t^{n-1}x^{n-1}\left(n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)=t^{n-1}f_1(x,y),$$

односно, f_1 е хомогена функција со степен на хомогеност $n-1$.

На ист начин се покажува и за $\frac{\partial f}{\partial y}$. ☻

Задача 2.36. Нека $f=\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n$. Докажи дека важи следнава релација:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{2.13}$$

Решение: Да забележиме дека функцијата f е хомогена со степен на хомогеност $deg\ f = 0$. Имено:

$$f(tx,ty,tz) = \left(\frac{tx-ty+tz}{tx+ty-tz}\right)^n = t^0\left(\frac{x-y+z}{x+y-z}\right)^n = t^0 f(x,y,z)$$

Сега релацијата (2.13) следува од теоремата на Ојлер за $k = 0$. ☻

Задача 2.37. Определи ги броевите a,b,c,d во трансформацијата:

$$x = au + bv,\ y = cu + dv, \quad (ad - bc \neq 0) \tag{2.14}$$

така што да важи:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Решение: Од релациите (2.14) добиваме:

$$u = \frac{dx - by}{\Delta},\ v = \frac{ay - cx}{\Delta},\ (\Delta = ad - bc)$$

Оттука следува:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d}{\Delta},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{b}{\Delta},\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c}{\Delta},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{a}{\Delta} \tag{2.15}$$

Сега од теоремата за диференцирање на сложена функција имаме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.16}$$

Ги заменуваме релациите (2.15) во (2.16) и добиваме:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{d}{\Delta} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{c}{\Delta}.$$

Последнава релација ја диференцираме по y, а потоа ги заменуваме релациите од (2.15):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{bd}{\Delta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{ad}{\Delta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{bc}{\Delta^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{ac}{\Delta^2}$$

Последнава форма ја споредуваме со бараната. Ги добиваме следниве равенства:

$$ad + bc = 0,\ bd = -\Delta^2,\ ac = \Delta^2$$

Конечно добиваме:

$$a = b,\ c = -d,\ ac = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad a = -b,\ c = d,\ ac = \frac{1}{4}.$$ ☻

Задача 2.38. Докажи дека функцијата $V = f(x+at) + g(x-at)$ ја задоволува следнава парцијална диференцијална равенка:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

каде $f, g \in C^2$, а a е произволен параметар.

Решение: Ги воведуваме смените $u = x + at,\ v = x - at$. Сега функцијата го добива обликот $V = f(u) + g(v)$. Ја диференцираме по x и t соодветно:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) + g'(v), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = af'(u) - ag'(v) \qquad (2.17)$$

Првата равенка од (2.17) ја диференцираме по x, а втората по t:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}\left(f'(u) + g'(v)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(f'(u) + g'(v)\right) = f''(u) + g''(v)$$

Слично, за втората добиваме:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial V_t}{\partial t} = \frac{\partial V_t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(af'(u) - ag'(v)\right)\left(a\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(af'(u) - ag'(v)\right)\left(-a\right) =$$
$$= a^2 f''(u) + a^2 g''(v).$$

Сега, од изведените релации заклучуваме:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad ☻$$

Задача 2.39. Нека $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ е пресликување така што

$$f^{-1}\left(0\right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1 \right\}.$$

Претпоставуваме дека f има непрекинати парцијални изводи до втор ред. Дали постои $y \in \mathbb{R}^3$ со $\|y\| \le 1$ така што:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(y\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(y\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\left(y\right) \ge 0 \ ?$$

Решение: Одговорот е негативен. Да ја разгледаме функцијата

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Забележуваме дека парцијалните изводи од втор ред се негативни. ☻

Задача 2.40. Нека $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е дефинирана со:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} sin\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Определи ги сите точки во кои f е диференцијабилна.

Решение: Одиме со теоремата што ни дава доволен услов за диференцијабилност. Ги пресметуваме парцијалните изводи:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} sin\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{-\frac{2}{3}} cos\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

односно

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Да забележиме дека парцијалните изводи се непрекинати во сите точки од множеството $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Според споменатата теорема функцијата е диференцијабилна на ова множество. Останува да ја испитаме диференцијабилноста на $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Во произволна точка $(0,t) \in \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ имаме:

$$\frac{f(h,k) - f(0,t)}{\|(h,k)\|} = O\left(|h|^{\frac{1}{3}}\right) = o(1), \quad (h \to 0)$$

што значи дека функцијата е диференцијабилна и во овие точки. ☻

Задача 2.41. Може ли функцијата $f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ да се додефинира во $(0,0)$ така што да биде од класа C^2 на $\mathbb{R}^2$?

Решение: Ќе докажеме дека со $f(0,0) = 0$, функцијата е продолжена по непрекинатост. Воведуваме поларна смена:

$$x = r\,cos\,\varphi, y = r\,sin\,\varphi$$

Одбираме произволно $\varepsilon > 0$.

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi \sin 2\varphi\right|<\varepsilon \text{, за } 0<r<\sqrt{2\varepsilon}$$

Останува да ги испитаме парцијалните изводи:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

За $(x,y)\neq(0,0)$ имаме:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Оттука за парцијалните изводи од втор ред имаме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1.$$

Сега претпоставката дека проширувањето на f е од класа C^2 е во противречност со теоремата на Шварц според која мешаните изводи треба да се еднакви. Значи такво проширување не е можно. ☻

Задача 2.42. Ако $F(x,y,z)=0$ дефинира функција z во имплицитна форма во некоја област од xy рамнината, докажи дека:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\,,\quad \text{каде } \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$$

Решение: Од тоа што z е функција од x и y имаме:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \tag{2.18}$$

Сега, од

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

со замена на (2.18) добиваме:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=0\,.$$

Од тоа што x и y се независни променливи имаме:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

од каде што следуваат посакуваните релации. ☻

Задача 2.43. Ако $F(x,y,u,v)=0,\;\; G(x,y,u,v)=0$ определи ги:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\,.$$

Решение: Двете равенки во општа дискусија определуваат зависни променливи u и v како имплицитни функции од независните променливи x и y. Слично на претходниот проблем имаме:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=0 \tag{2.19}$$

$$dG=\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial u}du+\frac{\partial G}{\partial v}dv=0$$

Од тоа што u и v се функции од x и y имаме:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\,,\quad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \tag{2.20}$$

Со замена на (2.20) во (2.19) добиваме:

$$dF=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=0$$

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=0$$

Од тоа што променливите x и y се независни имаме:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

односно:

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=0\,.$$

Добивме систем од равенки по непознати $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$, односно систем од равенки понепознати $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$. Според Крамеровото правило ги добиваме следниве релации:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

односно:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$ ☻

Задача 2.44. Ако $u^2-v=3x+y$ и $u-2v^2=x-2y$ пресметај ги $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

Решение: Ги преведуваме дадените равенки во нормална форма:

$$F=u^2-v-3x-y=0,\quad G=u-2v^2-x+2y=0.$$

Сега според претходниот проблем имаме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -4v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & -1\\ 1 & -4v\end{vmatrix}}=\frac{1-12v}{1-8uv}$$

под услов $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=1-8uv\neq 0$. Слично ги определуваме и останатите парцијални изводи. ☻

Задача 2.45. 1) Ако $x=u-v+w,\ y=u^2-v^2-w^2,\ z=u^3+v$ пресметај $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

2) Толкувај ја ненултата вредност на Јакобијанот.

Решение: 1) Според дефиницијата на Јакобијанот имаме:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2u & -2v & -2w\\ 3u^2 & 1 & 0\end{vmatrix}=6wu^2+2u+6u^2v+2w$$

2)Дадените равенки ги определуваат u,v,w како функции од x,y,z во област од просторот каде Јакобијанот е ненулти. ☻

Задача 2.46. Ако $x=f(u,v)$ и $y=g(u,v)$, каде $u=\varphi(r,s)$ и $v=\psi(r,s)$ докажи дека:

$$1)\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)};\quad 2)\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1,\ \text{под услов }\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

Решение: 1) Од дефиницијата на Јакобијанот имаме:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s}\\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s}\end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$$

според теоремата за множење на детерминанти.

2) Правиме избор $r=x,s=y$ во резултатот под а). Добиваме:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1.\ ☻$$

Забелешка. Равенките $x=f(u,v)$ и $y=g(u,v)$ дефинираат трансформација меѓу точките (x,y) во xy рамнината и точките (u,v) во uv рамнината. Инверзната трансформација е дадена со $u=\varphi(x,y)$ и $v=\psi(x,y)$. Добиениот резултат тврди дека Јакобијаните на овие две трансформации се реципрочни меѓусебно.

Задача 2.47. Докажи дека равенката $F(xy,z-2x)=0$ дефинира функција во имплицитна форма што под одредени услови ја задоволува следнава парцијална диференцијална равенка:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2x$$

Под кои услови?

Решение: Воведуваме смени $u=xy,\ v=z-2x$. Тогаш $F(u,v)=0$ и

$$dF=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=\frac{\partial F}{\partial u}(xdy+ydx)+\frac{\partial F}{\partial v}(dz-2dx)=0. \tag{2.21}$$

Сметајќи ја z како зависна променлива, а x и y како независни променливи имаме:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{2.22}$$

Го заменуваме (2.22) во (2.21) и добиваме:

$$\left(y\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial F}{\partial v}\right)dx+\left(x\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=0.$$

Од тоа што x и y се независни променливи добиваме:

$$y\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}-2\frac{\partial F}{\partial v}=0,\quad x\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Го изразуваме $\frac{\partial F}{\partial u}$ од последната равенка и го заменуваме во претпоследната. Оттука ја добиваме бараната парцијална диференцијална равенка. Резултатот е добиен под услов дека $F(u,v)$ е непрекинато диференцијабилна и $\frac{\partial F}{\partial v}\neq 0$. ☻

Задача 2.48. Нека $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ е дефинирано со:

$$f(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Докажи дека постои локална инверзија на f во $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ и пресметај го изводот на f^{-1} во точката $f\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)=(1,1)$.

Решение: Да забележиме дека вертикални прави во $r\theta$ рамнината со f се пресликуваат во кружници со центар во координатниот почеток, додека хоризонтални прави се пресликуваат во прави што минуваат низ $(0,0)$.

Пресликувањето не е инјективно. Уште повеќе цела θ-оска се пресликува во координатниот почеток. Прво го пресметуваме Јакобијанот на пресликувањето:

$$df = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

откаде имаме:

$$\Delta_f = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\,.$$

Ја разгледуваме точката $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$. Матрицата на диференцијалот во $r=\sqrt{2},\ \theta=\frac{\pi}{4}$ е определена со:

$$df\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Според теоремата за инверзна функција постои локална инверзија на f во околина на точката $f\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)=(1,1)$ чиишто Јакобијан во точката $(1,1)$ би требало да биде $\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ според проблемот 26. Ќе го потврдиме овој факт директно преку пресметка. Инверзијата ја знаеме во случајов експлицитно, имено:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,,\ \theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Матрицата на диференцијалот на f^{-1} во точката $(1,1)$ е:

$$df^{-1}(1,1)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

откаде навистина добиваме $\Delta_{f^{-1}}=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Лесно се забележува дека последната матрица е инверзна на диференцијалот на f во точката $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$. ☻

Задача 2.49. Нека $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ е непрекинато диференцијабилно пресликување. Претпоставуваме дека матрицата на диференцијалот има ранк n во секоја точка. Ако f е право пресликување, т.е. $f^{-1}(K)$ е компактно за произволно компактно множество K, тогаш $f\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}^n$. Докажи!

Решение: Од непрекинатоста на f и сврзаноста на $\mathbb{R}^n$ добиваме дека $f\left(\mathbb{R}^n\right)$ е сврзано множество. Ќе покажеме дека $f\left(\mathbb{R}^n\right)$ е отворено и затворено множество во $\mathbb{R}^n$. Ова повлекува дека $f\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}^n$ со оглед на тоа што $f\left(\mathbb{R}^n\right)\neq\varnothing$.

Нека $y=f(x)\in f\left(\mathbb{R}^n\right)$. Од тоа што ранкот на $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ е n од теоремата за инверзна функција постојат отворени околини V_x и V_y на x и y соодветно така што $f_{|V_x}:V_x\to V_y$ е дифеоморфизам. Оттука добиваме дека $V_y=f(V_x)$ е отворена околина за y така што. $V_y\subseteq f\left(\mathbb{R}^n\right)$. Значи $f\left(\mathbb{R}^n\right)$ е отворено множество.

Нека (y_n) е произволна низа во $f\left(\mathbb{R}^n\right)$ така што. конвергира кон $y\in\mathbb{R}^n$. Означуваме $y_n=f(x_n)$, каде (x_n) е некоја низа во $\mathbb{R}^n$. Тогаш множеството $K=\{y_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}\cup\{y\}$ е компактно, па од тоа што f е право пресликување добиваме дека $f^{-1}(K)$ е компактно множество. Но од $\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}\subseteq f^{-1}(K)$, следува дека постои подниза $\left(x_{n_j}\right)$ што конвергира кон $x\in\mathbb{R}^n$. Од непрекинатоста на f заклучуваме дека $f\left(x_{n_j}\right)\to f(x)$.

Но ова пак значи дека $y = f(x)$, со оглед на тоа што $y_{n_j} \to y$. Значи $f(\mathbb{R}^n)$ е затворено множество. ☻

Задача 2.50. Нека $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се глатки функции така што $f(0)=0, f'(0) \neq 0$. Ја разгледуваме равенката:

$$f(x) = tg(x), t \in \mathbb{R}.$$

1) Докажи дека во доволно мал интервал $|t| < \delta$, постои единствена непрекината функција $x(t)$ што е решение на равенката така што. $x(0)=0$.

2) Најди го развојот на Тејлор за $x(t)$ од прв ред во околина на $t=0$.

Решение: 1) Нека $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е дефинирано со:

$$F(x,t) = f(x) - tg(x).$$

Тогаш, F е глатка скаларна функција така што. $F(0,0)=0$ и:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0) - 0g'(0) \neq 0.$$

Сега според теоремата за имплицитна функција постои $\delta > 0$, така што за $|t| < \delta$, x е глатка функција од t и $x(0)=0$.

2) Ги диференцираме двете страни на равенството:

$$f(x(t)) = tg(x(t)), t \in \mathbb{R}$$

по t, за $|t| < \delta$ и добиваме:

$$f'(x(t))x'(t) = g(x(t)) + tg'(x(t))x'(t)$$

Сега за $t=0$ добиваме:

$$x'(0)=\frac{g(x(0))}{f'(x(0))}.$$

Конечно од $x(0)=0$, развојот на Тејлор на $x(t)$ заклучно прв ред е:

$$\frac{g(0)}{f'(0)}t. \quad ☻$$

Задача 2.51. Нека $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ е непрекинато диференцијабилна функција. Докажи дека постои непрекината 1-1 функција $g:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ така што композицијата $f\circ g$ е константна функција.

Решение: Проблемот е тривијален доколку f е константна функција. Претпоставуваме дека f не е константа. Постои $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ така што $df(x_0,y_0)\neq 0$. После ротација на променливите, ако е неопходно, може да претпоставиме дека $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$. Нека $a=f(x_0,y_0)$. Ќе ја разгледаме функцијата $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ дефинирана со:

$$F(x,y)=(f(x,y),y).$$

Јакобијанот на F е ненулти во точката (x_0,y_0), па според теоремата за инверзна функција, функцијата F има локална инверзија, G, дефинирана во околина на точката (a,y_0). Значи $F(G(a,y))=(a,y)$, за сите y во некој затворен интервал I што го содржи y_0. Нека γ е произволно непрекинато 1-1 пресликување, $\gamma:[0,1]\to I$. Тогаш функцијата:

$$g(t)=G(a,\gamma(t)),\ t\in[0,1]$$

ги има посакуваните особини. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Определи ги првите парцијални изводи на следниве функции: (1-19)

1. $f(x,y)=2x^4y^3-5x+7y+2$; 2. $f(x,y,z)=x^3+3x^2y-y^3+2$;

3. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$; 4. $f(x,y)=\ln\left(x+y^2\right)$;

5. $f(x,y)=\ln\left(2xy-5x+2\right)$; 6. $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$;

7. $f(x,y)=y^3e^{-5x+7y+2}$; 8. $f(x,y)=\cos\left(2xy-5x+2\right)+sin\left(5x\right)$;

9. $f(x,y)=arctg\,\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; 10. $f(x,y)=arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;

11. $f(x,y)=e^{sin\frac{y}{x}}$; 12. $f(x,y)=x^y$;

13. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; 14. $f(x,y,z)=ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$;

15. $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\left(xy+yz+xz\right)^2}$; 16. $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$;

17. За функцијата $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ пресметај ги првите парцијални изводи во точката $(1,1)$; 18. Пресметај $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ ако $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{y}{x}}$;

19. Пресметај $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2,0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2,0)$ ако $f(x,y,z)=\ln\left(xy+z\right)$.

За следниве функции определи ги назначените парцијални изводи: (20-28)

20. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ако $f(x,y)=\sqrt{xy+2}$;

21. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ако $f(x,y)=\cos^2\left(2x-5y+2\right)$;

22. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ако $f(x,y)=\dfrac{ln\left(x+y\right)}{x^2+y^2}$;

23. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y},\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3},\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}$ ако $f(x,y)=x^5y^6+xy$;

24. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ако $f(x,y)=e^{xy}$;

25. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ако $f(x,y)=sin\,e^{x+y}$;

26. $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2},\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ ако $f(x,y)=x\cos^2\left(2xyz+1\right)+xy^2z^3-11$;

27. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$ ако $f(x,y,z)=\dfrac{ln\left(xy+yz\right)}{x^2+y^2+z^2}$;

28. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ ако $f(x,y,z)=e^{xyz}$.

Испитај дали функцијата $(x,y)\mapsto f(x,y)$ е непрекината, дали ги има парцијалните изводи и дали е диференцијабилна во $(0,0)$? (29-32)

29. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$; 30. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$;

31. $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$; 32. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

33. Докажи дека функцијата на Дирихле: $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & x,y\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{во спротивно}\end{cases}$ е диференцијабилна во точката $(0,0)$ и во сите останати точки има прекин.

34. Докажи дека постојат $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ во точката $(0,0)$ за $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$, иако функцијата не е ограничена во произволна околина на координатниот почеток.

35. Нека $u=u(x,y)$ е диференцијабилна функција, $u(x,x^2)=1$ и $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)=1$. Пресметај $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)$.

36. Провери ја теоремата на Ојлер за хомогените функции:

а) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ б) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

в) $f(x,y)=ln\dfrac{y}{x}$ г) $f(x,y)=5x^2+10xy+3y^2$.

37. Испитај ги постоењето и непрекинатоста на парцијалните изводи од прв и втор ред во точите од $y-$оската, за функцијата дефинирана со:

$$f(x,y)=\begin{cases}x\,arctg\dfrac{y}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Под претпоставка дека функциите φ и ψ се диференцијабилни доволен број пати, докажи ги следниве равенства: (38-40)

38. $\left(x^2-y^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=xyu$ ако $u=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$;

39. $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ ако $u=\varphi(x)\psi(y)$;

40. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ ако $u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$.

41. Докажи дека за функцијата $z = x^n \cos\frac{y}{x^2}$, важи $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

42. Докажи дека за функцијата $z = y\,arctg\left(x^2 - y^2\right)$, важи $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz$.

Определи ги тоталните диференцијали на следниве функции: (43-51).

43. $u = x^2 y$; 44. $u = \frac{xy}{x-y}$; 45. $u = \frac{z}{x^2+y^2}$;

46. $u = \ln\left(x^2+y^2\right)$; 47. $u = \sin^2 x + \cos^2 y$; 48. $u = \sin(xy)$;

49. $u = \ln tg\frac{y}{x}$; 50. $u = arctg\frac{y}{x}$; 51. $u = \ln\left(x^3 + 2^y + tg3z\right)$.

Пресметај ги тоталните диференцијали од назначениот ред за дадените функции: (52-55)

52. d^2u ако $u = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$; 53. d^3u ако $u = x^3 + y^3 - 3x^2y + 3xy^2$;

54. d^4u ако $u = \sin x \cos y$; 55. d^2u ако $u = xyz$.

Пресметај ги со точност 0.01 следниве изрази: (56-62)

56. $1.02^{3.05}$; 57. $1.08^{3.96}$; 58. $2.68^{\sin 0.05}$; 59. $\frac{\sin 1.49 \cdot arctg 0.07}{2^{2.95}}$;

60. $\ln\left(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1\right)$; 61. $\sin 29^0 \cdot tg 46^0$; 62. $\sqrt{4.05^2 + 2.93^2}$.

Пресметај $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ за функциите зададени со: (63- 66)

63. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$; 64. $x^2 - 5y^2 + 4z^2 - yz + x = 0$;

65. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$; 66. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 0$.

67. Определи го решението $z = z(x,y)$ на равенката $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ ако $z(x,0) = 1$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,0) = x$.

68. Дадена е функцијата $z = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right)$. Докажи дека функцијата ја задоволува Лапласовата равенка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Пресметај го градиентот на функцијата: (69-71)

69. $f(x,y) = x^2 + y^2$ во точката (3,2); 70. $f(x,y) = arctg\frac{y}{x}$ во точката (2,1);

71. $f(x,y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ во точката (2,1).

72. Определи го аголот меѓу градиентите на функцијата $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{x+y}$ во точките (1,1) и (3,4).

73. Определи го аголот меѓу градиентите на функциите $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ и $f(x,y)=x-3y+\sqrt{3xy}$ во точката (3,4).

74. Определи го аголот меѓу градиентите на функцијата $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ во точките $A(\varepsilon,0,0)$ и $B(0,\varepsilon,0)$.

75. Докажи:

1) $grad(f\pm g)=grad(f)\pm grad(g)$.

2) $grad(f\cdot g)=f\cdot grad(g)+g\cdot grad(f)$.

3) $grad\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\cdot grad(f)-f\cdot grad(g)}{g^2}$.

4) $grad\varphi(f)=\varphi'(f)gradf$.

5) $grad\varphi(f,g)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial f}gradf+\dfrac{\partial\varphi}{\partial g}gradg$.

76. Определи ја точката во која градиентот на функцијата $f(x,y)=ln\left(x+\dfrac{1}{y}\right)$ е $\nabla f=\left(1,-\dfrac{16}{9}\right)$.

Пресметај ги јакобијаните на дадените системи функции: (77.-78.)

77. а) $\begin{cases} x=u+v \\ y=\dfrac{uv}{a} \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=u^2-v^2 \\ y=2uv \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=arctg\dfrac{u}{v}; \\ y=u^2+v^2 \end{cases}$

78. а) $\begin{cases} x=u \\ y=\dfrac{u+v}{u} \\ z=\dfrac{u+v+w}{u+v} \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=h \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\cos\varphi . \\ z=r\sin\varphi \end{cases}$

79. Пресметај го изводот $\dfrac{dy}{dx}$ на функциите:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, б) $x^y=y^x$, в) $xy+ln\,xy=0$.

80. Пресметај го диференцијалот за следните имплицитни функции:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{u^2}{c^2}=1$, б) $\dfrac{x}{u}=ln\dfrac{u}{y}+1$.

Воведи нови независни променливи u и v и реши ги следниве равенки: (81-83)

81. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$, ако $u=x+y, v=x-y$; 82. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, ако $u=x, v=x^2+y^2$;

83. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ако $u=\frac{y}{x}$, $v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

ГЛАВА 3

ПРИМЕНА НА ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ ВО ГЕОМЕТРИЈА

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Скаларно и векторско поле

Нека Ω е множество од точки во тродимензионален Евклидски простор E. Нека O е фиксирана точка во Е, тогаш на секоја точка $P \in E$ и одговара потполно определен вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ со почеток во точката O и крај во точката P. Векторот $\overrightarrow{OP}$ го викаме *радиус вектор* или *вектор на положбата на точката P во однос на точката O*.

Нека за фиксна точка $O \in E$, $O_E = \left\{\overrightarrow{OP}: P \in E\right\}$ е векторскиот простор од сите радиус вектори на точки од E во однос на точката $O \in E$. Функција $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ќе ја викаме *скаларно поле, а функција $f: \Omega \to O_E$ векторско поле*. Термините *скаларно поле (векторско поле) се користат* во физиката, техничките и други науки, во кои математиката се применува.

Да забележиме дека во дефиницијата, скаларното и векторското поле не се опишуваат преку координатен систем. Се наметнува прашањето: *како можеме да зададеме скаларно (векторско) поле со помош на координатен систем?*

За да дадеме одговор на ова прашање, земаме два правоаголни координатни системи во просторот E:

$$\left(O, e_1, e_2, e_3\right),\ \left(O', e_1', e_2', e_3'\right) \tag{3.1}$$

и означуваме

$$\alpha_{i,j} = \left\langle e_i, e_j' \right\rangle, i, j = 1,2,3; \tag{3.2}$$

(односно, $\{e_1,e_2,e_3\}$ и $\{e_1',e_2',e_3'\}$ се две ортонормирани бази на просторот E и O, O' се фиксирани точки во E).

Значи, $$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \text{ и } \langle e_i',e_j'\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \text{ за } i,j=1,2,3 \tag{3.3}$$

За која било точка P од просторот, важи $\overrightarrow{OP}=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ и $\overrightarrow{O'P}=x_1'e_1'+x_2'e_2'+x_3'e_3'$. Во првиот координатен систем, точката P е претставена со подредената тројка (x_1,x_2,x_3), а во вториот со подредената тројка (x_1',x_2',x_3'). Врската меѓу координатите x_i и x_i' на точката P ја добиваме со:

$$x_k=\gamma_k'+\sum_{i=1}^{3}\alpha_{i,k}x_i',\ \gamma_k'=\left\langle\overrightarrow{OO'},e_k\right\rangle\ ,\alpha_{i,k}=\langle e_i',e_k\rangle. \tag{3.4}$$

Да означиме со $\Omega'=\{(x_1.x_2.x_3)\in\mathbb{R}^3:P\in\Omega\}\subset\mathbb{R}^3$. Нека $u:\Omega'\to\mathbb{R}$ е дефинирано со

$$u(x_1,x_2,x_3)=f(P) \tag{3.5}$$

каде што $f:\Omega\to\mathbb{R}$ е скаларно поле и $P\in\Omega$.

На скаларното поле $f:\Omega\to\mathbb{R}$, придруживме функција (скаларно поле)

$$u:\Omega'(\subset\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Велиме дека скаларното поле f е непрекинато и во класата C^p на отворено множество Ω ако функцијата u е непрекината и во класа C^p на Ω'.

Површините $u=u(x,y,z)=C$,е константа, се викаат *ниво-површини* или *еквискаларни површини* на скаларното поле f.

Според тоа, ниво-површина S е геометриско место на точки во кои функцијата на полето има иста (константна) вредност, односно $S=\{(x,y,z)\in\Omega':u(x,y,z)=C\}$.

Градиент на скаларно поле и извод на поле во дадена насока

Ако постојат изводите $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$ и ако не се сите еднакви на нула, нормалата на ниво-површината е паралелна со векторот $\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, којшто се вика *градиент* на скаларното поле f и се означува со $\operatorname{grad} f$. Значи,

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \tag{3.7}$$

каде што $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ е десен правоаголен координатен систем во дадено скаларно поле $u=u\left(x,y,z\right)=f\left(\vec{r}\right)$, кое е непрекинато и диференцијабилно во својот домен Ω.

Да напоменеме дека градиентот е векторско поле.

Ќе дадеме уште една интерпретација на градиентот. Нека $P_0=\left(x_0,y_0,z_0\right)=\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$ е дадена точка од Ω и нека p е права која минува низ точката P_0 и е определена со единечниот вектор $\vec{n}=\left(cos\,\alpha,cos\,\beta,cos\,\gamma\right)$, каде што $\alpha=\sphericalangle\left(p,\vec{i}\right)$, $\beta=\sphericalangle\left(p,\vec{j}\right)$ и $\gamma=\sphericalangle\left(p,\vec{k}\right)$. На правата p избираме точка P_1. Го формираме количникот: $\dfrac{f\left(P_1\right)-f\left(P_0\right)}{P_0P_1}=\dfrac{u\left(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,x_3+\Delta x_3\right)-u\left(x_1,x_2,x_3\right)}{P_0P_1}$. Ако постои лимес од овој количник, кога $P_1\to P_0$ по правата p, тогаш тој се вика *извод во правец на скаларното поле* f во насока на векторот $\vec{n}$ во точката P_0 и се означува со $\dfrac{df}{dp}=\lim\limits_{P_1\to P_0}\dfrac{f\left(P_1\right)-f\left(P_0\right)}{P_0P_1}$. Да напоменеме дека оваа дефиниција не бара избор на координатен систем, туку само ја карактеризира промената на полето f во правец на правата p. Во декартов координатен систем, $\dfrac{df}{dp}$ се пресметува со формулата:

$$\frac{df}{dp}=\frac{\partial u}{\partial x}cos\,\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}cos\,\beta+\frac{\partial u}{\partial z}cos\,\gamma. \tag{3.8}$$

Ќе наведеме основни особини на градиентот:

1. $\mathrm{grad}\,Cf=C\mathrm{grad}\,f$,
2. $\mathrm{grad}\left(f\pm g\right)=grad\,f\pm\mathrm{grad}\,g$,
3. $\mathrm{grad}\,fg=f\cdot\mathrm{gradg}+g\cdot\mathrm{grad}\,f$,
4. $\mathrm{grad}\,\dfrac{f}{g}=\dfrac{g\cdot\mathrm{grad}\,f-f\cdot\mathrm{gradg}}{g^2}$,
5. $\mathrm{grad}\,\varphi\left(f\right)=\varphi'\left(f\right)\mathrm{grad}\,f$,
6. $\mathrm{grad}\,\psi\left(f,g\right)=\dfrac{\partial\psi}{\partial f}\mathrm{grad}\,f+\dfrac{\partial\psi}{\partial g}\mathrm{grad\,g}.$

Тангентна рамнина и нормала на површина.

Нека $P\left(a,b,c\right)$ е точка на ниво-површината $u\left(x,y,z\right)=C$. Тогаш, $\mathrm{grad}\,f$ за точката P е нормален вектор на површината во P. Тангентната рамнина на површината $u\left(x,y,z\right)=C$ во точка P е зададена со:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p\left(x-a\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p\left(y-b\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_p\left(z-c\right)=0.$$

ЗАДАЧИ

Задача 3.1. Пресметај го изводот на функцијата $f:(x,y,z)\mapsto x+y+z$ во правец на надворешната нормала на сферата, во точката $\mathrm{M}(a,b,c)$ од сферата.

Решение: Сферата е со центар во координатниот почеток и радиус еден. Значи, единечниот вектор на надворешната нормала на сферата во точката $\mathrm{M}(a,b,c)$ е еднаков на радиус векторот во точката M: $\vec{n}=(a,b,c)$. $gradf\left(a,b,c\right)=\left(1,1,1\right)$, па следува дека $\frac{df}{d\vec{n}}\left(a,b,c\right)=\left\langle\left(a,b,c\right),\left(1,1,1\right)\right\rangle=a+b+c$. ☻

Задача 3.2. Дадено е скаларното поле $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$. Определи:

1) правецот и големината на градиентот во точката $\mathrm{A}(2,1,1)$;

2) во кои точки градиентот е нормален на оската $\mathrm{O}z$;

3) во кои точки градиентот е нула.

Решение: 1) Во произволна точка: $grad\,u=3\left(x^2-yz\right)\vec{i}+3\left(y^2-xz\right)\vec{j}+3\left(z^2-xy\right)\vec{k}$, а во точката $\mathrm{A}(2,1,1)$: $grad\,u=9\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$: $\left\|grad\,u\right\|=3\sqrt{11}$.

2) $grad\,u$ е нормален на оската $\mathrm{O}z$, па значи $\left\langle grad\,u,\vec{k}\right\rangle=0$, па $3\left(z^2-xy\right)\cdot1=0$, т.е во точките за кои $z^2=xy$.

3) $grad\,u=0\Leftrightarrow x^2-yz=0,\, y^2-xz=0$ и $z^2-xy=0.$ Множејќи ги овие равенства со x,y,z соодветно, добиваме $xyz=x^3=y^3=z^3$, т.е $x=y=z.$ Значи, $grad\,u=0$ во точките $M(x,y,z)$ за кои е $x=y=z$.. ☻

Задача 3.3. Определи го изводот на функцијата $(x,y,z)\mapsto$ u = во точката $\mathrm{A}(2,2,-1)$, во правец кон точката $\mathrm{B}(-1,2,1)$.

Решение: Изводот на функција во правец се пресметува со: $\frac{df}{d\vec{n}}=\left\langle\vec{n}_0,gradu\right\rangle$, каде што

$$\vec{n}_0=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}=\frac{-3\vec{i}+2\vec{k}}{\sqrt{13}}.$$

Во овој случај, $grad\,u = \vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$, па за точката $A(2,2,-1)$ ќе изнесува $grad\,u = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Значи, $\dfrac{df}{d\vec{n}} = \dfrac{-3\vec{i} + 2\vec{k}}{\sqrt{13}}\left(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$. ☻

Задача 3.4. Определи го изводот на функцијата $(x,y,z) \mapsto u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ во точката $A(2,1,3)$, во насока од таа точка кон точката $B(5,5,15)$.

Решение: Изводот на функција во правец се пресметува со: $\dfrac{du}{d\vec{n}} = \left\langle \vec{n}_0, gradu \right\rangle = \dfrac{\partial u}{\partial x}cos\,\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}cos\,\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}cos\,\gamma$, каде $\vec{n}_0 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \left(\dfrac{3}{13},\dfrac{4}{13},\dfrac{12}{13}\right)$. Во овој случај, $grad\,u(A) = \left(\dfrac{2}{7},\dfrac{1}{7},\dfrac{3}{7}\right)$. Значи $\dfrac{du}{d\vec{n}} = \dfrac{46}{91}$. ☻

Задача 3.5. Определи го изводот на полето $f = 5x^2y - xz^2$ во точката $A(1,2,-3)$, во правец на векторот $l = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\right)$. Колку изнесуваат најголемиот и најмалиот извод во правец во точката A?

Решение: $grad\ f = \left(10xy - z^2, 5x^2, -2xz\right)$, $grad\ f(A) = (11,5,6)$. Изводот на полето f во точката A во правец на векторот l се пресметува со:

$$\frac{df}{dl} = \left\langle grad\ f(A), l \right\rangle = \left\langle (11,5,6), \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\right) \right\rangle = \frac{27 + 6\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

Изводот $\dfrac{df}{dl}$ ќе има најголема вредност за правецот на вектор e, за кој е најголем косинусот на аголот $\varphi = \measuredangle\left(\vec{e}, grad\ f\right)$. Тоа значи, $\varphi = 0$, односно $\vec{e} \parallel grad\ f$. Добивме,

$$max\frac{df}{de} = \left\|grad\ f(A)\right\| = \sqrt{\left\langle (11,5,6),(11,5,6) \right\rangle} = \sqrt{182}.$$

Најмала вредност прима за правец на векторот $-e = -grad\ f$:

$$min\frac{df}{de} = -\left\|grad\ f(A)\right\| = -\sqrt{182}.$$ ☻

Задача 3.6. Нека $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е диференцијабилна функција со особина $\nabla f(P)$ и P се колинеарни вектори за секој $P \in \mathbb{R}^2$. Докажи дека f е константна функција на секоја кружница со центар во координатниот почеток.

Доказ: Одбираме произволно $r > 0$. Дефинираме пресликување $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ со:

$$g(t) = (r\cos t, r\sin t).$$

Доволно е да покажеме дека $f \circ g$ е константа. Ќе го испитаме првиот извод на композицијата:

$$(f \circ g)'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = \alpha g(t) \cdot g'(t) = \alpha r^2 (\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t) = 0$$

откаде следува заклучокот. ☻

Задача 3.7. Нека $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ е диференцијабилна функција со особина $\nabla f(P)$ и P се колинеарни вектори за секој $P \in \mathbb{R}^3$. Докажи дека f е константна функција на секоја сфера со центар во координатниот почеток.

Доказ: Слично на претходниот проблем дефинираме пресликување $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ со:

$$g(t,\theta) = (r\cos t\cos\theta, r\sin t\cos\theta, r\sin\theta)$$

Доволно е да забележиме дека $d(f \circ g)(t,\theta) = 0,\ \forall (t,\theta) \in \mathbb{R}^2$ што следува директно од особината на f. ☻

Задача 3.8. Дадена е површина P со равенката:

$$P:\ x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z$$

1) Изведи ја равенката на тангентната рамнина T во точката $O(1,2,-1)$

2) Изведи ја равенката на нормалата во точката $O(1,2,-1)$.

Решение: 1) Прво ја запишуваме равенката на површината во нормален облик:

$$F(x,y,z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$$

Вектор што е нормален на површината P во точката $O(1,2,-1)$ е определен со:

$$\vec{N}_0 = \nabla F(1,2,-1) = (2xyz - 2z^2)\vec{e}_1 + (x^2z + 6y)\vec{e}_2 + (xy - 4xz + 8)\vec{e}_3 |_{(1,2,-1)} = -6\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 14\vec{e}_3$$

Одбираме произволна точка M од тангентната рамнина T и го придружуваме нејзиниот радиус вектор $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. На точката $O(1,2,-1)$ го придружуваме радиус векторот $\vec{r}_0 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Тогаш равенката на тангентната рамнина во векторска форма го добива следниов облик:

$$T : (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N}_0 = 0$$

или преведено во координатна форма:

$$\left\langle (x-1)\vec{e}_1 + (y-2)\vec{e}_2 + (z+1)\vec{e}_3 \right\rangle \cdot \left\langle -6\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 14\vec{e}_3 \right\rangle = 0$$

откаде добиваме:

$$T : 6x - 11y - 14z + 2 = 0$$

2) Одбираме произволна точка M од нормалата во точката $O(1,2,-1)$ и го придружуваме нејзиниот радиус вектор $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. На точката $O(1,2,-1)$ го придружуваме радиус векторот $\vec{r}_0 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Тогаш равенката на нормалата во векторска форма го добива следниов облик:

$$\left[(\vec{r} - \vec{r}_0), \vec{N}_0 \right] = 0$$

или преведено во координатна форма:

$$det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x-1 & y-2 & z+1 \\ -6 & 11 & 14 \end{pmatrix} = 0$$

што е еквивалентно на равенките:

$$11(x-1) = -6(y-2),\ 14(y-2) = 11(z+1),\ 14(x-1) = -6(z+1)$$

откаде добиваме:

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{14}$$

односно:

$$x = 1 - 6t,\ y = 2 + 11t,\ z = -1 + 14t$$

што е бараната равенка на нормалата во параметарска форма. ☻

Задача 3.9. Докажи дека површината $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ е нормална на секој член од фамилијата на површини $P_a : x^2 + 1 = (2-4a)y^2 + az^2$ во точката на пресек $M(1,-1,2)$.

Доказ: Прво ги запишуваме равенките на дадените површини во нормална форма:

$$F(x,y,z)=x^2-2yz+y^3-4=0,\quad G(x,y,z)=x^2+1-(2-4a)y^2-az^2=0$$

Потоа ги придружуваме векторите на нормалите во произволна точка:

$$\nabla F=2x\vec{e}_1+\left(3y^2-2z\right)\vec{e}_2-2y\vec{e}_3,\ \nabla G=2x\vec{e}_1-2(2-4a)y\vec{e}_2-2az\vec{e}_3$$

Оттука ги пресметуваме векторите на нормалите во точката $M(1,-1,2)$:

$$\vec{N}_F(M)=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3,\quad \vec{N}_G(M)=2\vec{e}_1+2(2-4a)\vec{e}_2-4a\vec{e}_3$$

откаде за скаларниот производ добиваме:

$$\vec{N}_F(M)\cdot\vec{N}_G(M)=2\cdot2-2(2-4a)-2(4a)=0$$

Заклучуваме дека векторите се нормални за произволно a. ☻

Задача 3.10. Докажи дека сферите:

$$S_1:(x-a)^2+y^2+z^2=a^2,\quad S_2:\ x^2+(y-b)^2+z^2=b^2$$

се нормални меѓусебно во произволна точка од пресекот.

Доказ: Одбираме произволна точка $M(x_0,y_0,z_0)$ од пресекот $S_1\cap S_2$. Од претпоставката $M\in S_1\cap S_2$ добиваме:

$$x_0^2-2x_0a+y_0^2+z_0^2=0,\quad x_0^2+y_0^2-2y_0b+z_0^2=0. \tag{3.9}$$

Векторите на нормалите во $M(x_0,y_0,z_0)$ соодветно на сферите S_1 и S_2 се определени со:

$$\vec{N}_1(M)=2(x_0-a)\vec{e}_1+2y_0\vec{e}_2+2z_0\vec{e}_3,\ \vec{N}_2(M)=2x_0\vec{e}_1+2(y_0-b)\vec{e}_2+2z_0\vec{e}_3$$

Сферите се нормални меѓусебно акко се нормални векторите на нормалите. Го проверуваме скаларниот производ:

$$\vec{N}_1(M)\cdot\vec{N}_2(M)=x_0^2+y_0^2+z_0^2-ax_0-by_0$$

Но доколку ги собереме релациите (3.9) добиваме:

$$0=x_0^2+y_0^2+z_0^2-ax_0-by_0=\vec{N}_1(M)\cdot\vec{N}_2(M).$$

Доказот е комплетиран. ☻

Задача 3.11. Определи ги сите точки од површината $P: x^2+2y^2+3z^2-21=0$ со особина тангентните рамнини повлечени во нив да се паралелни со рамнината $\Sigma: x+4y+6z=5$.

Решение: Одбираме произволна точка $M(x_0,y_0,z_0)$ од површината P. Равенката на тангентната рамнина низ точката $M(x_0,y_0,z_0)$ е:

$$T: 2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0.$$

Од условот за паралелност со рамнината Σ ги добиваме релациите:

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6} \Leftrightarrow 2x_0=y_0=z_0.$$

Со замена во равенката на површината добиваме:

$$x_0^2+2\cdot 4x_0^2+3\cdot 4x_0^2=21 \Leftrightarrow 21x_0^2=21 \Leftrightarrow x_0=\pm 1.$$

Оттука бараните точки се $M_1(1,2,2)$, $M_2(-1,-2,-2)$. ☻

Задача 3.12. Докажи дека тангентните рамнини на површината $P: F(xyz)=0$, каде F е строго монотона и диференцијабилна функција т.ш. $F(0)\neq 0$, образуваат со координатните оски тетраедар со постојан волумен.

Доказ: Одбираме произволна точка $M(x_0,y_0,z_0)$ од површината P. Равенката на тангентната рамнина низ точката $M(x_0,y_0,z_0)$ е:

$$T: F'_u(x_0y_0z_0)y_0z_0(x-x_0)+F'_u(x_0y_0z_0)x_0z_0(y-y_0)+F'_u(x_0y_0z_0)x_0y_0(z-z_0)=0$$

каде е воведена смена $u=xyz$. Оттука добиваме:

$$y_0z_0x+z_0x_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0$$

Делењето со F' е оправдано со оглед на строгата монотоност на F.

Ги воведуваме ознаките $a=3x_0, b=3y_0, c=3z_0$. Сега равенката на рамнината ја запишуваме во сегментен облик: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Да забележиме дека делењето со $3x_0y_0z_0$ е оправдано со оглед на условот $F(0)\neq 0$.

Оттука го пресметуваме волуменот на добиениот тетраедар:

$$V=\frac{1}{6}|abc|=\frac{9}{2}|x_0y_0z_0|=\frac{9}{2}\left|F^{-1}(0)\right|.$$

Последната релација е добиена од условот $F(x_0 y_0 z_0)=0$ и строгата монотоност на F. Заклучокот следува. ☻

Задача 3.13. Докажи дека тангентните рамнини на површината:

$$P:\ a(yz+zx+xy)=xyz$$

повлечени во точките на пресек со сферата:

$$S:\quad x^2+y^2+z^2=R^2,$$

што не лежат на координатните оски, отсекуваат со координатните оски отсечки со постојан збир на должини.

Доказ: Равенката на тангентната рамнина на дадената површина P повлечена во точката $M(x_0,y_0,z_0)\in P\cap S$ го има обликот:

$$T:\ (az_0+ay_0-z_0y_0)x+(az_0+ax_0-z_0x_0)y+(ax_0+ay_0-x_0y_0)z+x_0y_0z_0=0.$$

Да забележиме дека од условот може да претпоставиме дека координатите на M се ненулти. Во спротивно точката мора да лежи на некоја од координатните оски што е противречност.

Од равенката на површината имаме:

$$az_0+ay_0-z_0y_0=-\frac{ay_0z_0}{x_0},\ az_0+ax_0-z_0x_0=-\frac{ax_0z_0}{y_0},\ ax_0+ay_0-x_0y_0=-\frac{ax_0y_0}{z_0}$$

откаде тангентната рамнина го добива обликот:

$$-\frac{ax}{x_0^2}-\frac{ay}{y_0^2}-\frac{az}{z_0^2}+1=0\Leftrightarrow\frac{x}{\frac{x_0^2}{a}}+\frac{y}{\frac{y_0^2}{a}}+\frac{z}{\frac{z_0^2}{a}}=1$$

Сега збирот на должините на отсечоците со координатните оски е определен со:

$$\frac{x_0^2}{a}+\frac{y_0^2}{a}+\frac{z_0^2}{a}=\frac{R^2}{a}=const$$

што и требаше да докажеме. ☻

Задача 3.14. Докажи дека ако:

$$F(x,y,z)=F^*(x,y,z)+\sum_{\nu=1}^{n}F_\nu(x,y,z),$$

каде што F^* е нехомогена функција или нула, а F_ν се хомогени функции со степен на хомогеност m_ν, равенката на тангентната равенка на површината: $P: F(x,y,z)=0$ е определена со:

$$\vec{R}\cdot\nabla F=\vec{r}\cdot\nabla F^*+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu F_\nu . \tag{3.10}$$

каде $\vec{R}$ е радиус вектор на произволна точка од тангентната рамнина, а $\vec{r}$ е радиус вектор на допирната точка.

Доказ: Прво ќе ја запишеме равенката на тангентната рамнина во векторски облик:

$$\left(\vec{R}-\vec{r}\right)\cdot\nabla F=0, \text{ односно } \vec{R}\cdot\nabla F=\vec{r}\cdot\nabla F$$

Сега горната релација со оглед на релацијата (3.10) го добива обликот:

$$\vec{R}\cdot\nabla F=\vec{r}\cdot\nabla F^*+\sum_{\nu=1}^{n}\vec{r}\nabla F_\nu . \tag{3.11}$$

Но од теоремата на Ојлер за хомогени функции (види глава 2. проблем.10) важи следнава релација:

$$\vec{r}\cdot\nabla F_\nu=m_\nu F_\nu$$

Ја заменуваме последнава релација во (3.11). Тврдењето следува. ☻

Задача 3.15. Изведи ја равенката на тангентната рамнина на торусот:

$$r=\left\langle\left(2+sin(v)\right)cos\,u,\left(2+sin(v)\right)sin\,u,cos\,v\right\rangle$$

во точката $r(0,0)$.

Решение: Векторите r_u, r_v се определени со:

$$r_u=\left\langle-\left(2+\sin(v)\right)\sin(u),\left(2+\sin(v)\right)\cos(u),0\right\rangle$$

$$r_v=\left\langle\cos(v)\cos(u),\cos(v)\sin(u),-\sin(v)\right\rangle$$

Оттука ги пресметуваме $r_u(0,0)$, $r_v(0,0)$:

$$r_u(0,0)=\langle 0,2,0\rangle=2\vec{e}_2,\quad r_v(0,0)=\langle 1,0,0\rangle=\vec{e}_1$$

Сега вектор нормален на тангентната рамнина е определен со:

$$\vec{n}=\left[r_u(0,0),r_u(0,0)\right]=\left[2\vec{e}_2,\vec{e}_1\right]=-2\vec{e}_3 .$$

Од тоа што $r(0,0)=(2,0,1)$ односно $\vec{n}=\langle 0,0,-2\rangle$ следува дека равенката на тангентната рамнина е определена со:

$$0(x-2)+0(y-0)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow z=1. \text{ ☻}$$

Задача 3.16. Пресметај го единечниот нормален вектор и изведи ја равенката на тангентната рамнина на цилиндарот:

$$r(u,v)=\langle 3\cos(u),3\sin(u),v\rangle$$

во точката $r(\pi,2)=(-3,0,2)$.

Решение: Прво ги определуваме векторите r_u, r_v:

$r_u=\langle -3\sin(u),3\cos(u),0\rangle=-3\sin(u)\vec{e}_1+3\cos(u)\vec{e}_2$; $r_v=\langle 0,0,1\rangle=\vec{e}_3$

Сега за нивниот векторски производ добиваме:

$$\begin{aligned}[r_u,r_v]&=\left[-3\sin(u)\vec{e}_1+3\cos(u)\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]=\left[-3\sin(u)\vec{e}_1,\vec{e}_3\right]+\left[3\cos(u)\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]=\\&=3\sin(u)\vec{e}_2+3\cos(u)\vec{e}_1.\end{aligned}$$

Лесно пресметуваме дека $\|[r_u,r_v]\|=3$, откаде за единечниот вектор нормален на цилиндарот добиваме:

$$\vec{n}=\frac{[r_u,r_v]}{\|[r_u,r_v]\|}=\cos(u)\vec{e}_1+\sin(u)\vec{e}_2$$

Оттука го пресметуваме единечниот вектор во точката $r(\pi,2)$:

$$\vec{n}(\pi,2)=\cos(\pi)\vec{e}_1+\sin(\pi)\vec{e}_2=\langle -1,0,0\rangle$$

откаде за равенката на тангентната рамнина добиваме:

$$-1(x+3)+0(y-0)+0(z-2)=0 \Leftrightarrow x=-3. \text{ ☻}$$

Задача 3.17. Објасни дали површината $z=x^2\cos(y)$ е ориентабилна?

Решение: Равенката на површината ја запишуваме во нормален облик: $z - x^2\cos(y) = 0$. а потоа ја разгледуваме функцијата: $U(x, y, z) = z - x^2\cos y$. Го пресметуваме градиентот: $\nabla U(x, y, z) = \langle -2x\cos(y), x^2\sin(y), 1\rangle$. Сега за единечниот вектор нормален на површината добиваме:

$$\vec{n} = \frac{\nabla U}{\|\nabla U\|} = \frac{\langle -2x\cos(y), x^2\sin(y), 1\rangle}{\sqrt{4x^2\cos^2(y) + x^4\sin^2(y) + 1}}.$$

Со оглед на тоа што третата координата е 1, $\nabla U \neq 0$, па $\vec{n}$ непрекинато се менува низ површината. Уште повеќе заради позитивноста на третата координата, нормалните вектори ќе бидат над површината. Според дефиницијата ова значи дека површината е ориентабилна. ☻

Задача 3.18. Пресметај го единечниот нормален вектор на површината:

$$r(\theta, z) = \langle z\cos(\theta), z\sin(\theta), \cosh(z)\rangle,\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0,1]$$

Образложи дали површината е ориентабилна?

Решение: Прво ги определуваме векторите r_θ, r_z: $r_z = \langle \cos(\theta), \sin(\theta), \sinh(z)\rangle$, $r_\theta = \langle -z\sin(\theta), z\cos(\theta), 0\rangle$. За векторскиот производ добиваме: $[r_z, r_\theta] =$ $= z\langle -\sinh(z)\cos(\theta), -\sinh(z)\sin(\theta), 1\rangle$.За модулот на векторскиот производ добиваме:

$$\|[r_z, r_\theta]\|^2 = z^2\left(\sinh^2(z)\cos^2(\theta) + \sinh^2(z)\sin^2(\theta) + 1\right) = z^2\left(\sinh^2(z) + 1\right) = z^2\cosh^2(z).$$

Оттука за единечниот нормален вектор на површината имаме:

$$\vec{n} = \frac{[r_z, r_\theta]}{\|[r_z, r_\theta]\|} = \frac{z\langle -\sinh(z)\cos(\theta), -\sinh(z)\sin(\theta), 1\rangle}{z\cosh(z)} =$$

$$= \langle -\tanh(z)\cos(\theta), -\tanh(z)\sin(\theta), \operatorname{sec} h(z)\rangle.$$

Да забележиме дека $\vec{n}(z, \theta)$ е непрекината функција, па површината е ориентабилна. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Определи ја областа на дефинираност и еквискаларните површини на скаларното поле $u=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2}}$.

Определи ги еквискаларните површини на скаларното поле: (2-7)

2. $u=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.   3. $u=x^2+y^2+z^2$.   4. $u=\|\vec{r}\|^2$.

5. $u=\langle\vec{a},\vec{r}\rangle=a_1x+a_2y+a_3z$ каде $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ е константен вектор и $\vec{r}=(x,y,z)$ е вектор положба на произволна точка .

6. $u=x+y+z$.   7. $u=x^2+y^2-z^2$

Пресметај го градиентот на следниве функции на положба: (8-9)

8. $\varphi(M)=\frac{z}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$;   9. $\varphi(M)=\ln(x+y)$;

10. Определи ги интензитетот и правецот на градиентот на полето $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ во точката $A(2,1,1)$. Во кои точки градиентот на полето е ортогонален со $z-$оската? Во кои точки е еднаков на нула?

11. Определи го изводот на функцијата $(x,y,z)\mapsto u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ во точката $A(x,y,z)$, во правец на вектор положбата на таа точка

12. Во точката $A(a,b,c)$, која се наоѓа на сферата $x^2+y^2+z^2=1$, определи го изводот на функцијата $(x,y,z)\mapsto u=x+y+z$ во правец на надворешната нормала на сферата во таа точка. Определи ги точките од сферата во кои овој извод има:

1) најголема вредност,   2) најмала вредност,   3) вредност нула.

Најди ги тангентната рамнина и нормалата на површината: (13.-14.)

13. $xz^2+x^2y=z-1$ во точката $P(2,-1,-1)$.

14. $x^3+xyz+z^2-3xz+2y-11=0$ во точката $P(1,2,3)$.

ГЛАВА 4

РАЗВОЈ ПО ТЕЈЛОР И ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Тејлорова формула за функции со повеќе променливи

Нека множеството $E \subset \mathbb{R}^n$ е отворено сврзано множество, $a = (a_1, \cdots, a_n) \in E$ и функцијата $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ во некоја околина $U(a)$ на точката a ги има сите парцијални изводи до $m+1$-от и сите се непрекинати $\left(f \in C^{m+1}(U(a)) \right)$.

Теорема 4.1. (Тејлорова формула). Нека функцијата $\left(f \in C^{m+1}(U(a)) \right)$. Тогаш, за секое $x \in U(a)$, постои точка $\xi = \left(\xi_1, \cdots, \xi_n\right) \in [a, x]$ така што важи формулата:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - a_n) \right)^{(1)} f(a) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - a_n) \right)^{(2)} f(a) + \cdots \tag{4.1}$$

$$\cdots + \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - a_n) \right)^{(m)} f(a) +$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}(x_n-a_n)\right)^{(m+1)} f(\xi).$$

Полиномот:

$$T_m(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}(x_n-a_n)\right)^{(k)} f(a) \qquad (4.2)$$

е *Тејлоров полином* со степен m на функцијата f во околината $U(a)$ на точката a.

Последниот член во Тејлоровата формула

$$R_m(x)=\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}(x_n-a_n)\right)^{(m+1)} f(\xi). \qquad (4.3)$$

е остатокот на Тејлоровата формула.

Кратко може да запишеме $R_m(x)=f(x)-T_m(x)$ за апроксимација на функцијата f со Тајлоровиот полином во околината $U(a)$ на точката a: $f(x)\approx T_m(x)$.

Со (4.1) е дадена Тејлоровата формула со *Лагранжов облик на остатокот*.

Теорема 4.2. Нека функцијата f има непрекинати парцијални изводи од ред m во околина $U(a)$ на точката a. Тогаш, остатокот од Тејлоровата формула може да се напише во облик:

$$R_m(x)=\tfrac{1}{m!}\omega(x)\rho^m, \qquad (4.4)$$

каде што ω е непрекината функција во точката a и $\lim\limits_{x\to a}\omega(x)=\omega(a)=0$ и $\rho=\|x-a\|$.

Со (4.4) е дадена Тејлоровата формула со *Пеанов облик на остатокот*, и пишуваме

$$f(x)=T_m(x)+o\left(\rho^m\right),(\rho\to 0). \qquad (4.5)$$

Ако $a=0\left(=(0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n\right)$, тогаш формулата (4.1) се вика Меклоренова формула, (4.2) - Меклоренов полином, (4.3) - Меклоренов остаток.

Локални екстреми на функции со повеќе променливи

Нека $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Множеството E може да биде целиот домен или дел од доменот на функцијата f. Ќе претпоставиме дека f е непрекината функција на E.

Дефиниција 4.1. Нека $a \in \operatorname{int} E$. Ќе велиме дека функцијата f има *локален максимум* (*минимум*) во точката a, ако во некоја околина на a е исполнето неравенството.

$$f(x) \le f(a) \quad \left(f(x) \ge f(a) \right). \tag{4.6}$$

Ќе велиме дека функцијата f има *строг локален максимум (минимум)* во точката a, ако во некоја околина на a е исполнето неравенството

$$f(x) < f(a) \quad \left(f(x) > f(a) \right). \tag{4.7}$$

Локалниот минимум и локалниот максимум со еден збор ги викаме *локален екстрем,*

Теорема 4.3. Ако функцијата f има локален екстрем во точката $a \in \operatorname{int} E$ и ако во некоја околина на оваа точка постојат првите парцијални изводи, тогаш

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Специјално, ако f е диференцијабилна во a, тогаш $df\left(a\right) = 0$.

Дефиниција 4.2. Точките во кои сите парцијални изводи од прв ред се нули т.е. решенијата на системот равенки:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

се викаат *стационарни точки* на функцијата f.

Теорема 4.4. (Потребен услов за локален екстрем на функција со $n-$ променливи) Ако функцијата f има локален минимум во точката $a \in \operatorname{int} E$ и ако во некоја околина на оваа точка има непрекинати први и втори парцијални изводи, тогаш

$$df(a) = 0, \quad d^2 f(a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(a\right) dx_i dx_j \ge 0. \tag{4.9}$$

Ако функцијата f има локален максимум во точката $a \in \operatorname{int} E$ и ако во некоја околина на оваа точка има непрекинати први и втори парцијални изводи, тогаш

$$df(a) = 0, \quad d^2 f(a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(a\right) dx_i dx_j \le 0. \tag{4.10}$$

Дефинитност на квадратна форма. Реална функција со n променливи од облик

$$\Phi\left(h_1,\cdots,h_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j \tag{4.11}$$

$a_{i,j}=a_{j,i}, \forall i,j$, се вика *квадратна форма* Φ.

Велиме дека квадратната форма е *позитивно (негативно) полудефинитна* ако $\forall\left(h_1,\cdots,h_n\right)\in\mathbb{R}^n$ важи

$$\Phi\left(h_1,\cdots,h_n\right)\geq 0 \qquad \left(\Phi\left(h_1,\cdots,h_n\right)\leq 0\right).$$

Велиме дека квадратната форма е *позитивно (негативно) дефинитна* ако $\forall\left(h_1,\cdots,h_n\right)\neq\left(0,\cdots,0\right)$ важи

$$\Phi\left(h_1,\cdots,h_n\right)> 0 \qquad \left(\Phi\left(h_1,\cdots,h_n\right)< 0\right).$$

Велиме дека квадратната форма е со *променлив знак* ако постојат $\left(h_1,\cdots,h_n\right)$, $\left(k_1,\cdots,k_n\right)\in\mathbb{R}^n$ така што

$$\Phi\left(h_1,\cdots,h_n\right)>0 \quad \text{и} \quad \Phi\left(k_1,\cdots,k_n\right)<0.$$

За испитување дефинитност на квадратна форма се користи **Силвестеров критериум:** Нека

$$A\left(\Phi\right)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

е матрица на квадратната форма $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и нека

$$\Delta_1=a_{11}, \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n=\det A\left(\Phi\right)$$

се нејзините главни минори.

Квадратната форма Φ е позитивно дефинитна ако, и само ако главните минори се позитивни, односно

$$\Delta_1>0, \Delta_2>0, \cdots, \Delta_n>0.$$

Квадратната форма Φ е негативно дефинитна ако, и само ако минорите наизменично го менуваат знакот, со тоа што $\Delta_1<0$, односно

$$\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0, \cdots.$$

Теорема 4.6. (Доволни услови за локален екстрем на функција од $n-$ променливи) Нека $f\in C^2(U(a))$ во некоја околина $U(a)$ на точката $a\in\mathbb{R}^n$ и нека $df\left(a\right)=0$. Тогаш,

1) ако вториот диференцијал $d^2f\left(a\right)$ е позитивно дефинитна квадратна форма, тогаш a е точка на строг локален минимум на функцијата f.

2) ако вториот диференцијал $d^2f\left(a\right)$ е негативно дефинитна квадратна форма, тогаш a е точка на строг локален максимум на функцијата f.

3) ако $d^2 f(a)$ е со променлив знак, тогаш f нема екстрми во точката a.

Последица 4.1. Нека $E \subset \mathbb{R}^2$ е отворено сврзано множество, $(a,b) \in E$ и $f \in C^2(E)$, при што (a,b) е стационарна точка на функцијата f, односно $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Да означиме $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ и $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$. Тогаш,

1) ако $A > 0,\ AC - B^2 > 0$ тогаш, функцијата f има строг локален минимум во точката (a,b)

2) ако $A < 0,\ AC - B^2 > 0$ тогаш. функцијата f има строг локален максимум во точката (a,b)

3) ако $AC - B^2 < 0$, тогаш функцијата f во точката (a,b) нема локален екстрем.

Условни (врзани) екстреми

Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е отворено множество, $f, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k\ _{(k<n)} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и нека

$E = \{x \in \Omega : \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \cdots, \varphi_k(x) = 0\}$.

За точката $a = (a_1, \cdots, a_n) \in E$ велиме дека е *точка на услвен минимум (максимум) за функцијата* f *при услови*

$$\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \cdots, \varphi_k(x) = 0 \tag{4.12}$$

ако постои околина $U(a)$ на точката a, така што за секое $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E \cap U(a)$ е исполнето неравенството

$$f(x) \geq f(a) \quad \left(f(x) \leq f(a)\right).$$

За точката $a = (a_1, \cdots, a_n) \in E$ велиме дека е точка на *строг условен минимум (максимум)* за функцијата f при услови (4.12) ако постои околина $U(a)$ на точката a, така што за секое $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E \cap U(a)$ е исполнето неравенството $f(x) > f(a) \quad \left(f(x) < f(a)\right)$.

Со едно име точките на условен минимум и максимум се викаат точки на *условен екстрем.*

Метод на множители на Лагранж

Ја разгледуваме функцијата со $n+k$ променливи:

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)+\cdots+\lambda_k\varphi_k(x) \tag{4.13}$$

при што $x\in\Omega$ а $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\in\mathbb{R}^k$. Броевите $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ ќе ги викаме *множители на Лагранж*, а функцијата $L(x,\lambda)$ ќе ја викаме *функција на Лагранж*.

Теорема 4.7. (Лагранж) Нека $(a_1,\cdots,a_n)$ е точка на условен екстрем на функцијата f, при врските $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$. Ако f и $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ имаат непрекинати изводи во некоја околина на точката a и ако во таа точка матрицата

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

има ранг k, тогаш постојат броеви $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ така што во точката $(a,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ е стационарна точка на Лаграновата функција, односно задоволен е следниов систем равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}=0\,,\quad j=1,2,\cdots n \tag{4.15}$$

$$\varphi_i=0\,,\quad i=1,2,\cdots k\,.$$

Теорема 4.8. Нека $x_1,\cdots,x_n$ и $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ го задоволуваат системот (4.15). Ако функцијата

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda_1\varphi_1(x)+\cdots+\lambda_k\varphi_k(x)=0 \tag{4.16}$$

има екстрем во точката $a=(a_1,\cdots,a_n)$, тогаш $f(a_1,\cdots,a_n)$ е условен екстрем на функцијата f, при врските $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$.

ЗАДАЧИ

Задача 4.1. Функцијата $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ да се разложи по Тејлорова формула во околина на точката $(1,-2)$.

Решение: Вредноста на функцијата и парцијалните изводи од прв и втор ред пресметани во точката $(1,-2)$ се: $f(1,-2)=5$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2)=4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-2)=-1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-2)=-2$. Парцијалните изводи од ред повисок од 2 се нула. Одовде:

$$f(x,y)=5+\frac{1}{1!}(0+0)+\frac{1}{2!}\left(4(x-1)^2+2(-1)(x-1)(y+2)+(-2)(y+2)^2\right)=$$
$$=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2. \quad ☻$$

Задача 4.2. Да се разложи по Тејлорова формула до членови од втор ред функцијата $f(x,y)=e^x \sin y.$ Користејќи го тој резултат, приближно да се пресмета $e^{0.1}\sin 0.49\pi.$

Решение: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^x\sin y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^x\cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=e^x\sin y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=$ $=e^x\cos y,$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-e^x\sin y \Rightarrow f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+e^x\sin y\Delta x+e^x\cos y\Delta y+$ $+\frac{1}{2}\left(e^x\sin y(\Delta x)^2+2e^x\cos y\Delta x\Delta y-e^x\sin y(\Delta y)^2\right)+R_3$.

Ако избереме $x=0,\ y=\frac{\pi}{2},\ \Delta x=0.1,\ \Delta y=-0.01\pi$ добиваме:

$$e^{0.1}\sin 0.49\pi\approx e^0\sin\frac{\pi}{2}+e^0\sin\frac{\pi}{2}\cdot 0.1+e^0\cos\frac{\pi}{2}(-0.01)\pi+\frac{1}{2}e^0\sin\frac{\pi}{2}(0.1)^2+$$
$$+e^0\cos\frac{\pi}{2}\cdot 0.1\cdot(-0.01)\pi-\frac{1}{2}e^0\sin\frac{\pi}{2}(-0.01\pi)^2=1+0.1+0.005-\cdots\approx 1.105. \quad ☻$$

Задача 4.3. Нека

$$z^3-2xz+y=0, \tag{4.17}$$

каде што $z = z(x, y)$ и за $x = y = 1,\ z = 1$. Да се најде Тејлоровиот полином $T_2(x, y)$ на функцијата z во точката $(1,1)$.

Решение: Очигледно, $z(1,1) = 1$. Со метода на имплицитно диференцирање, од (4.17) добиваме:

$$\begin{aligned} &3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2z - 2x \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ &3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

За $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ добиваме: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -1$.

Со повторно диференцирање на равенките (4.18) (првата по x и y, втората по y), добиваме:

$$\begin{aligned} &6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(3z^2 - 2x\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ &6z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \left(3z^2 - 2x\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \\ &6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Од овие равенки, за $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ добиваме: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -16,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6.$

Го добивме бараниот полином

$$T_2(1,1) = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2.$$ ☻

Задача 4.4. Развиј ја функцијата:

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y + xy)$$

во Меклоренова форма заклучно со членовите од n-ти ред, а потоа направи оценка на остаточниот член.

Решение: Да забележиме дека $f(0,0) = 0$, па првиот член од развојот е нула. Ги пресметуваме парцијалните изводи од прв ред: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1+y}{1+x+y+xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1+x}{1+x+y+xy}$

од каде што добиваме: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Значи, развојот на f заклучно до прв ред е само $x+y$. Одиме со пресметка на парцијалните изводи од втор ред:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{(1+y)^2}{(1+x+y+xy)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{(1+x)^2}{(1+x+y+xy)^2},$$

додека за мешаните парцијални изводи од втор ред добиваме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{1+x+y+xy-(1+x)(1+y)}{(1+x+y+xy)^2}=0$$

Но, ова значи дека и мешаните парцијални изводи од ред $r\geq 2$ се нули. Следува дека за бараниот развој доволно е да ги пресметаме $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ односно $\frac{\partial^k f}{\partial y^k}$, $k\in\mathbb{N}$. Ги пресметуваме парцијалните изводи од k-ред по x односно y:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!(1+y)^k}{(1+x+y+xy)^k}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial y^k}=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!(1+x)^k}{(1+x+y+xy)^k}$$

од каде што добиваме $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0,0)=(-1)^{k+1}(k-1)!=\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(0,0)$.

Оттука, за бараниот развој имаме:

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}+\frac{(-1)^{k+1}y^k}{k}\right)+R_n(x,y)$$

каде што за остаточниот член важи:

$$R_n(x,y)=\left(\frac{(-1)^{n+2}\left(1+y^*\right)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)\left(1+x^*+y^*+x^*y^*\right)^{n+1}}\right)+\left(\frac{(-1)^{n+2}\left(1+x^*\right)^{n+1}y^{n+1}}{(n+1)\left(1+x^*+y^*+x^*y^*\right)^{n+1}}\right)$$

за некој вектор $\left(x^*,y^*\right)$ со особина $d\left(\left(x^*,y^*\right),0\right)<\sqrt{x^2+y^2}$.

Ако $-1<x\leq 1$ и $-1<y\leq 1$ за остатокот ја имаме следнава оценка:

$$\left|R_n(x,y)\right|\leq\frac{2}{n+1}\to 0, \text{ кога } n\to\infty,$$

што значи дека за $-1<x\leq 1$ и $-1<y\leq 1$ го оправдавме развојот:

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\left(x^k+y^k\right)}{k}. \ ☻$$

Забелешка: Да забележиме дека:

$$f(x,y)=\ln(1+x+y+xy)=\ln\left((1+x)(1+y)\right)=\ln(1+x)+\ln(1+y)$$

па можевме да го употребиме развојот на Меклорен за функцијата од една променлива:

$$f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$

од каде ќе го добиевме истиот резултат.

Задача 4.5. Развиј ја функцијата: $f(x,y)=e^{x^2+y}$ во Меклоренова форма заклучно до членовите од 3-ред.

Решение: Директниот метод е да ги пресметаме сите парцијални изводи од ред ≤ 3, а потоа да ги замениме во Тејлоровата формула за функции од повеќе променливи. Но, во случајов може да одиме и со познатиот развој на експоненцијалната функција, изоставувајќи ги членовите од ред >3. Ќе го следиме овој пристап:

$$\begin{aligned} e^{x^2+y} &=1+\left(x^2+y\right)+\frac{\left(x^2+y\right)^2}{2}+\frac{\left(x^2+y\right)^3}{6}+\left(ред>3\right)\\ &=1+x^2+y+\frac{1}{2}\left(x^4+2x^2y+y^2\right)+\frac{1}{6}\left(x^6+3x^4y+3x^2y^2+y^3\right)+\left(ред>3\right)\\ &=1+y+x^2+\frac{1}{2}y^2+x^2y+\frac{1}{6}y^3+\left(ред>3\right). \end{aligned}$$

Во последната релација ги префрливме членовите x^4, x^6, x^4y, x^2y^2 во корпата за отпадоци затоа што се од ред повисок од 3. Значи, бараниот развој е:

$$1+y+x^2+\frac{1}{2}y^2+x^2y+\frac{1}{6}y^3.$$

Алтернативно, можевме да одиме на следниов начин:

$$e^{x^2+y}=e^{x^2}e^y=\left(1+x^2+\ldots\right)\left(1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3+\ldots\right)=1+y+x^2+\frac{1}{2}y^2+x^2y+\frac{1}{6}y^3+\ldots$$ ☻

Задача 4.6. Развиј ја во Меклоренова форма функцијата: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ до членовите од 4-ти ред заклучно.

Решение: Ќе го определиме диференцијалот на функцијата f до 4-ти ред заклучно. Одиме со диференцијалот од прв ред:

$$df\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2xdx-2ydy\right).$$

Последователно ги пресметуваме и диференцијалите од повисок ред:

$$d^2f\left(x,y\right)=-\frac{1}{4}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-2xdx-2ydy\right)^2+\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2dx^2-2dy^2\right).$$

За диференцијалот од трет ред добиваме:

$$d^3f\left(x,y\right)=\frac{3}{8}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(-2xdx-2ydy\right)^3-\frac{3}{4}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-2xdx-2ydy\right)\left(-2dx^2-2dy^2\right)$$

од каде за диференцијалот од четврти ред имаме:

$$\begin{aligned}d^4f\left(x,y\right)=&-\frac{15}{16}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{7}{2}}\left(-2xdx-2ydy\right)^4+\\&+\frac{9}{4}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(-2xdx-2ydy\right)^2\left(-2dx^2-2dy^2\right)-\\&-\frac{3}{4}\left(1-x^2-y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-2dx^2-2dy^2\right)^2.\end{aligned}$$

Сега ги правиме пресметките за $x=y=0$, $dx=x,\ dy=y$:

$$f\left(0,0\right)=1,\ df\left(0,0\right)=0,\ d^2f\left(0,0\right)=-\left(x^2+y^2\right),\ d^3f\left(0,0\right)=0,\ d^4f\left(0,0\right)=-3\left(x^2+y^2\right)^2$$

од каде за бараниот развој имаме:

$$\begin{aligned}f\left(x,y\right)=&\ f\left(0,0\right)+df\left(0,0\right)+\frac{1}{2!}d^2f\left(0,0\right)+\frac{1}{3!}d^3f\left(0,0\right)+\\&+\frac{1}{4!}d^4f\left(0,0\right)+R_4\left(x,y\right)=1-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\right)^2+R_4\left(x,y\right).\end{aligned}$$ ☻

Задача 4.7. Развиј ја во Меклоренов ред следнава функција:

$$f\left(x,y\right)=\sin\left(x^2+y^2\right)$$

Решение: Го ползуваме Меклореновиот развој на функцијата:

$$\sin u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}u^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!},\quad u\in\mathbb{R}$$

Воведуваме смена $u=x^2+y^2$ во горната релација, па добиваме:

$$\sin\left(x^2+y^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(x^2+y^2\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}\ ,\quad x,y\in\mathbb{R}\ .$$ ☻

Задача 4.8. Развиј ја во Меклоренов ред следнава функција:

$$f(x,y)=e^x\sin y$$

Решение: Го запишуваме развојот во општ облик:

$$f(x,y)=f(0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)$$

од каде со оглед на биномниот развој имаме:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}.$$

Воведуваме смена $n-m=k$ и добиваме:

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m y^k}{m!k!}\frac{\partial^{m+k} f(0,0)}{\partial x^m\partial y^k}\tag{4.20}$$

Ги пресметуваме парцијалните изводи:

$$\frac{\partial^{m+k} f(x,y)}{\partial x^m\partial y^k}=\frac{\partial^{m+k}\left(e^x\sin y\right)}{\partial x^m\partial y^k}=e^x\sin\left(y+k\frac{\pi}{2}\right)$$

од каде што за $x=y=0$:

$$\frac{\partial^{m+k} f(0,0)}{\partial x^m\partial y^k}=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^n\,, & k=2p+1\\ 0, & k=2p\end{cases}.$$

Со замена на последнава релација во (4.20) добиваме:

$$f(x,y)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\,x^m y^{2p+1}}{m!(2p+1)!}\,,\quad x,y\in\mathbb{R}\,.$$ ☻

Задача 4.9. Развиј ја во Тејлорова форма следнава функција:

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

во околина на точката $(1,1,1)$.

Решение. Да забележиме дека сите парцијални изводи од ред $r\geq 4$ се нули, па остатокот во Тејлоровиот развој $R_n=0$, за $n\geq 3$. Оттука бараниот развој е од облик:

$$f(x,y,z)=f(1,1,1)+df(1,1,1)+\frac{1}{2!}d^2f(1,1,1)+\frac{1}{3!}d^3f(1,1,1) \tag{4.21}$$

каде $dx=x-1,\ dy=y-1,\ dz=z-1$.

Останува да ја пресметаме функцијата и нејзините диференцијали во точката $(1,1,1)$:

$$f(1,1,1)=0,\ df(1,1,1)=0,$$
$$d^2f(1,1,1)=6\Big((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)\Big)$$
$$d^3f(1,1,1)=6\Big((x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3\Big)-18(x-1)(y-1)(z-1)\,.$$

Со замена во релацијата (4.21) го добиваме бараниот развој:

$$f(x,y,z)=3(x-1)^2+3(y-1)^2+3(z-1)^2-3(x-1)(y-1)-3(x-1)(z-1)-$$

$$-3(y-1)(z-1)+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1).$$ ☻

Задача 4.10. Развиј ја во Тејлорова форма следнава функција: $f(x,y)=x^2y^3$ заклучно со членовите од втор ред во околина на точката $(1,1)$.

Решение: Според условот треба да ја пресметаме следнава сума:

$$f(x,y)=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)(x-1)(y-1)+\dots$$

Одиме со парцијалните изводи од прв ред:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^3,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^2y^2\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=3$$

Слично, за парцијалните изводи од втор ред имаме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y^3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6x^2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=6xy^2$$

од каде ги пресметуваме во точката $(1,1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)=6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)=6\,.$$

Оттука бараниот развој е:

$$f(x,y)\approx 1+2(x-1)+3(y-1)+(x-1)^2+3(y-1)^2+6(x-1)(y-1)=$$
$$=6-6x-9y+x^2+3y^2+6xy.$$

Очекуваме добра локална апроксимација на функцијата во околина на точката $(1,1)$. Ќе ја пресметаме вредноста на остатокот од последниот развој во точката $(1.1,0.9)$. Според горната апроксимација имаме: $f(1.1,0.9)\approx 0.88$. Она што не' интересира е грешката при ова приближување. Од Тејлоровата формула за остатокот добиваме:

$$R_2(\tilde{x},\tilde{y})=(-0.1)^3\tilde{x}^2+3\tilde{y}^2(0.1)^2(-0.1)+6\tilde{x}\tilde{y}(0.1)(-0.1)^2$$

пресметан во точката $(1.1,0.9)$, каде $(\tilde{x},\tilde{y})$ е некоја точка така што

$$1<\tilde{x}<1.1 \quad \text{и} \quad 0.9<\tilde{y}<1$$

Ќе го запишеме во следниов облик:

$$R_2\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=\left(0.1\right)^3\left(6\tilde{x}\tilde{y}-\tilde{x}^2-3\tilde{y}^2\right)$$

од каде што добиваме: $R_2\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)<\left(0.1\right)^3\left(6\cdot\left(1.1\right)\cdot 1-\left(1\right)^2-3\left(0.9\right)^2\right)=0.00317.$

Ова значи дека максималната грешка што ја правиме очекуваме да е помала од 0.00317.

Ќе го провериме ова со директна пресметка на вредноста:

$$f\left(1.1,0.9\right)=\left(1.1\right)^2\left(0.9\right)^3=0.88209\,.$$

Разликата со добиената приближна вредност е $0.00209<0.00317$. ☻

Задача 4.11. Пресметај го парцијалниот извод $\frac{\partial^{29} f}{\partial x^{12}\partial y^{17}}$ во точката $M\left(0,0\right)$ на функцијата:

$$f\left(x,y\right)=\frac{e^{x^2y^3}}{1+x^5y^7}\,.$$

Решение. Директниот метод е да ги пресметаме сите последователни парцијални изводи за функцијата f, а потоа да замениме $\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$. Ќе се обидеме да го заобиколиме овој пристап☺.

Одиме со развојот на Меклорен за функциите:

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots \quad \text{односно} \quad \frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots$$

од каде што добиваме:

$$e^{x^2y^3}=1+x^2y^3+\frac{x^4y^6}{2!}+\frac{x^6y^9}{3!}+\ldots$$

односно:

$$\frac{1}{1+x^5y^7}=1-x^5y^7+x^{10}y^{14}-x^{15}y^{21}+\ldots$$

Оттука за развојот на f имаме:

$$f(x,y)=\left(1+x^2y^3+\frac{x^4y^6}{2!}+\frac{x^6y^9}{3!}+\ldots\right)\left(1-x^5y^7+x^{10}y^{14}-x^{15}y^{21}+\ldots\right)$$

односно:

$$f(x,y)=1-x^5y^7+x^{10}y^{14}-x^{15}y^{21}+\ldots+x^2y^3-x^7y^{10}+x^{12}y^{17}-\ldots$$

Да забележиме дека коефициентот пред $x^{12}y^{17}$ е 1. Сега од развојот на Меклорен имаме:

$$f(x,y)=f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2f(0,0)+\ldots+\frac{1}{29!}d^{29}f(0,0)+R_{29}(x,y)$$

каде што:

$$d^{29}f(0,0)=\sum_{k=0}^{29}\binom{29}{k}\frac{\partial^{29}f}{\partial x^k\partial y^{29-k}}(0,0)x^ky^{29-k}$$

Следува дека за $k=12$ важи:

$$\frac{1}{29!}\binom{29}{12}\frac{\partial^{29}f}{\partial x^{12}\partial y^{17}}(0,0)=1$$

од каде што добиваме:

$$\frac{\partial^{29}f}{\partial x^{12}\partial y^{17}}(0,0)=\frac{29!}{\binom{29}{12}}=12!17!.$$ ☻

Задача 4.12. Ползувајќи Тејлоров развој докажи дека функцијата:

$$f(x,y)=\left(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3}\right)e^{0.75x^2+y^2}$$

во точката $(0,0)$ достигнува локален минимум.

Доказ: Одиме со полиномна апроксимација на Тејлор за функцијата f во околина на точката $(0,0)$ заклучно со втор ред:

$$f(x,y)\approx 1+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2$$

Да забележиме дека за точките (x,y) што се доволно блиску до $(0,0)$ апроксимацијата е произволно добра. Квадратниот полином од десната страна е доволно едноставен, но ќе биде уште поедноставен доколку ги пресметаме неговите коефициенти:

Диференцираме по соодветните променливи и добиваме:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{3x^2}{2}e^{0.75x^2+y^2}+\frac{3}{2}x\left(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3}\right)e^{0.75x^2+y^2}$$

односно:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-y^2e^{0.75x^2+y^2}+2y\left(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3}\right)e^{0.75x^2+y^2}$$

Ги пресметуваме во точката $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

што значи дека нема линеарни членови во Тејлоровиот полином.

Одиме со пресметка на парцијалните изводи од втор ред:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\left(3x+4.5x^3\right)e^{0.75x^2+y^2}+\left(1.5+2.25x^2\right)\left(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3}\right)e^{0.75x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\left(3x^2 y + 1.5xy^2\right)e^{0.75x^2+y^2} + 3xy\left(1 - \frac{x^3}{2} - \frac{y^3}{3}\right)e^{0.75x^2+y^2}$$

односно:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\left(2y + 4y^3\right)e^{0.75x^2+y^2} + \left(2 + 4y^2\right)\left(1 - \frac{x^3}{2} - \frac{y^3}{3}\right)e^{0.75x^2+y^2}$$

од каде што добиваме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{3}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \, .$$

Се враќаме на квадратната Тејлорова полиномна апроксимација и ги вметнуваме добиените коефициенти. Следува дека:

$$f(x, y) \approx 1 + \frac{3x^2}{4} + y^2 \text{, за точки } (x, y) \text{ доволно блиску до } (0,0).$$

Но, ова значи дека за точки (x, y) доволно блиску до $(0,0)$:

$$f(x, y) - f(0,0) \approx \frac{3x^2}{4} + y^2 > 0$$

односно $f(x, y) > f(0,0)$. Заклучокот следува. ☻

Задача 4.13. Дадена е функцијата $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + y^3 - 3a(x + y) + 6xy$, $a \in \mathbb{R}$.

1) За кое a функцијата f има четири стационарни точки?

2) За $a = 4$ определи ги стационарните точки и испитај ја нивната природа.

Решение. 1) Од условите $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ го добиваме системот:

$$\begin{aligned} x^2+2y-a&=0 \\ y^2+2x-a&=0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ако овие равенки ги одземеме една од друга, имаме:

$$(x-y)(x+y-2)=0 \Leftrightarrow (x-y)=0 \vee (x+y-2)=0.$$

За $x=y$, првата равенка од системот (4.22) станува $x^2+2x-a=0$, чии решенија, за $a>-1$, се реални и различни: $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+a}$.

За $x+y-2=0$, првата равенка од системот (4.12) се сведува на $x^2-2x-(a-4)=0$. чии решенија, за $a>3$, се реални и различни: $x_{3,4}=1\pm\sqrt{a-3}$.

Значи, ако $a>3$, функцијата f има четири стационарни точки:

$$M_1=\left(-1+\sqrt{1+a},-1+\sqrt{1+a}\right),\ M_2=\left(-1-\sqrt{1+a},-1-\sqrt{1+a}\right),$$

$$M_3=\left(1+\sqrt{a-3},1-\sqrt{a-3}\right) \text{ и } M_4=\left(1-\sqrt{a-3},1+\sqrt{a-3}\right).$$

2) За $a=4$ ги добиваме стационарните точки: $M_1=\left(-1+\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right)$,

$$M_2=\left(-1-\sqrt{5},-1-\sqrt{5}\right), M_3=(2,0) \text{ и } M_4=(0,2).$$

Да ја испитаме природата на овие точки. Од

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,$$

во произволна точка $M=(x,y)$ имаме $AC-B^2=36(xy-1)$.

Во точката M_1, $AC-B^2=36(5-2\sqrt{5})>0$ и $A>0$, што значи дека функцијата има локален минимум $f_{\min}=4\left(7-5\sqrt{5}\right)$. Во точката M_2, $AC-B^2=36(5+2\sqrt{5})>0$ и

$A<0$, што значи дека функцијата има локален максимум $f_{\max}=4\left(7+5\sqrt{5}\right)$. Точките $M_3=\left(2,0\right)$ и $M_4=\left(0,2\right)$ се седлести точки, бидејќи во нив $AC-B^2=-36<0$. ☻

Задача 4.14. Испитај ги локалните екстреми на следнава функција:

$$f\left(x,y\right)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$$

Решение: Ги определуваме стационарните точки од системот:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0\,.$$

Добиваме три решенија: $M_1\left(0,0\right)$, $M_2\left(-1,-1\right)$ и $M_3\left(1,1\right)$.

Одиме со проверка на доволните услови за постоење на локални екстреми според Теорема 6. Ги пресметуваме парцијалните изводи од втор ред:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-2,\quad a_{12}=a_{21}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2,\quad a_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-2,$$

а потоа ја составуваме соодветната детерминанта од втор ред:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\left(12x^2-2\right)\left(12y^2-2\right)-4\,.$$

Ја пресметуваме вредноста на Хесијанот во секоја точка поодделно.

$$\Delta\left(M_2\right)=\Delta\left(M_3\right)=96>0$$

па, од $a_{11}\left(M_2\right)=a_{11}\left(M_3\right)=10>0$, заклучуваме дека функцијата во овие точки достигнува локален минимум.

Останува да ја испитаме точката $M_1\left(0,0\right)$: Со оглед на вредноста на детерминантата на Хесијанот во $M_1\left(0,0\right)$: $\Delta\left(M_1\right)=0$, теоремата 6 е неупотреблива. За оваа точка ќе го смениме пристапот во испитувањето за можен локален екстрем.

Ќе го разгледаме прирастот на функцијата во точката $M_1\left(0,0\right)$:

$$\Delta f\left(0,0\right)=f\left(h,k\right)-f\left(0,0\right)$$

Одбираме $k=h,\quad 0<h<\sqrt{2}$ и добиваме:

$$\Delta f\left(0,0\right)=f\left(h,h\right)-f\left(0,0\right)=2h^2\left(h^2-2\right)<0$$

Сега правиме нов избор $k=-h,\ h>0$ и добиваме:

$$\Delta f\left(0,0\right)=f\left(h,-h\right)-f\left(0,0\right)=2h^4>0$$

Следува дека точката $M_1\left(0,0\right)$ не е точка на локален екстрем. ☻

Задача 4.15. Испитај ги локалните екстреми на функцијата:

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$$

Решение: Да забележиме дека функцијата нема стационарни точки, но во точката $\left(0,0\right)$ парцијалните изводи од прв ред не постојат, па оваа точка ќе ја испитаме посебно. Го разгледуваме нараснувањето на функцијата во $\left(0,0\right)$:

$$\Delta z\left(0,0\right)=z\left(h,k\right)-z\left(0,0\right)=-\sqrt{h^2+k^2}\leq 0$$

за произволни h,k, па z достигнува глобален максимум во $\left(0,0\right)$. ☻

Забелешка: Можевме да одиме и вака:

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2}\leq 1=z\left(0,0\right).$$

Задача 4.16. Испитај ги локалните екстреми на функцијата:

$$u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$$

Решение: Ги определуваме стационарните точки од системот:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12y=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+12x=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z+2=0\ .$$

Добиваме две решенија: $M_1(0,0,-1)$, $M_2(24,-144,-1)$.

Одиме со проверка на доволните услови за постоење на локални екстреми според Теорема 4.6. Ги пресметуваме парцијалните изводи од втор ред:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=12,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2$$

а потоа ги составуваме соодветните детерминанти:

$$\Delta_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\end{vmatrix},\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{vmatrix}$$

Ги пресметуваме во стационарните точки поодделно:

$$\Delta_1(M_2)=144>0,\ \Delta_2(M_2)=144>0,\ \ \Delta_3(M_2)=283>0$$

па во точката $M_2(24,-144,-1)$ функцијата достигнува минимум.

Слично, за M_1 имаме:

$$\Delta_1(M_1)=0,\ \Delta_2(M_1)=-144<0,\ \ \Delta_3(M_1)=-288<0$$

па според теоремата 6, M_1 е седлеста точка. Ова ќе го потврдиме и на следниов начин:

Го определуваме прирастот во точката M_1:

$$\Delta u(0,0,-1)=\Delta x^3+\Delta y^2+\Delta z^2+12\Delta x\Delta y$$

Сега правиме избор:

$$\Delta x = t^2,\ \Delta y = \Delta z = 0 \text{ односно } \Delta x = -t^2,\ \Delta y = \Delta z = 0$$

од каде што добиваме:

$$\Delta u = t^6 \text{ односно } \Delta u = -t^6,$$

па прирастот го менува знакот. Следува заклучокот. ☻

Задача 4.17. Испитај ги локалните екстреми на функцијата $z = z(x, y)$ зададена во имплицитна форма со:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

Решение: Функцијата $F(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ е полиномна, па според тоа и непрекинато диференцијабилна од произволен ред. Следствено во околина на произволна точка (x_0, y_0, z_0) за која $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ исполнети се условите од теоремата за имплицитни функции според која равенката $F(x, y, z) = 0$ определува имплицитно зададена функција $(x, y) \to z(x, y)$ која во точката (x_0, y_0) ја прима вредноста z_0. За да ги определиме стационарните точки и вредноста на функцијата во тие точки го составуваме системот:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2 = 0,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2 = 0,\ F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

од каде што ги добиваме точките: $M_1(1, -1),\ z_1 = -2;\ M_2(1, -1),\ z_2 = 6$.

Да забележиме дека $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 4$ во точките $M_1(1, -1, -2),\ M_2(1, -1, 6)$ е:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(M_1) = -8 \neq 0,\ \frac{\partial F}{\partial z}(M_2) = 8 \neq 0,$$

па равенката $F(x,y,z)=0$ во околина на секоја од овие точки определува имплицитна функција $(x,y)\to z(x,y)$ со вредност z_i во точката $M_i,\ i=1,2$.

За проверка на доволните услови за локални екстреми ги определуваме парцијалните изводи од втор ред:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2.$$

Го пресметуваме диференцијалот од втор ред кој во стационарните точки го има обликот:

$$d^2z=-\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2\right).$$

Сега за првата точка $M_1(1,-1,-2)$ добиваме:

$$d^2z(M_1)=\frac{1}{4}\left(dx^2+dy^2\right)>0,$$

додека за втората точка $M_2(1,-1,6)$ имаме:

$$d^2z(M_2)=-\frac{1}{4}\left(dx^2+dy^2\right)<0$$

Ова значи дека првата точка M_1 е точка на локален минимум, додека втората M_2 е точка на локален максимум. ☻

Задача 4.18. Испитај ги локалните екстреми на функцијата:

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

Решение: Го составуваме системот:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(2x-2x\left(x^2+y^2\right)\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\left(2y-2y\left(x^2+y^2\right)\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}=0$$

Решенијата на системот се точката $M_1\left(0,0\right)$ и точките од единечната кружница $S^1=\{\left(x,y\right)|\,x^2+y^2=1\}$. Одиме со пресметка на изводите од втор ред:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(4x^2\left(x^2+y^2\right)-12x^2+2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(4y^2\left(x^2+y^2\right)-12y^2+2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)},$$

додека за мешаниот добиваме:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(4xy\left(x^2+y^2\right)-8xy\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}.$$

Ги пресметуваме во првата стационарна точка $M_1\left(0,0\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_1\right)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(M_1\right)=2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(M_1\right)=0,$$

а потоа ги вметнуваме во детерминантите:

$$\Delta_1\left(M_1\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_1\right)=2>0,\quad \Delta_2\left(M_1\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(M_1\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(M_1\right)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(M_1\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(M_1\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0.$$

Заклучуваме дека $M_1\left(0,0\right)$ е точка на локален минимум.

За точките од единечната кружница одиме со смената $t=x^2+y^2$:

Ја разгледуваме функцијата $f\left(t\right)=te^{-t}$, со $t=1$ како стационарна точка. Го пресметуваме вториот извод во $t=1$ и добиваме:

$$f''\left(1\right)=\left(1-2\right)e^{-1}=-e^{-1}<0,$$

па точките од S^1 се точки на локален максимум. ☻

Задача 4.19. Докажи дека:

$$\frac{x^2+y^2}{4} \leq e^{x+y-2},\ x \geq 0,\ y \geq 0\,.$$

Доказ: Неравенството ќе го запишеме во еквивалентна форма:

$$\left(x^2+y^2\right)e^{-x-y} \leq 4e^{-2},\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

Ја разгледуваме функцијата:

$$f\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2\right)e^{-x-y},\ \ x \geq 0,\ y \geq 0$$

Да забележиме дека функцијата рестриктивно на првиот квадрант достигнува максимум со оглед на тоа што е ненегативна и тежнее кон нула кога секоја од променливите неограничено расте.

Го составуваме системот равенки:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(2x-x^2-y^2\right)e^{-x-y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\left(2y-x^2-y^2\right)e^{-x-y}=0$$

Решенијата се $M_1\left(0,0\right),\ M_2\left(1,1\right)$. Очигледно во првата точка функцијата не достигнува максимум. Единствениот кандидат во отворениот квадрант функцијата да го достигне својот максимум е точката $M_2\left(1,1\right)$.

На x-оската функцијата го добива обликот $f\left(x\right)=x^2e^{-x}$, па ја составуваме равенката:

$$\frac{df}{dx}=\left(2x-x^2\right)e^{-x}=0$$

Единствено решение е точката $M_3\left(2,0\right)$, како уште еден кандидат во кој функцијата може да го достигне својот максимум. Аналогно го добиваме и третиот кандидат од y-оската $M_4\left(0,2\right)$.

Значи единствените кандидати за функцијата да го достигне својот максимум по работ на првиот квадрант се точките $M_3\left(2,0\right)$ и $M_4\left(0,2\right)$.

Ги проверуваме вредностите на функцијата во секоја од овие точки поодделно и ги споредуваме:

$$f\left(1,1\right)=2e^{-2},\ f\left(0,2\right)=4e^{-2},\quad f\left(2,0\right)=4e^{-2}$$

Следува дека максималната вредност во првиот квадрант функцијата ја достигнува во точките $M_3\left(2,0\right)$ и $M_4\left(0,2\right)$:

$$f\left(x,y\right)\leq f\left(2,0\right)=f\left(0,2\right)=4e^{-2}$$

односно:

$$\left(x^2+y^2\right)e^{-x-y}\leq 4e^{-2},\ x\geq 0,\ y\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{4}\leq e^{x+y-2},\ x\geq 0,\ y\geq 0\,.$$

Доказот е комплетиран. ☻

Задача 4.20. Испитај ги локалните екстреми на функцијата:

$$f\left(x,y\right)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad a,b>0$$

Решение: Го составуваме системот:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=0.$$

Решенијата на системот се:

$$M_1\left(0,0\right),M_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right),M_3\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right),M_4\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right),M_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$

Да забележиме дека во точките од елипсата:

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

парцијалните изводи не постојат, па како точки од работ на дефиниционата област на f се можни кандидати за локални екстреми од работ што треба дополнително да се проверат.

За проверка на доволните услови за локален екстрем ги пресметуваме парцијалните изводи од втор ред:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-\frac{xy}{a^2}\left(3-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{3y^2}{b^2}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-\frac{xy}{b^2}\left(3-\frac{3x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

односно:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1-\frac{3x^2}{a^2}-\frac{3y^2}{b^2}+\frac{2x^4}{a^4}+\frac{3x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{2y^4}{b^4}}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

а потоа ги пресметуваме во стационарните точки:

Да забележиме дека во точката $M_1(0,0)$ детерминантата на Хесијанот е $\Delta_2(M_1)=-1<0$, па точката е седлеста.

Во точките $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right), M_3\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$:

$$\Delta_1(M_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_3)=\Delta_1(M_3)=-\frac{4ab}{9}<0$$

додека детерминантата на Хесијанот е:

$$\Delta_2(M_2)=\Delta_2(M_3)=4>0\,,$$

па $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right),M_3\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ се точки на локален максимум.

Слично, во точките $M_4\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right),M_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$:

$$\Delta_1(M_4)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_4)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_5)=\Delta_1(M_5)=\frac{4ab}{9}>0$$

додека детерминанатата на Хесијанот е:

$$\Delta_2(M_4)=\Delta_2(M_5)=4>0\,,$$

па $M_4\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right),M_5\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ се точки на локален минимум.

Останува да ги испитаме точките од елипсата $1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$:

Го разгледуваме прирастот во тие точки:

$$\Delta f(x,y)=(x+h)(y+k)\sqrt{1-\frac{(x+h)^2}{a^2}-\frac{(y+k)^2}{b^2}}$$

Да забележиме дека $\Delta f(x,y)>0$ доколку:

$$0<x+h<x<a,\ 0<y+k<y<b \quad \text{или} \quad -a<x<x+h<0,\ -b<y<y+k<0$$

Слично, $\Delta f(x,y)<0$ доколку:

$$0<x+h<x<a,\ -b<y<y+k<0 \quad \text{или} \quad -a<x<x+h<0,\quad 0<y+k<y<b$$

Оттука следува дека за точките од елипсата што припаѓаат на првиот или третиот квадрант функцијата достигнува локален минимум од работ, рамен на нула, додека за точките од вториот или четвртиот квадрант локален максимум од работ, рамен на нула.

Останува да ги дискутираме точките $(0,\pm b),\ (\pm a,0)$. Во точките $(0,b)$ прирастот на функцијата:

$$\Delta f(0,b) = h(b+k)\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}-\frac{(b+k)^2}{b^2}}$$

е позитивен за доволно мало $h>0$ и $0<b+k<b$ и негативен за доволно мало $h<0$ и $0<b+k<b$. Следува дека во овие точки не се достигнува екстрем. Аналогно, такви се и точките $(0,-b),\ (\pm a,0)$. ☻

Задача 4.21. Нека $K\subseteq\mathbb{R}^2$ е произволно компактно множество. Докажи дека функцијата $f:K\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2y-4x^2-2y^2$ го достигнува својот минимум на работ од K.

Доказ: Од теоремата на Вајерштрас функцијата го достигнува својот минимум и максимум на K. Ако претпоставиме дека минимумот е достигнат во внатрешноста на K тогаш тоа ќе биде и локален минимум, па треба да ги задоволува условите од теоремата за локални екстреми. Го составуваме системот:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-8x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-4y=0$$

Решенијата се $M_1(0,0),\ M_2(4,4), M_3(-4,4)$. Го разгледуваме Хесијанот на функцијата:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y-8 & 2x\\ 2x & -4\end{vmatrix}.$$

Го проверуваме знакот во секоја стационарна точка поодделно:

$$\Delta_1(M_1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_1)=-8<0,\ \Delta_2(M_1)=\begin{vmatrix}-8 & 0\\ 0 & -4\end{vmatrix}=32>0$$

па, M_1 е точка на локален максимум. Слично,

$$\Delta_2(M_2) = \Delta_2(M_3) = -64 < 0$$

па од негативноста на Хесијанот во M_2, M_3 заклучуваме дека M_2 и M_3 се седлести точки. Ова значи дека функцијата нема локален минимум во внатрешноста на K. Заклучокот следува. ☻

Задача 4.22. Нека $S, T, \overline{T}$ се единечната сфера, единечната отворена и затворена топка во $\mathbb{R}^n$ соодветно. Нека $f: \overline{T} \to \mathbb{R}$ е реална функција што е непрекината на $\overline{T}$, диференцијабилна на T и константна на S. Докажи дека постои точка $P \in T$ така што. $\nabla f(P) = 0$.

Доказ: Да забележиме дека множеството $\overline{T}$ е компактно, па од теоремата на Вајерштрас, функцијата го достигнува својот минимум и максимум. Ако двете точки припаѓаат на сферата тогаш од константноста на S, функцијата е константа и на $\overline{T}$. Посебно f е константа на T, па за секоја точка $P \in T$ важи $\nabla f(P) = 0$. Ако барем една од точките во кои функцијата го достигнува својот минимум и максимум припаѓа на отворената топка T, тогаш таа точка е локален екстрем за која важат потребните услови од теоремата за локални екстреми. Заклучокот следува. ☻

Задача 4.23. Нека $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е функција од класа C^2 со особина Хесијанот да е позитивно дефинитна матрица за произволно $x \in \mathbb{R}^n$. Докажи дека f има најмногу една критична точка.

Доказ: Претпоставуваме дека f има две критични точки, p_1 и p_2.

Од позитивната дефинитност на Хесијанот според Теорема 6 точките p_1 и p_2 се точки на локален минимум. Ја разгледуваме правата:

$$tp_1 + (1-t)\,p_2,\ t \in \mathbb{R}$$

што минува низ точките p_1 и p_2. Дефинираме функција $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ со:

$$g(t)=f\left(tp_1+(1-t)\,p_2\right),\ t\in\mathbb{R}$$

Да забележиме дека g има локален минимум во точките $t_2=0$ и $t_1=1$. Ова значи дека g има локален максимум во некоја точка $t_0\in(0,1)$. Следува дека $g''(t_0)\le 0$.

Но ако го пресметаме вториот извод на g добиваме:

$$g''(t_0)=f''\left(t_0p_1+(1-t_0)\,p_2\right)(p_1-p_2)^2=(p_1-p_2)\cdot H\,(p_1-p_2)>0$$

од позитивната дефинитност на Хесијанот. Заклучокот следува. ☻

Задача 4.24. Докажи дека функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ од класа C^3 со особина:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

не може да има локален максимум.

Доказ: Од позитивноста на Лапласијанот:

$$L\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}>0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

заклучуваме дека Хесијанот има позитивна трага во секоја точка. Но со оглед на тоа што функцијата е од класа C^3, ако претпоставиме дека f има локален максимум тогаш Хесијанот на f мора да има негативни сопствени вредности, па според тоа и негативна трага. Последново е противречност. ☻

Задача 4.25. Определи правоаголен паралелопипед со најголем волумен, така што збирот на должината, ширината и висината е a.

Решение: Бараме максимум на функцијата $V(x,y,z)=xyz$ при услов $x+y+z=a$, односно $z=a-x-y$. Тогаш,

$$V(x,y,z)=xy(a-x-y)=axy-x^2y-xy^2.$$

Ги определуваме стационарните точки од системот:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=ay-2xy-y^2=0\\ \frac{\partial V}{\partial y}&=ax-x^2-2xy=0\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}y(a-2x-y)&=0\\ x(a-x-2y)&=0\end{aligned}. \tag{4.23}$$

Ако $x=0\vee y=0$, тогаш $V=0$, па во стационарната точка $(0,0,a)$ V не може да достигне максимум. Затоа, ќе претпставиме дека $x\neq 0\wedge y\neq 0$, тогаш системот (4.23) станува:

$$\begin{aligned}a-2x-y&=0\\ a-x-2y&=0\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ја добивме стационарната точка $M\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$.

Од $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-2y,\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=a-2x-2y,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-2x$, во точката $M\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ имаме:

$$\begin{aligned}a_{11}&=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)=-\frac{2a}{3},\\ a_{12}=a_{21}&=\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)=a-\frac{2a}{3}-\frac{2a}{3}=-\frac{a}{3},\\ a_{22}&=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)=-\frac{2a}{3}.\end{aligned}$$

Од Силвестеровиот критериум, бидејќи

$$\Delta_1 = a_{11} = -\frac{2a}{3} < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{2a}{3} & -\frac{a}{3} \\ -\frac{a}{3} & -\frac{2a}{3} \end{vmatrix} = \frac{a^2}{3} > 0,$$

следува дека V во точката $M\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ достигнува максимум $V_{\max} = \frac{a^3}{27}$. ☻

Задача 4.26. Испитај ги условните екстреми на функцијата:

$$f\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2 + z^2, \text{ при услов } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ \left(a > b > c > 0\right).$$

Решение: Ја составуваме функцијата на Лагранж:

$$L\left(x,y,z;\lambda\right) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

Ги определуваме стационарните точки од системот:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} &+ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{aligned}$$

Решенијата се: за $\lambda_{1,2} = -c^2$, $M_{1,2}\left(0,0,\pm c\right)$; за $\lambda_{3,4} = -a^2$, $M_{3,4}\left(\pm a,0,0\right)$; за $\lambda_{5,6} = -b^2$, $M_{5,6}\left(0,\pm b,0\right)$.

За проверка на доволните услови го пресметуваме диференцијалот од втор ред:

$$d^2L = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2$$

Од неравенствата:

$$d^2L\left(M_{1,2},\lambda_{1,2}\right)=2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)dx^2+2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dy^2>0$$

односно:

$$d^2L\left(M_{3,4},\lambda_{3,4}\right)=2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)dy^2+2\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)dz^2<0$$

следува дека во точките $M_{1,2}\left(0,0,\pm c\right)$ функцијата го достигнува својот минимум $\left(f_{\min}=c^2\right)$, а во точките $M_{3,4}\left(\pm a,0,0\right)$ својот максимум $\left(f_{\max}=a^2\right)$. Останува да ги испитаме точките $M_{5,6}\left(0,\pm b,0\right)$:

Да забележиме дека во точките $M_{5,6}\left(0,\pm b,0\right)$, при $dx=0,\ dz\neq 0$:

$$d^2L\left(M_{5,6},\lambda_{5,6}\right)=2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)dz^2<0$$

додека при $dx\neq 0,\ dz=0$:

$$d^2L\left(M_{5,6},\lambda_{5,6}\right)=2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)dx^2>0$$

па со оглед на тоа што диференцијалот го менува знакот во овие точки функцијата не достигнува екстрем. ☻

Забелешка: Множеството $D=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$ е компактно

па од непрекинатоста на f и од теоремата на Вајерштрас функцијата го достигнува својот минимум и максимум на D. Ова значи дека локалните екстреми се и глобални на D во примеров.

Задача 4.27. Испитај ги условните екстреми на функцијата $f(x,y,z)=x^m y^n z^p$, при услов $x+y+z=a,\ (x>0, y>0, z>0,\ m,n,p,a>0)$.

Решение: Да забележиме дека точките во кои функциите f и $g=\ln(f)$ ги достигнуваат своите екстреми се совпаѓаат. Значи доволно е да ги испитаме екстремите на функцијата g.

Ја составуваме функцијата на Лагранж:

$$L(x,y,z;\lambda)=m\ln x+n\ln y+p\ln z+\lambda(x+y+z-a).$$

Ги определуваме стационарните точки од системот:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{m}{x}+\lambda=0,\\&\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{m}{y}+\lambda=0,\\&\frac{\partial L}{\partial z}=\frac{m}{z}+\lambda=0,\\&x+y+z=a\end{aligned}$$

Единствено решение е точката $M\left(\dfrac{ma}{m+n+p},\dfrac{na}{m+n+p},\dfrac{pa}{m+n+p}\right)$.

Го пресметуваме диференцијалот од втор ред:

$$d^2L=-\frac{m}{x^2}dx^2-\frac{n}{y^2}dy^2-\frac{p}{z^2}dz^2$$

Посебно во стационарната точка добиваме:

$$d^2L(M)=-\left(\frac{1}{mt^2}dx^2+\frac{1}{nt^2}dy^2+\frac{1}{pt^2}dz^2\right)<0, \text{ каде } t=\frac{a}{m+n+p},$$

па функцијата g односно f го достигнува својот максимум во точката $M\left(\dfrac{ma}{m+n+p},\dfrac{na}{m+n+p},\dfrac{pa}{m+n+p}\right)$. ☻

Забелешка:Забелешката од претходниот проблем да нагласиме дека треба да ја земеме во предвид како во овој така и во проблемите што следат☺

Задача 4.28. Испитај ги условните екстреми на функцијата:

$$f\left(x,y,z\right)=\sin x\sin y\sin z \text{, при услов } x+y+z=\frac{\pi}{2},\ \left(x,y,z>0\right).$$

Решение: Слично на претходниот проблем одиме со помошната функцијата $g=\ln\left(f\right)$.

Ја составуваме функцијата на Лагранж:

$$L\left(x,y,z;\lambda\right)=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right)$$

Ги определуваме стационарните точки од системот:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x}=ctgx+\lambda=0,\\
&\frac{\partial L}{\partial y}=ctgy+\lambda=0,\\
&\frac{\partial L}{\partial z}=ctgz+\lambda=0,\\
&x+y+z=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Единственото решение е точката $M\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$.

Го пресметуваме диференцијалот од втор ред во точката M:

$$d^2L\left(M\right)=-\left(\frac{1}{\sin^2 x}dx^2+\frac{1}{\sin^2 y}dy^2+\frac{1}{\sin^2 z}dz^2\right)<0.$$

Следува, функцијата f го достигнува својот максимум во точката $M\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$. ☻

Задача 4.29. Испитај ги условните екстреми на функцијата:

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=x_1^m+x_2^m+...+x_n^m \text{, при услов } \sum_{i=1}^{n}x_i=na,\quad x_i>0,\ a>0,\ m>1$$

Решение: Ја формираме функцијата на Лагранж:

$$L\left(x_1,x_2,...,x_n;\lambda\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^m+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-na\right)$$

Го составуваме системот:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=mx_i^{m-1}+\lambda=0,\qquad i=\overline{1,...,n},\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=na$$

Решението е точката $M\left(a,a,...,a\right)$ и $\lambda=-ma^{m-1}$. Го пресметуваме диференцијалот од втор ред:

$$d^2\Phi=m\left(m-1\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^{m-2}dx_i^2$$

Посебно во стационарната точка добиваме:

$$d^2\Phi\left(M\right)=m\left(m-1\right)a^{m-2}\sum_{i=1}^{n}dx_i^2$$

Да забележиме дека $d^2\Phi\left(M\right)>0$, па $M\left(a,a,...,a\right)$ е точка на минимум.

Ова значи дека:

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=x_1^m+x_2^m+...+x_n^m\geq na^m=n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^m$$

односно:

$$\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^m, \; x_i \in \mathbb{R}^+, m > 1 \quad ☻$$

Задача 4.30. Ако $x_i > 0,\ \alpha_i > 0, i = \overline{1,n}$, докажи го неравенството:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1^{\ \alpha_1} \alpha_2^{\ \alpha_2} \ldots \alpha_n^{\ \alpha_n} \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

Доказ: Ќе ја разгледаме функцијата:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Го фиксираме збирот

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \tag{4.25}$$

за некое $a > 0$. Испитуваме локални екстреми на функцијата f при услов (4.25).

Одиме со помошната функција $g = \ln\left(f\right)$. Ја формираме функцијата на Лагранж:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a \right).$$

Го составуваме системот:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} + \lambda = 0, \qquad i = \overline{1, \ldots, n}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = a \; .$$

Оттука ја добиваме стационарната точка M и вредноста на λ:

$$\lambda = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \; x_i = \frac{\alpha_i a}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \; i = \overline{1,n} \, .$$

Го пресметуваме диференцијалот од втор ред: $d^2\Phi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x_i^2} dx_i^2$.

Посебно во точката M имаме:

$$d^2\Phi(M) = -\frac{1}{a^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i^2}{\alpha_i} < 0\,,$$

па во точката M функцијата достигнува максимум. Значи:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \le f(M)$$

што требаше да докажеме. ☻

Забелешка: Специјално, доколку $\alpha_i = 1,\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, го добиваме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина.

Задача 4.31. Најди ја најголемата односно најмалата вредност на функцијата

$$z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

во областа, ограничена со координатните оски и правата $x + y = 2\pi$.

Решение: Ги наоѓаме парцијалните изводи $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и ги изедначуваме со нула. Добиваме:

$$\begin{aligned}&\cos x - \cos(x + y) = 0\\&\cos y - \cos(x + y) = 0\end{aligned}$$

од каде следува $\cos x = \cos y$, т.е $y = \pm x + 2k\pi$. Во дадената област може да биде само $y = x$. Тогаш имаме $\cos x = \cos(x + y) = \cos 2x$, од каде што е $2x = \pm x + 2k\pi$, т.е $x = 2k\pi$ и $x = \frac{2k\pi}{3}$. Потребни ни се само точките од внатрешноста на триаголникот, а таква е само $x = \frac{2k\pi}{3}$, $y = \frac{2k\pi}{3}$. Во таа точка имаме $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Преостанува да ги најдеме стационарните точки на контурата. За $y = 0$ имаме $z = 0$, а исто така $z = 0$ и на правите: $x = 0$ и $x + y = 2\pi$. Од тоа следува сека $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. е најголемата а $z = 0$ е најмалата вредност на функцијата во дадената област. ☻

Задача 4.32. Во топка со радиус R впиши правоаголен паралелопипед со најголем волумен.

Решение. Ако страните на паралелопипедот ги означиме со x, y и $x = z$ тогаш тие го задоволуваат условот $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ (слика 1), а волуменот е определен со $V = xyz$. Од условите за врзани екстреми имаме:

$$\begin{aligned}
&yz + 2x\lambda = 0\\
&xz + 2y\lambda = 0\\
&xy + 2z\lambda = 0\\
&x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2
\end{aligned}$$

и имаме: $x = y = z,\ x^2 = \frac{4R^2}{3},\ x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Значи коцката е правоаголниот паралелопипед со најголем волумен што може да се впише во дадената топка. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Разложи ја функцијата $f(x, y) = x^y$ во околина на точката $(1,1)$ по Тејлоровата формула, до членови од втор ред.

2. Претстави ја со Тејлоров полином од втор степен, во околина на точката $(1,1)$ функцијата $z = f(x, y)$, дефинирана со равенката $z^3 - 2xz + y = 0$.

3. Разложи ја функцијата $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ во околина на точката $(-2,1)$ по Тејлоровата формула, до членови од втор ред.

4. Пресметај го прирастот што го добива функцијата $f(x, y) = {}^2x$ при премин од вредности $x = 1, y = 1$ на вредности $x = 1 + h, y = 1 + k$.

5. Развиј по Тејлорова формула, во околина на (1,-1) заклучно до трет ред, функцијата $f(x, y) = e^{x+y}$.

6. Разложи ја функцијата $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ по Тејлоровата формула во околина на точката $(1,1,1)$.

7. За функцијата $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ напиши неколку членови од Меклореновиот развој. Врз основа на тоа, определи ги првите три реда од функцијата f во (0,0).

Развиј ја по Меклоренова формула до членовите од втор степен функцијата (8-9)

8. $f(x, y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$. **9.** $f(x, y) = arctg \dfrac{1 + x + y}{1 - x + y}$.

10. За функцијата $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z$ напиши го Меклореновиот полином од втор степен.

Развиј ја по Меклореновата формула, заклучно до трета степен, функцијата: (11-13)

11. $f(x, y) = e^x \cos y.$ **12.** $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. **13.** $f(x, y) = x^2 \sin y + \cos(x + y).$

14. Разложи ја функцијата $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$ по Меклореновата формула во полином заклучно до втор степен.

15. Претстави ја функцијата $u(x, y, z) = xyz$ по Меклореновата формула во околина на точката $(0, 0, 0)$ и по Тејлоровата формула во околина на точката $(1,1,1)$.

Со примена на Тејлоровата формула до членови од втор ред, пресметај приближно (16-17)

16. $0.95^{2.01}$. **17.** $\sqrt{1.03\sqrt[3]{0.98}}$.

Определи ги стационарните точки за функцијата: (18.-20)

18. $(x,y)\mapsto f(x,y)=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$.

19. $(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=3\ln x+2\ln y+5\ln z+\ln(22-x-y-z)$.

20. $(x,y)\mapsto f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\left(2x^2+y^2\right)$.

Определи ги стационарните точки за функцијата и испитај ја нивната природа. (21-24)

21. $(x,y)\mapsto f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$.

22. $(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=-x^2-y^3-z^2-xz+3yz-x+4z$.

23. $(x,y)\mapsto f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

24. $(x,y)\mapsto f(x,y)=x^3+4x^2y+xy^2-12xy-3y^2$.

Определи ги екстремите на функциите (25-30)

25. $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y},\ x>0, y>0.$

26. $f(x,y)=x^2+y^3.$

27. $f(x,y)=(x-y)^3+x^4+y^4.$

28. $f(x,y)=x^3+y^3-3(x+y)+1.$

29. $f(x,y)=x^3-x^2y-x^2+y^2.$

30. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{y}.$

31. Определи правоаголен паралелопипед со најголем волумен, така што збирот на должината, ширината и висината е a.

При дадени услови, определи ги екстремите на функциите: (32-34)

32. $(x,y)\mapsto f(x,y)=6-4x-3y$ при условот $x^2+y^2=1$.

33. $(x,y)\mapsto f(x,y)=x+2y$ при условот $x^2+y^2=5$.

34. $(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=xy+yz$ при условот $x^2+y^2=2,\ y+z=2\ (x>0, y>0, z>0)$.

35. Одреди ја најголемата вредност на производот од ненегативни броеви x_1, x_2, x_3 и x_4 при услов $x_1+x_2+x_3+x_4=4c$.

36. Одреди најголема и најмала вредност на функцијата $(x,y,z)\mapsto u=xyz$ во првиот октант, ако $x+y+z=5,\ xy+yz+zx=8$.

37. За различни вредности на реалниот број a, определи ги стационарните точки за функцијата f, дефинирана со $(x,y)\mapsto f(x,y)=x^4+y^4-2a(x-y)^2$ и испитај ја нивната природа.

38. На рамнината $x+2y+3z=1$ определи ја точката M така што сумата $\sum_{i=1}^{n}\overline{MM}_i^2$ е минимална, при што $M_i(x_i,y_i,z_i),(i=1,\cdots,n)$ се дадени точки.

39. Во триаголникот ABC: $A(0,0),B(1,0),C(0,1)$ определи точка така што збирот на растојанијата од точката до темињата е најголемо.

40. Во кој случај $f(a)$ е и минимум и максимум на функцијата f?

41. Покажи дека, ако a е изолирана точка од дефиниционата област на функцијата f, тогаш $f(a)$ е локален минимум и максимум на функцијата f.

ГЛАВА 5

НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Во дефиницијата за Риманов интеграл на реална функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ претпоставуваме дека 1) сегментот $[a,b]$ е ограничен, и 2) функцијата f е ограничена на $[a,b]$. Ако барем еден од овие услови не е исполнет, односно ако $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $\left(f:(a,b]\to\mathbb{R}\right)$, при што точката b, (a) е бесконечна или функцијата е неограничена во околина на точката b, (a), не можеме да ја примениме дефиницијата за Риманов интеграл. За да се опфатат и овие случаи, воведен е поимот за *несвојствен интеграл*.

Дефиниција 5.1. *Нека функцијата f е дефинирана на интервалот $[a,b)$ и интеграбилна на секој сегмент $[a,\beta]\subset[a,b)$. Ако постои, граничната вредност*

$$\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta f(x)dx \tag{5.1}$$

се вика несвојствен интеграл на функцијата f (со сингуларитет во точката b) на интервалот $[a,b)$ и се означува со

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{5.2}$$

Ако постои $\lim\limits_{\beta \to b^-} \int\limits_a^\beta f(x)dx$ и е конечен, велиме дека несвојствениот интеграл *конвергира,* во спротивно *дивергира.*

Слично, се дефинира несвојствен интеграл со сингуларитет во точката a .

Дефиниција 5.2. *Нека функцијата* f *е дефинирана на интервалот* $[a,\propto)$ *и интеграбилна на секој сегмент* $[a,\beta] \subset [a,\propto)$. *Ако постои, лимесот:*

$$\lim_{\beta \to \propto} \int\limits_a^\beta f(x)dx \tag{5.3}$$

се вика несвојствен интеграл на функцијата f *(со сингуларитет во* $\propto$*) на интервалот* $[a,\propto)$ *и се означува со*

$$\int\limits_a^\propto f(x)\,dx. \tag{5.4}$$

Ако постои $\lim\limits_{\beta \to \propto} \int\limits_a^\beta f(x)dx$ и е конечен, велиме дека несвојствениот интеграл *конвергира,* во спротивно *дивергира.*

Слично, се дефинира несвојствен интеграл со сингуларитет во $-\propto$, $\int\limits_{-\propto}^b f(x)dx$.

Дефиниција 5.3. *Нека функцијата* f *е дефинирана на интервалот* $[a,\omega)$ *(конечен или бесконечен) и интеграбилна на секој сегмент* $[a,b] \subset [a,\omega)$ *. Ако постои, лимесот*

$$\lim_{b \to \omega} \int\limits_a^b f(x)dx$$

се вика несвојствен интеграл на функцијата f $($*со сингуларитет во* $\omega)$ *на интервалот* $[a,\omega)$ *и се означува со* $\int\limits_a^\omega f(x)dx$.

Ако постои $\lim\limits_{b \to \omega} \int\limits_a^b f(x)dx$ и е конечен, велиме дека несвојствениот интеграл *конвергира,* во спротивно *дивергира.*

Слично, се дефинира несвојствен интеграл со сингуларитет долната граница, т.е. несвојствениот интеграл $\int\limits_\omega^b f(x)dx$.

Некои особини на несвојствениот интеграл

Нека

$$\int_a^\omega f(x)dx \tag{5.5}$$

и

$$\int_a^\omega g(x)dx \tag{5.6}$$

се несвојствени интеграли со сингуларитет во точката ω *, тогаш:*

1. *Ако интегралите* (5.5) и (5.6) *конвергираат, тогаш конвергира и интегралот*

$$\int_a^\omega \left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)dx, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

и важи

$$\int_a^\omega \left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)dx=\lambda\int_a^\omega f(x)dx+\mu\int_a^\omega g(x)dx.$$

2. *Ако* $c\in(a,\omega)$, *тогаш интегралот* (5.5) *конвергира ако и само ако конвергира интегралот* $\int_c^\omega f(x)dx$ *и важи*

$$\int_a^\omega f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^\omega f(x)dx.$$

3. *Ако* f *и* g *се глатки криви и постои конечен* $\lim\limits_{x\to\omega}(fg)(x)$, *тогаш, интегралот* $\int_a^\omega f(x)g'(x)dx$ *конвергира ако и само ако конвергира интегралот* $\int_a^\omega f'(x)g(x)dx$ *и притоа важи равенството:*

$$\int_a^\omega f(x)g'(x)dx=\lim_{x\to\omega} f(x)g(x)-f(a)g(a)-\int_a^\omega f'(x)g(x)dx.$$

Забелешка. Ако во симболот $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx$, сингуларитети се и во ω_1 и во ω_2, тогаш:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx\overset{def}{=}\int_{\omega_1}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{\omega_2} f(x)dx. \tag{5.7}$$

Притоа забележуваме дека f е интеграбилна на секој сегмент $[\alpha,\beta]\subset(\omega_1,\omega_2)$ и дека $c\in(\omega_1,\omega_2)$. Исто така, заради теоремата 1.(2), изборот на c не влијае на конвергенцијата. Интегралот $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx$ конвергира ако секој од двата несвојствени интеграли конвергира.

Критериуми за конвергенција

(1) **(Прв критериум за конвергенција со споредување)** Нека $0 \le f(x) \le g(x)$ за сите $x \in [a,\omega)$ и нека f, g се определени на $[a,\omega)$ и интеграбилни на секој $[a,\xi]$, $\xi < \omega$. Тогаш:

а) Од конвергенцијата на $\int_a^{\omega} g(x)dx$ следува конвергенција и на $\int_a^{\omega} f(x)dx$.

б) Од дивергенцијата на $\int_a^{\omega} f(x)dx$ следува дивергенција и на $\int_a^{\omega} g(x)dx$.

(2) **(Втор критериум за конвергенција со споредување)** Ако $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ за сите $x \in [a,\omega)$ и

а) ако постои $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ и притоа $0 < k < \infty$, тогаш следува дека интегралите $\int_a^{\omega} f(x)dx$ и $\int_a^{\omega} g(x)dx$ имаат иста природа на конвергенција, т.е. конвергираат или дивергираат истовремено.

б) Ако $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = k = 0$ тогаш од конвергенција на интегралот $\int_a^{\omega} g(x)dx$ следува конвергенција на интегралот $\int_a^{\omega} f(x)dx$.

в) Ако $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} = k = \infty$ тогаш од дивергенција на интегралот $\int_a^{\omega} g(x)dx$ следува дивергенција на интегралот $\int_a^{\omega} f(x)dx$.

(3) (Кошиев интегрален критериум за конвергенција на ред) Нека $f:[1+\infty)\to(0,+\infty)$ е непрекината и монотоно опаѓачка функција на интервалот $[1,+\infty)$.

а) Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{5.8}$$

конвергира, ако и само ако конвергира интегралот $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

б) ако редот (5.8) конвергира, тогаш важи неравенството

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx \quad . \tag{5.9}$$

(4) (Критериум на Коши). Нека функцијата f е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $[a,+\infty)$. Тогаш тврдењата а) и б) се еквивалентни, каде што:

а) Интегралот $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ конвергира.

б) За секој $\varepsilon > 0$, постои $b \geq a$ т.ш. за сите $b_1, b_2 \in [b,+\infty)$ да е исполнето

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

(5) (Критериум на Дирихле). Нека $f(x)$ и $g(x)$ се функции определени на $[a,+\infty)$ така што

(а) $f(x)$ непрекината на $[a,+\infty)$ и $(\exists M \in \mathbb{R}) \left| \int_{a}^{b} f(x)dx \right| \leq M$, $(\forall b > a)$

(б) функцијата $g(x) \geq 0,\ x \in [a,\infty),\ g(x)$ монотоно опаѓа, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ и g

има непрекинат извод.

Тогаш интегралот $\int_{a}^{\infty} f(x)g(x)dx$ конвергира.

Главна вредност

Нека c е внатрешна точка на сегментот $[a,b]$ и f е реална функција дефинирана на $[a,b]\setminus\{c\}$ со сингуларитет во точката c (т.е f е неограничена во околина на c). Ако функцијата f е интеграбилна на $[a,c-\varepsilon]$ и на $[c+\varepsilon_1,b]$ за секои доволно мали $\varepsilon,\varepsilon_1>0$, тогаш несвојствениот интеграл на функцијата f на $[a,b]$ го дефинираме како:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{c+\varepsilon_1}^{b} f(x)dx = \tag{5.10}$$

при што $\varepsilon,\varepsilon_1\to 0$ независно, односно

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon_1\to 0}}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_1}^{b} f(x)dx\right).$$

Во некои случаи напишаните лимеси не постојат, но постои

$$V.P.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) \tag{5.11}$$

што се вика *главна вредност* (valuer principale) на несвојствениот интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Аналогно се дефинира главна вредност на несвојствениот интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$:

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx. \tag{5.12}$$

Кај главна вредност на интеграл земаме симетрични околини $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ на сингуларната точка c, а не произволен интервал како кај несвојствениот интеграл.

ЗАДАЧИ

Задача 5.1. Да се испита, во зависност од параметарот α, конвергенцијата на несвојствениот интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. За $\alpha > 0$ интегралот има сингуларитет во точката 0. Најпрво, за $\alpha \neq 1$ да одредиме $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right)$. Бараме лимес:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \propto & \alpha > 1 \end{cases}.$$

Ако $\alpha = 1$, имаме $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\ln\varepsilon\right) = \propto$.

Значи, несвојствениот интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ конвергира за $\alpha < 1$ и дивергира за $\alpha \geq 1$.

Геометриски, нека $y = \frac{1}{x^\alpha}, 0 < x \leq 1$ и $P_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ е плоштината на криволинискиот трапез ABCD. Ако $\alpha < 1$, тогаш P_ε не може да биде поголемо од $\frac{1}{1-\alpha}$, за секое $\varepsilon > 0$. Но, ако $\alpha \geq 1$, тогаш за произволно големо M постои $\varepsilon > 0$, такво што $P_\varepsilon > M$. ●

Задача 5.2. Испитај конвергенција на следниве интеграли:

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ 2) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$

Решение: 1) Го запишуваме интегралот во следниов облик:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int\limits_0^{1} \frac{x}{e^x - 1} dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx \tag{5.13}$$

Да забележиме дека во првиот интеграл од десната страна на (5.13) нулата е отстранлив сингуларитет: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$.

За вториот интеграл ќе направиме оценка на подинтегралната функцијата ползувајќи Тејлоров развој на e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Оттука добиваме дека:

$$e^x - 1 \geq \frac{x^3}{3!}, \ \ за \ \ x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{6}{x^2}, \ \ за \ \ x \geq 1,$$

па од првиот критериум за конвергенција со споредување заклучуваме дека интегралот е конвергентен. Следува дека интегралот од левата страна на (5.13) е конвергентен.

2) Го запишуваме интегралот во следниов облик:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx = \int\limits_0^{1} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx \tag{5.14}$$

Ќе ја испитаме конвергенцијата на вториот интеграл од десната страна на (5.14). На подинтегралната функција $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}$ ја придружуваме функцијата $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. Да забележиме дека на интервалот $[1,\infty)$ функциите f и g се непрекинати и ненегативни. Одиме со вториот критериум за конвергенција со споредување:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

Ова значи дека интегралот е дивергентен. Заклучокот следува. ●

Задача 5.3. Испитај конвергенција на интегралот: $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

Решение: Да забележиме дека точката $x=1$ е точка на отстранлив сингуларитет:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\overset{LP}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}=0\,.$$

Функцијата f ја продолжуваме по непрекинатост во точката $x=1$. За новата функција да забележиме дека е непрекината и ненегативна на интервалот $[1,\infty)$. Го применуваме вториот критериум за конвергенција со споредување:

Ја придружуваме функцијата $g(x)=\frac{1}{x^p}$, каде p е параметар што дополнително ќе го определиме. Пресметуваме:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}x^p=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}x^{p-1}$$

Од тоа што $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1$, добиваме:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}x^{p-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}x^{p-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{2-p}}\,.$$

На последниот лимес одиме со правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{2-p}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{(2-p)x^{1-p}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2-p)x^{2-p}}\,.$$

Сега, правиме избор за параметарот $p \in (1,2)$ и добиваме:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2-p)x^{2-p}}=0.$$

Од конвергенцијата на интегралот: $\int_1^{\infty} g(x)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx<\infty$ заклучуваме конвергенција на $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}dx$. ●

Задача 5.4. Докажи дека интегралот $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ дивергира.

Доказ: Да забележиме дека од $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\sin x\right)=1\cdot 0=0$ нулата е отстранлив сингуларитет. Одиме со редов пристап:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

Воведуваме смена $x=n\pi+t$ во членовите a_n и добиваме:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{n\pi+t}dt$$

Ќе ги оцениме членовите на редот $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$:

$$a_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{n\pi+t}dt\ge\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{(n+1)\pi}dt=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\frac{A}{(n+1)\pi},$$

каде $A=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$ е некој позитивен реален број. Но, од тоа што редот:

$$\frac{A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}$$

е дивергентен, од кошиевиот интегрален критериум за конвергенција на ред заклучуваме дека и редот $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ е дивергентен. Ова значи дека интегралот $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ дивергира. ●

Задача 5.5. Докажи дека интегралот $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ условно конвергира.

Доказ: Да забележиме дека

$$|\sin x| \geq \sin^2 x \quad (5.15).$$

Одбираме споредбена функција $g(x)=\frac{\sin^2 x}{x}$. Од неравенството (5.15) имаме:

$$f(x)=\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}=g(x)$$

Сега, од дивергентноста на интегралот $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ заклучуваме дека дивергира и интегралот $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$.

Ќе покажеме дека интегралот $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ е конвергентен. Го запишуваме во следниов облик:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx+\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx. \quad (5.16)$$

Функцијата $:x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ може да се продолжи по непрекинатост во нулата, па првиот интеграл од десната страна на (5.16) постои. За вториот, применуваме парцијална интеграција:

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x}dx=-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M-\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}dx=\cos 1-\frac{\cos M}{M}-\int_1^M \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Ако побараме лимес во горната релација кога $M \to \infty$, добиваме:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\cos 1-\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Да забележиме дека интегралот $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ конвергира апсолутно, тврдење што може да го заклучиме од оценката $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in [1,\infty)$. Но оттука следува дека конвергира и интегралот $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$. Доказот е комплетиран. ●

Задача 5.6. Испитај за кои вредности на параметарот $a > 0$ е конвергентен интегралот:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^a \sin^2 x}.$$

Решение: Интегралот го запишуваме во облик на ред:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^a \sin^2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^a \sin^2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Правиме оценка на членовите a_n од придружениот ред:

$$b_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(n\pi)dx}{1+\left((n+1)\pi\right)^a \sin^2 x} \leq a_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{xdx}{1+x^a \sin^2 x} \leq \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(n+1)\pi dx}{1+(n\pi)^a \sin^2 x} = c_n .$$

Ги пресметуваме поодделно b_n односно c_n. Одиме прво со низата c_n. Воведуваме смена $x = n\pi + t$ во c_n и добиваме:

$$c_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{(n+1)\pi dx}{1+(n\pi)^a \sin^2 x} = (n+1)\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(n\pi)^a \sin^2 t} .$$

Воведуваме ознака $A = (n\pi)^a$. Интегралот сега го добива обликот:

$$c_n = (n+1)\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+(n\pi)^a \sin^2 t} = (n+1)\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1+A\sin^2 t} .$$

Ќе го пресметаме интегралот $\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+A\sin^2 t}$:

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+A\sin^2 t}=\int_0^{\pi}\frac{dt}{\cos^2 t+\sin^2 t+A\sin^2 t}=\int_0^{\pi}\frac{dt}{\cos^2 t+(1+A)\sin^2 t}.$$

Последниов интеграл го запишуваме во облик:

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{\cos^2 t+(1+A)\sin^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+(1+A)tg^2 t\right)}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+(1+A)tg^2 t\right)} \tag{5.16}$$

Ќе го разгледаме интегралот:

$$\int\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+(1+A)tg^2 t\right)}.$$

Воведуваме смена $tgt=u$ и добиваме:

$$\int\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+(1+A)tg^2 t\right)}=\int\frac{du}{1+(1+A)u^2}=\frac{1}{\sqrt{1+A}}arctg\left(\sqrt{1+A}tgt\right)+C.$$

Се враќаме на пресметката на определените интеграли од десната страна на горната релација (5.16):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+(1+A)tg^2 t\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+A}}arctg\left(\sqrt{1+A}tgt\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+A}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right).$$

Слично, за вториот интеграл добиваме:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dt}{\cos^2 t\left(1+(1+A)tg^2 t\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+A}}arctg\left(\sqrt{1+A}tgt\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{1+A}}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

откаде следува:

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+A\sin^2 t} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+A}} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+A}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+A}} .$$

Оттука за низата c_n добиваме:

$$c_n = (n+1)\pi \frac{\pi}{\sqrt{1+A}} = (n+1)\frac{\pi^2}{\sqrt{1+(n\pi)^a}} .$$

Слично, за низата b_n имаме:

$$b_n = n\pi \frac{\pi}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^a}} = \frac{n\pi^2}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^a}} .$$

Се враќаме на оценката:

$$b_n = \frac{n\pi^2}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^a}} \le a_n \le (n+1)\frac{\pi^2}{\sqrt{1+(n\pi)^a}} = c_n .$$

Да забележиме дека $b_n = O^*\left(\frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}\right)$, $n\to\infty$, односно $c_n = O^*\left(\frac{1}{n^{\frac{a}{2}-1}}\right)$, $n\to\infty$.

Ова значи дека редот $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира за $\frac{a}{2}-1>1$ односно за $a>4$. Слично редот $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира за $\frac{a}{2}-1\le 1$ односно за $a\le 4$. ●

Задача 5.7. Испитај конвергенција на следниве интеграли ползувајќи го критериумот на Дирихле:

$$1)\ \int_0^{\infty} \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx, a\ne 0 ; \quad 2)\ \int_0^{\infty} \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx,\ p\in(0,1] ; \quad 3)\ \int_0^{\infty} \sin x^2 dx .$$

Решение: 1) Ги разгледуваме следниве функции $f(x)=\sin ax$ и $g(x)=\frac{x}{k^2+x^2}$.

Интегралот го добива обликот $\int_0^\infty f(x)g(x)dx$. Ги проверуваме условите од критериумот на Дирихле:

$$\left|\int_0^b \sin axdx\right|=\left|-\frac{1}{a}\cos ax\Big|_0^b\right|=\left|-\frac{1}{a}\cos ab+\frac{1}{a}\right|\leq\frac{2}{|a|}=M,\ \forall b>0 .$$

За функцијата $g(x)$ важи $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$. Монотоноста ја испитуваме со помош на првиот извод:

$$g'(x)=\left(\frac{x}{k^2+x^2}\right)'=\frac{k^2+x^2-2x^2}{\left(k^2+x^2\right)^2}=\frac{k^2-x^2}{\left(k^2+x^2\right)^2}\leq 0,\ за\ x\geq|k| .$$

Ова значи дека функцијата $g(x)$ е монотоно опаѓачка на $\left[|k|,\infty\right)$. Интегралот го добива следниов облик:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx=\int_0^{|k|}\frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx+\int_{|k|}^\infty\frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx .$$

Да забележиме дека првиот интеграл од десната страна постои затоа што функцијата $g(x)$ е непрекината на $\left[0,|k|\right]$ за $k\neq 0$. За вториот интеграл се задоволени условите од критериумот за конвергенција на Дирихле. Ова значи дека интегралот $\int_0^\infty\frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx, a\neq 0$ е конвергентен за $k\neq 0$. Специјално, за $k=0$ се добива интегралот на Дирихле:

$$D(a)=\int_0^\infty g(x)dx=\int_0^\infty\frac{\sin ax}{x}dx$$

Неговата конвергенција е докажана во задача 5.5, а во следната глава ќе го пресметаме.

2) Интегралот го добива обликот $\int\limits_0^\infty f(x)g(x)dx$, каде што

$$g(x)=\frac{1}{x^p},\ p\in(0,1] \text{ и } f(x)=e^{\sin x}\sin 2x.$$

Да забележиме дека функцијата $f(x)g(x)$ може да се продолжи по непрекинатост во точката $x=0$, па нулата е точка на отстранлив сингуларитет. Интегралот го запишуваме во следниов облик:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx=\int\limits_0^1 \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx+\int\limits_1^\infty \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx.$$

Првиот интеграл од десната страна постои. За вториот одиме со проверка на условите од критериумот на Дирихле:

Функцијата $g(x)=\frac{1}{x^p},\ p\in(0,1]$ монотоно опаѓа на $[1,\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$.

За произволно $b>1$ имаме:

$$\left|\int\limits_1^b f(x)dx\right|=\left|\int\limits_1^b e^{\sin x}2\sin x\cos x dx\right|=\left|2\int\limits_{\sin 1}^{\sin b} e^u u du\right|=2\left|e^u u-e^u\Big|_{\sin 1}^{\sin b}\right|=$$
$$2\left|e^{\sin b}\sin b-e^{\sin b}-e^{\sin 1}\sin 1+e^{\sin 1}\right|\le 2(e+e+e+e)=8e=M.$$

Следува дека интегралот е конвергентен според принципот на Дирихле.

3) Интегралот го запишуваме во облик:

$$\int\limits_0^\infty \sin x^2dx=\int\limits_0^1 \sin x^2dx+\int\limits_1^\infty \sin x^2dx$$

Вториот интеграл од десната страна го запишуваме во облик:

$$\int\limits_1^\infty \sin x^2dx=\int\limits_1^\infty \frac{x\sin x^2}{x}dx$$

Изборот на функции е: $f(x) = x\sin x^2$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Проверката на условите од критериумот на Дирихле е сличен на претходните примери. Заклучуваме дека интегралот е конвергентен. ☻

Забелешка: $\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx$ и $\int\limits_0^\infty \cos x^2 dx$ се нарекуваат интеграли на Френел. Ќе ги пресметаме во следната глава.

Задача 5.8. Испитај конвергенција на следниве интеграли:

$$1)\ \int\limits_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}},\ \theta \in (0,\pi); \qquad 2)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Решение: 1) Да забележиме дека за $\varphi = \theta$ ја добиваме единствената сингуларна точка. Нека $f(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} > 0$, $\theta \in (0,\pi)$. Ќе го примениме вториот критериум за конвергенција со споредување. Ја придружуваме функцијата $g(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{\theta - \varphi}} > 0$ и го пресметуваме лимесот:

$$\lim_{\varphi\to\theta} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)} = \lim_{\varphi\to\theta} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\theta - \varphi}}} = \lim_{\varphi\to\theta} \sqrt{\frac{\theta - \varphi}{\cos\varphi - \cos\theta}} = \sqrt{\lim_{\varphi\to\theta} \frac{\theta - \varphi}{\cos\varphi - \cos\theta}}$$

Влезот со лимесот е оправдан од непрекинатоста на функцијата квадратен корен. Со правилото на Лопитал:

$$\lim_{\varphi\to\theta} \frac{\theta - \varphi}{\cos\varphi - \cos\theta} = \lim_{\varphi\to\theta} \frac{-1}{-\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} > 0.$$

Значи, $\lim\limits_{\varphi\to\theta}\dfrac{f(\varphi)}{g(\varphi)}=\sqrt{\dfrac{1}{\sin\theta}}>0$, па интегралите $\int\limits_0^\theta f(\varphi)d\varphi$ и $\int\limits_0^\theta g(\varphi)d\varphi$ имаат иста природа. Од конвергенцијата на $\int\limits_0^\theta g(\varphi)d\varphi$ заклучуваме конвергенција на интегралот $\int\limits_0^\theta f(\varphi)d\varphi$.

2) Да забележиме дека единствен сингуларитет е точката $x=0$. Ја разгледуваме функцијата $f(x)=\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}>0,\ x\in(0,1]$. Одиме повторно со вториот критериум за конвергенција со споредување. Ја придружуваме функцијата $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0,\ x\in(0,1]$.

Го пресметуваме лимесот:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}=1>0.$$

Ова значи дека интегралите $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ и $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ имаат иста природа, па од конвергенција на $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ следува конвергенција на интегралот $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$. ●

Задача 5.9. Пресметај го интегралот $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$.

Решение. Прво ќе утврдиме конвергенција на дадениот интеграл. Функцијата $f(x)=\ln\sin x$ е определена на $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, но, не и во 0, и е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $\left.0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ставајќи во интегралот $\int\limits_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$, $u=\ln\sin x,\ dv=dx$, добиваме $du=\frac{\cos x}{\sin x}dx,\ v=x$, па оттука имаме:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = x\ln\sin x\Big|_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx = \frac{\pi}{2}\cdot 0 - \lim_{\xi\to 0^+} \xi\ln\sin\xi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx =$$

$$= 0 - \lim_{\xi\to 0^+} \frac{\ln\sin\xi}{\frac{1}{\xi}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx = + \lim_{\xi\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin\xi}\cdot\cos\xi}{\frac{1}{\xi^2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx =$$

$$= \lim_{\xi\to 0^+} (\xi\cos\xi)\frac{1}{\frac{\sin\xi}{\xi}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx = 0\cdot 1 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx = - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx .$$

Добивме:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx \tag{5.17}$$

Од определеноста на $g(x)=x\operatorname{ctg} x$ на $\left.0,\frac{\pi}{2}\right]$ и од

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0} x\frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \cos 0\cdot\frac{1}{1} = 1 ,$$

следува дека функцијата $g(x)=x\operatorname{ctg} x$ е определена на $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, па значи (5.17), интегралот $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$ конвергира.

Нека $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$. Ставајќи $x=2t,\ dx=2dt$, добиваме

$$J=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin t\cos t)dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt.$$

Сега ставајќи, во интегралот $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt$, $t=\frac{\pi}{2}-u,\ dt=-du$, добиваме:

$$J=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\ \frac{\pi}{2}-u\ du=$$

$$=2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t dt+2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u du=\frac{\pi}{4}2\ln 2+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt=\frac{\pi\ln 2}{2}+2\cdot J.$$

Конечно, добивме $J=2J+\frac{\pi\ln 2}{2}$, од каде следува $J=-\frac{\pi\ln 2}{2}$. ●

Задача 5.10. Нека $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ е рамномерно непрекината функција таква што несвојствениот интеграл $\int\limits_0^{\infty}|f(x)|dx$ конвергира. Докажи дека $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Доказ: Ќе претпоставиме спротивното. Тогаш, за некое $\varepsilon>0$ постои низа од реални броеви (x_n), $x_n\to\infty$, $|f(x_n)|\geq\varepsilon, \forall n\in\mathbb{N}$. Да забележиме дека без губење од општост може да претпоставиме дека $f(x_n)\geq\varepsilon$, за произволно $n\in\mathbb{N}$. Од рамномерната непрекинатост на f постои $\delta>0$ така што важи: $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Ќе ја разгледаме функцијата на Стеклов:

$$F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt\,.$$

Од првата теорема за средна вредност во интегрално сметање ($[12]$) постои $\theta\in(-\delta,\delta)$

така што: $F_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt=f(x+\theta)$. Оттука имаме:

$$F_\delta(x_n)=f(x_n+\theta)\geq f(x_n)-\left|f(x_n)-f(x_n+\theta)\right|>\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Но, ова значи дека:

$$\sum_{n\geq 1}\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)dx\geq\sum_{n\geq 1}2\delta\frac{\varepsilon}{2}=\infty\,.$$

Последново е противречност со конвергенцијата на $\int_0^\infty\left|f(x)\right|dx$. ●

Задача 5.11. Нека $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ е непрекината и монотоно опаѓачка функција таква што несвојствениот интеграл $\int_0^\infty f(x)dx$ е конвергентен. Докажи дека:

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right),\ x\to\infty\text{, т.е. } xf(x)\to 0\text{, кога } x\to\infty$$

Доказ: Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Постои $x_0>0$ така што за секој $x\geq x_0$ важи

$$\int_x^\infty f(t)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}\text{. За } x>2x_0$$

имаме:

$$\frac{\varepsilon}{2}>\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt=f(\theta)\int_{\frac{x}{2}}^{x}1dt\geq f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{x}1dt=f(x)\frac{x}{2}.$$

Заклучокот следува. ●

Забелешка. Во доказот ја употребивме првата теорема за средна вредност во интегрално сметање. За доказ види $[12]$.

Задача 5.12. Докажи дека $\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\int_0^\infty f\left(\sqrt{x^2+4}\right)dx$, под претпоставка дека левата страна постои.

Доказ: Воведуваме смена $x+\frac{1}{x}=t$. Ја решаваме равенката по променливата x:

$$x^2-tx+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}.$$

Интегралот од левата страна го запишуваме во облик:

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\int_0^1 f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx. \tag{5.18}$$

За $x\in(0,1]$ одиме со $x=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$. Имено претпоставката за првата можност $x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$ би значела $x\geq\frac{t}{2}\geq 1$ што е противречност. (види (5.18). Слично, за $x\in[1,\infty)$ одиме со $x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$. Претпоставката за втората можност повторно не' доведува до противречност со:

$$t=x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2 \tag{5.19}$$

Значи, имаме: $\int_0^1 f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_\infty^2 f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt$, односно:

$$\int_1^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_2^\infty f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt .$$

Се враќаме на релацијата (5.18)

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_\infty^2 f(t)\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt + \frac{1}{2}\int_2^\infty f(t)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt = \int_2^\infty f(t)\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\,dt.$$

Во последниов интеграл воведуваме смена $t=\sqrt{u^2+4}$ и добиваме:

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \int_2^\infty f(t)\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\,dt = \int_0^\infty f\left(\sqrt{u^2+4}\right)du .$$

Доказот е комплетиран. ●

Задача 5.13. Нека $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ е непрекината реална функција што ги задоволува следниве два услова:

1) $f(x)\geq 0$, за секое $x\in[0,\infty)$;

2) интегралот $\int_0^\infty f(x)\,dx$ е конвергентен.

Докажи дека $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)\,dx = 0$.

Доказ: Одбираме произволно мало $\varepsilon>0$. Од условот 2) постои $p>0$ така што за $n>p$ важи: $\int_n^\infty f(x)\,dx<\varepsilon$. Нека n е доволно големо така што да важи $n\varepsilon>p$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned}\int_0^n (x/n) f(x)\,dx &= \int_0^{n\varepsilon} (x/n) f(x)\,dx + \int_{n\varepsilon}^n (x/n) f(x)\,dx \\ &< \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(x)dx + \int_{n\varepsilon}^n f(x)dx \\ &< \varepsilon \int_0^{n\varepsilon} f(x)dx + \varepsilon < \varepsilon\left(\int_0^\infty f(x)dx + 1\right).\end{aligned}$$

Од произволноста на $\varepsilon > 0$ заклучокот следува. ●

Задача 5.14. Нека f, f' се непрекинати на $[0,\infty)$ и $f = o\left(\frac{1}{x}\right), x \to \infty$. Докажи дека:

$$\int_0^\infty f^2(x)dx \le 2\sqrt{\int_0^\infty x^2 f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_0^\infty f'^2(x)dx}\ .$$

Доказ: Одиме со парцијална интеграција на левата страна:

$$\int_0^\infty f^2(x)dx = xf^2(x)\Big|_0^\infty - 2\int_0^\infty xf(x)\, f'(x)\,dx$$

Од условот $f = o\left(\frac{1}{x}\right), x \to \infty$ добиваме дека:

$$\int_0^\infty f^2(x)dx = -2\int_0^\infty xf(x)\, f'(x)\,dx. \tag{5.19}$$

Од неравенството на Коши Шварц, применето на интегралот од десната страна на релацијата (5.19) имаме:

$$\left|\int_0^\infty xf(x)\, f'(x)dx\right| \le \sqrt{\int_0^\infty x^2 f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_0^\infty f'^2(x)dx}$$

Заклучокот следува. ●

Задача 5.15. Пресметај го следниов интеграл: $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$, каде $a>0$ е произволна константа.

Решение: Да забележиме дека функцијата $\ln x$ е интеграбилна на $(0,b]$, додека во бесконечност е доминирана од $\sqrt{x}$, па интегралот е конвергентен. Воведуваме смена на променлива со $x=\frac{a}{t}$ и добиваме:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx &= \frac{\ln a}{a}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2}dt\\ &= \frac{\ln a}{a}arctgt\Big|_0^\infty - J\\ &= \frac{\pi \ln a}{2a}-J\end{aligned}$$

Да забележиме дека специјално за $a=1$ во горната релација имаме дека $J=-J$ односно $J=0$. Значи:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi \ln a}{2a}. \quad \bullet$$

Задача 5.16. Определи ја главната вредност на интегралот $I=\int_0^\infty \frac{1}{x^2-3x+2}dx$.

Решение: Забележуваме дека горната граница на интервалот на интеграција е бесконечна и функцијата е неограничена во околини на точките $x=1,\ x=2,$ па интегралот ќе го разгледуваме како збир на три несвојствени интеграли така што првиот ја содржи сингуларната точка $x=1,$ вториот ја содржи точката $x=2$ и третиот е бесконечен:

$$I=I_1+I_2+I_3=V.P.\int_0^{3/2}\frac{1}{x^2-3x+2}dx+V.P.\int_{3/2}^{3}\frac{1}{x^2-3x+2}dx+V.P.\int_3^\infty \frac{1}{x^2-3x+2}dx.$$

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx + \int\limits_{1+\varepsilon}^{3/2} \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\ln\left|\frac{1-\varepsilon-2}{1-\varepsilon-1}\right| - \ln 2 + \ln\left|\frac{\frac{3}{2}-2}{\frac{3}{2}-1}\right| - \ln\left|\frac{1+\varepsilon-2}{1+\varepsilon-1}\right| \right) = \ln\frac{1}{2}.$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int\limits_{3/2}^{2-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx + \int\limits_{2+\varepsilon}^{3} \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx \right) = \ln\frac{1}{2}.$$

$$.\ I_3 = \lim_{a\to\infty}\int\limits_3^a \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \lim_{a\to\infty}\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right| - \ln\left|\frac{3-2}{3-1}\right| = -\ln\frac{1}{2}.$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Пресметај ги интегралите или утврди ја нивната дивергенција: (1-15)

1. $\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x^2-1}dx$. **2.** $\int_{0}^{\infty}\cos 2x\,dx$. **3.** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

4. $\int_{a}^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx,\ a>1$. **5.** $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$. **6.** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

7. $\int_{0}^{1/2}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$. **8.** $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$. **9.** $\int_{0}^{\infty}e^{-kx}dx,\ k>0$.

10. $\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^{2}}dx$. **11,** $\int_{0}^{\infty}\frac{x^3\ln x}{\left(1+x^4\right)^{3}}dx$. **12.** $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x^2+2x+5}dx$.

13. $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$. **14.** $\int_{0}^{\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^{3}}dx$. **15.** $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}dx$.

Испитај ја конвергенцијата на следниве интеграли: (16-21)

16. $\int_{1}^{\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{x^5+4}}dx$; **17.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{x}}{1-\cos x}dx$; **18.** $\int_{1}^{\infty}\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}dx$;

19. $\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$; **20.** $\int_{2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}dx$. **21.** $\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$.

22. Докажи дека интегралот $\int_{1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}dx$ дивергира за реалниот број $0<\alpha\le 1$.

23. Докажи дека интегралот $\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ условно конвергира.

24. Испитај апсолутна и условна конвергенција на $\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$, за реалниот број $\alpha>0$.

25. Докажи дека интегралот $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}dx$ конвергира и пресметај ја неговата вредност.

26. Пресметај го несвојствениот интеграл $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\left(x-1\right)\ln x dx$.

27. Докажи дека интегралот интегралот $\int\limits_1^{\infty}\frac{x^3+1}{x^3\sqrt{x+1}}dx$ дивергира.

Пресметај ги интегралите или утврди ја нивната дивергенција: (28-30)

28. $\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **29.** $\int\limits_0^1\ln x dx$; **30.** $\int\limits_{-1}^1 f(x)dx$, каде $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & x<0\\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$.

31. За реалниот број $\lambda>0$, испитај ја конвергенцијата на интегралот: $\int\limits_a^b\frac{1}{(b-x)^{\lambda}}dx.$

Испитај ја конвергенцијата на интегралите (32-37)

32. $\int\limits_0^1\frac{\cos^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$; **33.** $\int\limits_0^1\frac{1}{1-x^3}dx$; **34.** $\int\limits_0^8\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$;

35. $\int\limits_0^2\frac{1}{x-\sin x}dx$; **36.** $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x^4}}dx$.; **37.** $\int\limits_{-1}^2\frac{2x}{x^2-1}dx$

38. Ако $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непарна и непрекината функција, тогаш $V.P.\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx=0$.

39. Докажи дека $V.P.\int\limits_a^b\frac{dx}{\left(x-c\right)^{2n}}$, $n\in\mathbb{N}, a<c<b$ не постои.

ГЛАВА 6

ПАРАМЕТАРСКИ ИНТЕГРАЛИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Нека $f(x,\alpha)$ е дефинирана на правоаголникот $E=[a,b]\times[c,d]$ и нека $f:E\to\mathbf{R}$ е интеграбилна по Риман за секој $\alpha\in[c,d]$на сегментот $[a,b]$. Тогаш функцијата $F:\alpha\mapsto\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$ дефинирана на сегментот $[c,d]$ се вика *Риманов интеграл по параметар*.

Непрекинатост на интеграл по параметар

Теорема 6.1. Нека функцијата f е непрекината на правоаголникот E, тогаш функцијата F е непрекината функција на $[c,d]$.

Значи, покажавме:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha)=\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx=\int\limits_a^b f(x,\alpha_0)dx=F(\alpha_0)$$

Теорема 6.2. Нека функцијата f е непрекината на правоаголникот E, и нека $\varphi:[c,d]\to\mathbf{R}$ и $\psi:[c,d]\to\mathbf{R}$ се непрекинати функции такви што $\varphi([c,d])\subset[a,b]$ и $\psi([c,d])\subset[a,b]$, тогаш функцијата $\Phi(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx$ е непрекината функција на $[c,d]$.

Диференцирање на интеграл што зависи од параметар

Теорема 6.3. Нека функцијата $f:E\to\mathbb{R}$, каде што $E=[a,b]\times[c,d]$, ги задоволува следниве услови:

f е непрекината по $x\in[a,b]$ за секое $\alpha\in[c,d]$.

f има парцијален извод $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ што е непрекината функција на E.

Тогаш функцијата $F(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$ е непрекинато диференцијабилна на $[c,d]$ и важи: $F'(\alpha)=\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$.

Последната формула е позната под името формула на *Лајбниц.*

Теорема 6.4. Нека функциите f и $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ се непрекинати на правоаголникот E, и нека $\varphi:[c,d]\to\mathbf{R}$ и $\psi:[c,d]\to\mathbf{R}$ се диференцијабилни функции такви што $\varphi([c,d])\subset[a,b]$ и $\psi([c,d])\subset[a,b]$, Тогаш функцијата $\Phi(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)dx$ е диференцијабилна функција на $[c,d]$ и важи $\Phi'(\alpha)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx-f(\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha)+f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha)$.

Интегрирање на интеграл по параметар

Нека $E=[a,b]\times[c,d]$ и f е непрекината на правоаголникот E. Тогаш и функциите:

$$F(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx,\quad \alpha\in[c,d]$$

$$\Phi(x)=\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha,\quad x\in[a,b]$$

се непрекинати на $[c,d]$ односно $[a,b]$, па се Риман интеграбилни: F на $[c,d]$ и Φ на $[a,b]$.

Означуваме: $A=\int\limits_c^d F(\alpha)d\alpha=\int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,\alpha)dxd\alpha,\quad B=\int\limits_a^b\Phi(x)dx=\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha dx$.

Теорема 6.5. Ако функцијата f е непрекината на правоаголникот E, тогаш $A=B$.

ЗАДАЧИ

Задача 6.1. Испитај ја непрекинатоста на функцијата:

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx,\ \ y\neq 0,\ \ F(0)=0$$

каде $f\in C[0,1]$ и $f(x)>0$.

Решение: Функцијата ќе ја запишеме во облик:

$$F(y)=y\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+y^2}dx,\ \ y\neq 0,\ \ F(0)=0.$$

Да забележиме дека функцијата $g(x)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ е монотона по x на интервалот $[0,1]$ и ненегативна, а f е непрекината. Ова значи дека се исполнети условите од првата теорема за средна вредност во интегрално сметање, па добиваме:

$$F(y)=f\left(c(y)\right)arctg\frac{1}{y},\ \ 0\leq c(y)\leq 1,\text{ за } y\neq 0$$

Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Ќе ја оцениме разликата:

$$\left|F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)\right|=\left|\left(f\left(c(\varepsilon)\right)+f\left(c(-\varepsilon)\right)\right)arctg\frac{1}{\varepsilon}\right|\geq$$

$$\geq 2\min_{x\in[0,1]} f(x)\left|arctg\frac{1}{\varepsilon}\right|\to\pi\min_{x\in[0,1]} f(x)>0,\ кога\ \varepsilon\to 0$$

Ова значи дека функцијата има прекин во нулата.

Останува да ги разгледаме точките $y\neq 0$☺. Да забележиме дека функцијата $h(x,y)=\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}$ е непрекината на секој правоаголник од облик $\left\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ a\leq y\leq b\right\}$ односно $\left\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ -b\leq y\leq -a\right\}$, каде $b\geq a>0$ се произволни позитивни реални броеви. Според теоремата за непрекинатост на параметарски интеграли од воведот следува дека функцијата F е непрекината на произволен сегмент од облик $[a,b]$ односно $[-b,-a]$. Од произволноста на $b\geq a>0$ следува дека функцијата F е непрекината во секоја точка $y\neq 0$. ☻

Задача 6.2. Пресметај ги следниве гранични вредности:

(i) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$

(ii) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$

(iii) $\lim\limits_{\alpha\to \infty}\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}dx$

Решение: (i) Да забележиме дека подинтегралната функција $f\left(x,\alpha\right)=\sqrt{x^2+\alpha^2}$ е непрекината на секој правоаголник од облик $P=\left\{\left(x,\alpha\right)|-1\le x\le 1,\,-a\le\alpha\le a\right\}$, каде $a>0$ е произволен реален број, па од теоремата за непрекинатост на параметарски интеграли дозволен е граничен премин во знакот на интегралот. Следува:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx=\int_{-1}^{1}|x|=1$$

(ii) Слично на претходниот пример да забележиме дека граничните функции $\varphi\left(\alpha\right)=\alpha$ и $\psi\left(\alpha\right)=1+\alpha$ се непрекинати. Истото важи и за подинтегралната функција $f\left(x,\alpha\right)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$, па од теоремата за непрекинатост на параметарски интеграли добиваме:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int_{\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha}^{\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\,dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}\,.$$

(iii) Ќе ја разгледаме подинтегралната функција:

$$f\left(x,\alpha\right)=\frac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}$$

Да забележиме дека функцијата е непрекината за $|\alpha|>0,\,1\le x\le 2$. Ќе докажеме дека функцијата $f\left(x,\alpha\right)$ рамномерно конвергира по x кон $\frac{1}{2}$, кога $\alpha\to\infty$, за произволно $x\in\left[1,2\right]$. Одбираме произволно $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x|\alpha|}{x^2+\alpha^2}\right)}{2\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}\right|\le\frac{x|\alpha|}{\left(x^2+\alpha^2\right)\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}\le$$

$$\le\frac{2|\alpha|}{\left(1+\alpha^2\right)\ln\left(1+\alpha^2\right)}\le\frac{1}{\ln\left(1+\alpha^2\right)}<\varepsilon,\ \forall x\in[1,2]$$

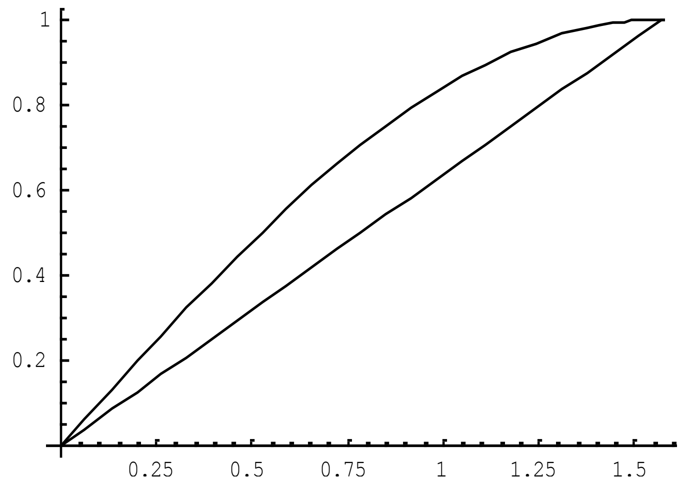
Последното неравенство важи за $|\alpha|>\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$. Ова значи дека можеме да одиме со теоремата за граничен премин во знакот на интегралот кога $\alpha\to\infty$. Следува:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_1^2\frac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}dx=\int_1^2\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\ln\left(x+|\alpha|\right)}{\ln\left(x^2+\alpha^2\right)}dx=\int_1^2\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}.$$ ☻

Задача 6.3. Пресметај го следниов лимес: $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta$.

Решение: Да забележиме дека рамномерната конвергенција по θ отсуствува, па преминот со лимесот во знакот на интегралот не е оправдан. Ќе го смениме пристапот во пресметката на овој интеграл. Ја разгледуваме функцијата $f(\theta,R)=e^{-R\sin\theta}$. Она што не ни се допаѓа е членот $\sin\theta$, посебно за директно интегрирање на f, па идејата е да го оцениме со функција податлива токму за тоа. Прво нешто што ни паѓа на ум е линеарна функција.

Да го разгледаме графикот на функцијата $\sin\theta$ на сегментот $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.



Слика 6.1

Точките $M_1(0,0)$ и $M_2\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ ги поврзуваме со права како што е прикажано на сликата. Геометриски графикот на $\sin\theta$ е над правата со равенка $y=\frac{2}{\pi}\theta$, што следува од конкавноста на овој сегмент.

Го добивме следново неравенство:

$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Се враќаме на интегралот. Ќе ја оцениме подинтегралната функција со помош на горното неравенство:

$$f(\theta,R)=e^{-R\sin\theta}\leq e^{-\frac{2}{\pi}\theta},\quad \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Оттука следува дека:

$$0\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin\theta}d\theta\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}d\theta=\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$$

Ако побараме лимес од двете страни на горните неравенства кога $R \to \infty$ следува дека $\lim\limits_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta = 0$. ☻

Задача 6.4. Дали е дозволен граничен премин во знакот на интегралот кај следниов лимес $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$?

Решение: Не. Доколку влеземе со лимесот во интегралот добиваме нула. Но, доколку прво го пресметаме интегралот, а потоа одиме со пресметка на лимесот добиваме:

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}} d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Причината е прекинот на функцијата $f(x,y) = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ во точката $(0,0)$. ☻

Задача 6.5. Нека $v:[0,1] \to \mathbb{R}$ е непрекината функција, а $k:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ е дефинирана со:

$$k(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x \le y \\ y(1-x), & x > y \end{cases}.$$

Докажи дека функцијата $u(x) = \int_0^1 k(x,y)v(y)dy$ ја задоволува следнава диференцијална равенка $u''(x) = -v(x), \forall x \in [0,1]$.

Доказ: Функцијата ја запишуваме во следниов облик:

$$u(x) = \int_0^1 k(x,y)v(y)dy = \int_0^x k(x,y)v(y)dy + \int_x^1 k(x,y)v(y)dy$$

$$=\int_0^x y(1-x)v(y)dy+\int_x^1 x(1-y)v(y)dy.$$

Оттука за првиот извод имаме:

$$u'(x)=\left(\int_0^x y(1-x)v(y)dy\right)'+\left(\int_x^1 x(1-y)v(y)dy\right)'$$

Одиме со теорема на Лајбниц. За првиот собирок имаме:

$$\psi(x)=x,\ \varphi(x)=0,\ f(y,x)=y(1-x)v(y),$$

па според теоремата за диференцирање на параметарски интеграли добиваме:

$$\left(\int_0^x y(1-x)v(y)dy\right)'=f(\psi(x),x)\psi'(x)-f(\varphi(x),x)\varphi'(x)+\int_0^x\frac{\partial f}{\partial x}dy$$

$$=x(1-x)v(x)+\int_0^x -yv(y)\,dy$$

Слично, за вториот собирок имаме:

$$\psi(x)=1,\ \varphi(x)=x,\ f(y,x)=x(1-y)v(y),$$

па од теоремата на Лајбниц за диференцирање добиваме:

$$\left(\int_x^1 x(1-y)v(y)dy\right)'=f(\psi(x),x)\psi'(x)-f(\varphi(x),x)\varphi'(x)+\int_0^x\frac{\partial f}{\partial x}dy$$

$$=-x(1-x)v(x)+\int_x^1(1-y)v(y)\,dy$$

Ги собираме горните релации и добиваме:

$$u'(x)=\left(\int_0^x y(1-x)v(y)dy\right)'+\left(\int_x^1 x(1-y)v(y)dy\right)'=\int_x^1 v(y)\,dy-\int_0^1 yv(y)\,dy$$

Оттука за вториот извод имаме:

$$u''(x)=\left(\int_x^1 v(y)\,dy-\int_0^1 yv(y)\,dy\right)'=\left(\int_x^1 v(y)\,dy\right)'=$$

$$=\left(\int_0^1 v(y)\,dy-\int_0^x v(y)\,dy\right)'=-\left(\int_0^x v(y)\,dy\right)'=-v(x). \quad ☻$$

Задача 6.6. Ползувајќи ја теоремата на Лајбниц за диференцирање на интеграли што зависат од параметар пресметај:

$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx$$

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Го разгледуваме следниов правоаголник $P=\left\{(x,a)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le\pi,\ \left||a|-1\right|\ge\varepsilon\right\}$. Да забележиме дека функциите:

$$f(x,a)=\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)=\frac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x+a^2}$$

се непрекинати на P. Ова значи дека се исполнети условите од теоремата на Лајбниц за диференцирање на параметарски интеграли, па имаме:

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\,dx=\int_0^{\pi}\frac{2(a-\cos x)}{1-2a\cos x+a^2}\,dx$$

Воведуваме смена $t=tg\,\dfrac{x}{2}$ и добиваме:

$$I'(a)=4\int_0^{+\infty}\frac{a-1+(a+1)t^2}{\left(1+t^2\right)\left((1-a)^2+(1+a)^2t^2\right)}\,dt\,.$$

Последниов интеграл го пресметуваме со помош на методот на неопределени коефициенти (МНК) и добиваме:

$$I'(a)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{a}, & |a|\ge 1+\varepsilon\\ 0, & |a|\le 1-\varepsilon\end{cases}.$$

Оттука следува:

$$I(a)=\begin{cases}2\pi\ln|a|+C_1, & |a|\ge 1+\varepsilon\\ C_2, & |a|\le 1-\varepsilon\end{cases}$$

каде што C_1, C_2 се произволни константи. Од произволноста на $\varepsilon>0$ следува дека:

$$I(a)=\begin{cases}2\pi\ln|a|+C_1, & |a|>1\\ C_2, & |a|<1\end{cases} \tag{6.3}$$

Да забележиме дека $I(0)=0$, па имаме дека $C_2=0$. Останува да ги пресметаме $I(\pm 1)$ и константата C_1. За $I(\pm 1)$ одиме директно:

$$I(\pm 1)=\int_0^{\pi}\ln\left(2\left(1\pm\cos x\right)\right)dx=2\pi\ln 2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt=0$$

За константата C_1 ќе направиме неколку коментари. Прво од горната релација (6.3) следува дека $\lim\limits_{|a|\to 1^-} I(a)=0$, имајќи во предвид дека $C_2=0$. Ова значи дека функцијата $I(a)$ е непрекината од лево во точката $a=1$, односно од десно во точката $a=-1$. Не интересира дали $I(a)$ е непрекината и од десно во точката $a=1$, односно од лево во точката $a=-1$. Ќе одиме со следниов запис:

$$I\left(\frac{1}{a}\right)=\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{1}{a^2}\left(a^2-2a\cos x+1\right)\right)dx=-2\pi\ln|a|+I(a),\ a\ne 0$$

Оттука следува дека:

$$\lim_{|a|\to 1^+} I(a)=2\pi\lim_{|a|\to 1^+}\ln|a|+\lim_{|a|\to 1^+} I\left(\frac{1}{a}\right)=\lim_{|a|\to 1^-} I(a)=0\,.$$

Заклучуваме дека функцијата $I(a)$ е непрекината во точките $a=1$ односно $a=-1$, па функцијата е непрекината за секој $a \in \mathbb{R}$. Следува дека $C_1 = 0$. Значи $I(a)=\begin{cases} 2\pi \ln|a|, & |a|>1 \\ 0, & |a|\le 1 \end{cases}$. ☻

Забелешка. Интегралот $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$ е пресметан во претходната глава.

Задача 6.7. Пресметај го следниов интеграл:

$$I(a)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg(atgx)}{tgx}dx, \quad a\in\mathbb{R}$$

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Подинтегралната функција ќе ја продолжиме по непрекинатост во точките $x = 0, \frac{\pi}{2}$:

$$f(x,a)=\begin{cases} \dfrac{arctg(atgx)}{tgx}, & x\neq 0, \dfrac{\pi}{2} \\ a, & x=0 \\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Сега за парцијалниот извод по параметарот a имаме:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+a^2tg^2x}, & x\neq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Да забележиме дека функциите $f(x,a)$ и $\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)$ се непрекинати на правоаголникот $P=\left\{(x,a) \mid 0\le x\le \frac{\pi}{2},\ \varepsilon\le a\le \beta\right\}$, каде $\varepsilon>0$ е произволно мал, додека $\beta \ge \varepsilon > 0$ е произволно голем реален број. Ова значи дека на правоаголникот P се исполнети условите од теоремата на Лајбниц за диференцирање, па имаме:

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2tg^2x}=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+a^2t^2\right)}=\frac{\pi}{2(1+a)}.$$

Оттука со интегрирање добиваме:

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)+C \tag{6.4}$$

каде што C е некоја константа. Од произволноста на $\beta\geq\varepsilon>0$ добиваме дека горната релација важи за секој $a>0$. Ако побараме лимес во (6.4) кога $a\to 0^+$ добиваме:

$$C=\lim_{a\to 0^+}I(a)$$

Но од непрекинатоста на подинтегралната функција $f(x,a)$ според теоремата1 од воведот, функцијата $I(a)$ е непрекината за секој $a\in\mathbb{R}$.

Ова значи дека $C=\lim\limits_{a\to 0^+}I(a)=I(0)=0$. Следува дека:

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a),\ \forall a\geq 0$$

Да забележиме дека функцијата е непарна, па важи $I(a)=I(|a|)\operatorname{sgn}(a)$, откаде добиваме:

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)\ln(1+|a|),\ \forall a\in\mathbb{R}.$$ ☻

Задача 6.8. Пресметај го следниов интеграл:

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x},\ |a|<1.$$

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Подинтегралната функција $f(x,a)$ ја продолжуваме по непрекинатост, ползувајќи го правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x,a)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{1}{\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1-a\cos x}{1+a\cos x}\frac{(-a\sin x)(1-a\cos x)-(1+a\cos x)a\sin x}{(1-a\cos x)^2}\frac{1}{(-\sin x)}=$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2a}{1-a^2\cos^2 x}=2a.$$

Значи подинтегралната функција ја додефинираме со:

$$f(x,a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x}\ln\dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x}, & x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 2a, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Го пресметуваме парцијалниот извод по параметарот a:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)=\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$$

Ќе го разгледаме правоаголникот: $P=\left\{(x,a)\,|\,0\le x\le\frac{\pi}{2},\ |a|\le 1-\varepsilon<1\right\}$. Да забележиме дека функциите $f(x,a)$ и $\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)$ се непрекинати на P. Одиме со теоремата на Лајбниц на правоаголникот P:

$$I'(a)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x+\sin^2 x-a^2\cos^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x\left(1-a^2+tg^2 x\right)}.$$

Во последниот интеграл воведуваме смена $t=tgx$ и добиваме:

$$I'(a)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x\left(1-a^2+tg^2 x\right)}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1-a^2+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Оттука со интегрирање имаме:

$$I(a) = \arcsin a + C.$$

Од произволноста на $\varepsilon > 0$ горната релација важи за секое $|a| < 1$. Да забележиме уште дека $I(0) = 0$, па $C = 0$. Значи:

$$I(a) = \arcsin a, \ |a| < 1. \quad ☻$$

Забелешка. Интегрирањето и пресметката на граничните вредности во претходната задача 7, ползувајќи го МНК-методот и правилото на Лопитал е оставено како вежба за читателот☺.

Задача 6.9. Пресметај ги следниве интеграли:

$$I_1 = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx, \quad I_2 = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx, \ a > 0, \ b > 0.$$

Решение: Да забележиме дека важи следнава релација:

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^y}{\ln x}\bigg|_a^b = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

па горните интеграли го добиваат обликот:

$$I_1 = \int_0^1 dx\int_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy, \quad I_2 = \int_0^1 dx\int_a^b x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy.$$

Ги разгледуваме подинтегралните функции:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right), & 0 < x \le 1, \ a \le y \le b \\ 0, & x = 0, \ a \le y \le b \end{cases}$$

односно:

$$f_2(x,y)=\begin{cases} x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right), & 0<x\le 1,\ a\le y\le b\\ 0, & x=0,\ a\le y\le b\end{cases}$$

продолжени по непрекинатост во точките $(x,y)=(0,y),\ a\le y\le b$. Според теоремата за промена на редоследот на интегрирање имаме:

$$I_1=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx,\quad I_2=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

Ќе воведеме смена на променлива $x=e^{-t}$, па добиваме:

$$I_1=\int_a^b\frac{dy}{(y+1)^2+1},\quad I_2=\int_a^b\frac{(y+1)dy}{(y+1)^2+1}$$

Откаде со интегрирање по y добиваме:

$$I_1=arctg\,\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)},\quad I_2=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\,.$$ ☻

Забелешка. Ништо посебно. Само да забележиме дека заврши глава 6☺.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Пресметај ги следниве гранични вредности: (1.- 2.)

1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^2 x^2\cos\alpha x dx$.

2. $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}}$.

3. Со непосредно пресметување покажи дека е точно равенството:

$$\frac{\partial\left(\int\limits_0^{\pi} f(x,\alpha)dx\right)}{\partial\alpha}=\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx \quad \text{, каде што} \quad f(x,\alpha)=\cos\alpha x .$$

4. Определи ја вредноста на интегралот $F(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(1+\alpha\sin^2 x\right)dx}{\sin^2 x}, \alpha\geq 0.$

5. Пресметај го интегралот $F(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}.$

6. Дали може со Лајбницовото правило да се пресмета изводот на функцијата $F(\alpha)=\int\limits_0^1 \ln\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$ за $\alpha=0$?

Со примена на правилата за диференцирање по параметар, пресметај ги следните интеграли: (7.-10.)

7. $F(\alpha)=\int\limits_0^1\frac{arctg\alpha x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

8. $F(\alpha)=\int\limits_0^1 x^{\alpha}(\ln x)^n dx, \quad \alpha>-1.$

9. $I=\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

10. $F(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\sin^2 x+\alpha^2\cos^2 x\right)dx, \quad \alpha>0.$

Пресметај ги интегралите: (11.-12.)

11. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_c^d x^y dy.$

12. $\int\limits_0^1\frac{x^d-x^c}{\ln x}dx.$

ГЛАВА 7

РАМНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА И НЕСВОЈСТВЕНИ ПАРАМЕТАРСКИ ИНТЕГРАЛИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Несвојствени интеграли што зависат од параметар

Нека $E=[a,\omega)\times[c,d]$ и $f:E\to\mathbb{R}$. Го разгледуваме несвојствениот интеграл

$$F(\alpha)=\int_a^\omega f(x,\alpha)dx,\ \alpha\in[c,d].$$

Дефиниција 7.1: Велиме дека несвојствениот интеграл $F(\alpha)$ конвергира на $[c,d]$ ако конвергира за секој $\alpha\in[c,d]$, т.е. ако за секој $\varepsilon>0, \exists b_0=b_0(\varepsilon,\alpha)\in[a,\omega)$, така што $\forall b>b_0, \left|\int_b^\omega f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon.$

Ако b_0 не зависи од α , туку само од ε , зборуваме за *рамномерна конвергенција.*

Дефиниција 7.2: Велиме дека несвојствениот интеграл $F(\alpha)$ *рамномерно конвергира по параметарот* α *на множеството* $[c,d]$ ако

$$\forall\varepsilon>0, \exists b_0=b_0(\varepsilon), \forall b>b_0, \forall\alpha\in[c,d], \left|\int_b^\omega f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon.$$

Ако интегралот $\int_a^{\omega} f(x,\alpha)dx$ конвергира на множеството $[c,d]$, но не конвергира рамномерно по параметарот α на $[c,d]$, тогаш велиме дека *конвергира нерамномерно по параметарот* α *на* $[c,d]$. Во тој случај:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall b_0 \in [a,\omega), \exists b \geq b_0, \exists \alpha \in [c,d], \left| \int_b^{\omega} f(x,\alpha)dx \right| \geq \varepsilon.$$

Нека $R_b = \sup\limits_{\alpha \in [c,d]} \left| \int_b^{\omega} f(x,\alpha)dx \right|$, R_b е „остаток“.

Теорема 7.1: Несвојствениот интеграл $F(\alpha)$ рамномерно конвергира на $[c,d]$ ако, и само ако $\lim\limits_{b\to\omega} R_b = 0$.

Теорема 7.2. (Кошиев критериум за рамномерна конвергенција на несвојствен параметарски интеграл) Несвојствениот интеграл $F(\alpha)$ рамномерно конвер-гира на $[c,d]$ ако, и само ако

$$\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \geq a, \forall b_1, b_2 > b_\varepsilon, \forall \alpha \in [c,d], \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,\alpha)dx \right| < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Теорема 7.3. (Критериум на Вајерштрас за рамномерна конвергенција на несвојствен параметарски интеграл) Ако постои функција $\varphi : [a,\omega) \to \mathbb{R}_+$ така што: несвојствениот интеграл $\int_a^{\omega} \varphi(x)dx$ конвергира и $\forall \alpha \in [c,d], \forall x \in [a,\omega)$ е исполнето неравенството $|f(x,\alpha)| \leq \varphi(x)$, тогаш интегралот $F(\alpha) = \int_a^{\omega} f(x,\alpha)dx$ рамномерно конвергира на $[c,d]$.

Теорема 7.4: (Критериум на Дирихле за рамномерна конвергенција на несвојствен параметарски интеграл). Нека:

1) $\forall \alpha \in [c,d]$ функцијата $f(x,\alpha)$ е непрекината по x на $[a,\omega)$ и има рамномерно ограничена примитивна функција, т.е $\exists M < \infty, \forall \alpha \in [c,d]$, $\forall x \in [a,\omega), \int_a^{x} f(t,\alpha)dt \leq M$,
2) Функциите $\varphi(x,\alpha)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\alpha)$ се непрекинати како функции по x на $[a,\omega)$, $\varphi(x,\alpha)$ е монотона по $x \in [a,\omega)$ и рамномерно конвергира кон 0 кога $x \to \omega$,

тогаш интегралот $\Phi(\alpha)=\int_a^\omega f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)dx$ рамномерно конвергира на $[c,d]$.

Својства на функции дефинирани со несвојствени параметарски интеграли

Теоремите за непрекинатост, диференцирање и интегрирање на параметарски интеграл не важат за несвојствениот интеграл $F(\alpha)=\int_a^\omega f(x,\alpha)dx,\ \alpha\in[c,d]$ без дополнителен услов за рамномерна конвергенција.

Непрекинатост

Теорема 7.5: Ако

1) Функцијата $f:E\to\mathbb{R}$ е непрекината на E и
2) Интегралот $F(\alpha)=\int_a^\omega f(x,\alpha)dx$ рамномерно конвергира на $[c,d]$,

тогаш и функцијата $F(\alpha)$ е непрекината на $[c,d]$.

Последица 7.1: Ако се исполнети условите на теоремата, за фиксно $\alpha_0\in[c,d]$ имаме:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^\omega f(x,\alpha)dx=\lim_{\alpha\to\alpha_0}F(\alpha)=F(\alpha_0)=\int_a^\omega \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)dx.$$

Диференцирање

Теорема 7.6: Нека функцијата f и парцијалниот извод $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ се непрекинати на E, интегралот $F(\alpha)=\int_a^\omega f(x,\alpha)dx$ конвергира за некое $\alpha\in[c,d]$, и интегралот $\lambda(\alpha)=\int_a^\omega \dfrac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$ рамномерно конвергира на $[c,d]$, тогаш функцијата $F(\alpha)$ е диференцијабилна на $[c,d]$ и важи: $F'(\alpha)=\lambda(\alpha)$.

Со теоремата 7.6 се дадени доволни услови за примена на Лајбницовото правило на несвојственипараметарски интеграли.

Интегрирање

При итегрирање на несвојствени интеграли што зависат од параметар ќе разликуваме два случаја: кога новиот интеграл е обичен и кога е несвојствен. Важно е да напоменеме дека и во двата случаја мораме да внимаваме при промената на редоследот на интегрирање.

Теорема 7.7: Ако

1) Функцијата $f: E \to \mathbf{R}$ е непрекината на E и
2) Интегралот $F(\alpha) = \int_a^{\omega} f(x,\alpha)dx$ рамномерно конвергира на $[c,d]$,

тогаш функцијата $F(\alpha)$ е Риман интеграбилна на $[c,d]$ и важи:

$$\int_c^d F(\alpha)d\alpha = \int_a^{\omega}\int_c^d f(x,\alpha)d\alpha\, dx .$$

Несвојствено интегрирање на несвојствен интеграл по параметар:
Нека $G = [a,\omega)\times[c,\omega_1)$ и $f: G \to \mathbf{R}$.

Теорема 7.8: Нека:

1) Функцијата f е ненегативна и непрекината на G, а
2) функциите:

$$F(\alpha) = \int_a^{\omega} f(x,\alpha)dx, \quad \alpha \in [c,\omega_1), \qquad \Phi(x) = \int_c^{\omega_1} f(x,\alpha)d\alpha, \quad x \in [a,\omega)$$

конвергираат и се непрекинати на $[c,\omega_1)$ односно $[a,\omega)$, тогаш важи равенството:

$$\int_c^{\omega_1} F(\alpha)d\alpha = \int_c^{\omega_1}\int_a^{\omega} f(x,\alpha)dxd\alpha = \int_a^{\omega}\int_c^{\omega_1} f(x,\alpha)d\alpha dx = \int_a^{\omega}\Phi(x)dx \qquad (7.2)$$

под услов барем еден од последователните интеграли во (7.2) да конвергира.

ЗАДАЧИ

Задача 7.1. Пресметај ја следнава граница:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}$$

Решение: Го запишуваме интегралот во следниов облик:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}=1-\int_0^1\frac{x^n}{x^n+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}$$

Да забележиме дека важат следниве оценки:

$$\int_0^1\frac{x^n}{x^n+1}dx<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1},\quad \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}<\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^n}=\frac{1}{n-1},\ n\ge 2,$$

Оттука следува дека $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}=1$. ☻

Задача 7.2. Испитај рамномерна конвергенција на следниов интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\ -\infty<\alpha<+\infty. \qquad (7.3)$$

Решение: Ја разгледуваме подинтегралната функција:

$$f(x,\alpha)=\frac{\cos\alpha x}{1+x^2},\alpha\in\mathbb{R}.$$

Да забележиме дека важи следново неравенство:

$$|f(x,\alpha)|=\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

Дефинираме мајорантна функција $F(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Од конвергенцијата на интегралот $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx=\pi<+\infty$, според мајорантниот критериум на Вајерштрас заклучуваме рамномерна конвергенција на (7.3). ☻

Задача 7.3. Испитај рамномерна конвергенција на следниов интеграл:

$$J(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+1},\ 0\le\alpha<+\infty .$$

Решение: Го разгледуваме интегралот:

$$J(B,\alpha)=\int_{B}^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}.$$

Воведуваме смена $x=\alpha+t$ и добиваме

$$J(B,\alpha)=\int_{B-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}. \tag{7.4}$$

Сега нека $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ е произволно мал. Посебно, правиме избор за $\alpha=B$ во (7.4) и добиваме $J(B,B)=\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{2}>\varepsilon$, за произволно големо $B>0$. Следува дека интегралот конвергира нерамномерно на интервалот $[0,\infty)$. ☻

Задача 7.4. Испитај рамномерна конвергенција на интегралот $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ на интервалот:

(i) $1<\alpha_0\le\alpha<+\infty$; (ii) $1<\alpha<+\infty$.

Решение: (i) Дефинираме функција $F(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha_0}}$, $x\geq 1$. Да забележиме дека важи следново неравенство:

$$f(x,\alpha)=\frac{1}{x^{\alpha}}\leq\frac{1}{x^{\alpha_0}}=F(x),\, 1\leq x<+\infty,\, 1<\alpha_0\leq\alpha<+\infty .$$

Ова значи дека $F(x)$ е мајорантна функција за $f(x,\alpha)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$. Уште повеќе, важи $\int\limits_{1}^{+\infty}F(x)dx<\infty$, т.е. интегралот е конвергентен. Според мајорантниот критериум на Вајерштрас заклучуваме рамномерна конвергенција на разгледуваниот интервал.

(ii) Одбираме произволно $B>0$. Го пресметуваме интегралот:

$$\int\limits_{B}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1} \text{ и } \lim_{\alpha\to 1^+}\int\limits_{B}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 1^+}\frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1}=+\infty .$$

Ова значи дека постои $\varepsilon>0$ така што:

$$\forall B_0,\ \exists B>B_0\wedge\exists\alpha\in(1,\infty) \text{ така што } \int\limits_{B}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}>\varepsilon .$$

Следува дека интегралот конвергира нерамномерно на $1<\alpha<+\infty$. ☻

Задача 7.5. Докажи дека интегралот $\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\alpha}+1}$ конвергира нерамномерно на интервалот $1<\alpha<+\infty$.

Доказ: Нека $B>1$. Да забележиме дека важи следново неравенство:

$$\int\limits_{B}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}+1}>\frac{1}{2}\int\limits_{B}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1}\to+\infty,\quad \alpha\to 1^+ .$$

Слично на претходната задача, заклучуваме дека интегралот конвергира нерамномерно на разгледуваниот интервал. ☻

Забелешка. Конвергенцијата за фиксно α следува од критериумот за конвергенција со споредување ($\frac{1}{x^\alpha+1} \sim \frac{1}{x^\alpha}$, $x \to \infty$).

Задача 7.6. Испитај рамномерна конвергенција на интегралот:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx, \quad 0 \le p \le 10 .$$

Решение: Ја разгледуваме подинтегралната функција $f(x,p) = \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}$. Да забележиме дека важи следново неравенство:

$$f(x,p) = \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \le \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = F(x)$$

Добивме некаква мајорантна функција што не зависи од параметарот p, но интеграбилноста на интервалот $[1,\infty)$ е посебно прашање што ќе се обидеме да го заобиколиме. Идејата е следна. Функцијата $F(x)$ ја запишуваме во облик:

$$F(x) = \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x}} = \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}} \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} .$$

Сега наместо да се занимаваме со интеграбилноста на $F(x)$ избравме функција $\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$ што знаеме дека е интеграбилна на $[1,\infty)$, затоа што $\frac{5}{4} > 1$. Она што останува да се надеваме е дека функцијата $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ е доволно „мала“ за да ја локализира $\ln^{10} x$. Ја формираме функцијата $g(x) = \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}}$. Ќе го провериме последново преку испитување на локалните екстреми на $g(x)$.

$$g'(x)=\left(\frac{\ln^{10}x}{\sqrt[4]{x}}\right)'=\frac{10\ln^{9}x\left(\frac{1}{x}\sqrt[4]{x}\right)-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\ln^{10}x}{\sqrt{x}}=0\,,$$

откаде добиваме дека $x_1=e^{40}, x_2=1$ се единствени стационарни точки. Го пресметуваме вториот извод и потврдуваме дека $x_1=e^{40}$ е точка на локален максимум.

($g''\left(e^{40}\right)<0$ го оставаме на читателот за вежба).

Да забележиме дека функцијата на интервалот $\left[e^{40},+\infty\right)$ опаѓа, а на интервалот $\left[1,e^{40}\right)$ расте, па во точката $x_1=e^{40}$ функцијата достигнува глобален максимум на интервалот $\left[1,+\infty\right)$. Следува дека:

$$f(x,p)=\frac{\ln^{p}x}{x\sqrt{x}}\le\frac{\ln^{10}x}{x\sqrt{x}}=F(x)=g(x)\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\le\left(\frac{40}{e}\right)^{10}\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}},\ x\ge1\,.$$

Конечно, од мајорантниот критериум на Вајерштрас заклучуваме рамномерна конвергенција на $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x,p)\,dx,\ 0\le p\le10$. ☻

Задача 7.7. Испитај ја рамномерната конвергенција на интегралот:

$$J(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^{2}}dx,\ 0\le\alpha<+\infty\,.$$

Решение: Одбираме произволно $B>0$. Во интегралот $\int\limits_{B}^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^{2}}dx$ воведуваме смена $\sqrt{\alpha}x=t$ и добиваме:

$$\int\limits_{B}^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^{2}}dx=\int\limits_{B\sqrt{\alpha}}^{+\infty}e^{-t^{2}}dt\,.$$

Нека $0 < \varepsilon < \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ е произволно мал број. Посебно, за избор на $\alpha = \dfrac{1}{B^2}$ го добиваме неравенството:

$$\int\limits_{B}^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-t^2} dt > \varepsilon$$

важечко за произволно големо $B > 0$. Следува дека интегралот конвергира нерамномерно на разгледуваниот интервал. ☻

Задача 7.8. Испитај рамномерна конвергенција на интегралот:

$$I(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy, \quad x \in \mathbb{R} .$$

Решение: Да забележиме дека $I(0) = 0$. За $x \neq 0$ воведуваме смена во интегралот $I(x)$, $t = |x| y$ и добиваме:

$$I(x) = C \frac{\sin x}{|x|} e^{-x^2}, \; C = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt \neq 0 .$$

Од тоа што $\lim\limits_{x \to 0^+} I(x) = C, \; \lim\limits_{x \to 0^-} I(x) = -C$, заклучуваме дека функцијата $I(x)$ има прекин во точката $x = 0$. Сега, ако претпоставиме дека интегралот рамномерно конвергира на $\mathbb{R}$ тогаш според теоремата од воведот $I(x)$ треба да е непрекината функција, со оглед на фактот што подинтегралната функција $f(y, x) = e^{-x^2(1+y^2)} \sin x$ е токму таква. Последново е противречност. ☻

Задача 7.9. Нека $f : [a, +\infty) \times I(y_0) \to \mathbb{R}$ е реална функција, каде $I(y_0)$ е интервал што ја содржи точката $y_0 \in \mathbb{R}$. Докажи дека ако:

(i) Функцијата $f(x,y)$ рамномерно конвергира кон $f(x,y_0)$ на секој интервал $[a,b]$, каде што $b>a$ е произволно голем реален број,

(ii) Постои мајорантна функција $F:[a,\infty)\to\mathbb{R}, \left|f(x,y)\right|\le F(x), \forall x\in[a,\infty)$ со особина неправиот интеграл да конвергира, т.е. $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx<\infty$,

тогаш важи: $\lim\limits_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_a^{+\infty}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)dx$.

Доказ: Ќе ја разгледаме разликата: $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx$.

Ја запишуваме во следниов облик:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx=\int\limits_a^{b}\left(f(x,y)-f(x,y_0)\right)dx+\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx-\int\limits_b^{+\infty} f(x,y_0)dx$$

каде што $b>a$ е произволно голем реален број.

Сега, одбираме произволно $\varepsilon>0$. Според условот (ii) за доволно големо $b>a$ важат следниве оценки:

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\right|\le\int\limits_b^{+\infty} F(x)dx<\frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y_0)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

а според условот (i) оценката:

$$\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)},\quad \forall x\in[a,b]$$

за доволно мала разлика $\left|y-y_0\right|$.

Следува дека:

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx\right| < \varepsilon$$

за доволно мала разлика $|y-y_0|$. ☻

Задача 7.10. Нека $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е непрекината и ограничена функција. Докажи дека важи: $I=\lim\limits_{y\to\pm 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx=\pm f(0)$.

Доказ: За $y>0$ воведуваме смена $x=ty$ и добиваме:

$$I=\lim_{y\to 0^+}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(ty)}{t^2+1}\,dt$$

Да забележиме дека:

1) $\left|\frac{f(ty)}{t^2+1}\right|\le\frac{M}{t^2+1}$, каде што $|f(ty)|\le M=const$ според условот на задачата;

2) $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{2}$ е конвергентен;

Од непрекинатоста на f функцијата $\frac{f(ty)}{t^2+1}$ рамномерно конвергира кон функцијата $\frac{f(0)}{t^2+1}$, при $y\to 0^+$ на секој интервал $[0,b]$, па според претходната задача имаме:

$$I=\lim_{y\to 0^+}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(ty)}{t^2+1}\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\lim_{y\to 0^+}\frac{f(ty)}{t^2+1}\,dt=f(0).$$

Да забележиме дека интегралот е непарен по променливата y, па од горната релација имаме:

$$I=\lim_{y\to 0^-}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx=-f(0).$$ ☻

Задача 7.11. Докажи дека ако:

(i) Интегралот $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\,dx$ конвергира рамномерно на (y_1, y_2);

(ii) Функцијата φ е ограничена и монотона по x;

тогаш интегралот $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx$ е рамномерно конвергентен на интервалот (y_1, y_2).

Доказ: Одбираме произволно мало $\varepsilon > 0$. Според првиот услов, ползувајќи го критериумот на Коши, постои $B(\varepsilon)$ такво што за секој $b_1, \theta, b_2 > B(\varepsilon)$ важат следниве неравенства:

$$\left|\int_{b_1}^{\theta} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \left|\int_{\theta}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall y \in (y_1, y_2) \tag{7.5}$$

каде што $M = \sup\limits_{x,y} |\varphi(x,y)| \neq 0$ (за $M = 0$ тврдењето е тривијално). Сега со оглед на вториот услов, одиме со втората теорема за средна вредност во интегрално сметање:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx = \varphi(b_1,y)\int_{b_1}^{\theta} f(x,y)\,dx + \varphi(b_2,y)\int_{\theta}^{b_2} f(x,y)\,dx,$$

за некое $\theta,\ b_1 \le \theta \le b_2$. Оттука ползувајќи ги (7.5) имаме:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx\right| \le |\varphi(b_1,y)|\left|\int_{b_1}^{\theta} f(x,y)\,dx\right| + |\varphi(b_2,y)|\left|\int_{\theta}^{b_2} f(x,y)\,dx\right|$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,\ \forall y \in (y_1, y_2).$$

Согласно критериумот на Коши заклучуваме дека интегралот рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал. ☻

Задача 7.12. Испитај рамномерна конвергенција на интегралот:

$$J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx,\ 0\le\alpha<+\infty .$$

Решение: Ги разгледуваме функциите:

$$f(x,\alpha)=\frac{\sin x}{x}\text{, односно } \varphi(x,\alpha)=e^{-\alpha x}$$

Да забележиме дека интегралот $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ конвергира според Дирихле, па оттука следува и рамномерна конвергенција со оглед на тоа што не зависи од параметар.

Од друга страна функцијата $\varphi(x,\alpha)=e^{-\alpha x}$ е монотона по променливата x $(\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\alpha e^{-\alpha x}\le 0)$ и ограничена со единица. Според претходната задача заклучуваме рамномерна конвергенција. ☻

Задача 7.13. Испитај ја рамномерната конвергенција на интегралот:

$$I(\alpha)=\int_1^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx,\quad 0\le\alpha<+\infty,$$

каде што $p>0$ е фиксно.

Решение: Да забележиме дека интегралот $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$, за $p>0$ е конвергентен според критериумот на Дирихле, а функцијата $e^{-\alpha x}$ е монотона по x и ограничена со единица. Според задача 7.11 заклучуваме рамномерна конвергенција. ☻

Задача 7.14. Испитај рамномерна конвергенција на интегралот:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx,\quad p\ge 0$$

Решение: Воведуваме смена $x = \sqrt{t}$ и добиваме:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)\sqrt{t}} dt .$$

Интегралот $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ е конвергентен според критериумот на Дирихле, а функцијата $\varphi(t,p) = \frac{1}{2\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}$, $p \geq 0$ е монотона по t и ограничена со $\frac{1}{2}$, па според задача 7.11 заклучуваме рамномерна конвергенција. ☻

Забелешка. Секој конвергентен интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ што не зависи од параметарот p е и рамномерно конвергентен по $p \geq 0$.

Задача 7.15. Нека $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ е реална функција таква што е интеграбилна на интервалот $[0,+\infty)$. Докажи дека:

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Доказ: Ќе ја разгледаме разликата: $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Ја запишуваме во следниов облик:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - 1\right) f(x) dx =$$
$$\int_0^{B} \left(e^{-\alpha x} - 1\right) f(x) dx + \int_B^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - 1\right) f(x) dx.$$

Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Да забележ име дека според задачата 7.11 интегралот $\int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}-1\right)f\left(x\right)dx$ е рамномерно конвергентен за $\alpha \geq 0$. Имено функцијата $\varphi\left(x,\alpha\right)=e^{-\alpha x}-1$ е монотона по $x \geq 0$ и ограничена со единица, додека интегралот $\int_0^{+\infty} f\left(x\right)dx$ е конвергентен според условот на задачата. Следува дека за доволно големо $B>0$ важи:

$$\left|\int_B^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}-1\right)f\left(x\right)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall \alpha \geq 0 \tag{7.6}$$

Останува да провериме дали за доволно мало $\alpha>0$ важи:

$$\left|\int_0^{B}\left(e^{-\alpha x}-1\right)f\left(x\right)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Одиме со следнава оценка:

$$\left|\int_0^{B}\left(e^{-\alpha x}-1\right)f\left(x\right)dx\right|\leq\left(1-e^{-\alpha B}\right)MB<\frac{\varepsilon}{2} \tag{7.7}$$

при што последното неравенство е задоволено за:

$$0\leq\alpha\leq\frac{1}{B}\ln\frac{2MB}{2MB-\varepsilon},\ \ 0<\varepsilon<2MB \tag{7.8}$$

каде што $M=\sup\limits_{0\leq x\leq B}\left|f\left(x\right)\right|\neq 0$ (за $M=0$ тврдењето е тривијално).

Сега од неравенствата (7.6) и (7.7) добиваме:

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f\left(x\right)dx-\int_0^{+\infty}f\left(x\right)dx\right|<\varepsilon$$

за доволно големо B и доволно мало α што го задоволува условот (7.8). ☻

Задача 7. 16. Докажи дека интегралот: $I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ конвергира:

1) рамномерно на секој интервал $0 < a \le \alpha \le b$.

2) нерамномерно на секој интервал $0 \le \alpha \le b$.

Доказ: 1) Дефинираме мајорантна функција $F(x) = be^{-ax}$. Лесно се проверува дека интегралот $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ е конвергентен. Според мајорантниот критериум на Вајерштрас заклучуваме рамномерна конвергенција.

2) Во интегралот $I = \int_B^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ воведуваме смена $t = \alpha x, \ \ \alpha > 0$, па добиваме:

$$I = \int_B^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \int_{\alpha B}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-\alpha B} .$$

Оттука следува дека за произволно $0 < \varepsilon < 1$ и $\forall B > 0, \exists \alpha \in (0, b)$ така што $e^{-\alpha B} > \varepsilon$. На пример бројот α може да се одбере од следново неравенство: $0 < \alpha < \frac{1}{B} \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Следува дека интегралот конвергира нерамномерно на разгледуваниот интервал. ☻

Задача 7.17. Докажи дека интегралот:

$$I(y) = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx, \quad 0 < y < 1$$

рамномерно конвергира на интервалот $0 < y < 1$. Дали може да се ползува мајорантниот критериум на Вајерштрас?

Доказ: Ќе го разгледаме интегралот: $L=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$. Конвергентноста следува од неравенството: $e^{-t^2}\le e^{-t}$, $\forall t\ge 1$ и од конвергенцијата на интегралот: $\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}dt$. (Во глава 11 ќе го пресметаме L со помош на двојни интеграли). Следува дека за секое $\varepsilon>0$ постои $B(\varepsilon)>0$ т.ш. важи: $\int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-t^2}dt<\varepsilon$. Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Ќе го разгледаме интегралот: $\int\limits_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$, каде што $A>0$ е доволно голем реален број што дополнително ќе го прецизираме. Воведуваме смена $t=\frac{1}{y}\left(x-\frac{1}{y}\right)$ и добиваме:

$$\int\limits_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx=y\int\limits_{\frac{1}{y}\left(A-\frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Ќе направиме оценка на последниов интеграл:

$$y\int\limits_{\frac{1}{y}\left(A-\frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}dt<y\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=2Ly<\varepsilon,\ \text{за}\ 0<y<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

Останува да испитаме за $\frac{\varepsilon}{2L}\le y<1$:

$$y\int\limits_{\frac{1}{y}\left(A-\frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}dt<\int\limits_{\frac{1}{y}\left(A-\frac{1}{y}\right)}^{+\infty} e^{-t^2}dt<\int\limits_{A-\frac{2L}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-t^2}dt<\int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-t^2}dt<\varepsilon,\ \ \frac{\varepsilon}{2L}\le y<1$$

каде што направивме избор за бројот $A>\frac{2L}{\varepsilon}+B(\varepsilon)$.

Следува дека интегралот конвергира рамномерно на разгледуваниот интервал $0<y<1$.

Останува да го коментираме прашањето околу критериумот на Вајерштрас. Претпоставуваме дека постои мајорантна функција. Тогаш имаме:

$$f(x,y)=e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\leq F(x),\ \forall y\in(0,1).$$

Да забележиме дека од $f:[1,+\infty)\times(0,1)\to\mathbb{R}$, за секој $x\geq 1$ постои $y=\dfrac{1}{x}$ така што $f(x,y)=1$. Следува дека:

$$F(x)\geq 1,\ \text{за секој}\ x\in[1,+\infty).$$

Последново е противречност со конвергентноста на интегралот $\int\limits_1^{+\infty}F(x)dx$ според претпоставката.

Следува дека рамномерната конвергенција на интегралот $I(y)$ на разгледуваниот интервал $y\in(0,1)$ не може да се заклучи од мајорантниот критериум на Вајерштрас. ☻

Задача 7.18. Докажи дека ако:

(i) Функцијата $\varphi:[a,+\infty)\times(y_1,y_2)\to\mathbb{R}$ рамномерно конвергира кон 0 кога $x\to+\infty$, $y\in(y_1,y_2)$ и е монотона по x, $x\in[a,+\infty)$.

(ii) Интегралот $\int\limits_a^x f(t,y)dt$ е ограничен со константа $M>0$, за секој $x\in[a,+\infty)$ и за секој $y\in(y_1,y_2)$, т.е.

$$\left|\int\limits_a^x f(t,y)dt\right|<M,\ \forall x\in[a,+\infty),\forall y\in(y_1,y_2).$$

Тогаш интегралот:

$$\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dx$$

рамномерно конвергира на интервалот $y_1<y<y_2$.

Доказ: Одиме со втората теорема за средна вредност во интегрално сметање на интегралот:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx\right| = \left|\varphi(b_1,y)\int_{b_1}^{\theta} f(x,y)\,dx + \varphi(b_2,y)\int_{\theta}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| \le$$
$$\le 2M\left|\varphi(b_1,y)\right| + 2M\left|\varphi(b_2,y)\right|, \quad b_1,\theta,b_2 \in [a,+\infty).$$

Сега од рамномерната конвергентност на φ кон нулата кога $x \to +\infty$ по параметарот $y \in (y_1, y_2)$ имаме дека за секое $\varepsilon > 0$, постои $B(\varepsilon)$ така што:

$$\left|\varphi(b_1,y)\right| < \frac{\varepsilon}{4M} \text{ и } \left|\varphi(b_2,y)\right| < \frac{\varepsilon}{4M}, \ \forall y \in (y_1, y_2)$$

за $b_1, b_2 > B(\varepsilon)$. Следува дека за секое $\varepsilon > 0$, постои $B(\varepsilon)$ така што:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx\right| < \varepsilon, \ \forall y \in (y_1, y_2)$$

за $b_1, b_2 > B(\varepsilon)$. Според критериумот на Коши заклучуваме дека интегралот рамномерно конвергира на разгледуваниот интервал. ☻

Задача 7.19. Докажи дека интегралот $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^{\alpha}}dx$ е непрекината функција на интервалот $-\infty < \alpha < 2$.

Доказ: Воведуваме смена $x = \frac{1}{t}$ во интегралот и добиваме:

$$F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t^{2-\alpha}}dt$$

Нека $-\infty < \alpha \le \frac{1}{2}$. Тогаш од неравенството:

$$\left|\frac{\sin\alpha t}{t^{2-\alpha}}\right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}, \quad t\in[1,+\infty)$$

заклучуваме рамномерна конвергенција на интегралот на интервалот $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, според мајорантниот критериум на Вајерштрас. Сега од непрекинатоста на подинтегралната функција $f(t,\alpha)=\frac{\sin\alpha t}{t^{2-\alpha}}$, за $t\geq 1$ и $\alpha\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, според теоремата од воведот следува непрекинатост на F на разгледуваниот интервал.

Останува да го дискутираме случајот кога $\alpha\in\left[\frac{1}{2},2\right)$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно мал број. Го разгледуваме интервалот $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq 2-\varepsilon$. Тогаш имаме:

$$\left|\int_1^t \sin\alpha x dx\right| < \frac{2}{\alpha}\leq 4, \ \forall t\geq 1, \forall\alpha\in\left[\frac{1}{2},2-\varepsilon\right].$$

Од друга страна функцијата $\varphi(t,\alpha)=\frac{1}{t^{2-\alpha}}$, при фиксно $\alpha,$ монотоно се стреми кон нулата кога $t\to+\infty$.

Но, имајќи ја во предвид оценката:

$$\frac{1}{t^{2-\alpha}}\leq\frac{1}{t^{\varepsilon}}, \quad \text{за секој } t\in[1,+\infty)$$

заклучуваме дека функцијата $\varphi(t,\alpha)=\frac{1}{t^{2-\alpha}}$ рамномерно по α се стреми кон нулата.

Според претходната задача заклучуваме рамномерна конвергенција на разгледуваниот интервал. Следува дека функцијата $F(\alpha)$ е непрекината и на интервалот $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq 2-\varepsilon$.

Од произволноста на $\varepsilon>0$ заклучуваме непрекинатост на интервалот $\frac{1}{2}\leq\alpha<2$. Доказот е комплетиран. ☻

Задача 7.20. Испитај непрекинатост на следнава функција:

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx,\ 0<\alpha<2.$$

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Го разгледуваме параметарот α на интервалот $0<\varepsilon\le\alpha\le 2-\varepsilon<2$. Функцијата $F(\alpha)$ ја запишуваме во следниов облик:

$$F(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx=\int_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx+\int_1^{\pi-1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx+\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx.$$

Со оценка на подинтегралната функција на секој интервал посебно имаме:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx<\int_0^{1}\frac{dx}{x^{\alpha-1}(\pi-x)^{\alpha}}+\int_1^{\pi-1}\frac{dx}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}+\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{dx}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha-1}}\le$$
$$\le\int_0^{1}\frac{dx}{x^{1-\varepsilon}}+\pi-2+\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{dx}{(\pi-x)^{1-\varepsilon}}.$$

Да забележиме дека последните интеграли се конвергентни, па од мајорантниот критериум на Вајерштрас заклучуваме рамномерна конвергенција на интервалот $\varepsilon\le\alpha\le 2-\varepsilon$. Со оглед на тоа што подинтегралната функција:

$$f(x,\alpha)=\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}},\ 0<x<\pi,\ \varepsilon\le\alpha\le\pi$$

е непрекината на посочениот правоаголник, заклучуваме дека F е таква на интервалот $\varepsilon\le\alpha\le 2-\varepsilon$. Од произволноста на ε заклучокот следува. ☻

Задача 7.21. Ползувајќи ја формулата $\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n},\ n>0$ пресметај го следниов интеграл:

$$I(n)=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx,\quad m\in\mathbb{N}.$$

Решение: Со формално диференцирање по параметарот n од двете страни на дадената формула $m-$пати добиваме:

$$I(n)=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x dx=\left(\frac{1}{n}\right)^{(m)}=(-1)^m\frac{m!}{n^{m+1}}$$

Останува да го оправдаме диференцирањето. Воведуваме смена $x=\frac{1}{t}$ и добиваме:

$$\int_0^1 x^{n-1}dx=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{n+1}} \text{ односно } I(n)=(-1)^m\int_1^{+\infty}\frac{\ln^m t}{t^{n+1}}dt\,.$$

Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Да забележиме дека подинтегралната функција $f(t,n)=\frac{1}{t^{n+1}}$ и $\frac{\partial^m f}{\partial n^m}(t,n)=(-1)^m\frac{\ln^m t}{t^{n+1}}$ се непрекинати на областа $0<\varepsilon\le n<+\infty,\ 1\le t<+\infty$, додека интегралот $\int_0^1 x^{n-1}dx$ е конвергентен.

Според теоремата за диференцирање на неправи параметарски интеграли доволно е уште да докажеме рамномерна конвергенција на интегралот $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^m t}{t^{n+1}}dt$ на интервалот $0<\varepsilon\le n<+\infty$. Одиме со пристап сличен на задачата 7.6:

$$\left|\frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\right|\le\frac{\ln^m t}{t^{1+\varepsilon}}=\frac{\ln^m t}{t^{\frac{\varepsilon}{2}}}\frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}},\ \forall t\ge 1\,.$$

Ќе ја разгледаме функцијата $g(t)=\frac{\ln^m t}{t^{\frac{\varepsilon}{2}}}$. Испитуваме локални екстреми на интервалот $[1,+\infty)$. Го пресметуваме првиот извод на g:

$$g'(t)=\frac{\left(m\frac{1}{t}\ln^{m-1}t\right)t^{\frac{\varepsilon}{2}}-\ln^m t\left(\frac{\varepsilon}{2}t^{\frac{\varepsilon}{2}-1}\right)}{t^{\varepsilon}}=\frac{t^{\frac{\varepsilon}{2}-1}\ln^{m-1}t\left(m-\frac{\varepsilon}{2}\ln t\right)}{t^{\varepsilon}}\,.$$

Добиваме две стационарни точки $t_1 = 1$ и $t_2 = e^{\frac{2m}{\varepsilon}}$. Лесно се проверува дека втората точка $t_2 = e^{\frac{2m}{\varepsilon}}$ е точка во која функцијата g го достигнува својот глобален максимум на интервалот $[1, +\infty)$. Оттука имаме:

$$\left|\frac{\ln^m t}{t^{n+1}}\right| \le \frac{\ln^m t}{t^{1+\varepsilon}} = \frac{\ln^m t}{t^{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \le \left(\frac{2m}{e\varepsilon}\right)^m \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}},\ \forall t \ge 1.$$

Според мајорантниот критериум на Вајерштрас заклучуваме рамномерна конвергенција на разгледуваниот интервал $0 < \varepsilon \le n < +\infty$. Од произволноста на $\varepsilon > 0$ диференцирањето е дозволено за $n > 0$. ☻

Задача 7.22. Ползувајќи ја формулата $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},\ a > 0$, пресметај го следниов интеграл:

$$I_{n+1} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a\right)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Решение: Со формално диференцирање по параметарот a од двете страни на дадената формула $n-$пати добиваме:

$$(-1)^n n! \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a\right)^{n+1}} = \frac{\pi}{2}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!(2n-1)!!}{(2n)!!a^n 2\sqrt{a}}\pi.$$

откаде го добиваме интегралот $I_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$. Останува да го оправдаме диференцирањето.

Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Да забележиме дека подинтегралната функција $f(x,a) = \frac{1}{x^2 + a}$ и $\frac{\partial^n f}{\partial a^n}(x,a) = (-1)^n n! \frac{1}{\left(x^2 + a\right)^{n+1}}$ се непрекинати на областа

$0<\varepsilon\le a<+\infty,\ 0\le x<+\infty$, додека интегралот $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ е конвергентен за $a>0$. Од неравенството:

$$\frac{1}{\left(x^2+a\right)^{n+1}}\le\frac{1}{\left(x^2+\varepsilon\right)^{n+1}},\ \forall x\ge 0$$

заклучуваме рамномерна конвергенција на интегралот $I_{n+1},\ n\in\mathbb{N}$ на интервалот $0<\varepsilon\le a<+\infty$, според мајорантниот критериум на Вајерштрас. Од произволноста на ε диференцирањето е оправдано на интервалот $0<a<+\infty$. ☻

Задача 7.23. Докажи дека интегралот на Дирихле $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$, при $\alpha\ne 0$ има извод што не може да се добие според правилата за диференцирање на Лајбниц.

Доказ: Воведуваме смена $\alpha x=t$. Следува дека:

$$I(\alpha)=\begin{cases}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt, & \alpha>0\\ -\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt, & \alpha<0\end{cases}$$

Заклучуваме дека $I'(\alpha)=0$, за $\alpha\ne 0$. Од друга страна со формално диференцирање по α во знакот на интегралот добиваме:

$$\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x dx$$

што е дивергентен интеграл. ☻

Задача 7.24. Докажи ја формулата на Фрулан:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a},\ a>0,\ b>0$$

каде што $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е непрекината функција, а интегралот $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ е конвергентен за секој $A>0$.

Доказ: Да забележиме дека:

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx = \int_{Aa}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt \text{, односно } \int_A^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx = \int_{Ab}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$$

откаде добиваме дека:

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}dt .$$

На последниот интеграл одиме со првата теорема за средна вредност во интегрално сметање:

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(\theta)\int_{Aa}^{Ab}\frac{dt}{t} = f(\theta)\ln\frac{b}{a},\ \ Aa\le\theta\le Ab .$$

Од непрекинатоста на функцијата f важи следново $\lim_{A\to 0^+} f(\theta) = f(0)$, откаде добиваме:

$$\lim_{A\to 0^+}\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a} .$$ ☻

Забелешка. Може да се случи интегралот $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx,\ A>0$ да е дивергентен, но да постои $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ и да конвергира интегралот $\int_A^{+\infty}\frac{f^*(x)}{x}dx,\ A>0$, каде што $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$. Тогаш според формулата на Фрулан имаме:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a},\ a>0,\ b>0\,.$$

Задача 7.25. Пресметај го следниов интеграл:

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx,\ \alpha>0,\ \beta>0\,.$$

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon>0$. Нека $\alpha\geq\varepsilon>0,\ \beta\geq\varepsilon>0$. Ќе ја разгледаме функцијата:

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

односно нејзиниот парцијален извод по параметарот α:

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)=-xe^{-\alpha x^2}\,.$$

Да забележиме дека f и $\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$ се непрекинати на интервалот $\alpha\geq\varepsilon>0$.

Интегралот $\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ е конвергентен, што лесно може да се заклучи од критериумот за конвергенција со споредување:

$$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)dx=\int_0^{1} f(x,\alpha)dx+\int_1^{+\infty} f(x,\alpha)dx$$

каде што $f(x,\alpha)\leq e^{-\varepsilon x^2},\ \forall x\geq 1,\ \forall\alpha\geq\varepsilon$, додека интегралот $\int_0^{+\infty}\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ е рамномерно конвергентен по параметарот α на интервалот $\alpha\geq\varepsilon>0$, според мајорантниот критериумот на Вајерштрас:

$$xe^{-\alpha x^2}\leq xe^{-\varepsilon x^2}=F(x),\ \forall\alpha\geq\varepsilon>0\,,$$

каде што $\int_0^{+\infty} F(x)dx$ е конвергентен интеграл што не зависи од α. Следува дека се исполнети условите од теоремата за диференцирање на неправи интеграли што зависат од параметар, па имаме:

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}dx = -\frac{1}{2\alpha}, \ \forall \alpha \geq \varepsilon .$$

Оттука добиваме: $I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \varphi(\beta)$, каде што φ е функција што ќе ја определиме дополнително. Да забележиме дека $I(\beta) = 0$, откаде имаме $\varphi(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta$. Конечно интегралот е:

$$I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \varphi(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \frac{1}{2}\ln\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}, \ \forall \alpha, \beta \geq \varepsilon .$$

Од произволноста на ε, горната формула важи за $\forall \alpha, \beta > 0$. ☻

Забелешка. До истиот резултат можевме да дојдеме доколку ја ползувавме формулата на Фрулан за функцијата $f(x) = e^{-x^2}$.

Задача 7.26. Пресметај го следниов интеграл:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx, \ \alpha > 0, \ \beta > 0 .$$

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Проверката на условите за диференцирање оди слично на претходната задача. Ја оставаме на читателот како лесна вежба. Според теоремата за диференцирање имаме:

$$I'(\alpha) = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+\beta)x} - e^{-2\alpha x}}{x} dx, \ \ \forall \alpha \geq \varepsilon > 0, \forall \beta \geq \varepsilon > 0 .$$

Последниов интеграл ќе го пресметаме со помош на формулата на Фрулан за функцијата $f(x)=e^{-x}$. Добиваме:

$$I'(\alpha)=2\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta},\ \forall\alpha\geq\varepsilon>0,\ \forall\beta\geq\varepsilon>0.$$

Интегрираме по α и добиваме:

$$I(\alpha)=-2(\alpha+\beta)\left(\ln(\alpha+\beta)-1\right)+2\alpha\left(\ln 2\alpha-1\right)+\varphi(\beta)$$

каде што $\varphi(\beta)$ е интеграциона функција по β, што ќе ја определиме дополнително. Да забележиме дека $I(\beta)=0$ откаде следува:

$$\varphi(\beta)=2\beta\left(\ln 2\beta-1\right),\ \forall\beta\geq\varepsilon>0.$$

Конечно за бараниот интеграл имаме:

$$I(\alpha)=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}},\ \forall\alpha\geq\varepsilon>0,\ \forall\beta\geq\varepsilon>0.$$

Од произволноста на $\varepsilon>0$ горната релација важи за $\forall\alpha,\beta>0$. ☻

Задача 7.27. Пресметај го следниов интеграл:

$$I(m)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx dx,\ \alpha>0,\beta>0.$$

Решение: Ќе ја разгледаме подинтегралната функција:

$$f(x,m)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

и нејзиниот парцијален извод по параметарот m:

$$\frac{\partial f}{\partial m}(x,m)=\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos mx .$$

Да забележиме дека f и $\frac{\partial f}{\partial m}$ се непрекинати на областа $-\infty<m<+\infty$, $0\le x<+\infty$.

Интегралот $\int_0^{+\infty} f(x,m)dx$ е конвергентен од критериумот за конвергенција со споредување:

$$\int_0^{+\infty} f(x,m)dx=\int_0^{1} f(x,m)dx+\int_1^{+\infty} f(x,m)dx .$$

За вториот интеграл одиме со оценката:

$$\left|f(x,m)\right|\le\left|e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right|,\ \forall x\ge 1,\ m\in\mathbb{R}$$

па заклучуваме конвергенција за $\alpha,\beta>0$.

Интегралот $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial m}(x,m)\,dx$ е рамномерно конвергентен на интервалот $-\infty<m<+\infty$, според мајорантниот критериум на Вајерштрас:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial m}(x,m)\right|=\left|\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos mx\right|\le\left|\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\right|=F(x),\ \forall m\in\mathbb{R}$$

каде што $\int_0^{+\infty}F(x)dx$ е конвергентен интеграл што не зависи од m. Следува дека се исполнети условите од теоремата за диференцирање на неправи параметарски интеграли, па имаме:

$$I'(m)=\int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right)\cos mxdx,\ \forall m\in\mathbb{R} \tag{7.9}$$

Со парцијална интеграција на (7.9) добиваме:

$$I'(m)=\frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}-\frac{\beta}{\beta^2+m^2}$$

откаде со интегрирање по m имаме:

$$I(m) = arctg\frac{m}{\alpha} - arctg\frac{m}{\beta} + C .$$

Од тоа што $I(0) = 0$ добиваме дека $C = 0$. Конечно:

$$I(m) = arctg\frac{m(\beta - \alpha)}{\alpha\beta + m^2}, \; m \in \mathbb{R} . \; ☻$$

Задача 7.28. Пресметај го следниов интеграл:

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{arctg\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \; \alpha \in \mathbb{R} .$$

Решение: Ги разгледуваме функциите:

$$f(x,\alpha) = \frac{arctg\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \; \alpha \in \mathbb{R} , \; \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha) = \frac{1}{x\left(1+\alpha^2x^2\right)\sqrt{x^2-1}} .$$

Да забележиме дека f и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ се непрекинати на областа $1 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$. Интегралите $\int_1^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ и $\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)dx$ се рамномерно конвергентни според мајорантниот критериум на Вајерштрас:

$$\left|f(x,\alpha)\right| \le \frac{\pi}{2x^2\sqrt{x^2-1}}, \; \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

каде што функциите $F(x) = \frac{\pi}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$ и $G(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ се интеграбилни на интервалот $(1,+\infty)$. Следува дека I е непрекината функција за $\alpha \in \mathbb{R}$ и диференцирањето во знакот на интегралот е дозволено. Имаме:

$$I'(\alpha)=\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\left(1+\alpha^2x^2\right)\sqrt{x^2-1}}\ ,\quad \alpha\in\mathbb{R}\ .$$

Во горниот интеграл воведуваме хиперболична смена $x = cht$ и добиваме:

$$I'(\alpha)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right),$$

откаде следува $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\left(\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)+C,\ \ \alpha\geq 0$. Од $I(0)=0$ добиваме дека $C=\frac{\pi}{2}$.

Значи, $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\left(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right),\ \ \alpha\geq 0$. Слично, за $\alpha\leq 0$ имаме $I(\alpha)=-\frac{\pi}{2}\left(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right),\ \ \alpha\leq 0$, откаде за I конечно добиваме:

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\left(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2}\right)\operatorname{sgn}\alpha,\ \ \alpha\in\mathbb{R}\ .☻$$

Задача 7.29. Пресметај го интегралот:

$$I(a)=\int_{0}^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx,\ a\in\mathbb{R}\ .$$

Решение: Го запишуваме интегралот во следниов облик:

$$I(a)=\int_{0}^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx=\int_{0}^{1}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx+\int_{1}^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx\ .$$

Во првиот интеграл од десната страна воведуваме смена $y=\frac{1}{x}$ и добиваме:

$$I(a)=\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{-\left(a^2y^2+\frac{1}{y^2}\right)}}{y^2}dy+\int_{1}^{+\infty}e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}dy\ .$$

Да забележиме дека подинтегралните функции f_1 и f_2 од десната страна на горното равенство се непрекинати за секој $a \in \mathbb{R}$ и $y \geq 1$, а соодветните интеграли:

$$\int_1^{+\infty} f_1(y,a)\,dy\,,\ \int_1^{+\infty} f_2(y,a)\,dy$$

се рамномерно конвергентни според мајорантниот критериум на Вајерштрас:

$$\left|f_1(y,a)\right| \leq \frac{1}{y^2}, \forall y \geq 1, \quad \left|f_2(y,a)\right| \leq e^{-y^2},\ \forall y \geq 1$$

каде што интегралите $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{-y^2}dy$ се конвергентни. Следува дека $I(a)$ е непрекината функција за секој $a \in \mathbb{R}$.

Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Нека $a \geq \varepsilon > 0$. Да забележиме дека функциите $\frac{\partial f_1}{\partial a}, \frac{\partial f_2}{\partial a}$ се непрекинати на областа $a \geq \varepsilon,\ 1 \leq y < +\infty$, а соодветните интеграли:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\partial f_1}{\partial a}(y,a)\,dy\,,\ \int_1^{+\infty} \frac{\partial f_2}{\partial a}(y,a)\,dy$$

се рамномерно конвергентни според мајорантниот критериум на Вајерштрас на секој сегмент $\varepsilon \leq a \leq A$:

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial a}(y,a)\right| = \left|-2ae^{-\left(a^2y^2+\frac{1}{y^2}\right)}\right| \leq 2Ae^{-\varepsilon y^2}\,,\ \left|\frac{\partial f_2}{\partial a}(y,a)\right| = \left|-\frac{2a}{y^2}e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\right| \leq 2Ae^{-y^2}\,.$$

Следува дека функцијата $I'(a)$ е непрекината за секој $a > 0$ и важи:

$$I'(a) = -2a\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}}{x^2}dx \tag{7.10}$$

Во интегралот $I(a)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$ воведуваме смена $x=\frac{a}{t}, a>0$ и добиваме: $I(a)=a\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}}{y^2}dy$. Го споредуваме со релацијата (7.10) и ја составуваме диференцијалната равенка:

$$I'(a)+2I(a)=0,\ \ a>0.$$

Нејзиното решение е $I(a)=Ce^{-2a},\ a>0$. Како што забележивме погоре функцијата $I(a)$ е непрекината, па:

$$I(0)=\lim_{a\to 0^+}\left(Ce^{-2a}\right)=C.$$

Од друга страна $I(0)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ е интегралот на Пуасон што ќе го пресметаме во глава11 со помош на повеќекратни интеграли. Оттука добиваме дека $C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Уште да забележиме дека $I(a)=I(-a), \forall a>0$. Конечно имаме дека:

$$I(a)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|a|},\ \forall a\in\mathbb{R}.$$ ☻

Задача 7.30. Пресметај го интегралот:

$$I(b)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx,\ \ a>0,\ b\in\mathbb{R}.$$

Решение: Да забележиме дека функциите:

$$f(x,b)=e^{-ax^2}\cos bx \ \text{ и } \ \frac{\partial f}{\partial b}(x,b)=-xe^{-ax^2}\sin bx$$

се непрекинати на областа $0\le x<+\infty,\ -\infty<b<+\infty$. Интегралите:

$$\int_0^{+\infty} f(x,b)dx \text{ односно } \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial b}(x,b)\,dx$$

се рамномерно конвергентни според мајорантниот критериум на Вајерштрас:

$$\left| f(x,b) \right| = \left| e^{-ax^2} \cos bx \right| \le e^{-ax^2} = F(x),\ \forall b \in \mathbb{R}$$

каде што интегралот $\int_0^{+\infty} F(x)dx$ е конвергентен. Слично:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial b}(x,b) \right| = \left| -xe^{-ax^2} \sin bx \right| \le xe^{-ax^2} = G(x),\ \ \forall b \in \mathbb{R}$$

каде што интегралот $\int_0^{+\infty} G(x)dx$ е конвергентен. Следува дека функциите I и I' се непрекинати за секој $b \in \mathbb{R}$ и важи:

$$I'(b) = -\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bxdx\,. \tag{7.11}$$

Одиме со парцијална интеграција на (7.11) и добиваме:

$$I'(b) = \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} \sin bxd\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{1}{2a}\sin bxe^{-ax^2}\Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bxdx = -\frac{b}{2a}I(b).$$

Добивме диференцијална равенка: $I'(b) + \frac{b}{2a}I(b) = 0$.

Решението е $I(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$. Од тоа што $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = C$ имаме:

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}},\ a > 0,\ b \in \mathbb{R}\,.\ ☻$$

Забелешка. Во пресметката на $I(0)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ повторно го ползувавме интегралот на Пуасон $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Види ја глава11 за пресметката на овој интеграл.

Задача 7.31. Ползувајќи го интегралот $I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx$, каде $\alpha\geq 0,\ \beta\in\mathbb{R}$, пресметај го интегралот на Дирихле $D(\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx$.

Решение: Подинтегралната функција $f(x,\alpha)$ ја продолжуваме по непрекинатост со:

$$f(x,\alpha)=\begin{cases} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}, & x\neq 0\\ \beta, & x=0\end{cases}$$

на областа $0\leq x<+\infty, \alpha\geq 0$. Да забележиме дека интегралот $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ рамномерно конвергира за $\alpha\geq 0$ според задачата 7.12, па следува дека $I(\alpha,\beta)$ е непрекината функција по α на интервалот $\alpha\in[0,+\infty)$. Ова значи дека:

$$\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha,\beta)=I(0,\beta)=D(\beta).$$

Нека $\alpha>0$ го фиксираме. Подинтегралната функција $f(x,\alpha)$ сега ќе ја гледаме како параметарска функција по параметарот β, т.е.

$$f(x,\alpha)\equiv f(x,\alpha,\beta)\equiv f(x,\beta)$$

Го пресметуваме $\frac{\partial f}{\partial\beta}(x,\beta)=e^{-\alpha x}\cos\beta x$. Да забележиме дека $\frac{\partial f}{\partial\beta}(x,\beta)$ е непрекината функција на областа $0\leq x<+\infty,\ \beta\in\mathbb{R}$, а интегралот:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta)\,dx$$

е рамномерно конвергентен по $\beta \in \mathbb{R}$ според мајорантниот критериум на Вајерштрас: $\left|e^{-\alpha x}\cos\beta x\right| \le e^{-\alpha x}, \forall \beta \in \mathbb{R}$. Следува дека диференцирање по параметарот β во знакот на интегралот е дозволена операција. Оттука имаме дека:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \beta}(x,\beta)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x dx$$

откаде со парцијална интеграција добиваме:

$$\frac{\partial I}{\partial \beta}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\ \alpha > 0.$$

Последнава релација ја интегрираме по β, па имаме:

$$I(\alpha,\beta) = arctg\,\frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha).$$

Да забележиме дека $I(\alpha,0)=0$, па заклучуваме дека $C(\alpha)=0$.

Конечно за интегралот на Дирихле добиваме:

$$D(\beta) = \lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha,\beta) = \lim_{\alpha\to 0^+} arctg\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta. \text{ ☻}$$

Задача 7.32. Со помош на интегралите на Дирихле и Пуасон пресметај:

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos\beta x}{x^2}\,dx,\ \alpha \ge 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Решение: Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Ја разгледуваме функцијата:

$$f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\left(e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x\right), & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}\beta^2-\alpha, & x=0\end{cases}$$

односно функциите:

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha,\beta)=-e^{-\alpha x^2} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial\beta}(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\sin\beta x}{x}, & x\neq 0\\ \beta, & x=0\end{cases}$$

продолжени по непрекинатост со помош на правилото на Лопитал на област $\alpha\geq\varepsilon>0,\ |\beta|\geq\varepsilon>0,\ 0\leq x<+\infty$. Ги придружуваме интегралите:

$$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha,\beta)dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha,\beta)dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\beta}(x,\alpha,\beta)dx. \tag{7.12}$$

Да забележиме дека вториот и третиот интеграл во (7.12) конвергираат рамномерно по α и β од областа $\alpha\geq\varepsilon>0,\ |\beta|\geq\varepsilon>0$, вториот според мајорантниот критериум на Вајерштрас:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha,\beta)\right|\leq e^{-\varepsilon x^2},\ \forall x\geq 0,\forall\alpha\geq\varepsilon$$

додека третиот според задача 18. Првиот интеграл ќе го запишеме во облик:

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty} f(x,\alpha,\beta)dx=\int_0^{1} f(x,\alpha,\beta)dx+\int_1^{+\infty} f(x,\alpha,\beta)dx.$$

Да забележиме дека првиот интеграл од десно е непрекината функција по α и β за произволни α и β. Вториот интеграл од десно рамномерно конвергира за произволно $\beta\in\mathbb{R}$ и $\alpha\geq 0$, што може да го заклучиме од неравенството:

$$|f(x,\alpha,\beta)|\leq\frac{2}{x^2},\ \forall\alpha\geq 0,\forall\beta\in\mathbb{R},\forall x\geq 1 \tag{7.13}$$

Следува дека $I(\alpha,\beta)$ е непрекината функција на областа $\alpha \geq 0,\ \beta \in \mathbb{R}$. Од горната дискусија имаме дека $I, \dfrac{\partial I}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial I}{\partial \beta}$ се непрекинати во разгледуваната област $\alpha \geq \varepsilon > 0, |\beta| \geq \varepsilon > 0$, па постои диференцијал на функцијата $I(\alpha,\beta)$ и диференцирањето по параметрите α и β во разгледуваната област е дозволено. Следува дека:

$$dI(\alpha,\beta) = \left(-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx\right) d\alpha + \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx\right) d\beta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta d\beta$$

каде што ги ползувавме интегралите на Дирихле и Пуасон.

Со интегрирање на горната релација имаме:

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha} + C,\ \forall \alpha \geq \varepsilon,\ \forall |\beta| \geq \varepsilon .$$

Од произволноста на $\varepsilon > 0$ горната релација важи за $\alpha > 0, |\beta| > 0$. Во претходната дискусија (7.13) докажавме дека $I(\alpha,\beta)$ е непрекината функција за $\alpha \geq 0,\ \beta \in \mathbb{R}$, па оттука имаме:

$$I(0,0) = \lim_{\substack{\alpha \to 0^+ \\ \beta \to 0^+}} \left(\frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha} + C\right) = 0 .$$

Конечно, за бараниот интеграл добиваме:

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}|\beta| - \sqrt{\pi\alpha},\ \forall \alpha \geq 0,\ \forall \beta \in \mathbb{R} .$$ ☻

Задача 7.33. Ползувајќи го интегралот на Дирихле пресметај:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$

Решение: Одиме со малку тригонометрија:

$$\sin\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)x+\sin\left(\alpha-\beta\right)x\right).$$

Со замена во бараниот интеграл добиваме:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx=\frac{1}{2}\left(D\left(\alpha+\beta\right)+D\left(\alpha-\beta\right)\right)=\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sgn}\left(\alpha+\beta\right)+\operatorname{sgn}\left(\alpha-\beta\right)\right).$$ ☻

Задача 7.34. Ползувајќи ја формулата на Фрулан пресметај:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq\pm\beta.$$

Решение: Одиме со уште малку тригонометрија☺

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\left(\cos|\alpha-\beta|x-\cos|\alpha+\beta|x\right).$$

Ја заменуваме горната релација во интегралот и добиваме:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\cos|\alpha-\beta|x-\cos|\alpha+\beta|x\right)dx.$$

Последниот интеграл го пресметуваме со помош на формулата на Фрулан за функцијата $f\left(x\right)=\cos x,\ b=|\alpha+\beta|,\ a=|\alpha-\beta|$. Имаме:

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\cos|\alpha-\beta|x-\cos|\alpha+\beta|x\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|,\ \alpha\neq\pm\beta.$$ ☻

Задача 7.35. Со помош на интегралот на Дирихле пресметај:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Решение: Ќе ја разгледаме функцијата $f(x)=\sin^3 x$. Идејата е да ја „линеаризираме“ во тригонометриски облик.

Бараме развој во форма:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} b_i \sin a_i x, \tag{7.14}$$

каде што $a_i, b_i \in \mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$ се броеви што треба да ги определиме. Одиме со:

$$\begin{aligned}
&\sin x=\sin x,\\
&\sin 2x=2\sin x\cos x,\\
&\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=2\sin x\cos^2 x+\cos^2 x\sin x-\sin^3 x.
\end{aligned}$$

Последниов развој со релацијата $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ го добива обликот:

$$\sin 3x=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-\sin^3 x-\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x.$$

Оттука го добиваме бараниот развој (7.14) :

$$f(x)=\sin^3 x=\frac{1}{4}\left(3\sin x-\sin 3x\right).$$

За $n=2,\ a_1=1,\ b_1=\frac{3}{4},\ a_2=3,\ b_2=-\frac{1}{4}$. Се враќаме на интегралот:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 \alpha x}{x}dx=\frac{3}{4}D(\alpha)-\frac{1}{4}D(3\alpha)=\frac{3\pi}{8}\operatorname{sgn}\alpha-\frac{\pi}{8}\operatorname{sgn}3\alpha=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha.$$ ☻

Задача 7.36. Пресметај го интегралот $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}dx$.

Решение: Воведуваме смена $x=\sqrt{t},\ t>0$ во интегралот, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{2}D(1)=\frac{\pi}{4}$$

каде што повторно го ползувавме интегралот на Дирихле. ☻

Задача 7.37. Ползувајќи ја формулата $\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty} e^{-y\left(1+x^2\right)}dy$, пресметај го интегралот на Лаплас: $L(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$.

Решение: Според дадената формула интегралот на Лаплас го добива обликот:

$$L(\alpha)=\int_0^{+\infty} dx\int_0^{+\infty} e^{-y\left(1+x^2\right)}\cos\alpha x dy .$$

Воведуваме множител e^{-kx^2}, $k>0$ и го разгледуваме интегралот:

$$L^*(k,\alpha)=\int_0^{+\infty} dx\int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dy . \tag{7.15}$$

Да забележиме дека подинтегралната функција:

$$f(x,y)=e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x$$

е непрекината на областа $0\le x<+\infty,\ 0\le y<+\infty$, а интегралите:

$$\int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dy \text{ и } \int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x dx$$

се рамномерно конвергентни според мајорантниот критериум на Вајерштрас:

$$\left|e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\right|\le e^{-y} \text{ и } \left|e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\right|\le e^{-kx^2},$$

каде што интегралите $\int_0^{+\infty} e^{-y}dy$ и $\int_0^{+\infty} e^{-kx^2}dx$ се конвергентни. Од друга страна интегралот (7.15) е конвергентен, факт што следува од неравенството:

$$\left|\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos\alpha x dy\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-kx^2} dx .$$

Според теоремата од воведот следува дека во интегралот (7.15) може да се смени редоследот на интегрирање, па добиваме:

$$L^*(k,\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-(k+y)x^2} \cos\alpha x dx .$$

Ползувајќи ја задачата 7.30 имаме:

$$L^*(k,\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y+k}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4(y+k)}+y\right)} dy = \sqrt{\pi} e^k \int_{\sqrt{k}}^{+\infty} e^{-\gamma(t)} dt$$

каде што $\gamma(t) = \dfrac{\alpha^2}{4t^2} + t^2$.

Да забележиме дека интегралот $L^*(k,\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-kx^2} \dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2} dx$ е рамномерно конвергентен по параметарот $k \geq 0$, факт што следува од оценката:

$$\left| e^{-kx^2} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} = F(x),$$

каде што интегралот $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ е конвергентен. Подинтегралната функција во $L^*(k,\alpha)$ е непрекината, па според теорема од воведот функцијата L^* е непрекината по променливата k, за $k \geq 0$. Следува дека:

$$L(\alpha) = \lim_{k \to 0^+} L^*(k,\alpha) = L^*(0,\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2} dx = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)} dt .$$

Последниов интеграл е пресметан во задача 29. Ползувајќи го овој резултат конечно за интегралот на Лаплас добиваме: $L(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} e^{-|\alpha|},\ \alpha \in \mathbb{R}$. ☻

Задача 7.38. Пресметај го следниов интеграл: $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$.

Решение: Со помош на тригонометрискиот идентитет: $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$ и интегралот на Лаплас добиваме: $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2}\right)$. ☻

Задача 7.39. Пресметај го интегралот: $I\left(\alpha\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x dx}{ax^2+2bx+c}$, $a>0,\ ac-b^2>0$.

Решение: Идејата е некако интегралот на Лаплас да исплива на површина. Дополнуваме до полн квадрат во именителот, па воведуваме смена $\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}=t$ во $I\left(\alpha\right)$ и добиваме: $I\left(\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\alpha t}{\sqrt{a}}\cos\frac{\alpha b}{a}}{t^2+y^2}dt + \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\alpha t}{\sqrt{a}}\sin\frac{\alpha b}{a}}{t^2+y^2}dt$, каде што $y^2 = c-\frac{b^2}{a}>0$. Да забележиме дека подинтегралната функција во вториот интеграл од десно е непарна функција на симетричен интервал, па интегралот е 0. Во првиот интеграл подинтегралната функција е парна, па може да го пресметаме со помош на интегралот на Лаплас:

$$I\left(\alpha\right) = \frac{2}{|y|\sqrt{a}}\cos\frac{\alpha b}{a}L\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{a}}|y|\right) = \frac{\pi\cos\frac{\alpha b}{a}}{\sqrt{ac-b^2}}e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}.$$ ☻

Забелешка. Ползувавме дека за интеграл од парна функција $f\left(x\right)$ на симетричен интервал важи: $\int\limits_{-T}^{T} f\left(x\right)dx = 2\int\limits_{0}^{T} f\left(x\right)dx$. Доказот е лесна вежба.

Задача 7.40. Пресметај ја Лапласовата трансформација:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt,\ p>0$$

за функциите: (i) $f(t)=t^n,\ n\in\mathbb{N}$ (ii) $f(t)=\sqrt{t}$ (iii) $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$.

Решение: (i) Да забележиме дека подинтегралната функција во $F(p)$ $\psi(p,t)=e^{-pt}t^n$ е непрекината за $p>0,\ 0\le t<+\infty$ и за произволно $n\in\mathbb{N}$. Интегралот рамномерно конвергира за $p\ge\varepsilon>0$ и за произволна интеграбилна функција за која важи оценката: $|f(t)|e^{-\varepsilon t}\le const$. Во нашиот случај за функцијата $f(t)=t^n$ имаме: $t^n e^{-\varepsilon t}\le\left(\dfrac{n}{\varepsilon}\right)^n e^{-n}$, што лесно се проверува ако испитаме локални екстреми на функцијата $g(t)=t^n e^{-\varepsilon t}$. Следува дека диференцирањето во знакот на интегралот по параметарот p е дозволено. Сега одиме посебно со избор за $n=0$. Значи функцијата е $f(t)=t^0=1$. За трансформацијата на Лаплас добиваме:

$$F(p)=\frac{1}{p}. \tag{7.16}$$

Диференцираме $n-$пати за произволно $n\in\mathbb{N}$ по параметарот p во трансформацијата на Лаплас и добиваме:

$$\frac{d^n}{dp^n}F(p)=(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^n dt.$$

Од друга страна ако ја диференцираме горната релација (7.16) $n-$пати по параметарот p добиваме: $\dfrac{d^n}{dp^n}F(p)=\left(\dfrac{1}{p}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{p^{n+1}}$. Следува дека $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}t^n dt=\frac{n!}{p^{n+1}}$.

(ii) и (iii) ги оставаме како лесна вежба за читателот :)) ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Определи ги областите на конвергенција на интегралите: (1.-6.)

1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$ 2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^2} dx.$ 3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha (x+2)}{1+x} dx.$

4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$ 5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx.$ 6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1-x^2} dx.$

Испитај рамномерна конвергенција, во назначените интервали, на следниве интеграли: (7.-10.)

7. $\int\limits_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} dx, \quad \alpha \in [0,d), d>0.$ 8. $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx, \quad \alpha \in [a,b].$

9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \in [0,\infty).$ 10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in [0,\infty).$

Испитај ја непрекинатоста, во назначените интервали, на следниве функции: (11.-13.)

11. $F(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^\alpha} dx, \quad \alpha \in (0,\infty).$ 12. $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx, \quad \alpha \in (0,1).$

13. $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Пресметај ги следниве интеграли: (14.-15.)

14. $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx, \quad a,b > -1$, применувајќи го интегралот $\int\limits_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}, \alpha > -1.$

15. $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

16. Покажи дека интегралот $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \geq 0$ конвергира нерамномерно по параметарот α на множеството $[0,+\infty)$.

ГЛАВА 8

ОЈЛЕРОВИ ИНТЕГРАЛИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Бета функција (Ојлеров интеграл од втор вид)

Дефиниција 8.1. Параметарскиот интеграл

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ \ p,q\in(0,+\infty) \tag{8.1}$$

го викаме *бета функција* или *Ојлеров интеграл од втор вид*.

Својства на бета функцијата:

1) Доменот на функцијата B е $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, бидејќи интегралот конвергира за $p>0,\ q>0$ (види Задача 8.2).

2) Таа е непрекината на својот домен по двете променливи и има парцијални изводи од произволен ред, кои се добиваат со диференцирање по променливите p и q под знакот на интеграл.

3) $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$ (8.2)

Ако $q=n>1,$ каде што $n\in\mathbb{N}$, ја добиваме рекурентната формула:

$$B(p,n)=\frac{n-1}{p+n-1}B(p,n-1).$$

4) Ако $p,q \in \mathbb{N}$, тогаш: $$B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{8.3}$$

Специјално за $p=q=1$ следува $B(1,1)=1.$

5) $B(p,q)=B(q,p)$, (види Задача 8.9).

Друг облик на оваа функција е: $$B(p,q)=\int_0^1 \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy. \tag{8.4}$$

Гама функција (Ојлеров интеграл од прв вид)

Дефиниција 8.2. Несвојствениот параметарски интеграл

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p\in(0,+\infty) \tag{8.5}$$

го викаме *гама функција* или *Ојлеров интеграл од прв вид.*

Својства на гама функцијата:

1) Доменот на функцијата Γ е $(0,+\infty)$, бидејќи интегралот конвергира, ако и само ако $p>0$ (биди Задача 8.1). Сингуларитети на овој интеграл се: $x=+\infty$ и $x=0$ (ако $p<1$).

2) Функцијата Γ е непрекината и има непрекинати изводи од кој било ред во својата дефинициона област, и за нив важи: $$\Gamma^{(k)}(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x}dx,\ k\in\mathbb{N}. \tag{8.6}$$

3) $\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p).$ $$\tag{8.7}$$

4) Ако $p\in\mathbb{N}.$ тогаш: $$\Gamma(n+1)=(n)! \tag{8.8}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}. \tag{8.9}$$

Специјално, $\Gamma(2)=\Gamma(1)=1.$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

5) Ако $0<p<1$, тогаш важи формулата: $$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p}. \tag{8.10}$$

Врската меѓу функциите гама и бета: $$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \text{ за } p>0, q>0. \tag{8.11}$$

ЗАДАЧИ

Задача 8.1. Нека $p \in \mathbb{R}$ е произволен реален број. Докажи дека интегралот:

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

конвергира за $p > 0$ и дивергира за $p \leq 0$.

Решение: Го запишуваме интегралот во следниов облик:

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \tag{8.12}$$

Одиме со дискусија по параметарот p. Ако $p \geq 1$ тогаш првиот интеграл од десната страна на (8.12) е конвергентен затоа што подинтегралната функција: $f(x,p) = x^{p-1}e^{-x}$ е непрекината на областа $0 \leq x \leq 1, p \geq$. Ако $0 < p < 1$ тогаш првиот интеграл од десната страна на (8.12) е несвојствен со сингуларност во точката $x = 0$. Правиме избор на споредбена функција $g(x) = \dfrac{1}{x^{1-p}}$, $x \in (0,1]$. Го пресметуваме лимесот:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x,p)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} x^{1-p} x^{p-1} e^{-x} = 1,$$

па според критериумите за конвергенција со споредување (види глава 5) заклучуваме конвергенција на првиот интеграл на десната страна. Значи првиот интеграл на десната страна е конвергентен за $p > 0$.

Одиме сега со вториот интеграл. Нека $p > 0$. Одбираме споредбена функција $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in [1, +\infty)$. Го пресметуваме лимесот:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x,p)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} x^2 x^{p-1} e^{-x} = 0$$

од каде што повторно, според критериумите за конвергенција со споредување, заклучуваме конвергенција на вториот интеграл од десната страна на релацијата (8.12).

Следува дека интегралот $\Gamma(p)=\int\limits_{0}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ е конвергентен за $p>0$.

Нека сега $p\le 0$. Првиот интеграл од десната страна на релацијата (8.1) е дивергентен, факт што може да го заклучиме од лимесот:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+} xx^{p-1}e^{-x}=\lim_{x\to 0^+} x^{p}e^{-x}=\begin{cases}1, & p=0\\ +\infty, & p<0\end{cases}.$$

Имено, ако $p=0$ тогаш интегралот има иста природа со $\int\limits_0^1\frac{1}{x}dx$, што е дивергентен. Ако пак $p<0$ тогаш од дивергентноста на интегралот $\int\limits_0^1\frac{1}{x}dx$ заклучуваме дивергенција на $\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$. Од друга страна,

интегралот $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ е конвергентен за $p\le 0$, факт што може да го заклучиме од оценката: $\left|x^{p-1}e^{-x}\right|\le e^{-x},\ \forall x\ge 1$.

Следува дека интегралот на Ојлер $\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, за $p\le 0$, како збир од еден дивергентен и еден конвергентен интеграл е дивергентен. ☻

Задача 8.2. Нека $p,q\in\mathbb{R}$ се произволни реални броеви. Докажи дека интегралот:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

е конвергентен за $p>0\wedge q>0$ и дивергентен во спротивно.

Доказ: Нека $p \geq 1 \wedge q \geq 1$. Тогаш подинтегралната функција:

$$f(x, p, q) = x^{p-1}(1-x)^{q-1},\ 0 \leq x \leq 1$$

е непрекината, па интегралот е конвергентен.

Ќе го запишеме интегралот во следниов облик:

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \tag{8.13}$$

Одиме со дискусија по параметрите p, q. Ако $0 < p < 1$ тогаш првиот интеграл од десната страна на релацијата (8.13) е несвојствен со сингуларитет во точката $x = 0$. Правиме избор за споредбена функција $g(x) = \dfrac{1}{x^{1-p}}, x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Го пресметуваме лимесот:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x,p,q)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\dfrac{1}{x^{1-p}}} = \lim_{x \to 0^+} x^{1-p} x^{p-1}(1-x)^{q-1} = 1,$$

па според критериумот за конвергенција со споредување, заклучуваме конвергенција на $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$.

Ако $0 < q < 1$ тогаш вториот интеграл од десната страна на релацијата (8.13) е несвојствен со сингуларитет во точката $x = 1$. Правиме избор за споредбена функција $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{1-q}}, x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Го пресметуваме лимесот:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x,p,q)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\dfrac{1}{(1-x)^{1-q}}} = \lim_{x \to 1^-} x^{p-1}(1-x)^{1-q}(1-x)^{q-1} = 1,$$

па повторно според критериумот за конвергенција со споредување, заклучуваме конвергенција на интегралот $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$.

Следува дека интегралот $\mathrm{B}(p,q)=\int_{0}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ е конвергентен за $p>0 \wedge q>0$.

Останува да ги дискутираме останатите можности. Нека $p \le 0$. Тогаш од лимесот:

$$\lim_{x\to 0^+} x x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \lim_{x\to 0^+} x^{p}(1-x)^{q-1} = \begin{cases} 1, & p=0 \\ +\infty, & p<0 \end{cases}$$

заклучуваме дивергенција на интегралот $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ за произволна вредност на q, затоа што $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\,dx$ е таков. Слично, за $q \le 0$ заклучуваме дивергенција на $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$, за произволна вредност на p.

Следува дека интегралот $\mathrm{B}(p,q)=\int_{0}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ е дивергентен ако барем еден од параметрите p,q е непозитивен. ☻

Задача 8.3. Докажи дека:

1) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ \forall x>0$; 2) $\Gamma(n+1)=n!\,, n\in\mathbb{N}$.

Доказ: 1) Нека $p>0$. Одиме со парцијална интеграција:

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx=\lim_{M\to+\infty}\int_0^M x^p e^{-x}dx=$$

$$=\lim_{M\to+\infty}\left(x^p\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^M-\int_0^M\left(-e^{-x}\right)px^{p-1}dx\right)=p\Gamma(p)$$

2) Да забележиме дека $\Gamma(1)=\lim\limits_{M\to+\infty}\int^M e^{-x}dx=\lim\limits_{M\to+\infty}\left(1-e^{-M}\right)=1$. Сега од 1) добиваме:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=...=n!\Gamma(1)=n!,\ n\in\mathbb{N}.$$ ☻

Задача 8.4. Пресметај

1) $\dfrac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$; 2) $\dfrac{6\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$; 3) $\dfrac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Решение: 1) Според претходната задача имаме:

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}=\frac{5!}{2\cdot2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot2\cdot1}=30$$

2) Слично како во 1) имаме:

$$\frac{6\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{6\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{4}{3}$$

3) Слично на 2) имаме:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{4}.$$ ☻

Задача 8.5. Пресметај ги интегралите:

$$1)\ \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx \qquad 2)\ \int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x} dx\,.$$

Решение: 1) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6$.

2) Воведуваме смена $2x = t$, па интегралот го добива обликот:

$$\int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^6 e^{-t} dt = \frac{1}{2^7}\int_0^{+\infty} t^6 e^{-t} dt = \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{45}{8}.$$ ☻

Задача 8.6. Докажи дека $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Доказ: Да забележиме дека $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$. Воведуваме смена $x = t^2$, па добиваме:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

каде што повторно го ползувавме интегралот на Пуасон. ☻

Задача 8.7. Пресметај ги интегралите:

$$1)\ \int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy \qquad 2)\ \int_0^{+\infty} 3^{-4x^2} dx$$

Решение: 1) Воведуваме смена $y^3 = x$, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy = \int_0^{+\infty} \sqrt{x^{\frac{1}{3}}} e^{-x} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

2) Интегралот го запишуваме во следниов облик:

$$\int_0^{+\infty} 3^{-4x^2}dx = \int_0^{+\infty}\left(e^{\ln 3}\right)^{-4x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-(4\ln 3)x^2}dx$$

Во последниов интеграл воведуваме смена $(4\ln 3)x^2 = t$, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(4\ln 3)x^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{4\ln 3}}\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{4\ln 3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}.$$ ☻

Задача 8.8. Докажи дека $\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N},\ m>-1$.

Доказ: Воведуваме смена $x = e^{-y}$, па добиваме:

$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,dx = (-1)^n\int_0^{+\infty} y^n e^{-(m+1)y}dy$$

Во последниот интеграл воведуваме смена $(m+1)y = u$, па добиваме:

$$(-1)^n\int_0^{+\infty} y^n e^{-(m+1)y}dy = (-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{u^n}{(m+1)^n}e^{-u}\frac{du}{m+1} = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}u^n e^{-u}du$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$ ☻

Задача 8.9. Докажи дека:

1) $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$; 2) $\mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$

Доказ: 1) Во интегралот $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ воведуваме смена $x = 1-y$, па добиваме:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\int_0^1 (1-y)^{p-1}y^{q-1}dy=\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\,dy=\mathrm{B}(q,p).$$

2) Воведуваме смена $x=\sin^2\theta$ во интегралот $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$, па добиваме:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\theta\right)^{p-1}\left(\cos^2\theta\right)^{q-1}2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta. ☻$$

Задача 8.10. Докажи дека $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ p,q>0$.

Доказ: Во интегралот $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$ во ведуваме смена $t=x^2$, па добиваме:

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt=2\int_0^{+\infty} x^{2p-1}e^{-x^2}dx.$$

Слично, $\Gamma(q)=\int_0^{+\infty} t^{q-1}e^{-t}dt=2\int_0^{+\infty} y^{2q-1}e^{-y^2}dy$. Го пресметуваме производот:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty} x^{2p-1}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty} y^{2p-1}e^{-y^2}dy=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy.$$

Во последниов повторен интеграл воведуваме поларна смена:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,$$

па добиваме:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}\rho^{2(p+q)-2}e^{-\rho^2}\rho\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\rho d\varphi=$$

$$=4\left(\int_0^{+\infty}\rho^{2(p+q)-1}e^{-\rho^2}d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi\right)=$$

$$=2\Gamma(p+q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(q,p)=$$

$$=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q).$$

Доказот е комплетиран. ☻

Забелешка. За смена на променливи кај двојни интеграли види глава 11.

Задача 8.11. Докажи дека за доволно големи природни броеви $n\in\mathbb{N}$, важи апроксимацијата на Стирлинг:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$$

Доказ: Ќе направиме скица на доказот. Според дефиницијата важи:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^x e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t+\ln t^x}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t+x\ln t}dt$$

Воведуваме смена $t=x+y$ во горната релација, па добиваме:

$$\Gamma(x+1)=e^{-x}\int_{-x}^{+\infty}e^{x\ln(x+y)-y}dy=x^x e^{-x}\int_{-x}^{+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)-y}dy \tag{8.14}$$

Одиме со Тејлоров развој на логаритамска функција:

$$\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{2x^2}+\frac{y^3}{3x^3}-\frac{y^4}{4x^4}+\ldots(-1)^{n+1}\frac{y^n}{nx^n}+\ldots$$

и воведуваме нова смена $y=\sqrt{x}v$. Ги заменуваме горниве релации во (8.14) и добиваме:

$$\Gamma(x+1)=x^x e^{-x}\sqrt{x}\int_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}+\left(\frac{v^3}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{x}}-} dv$$

Сега за доволно големи вредности на x важи приближно:

$$\Gamma(x+1)\approx x^x e^{-x}\sqrt{x}\int_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \approx x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$$

каде што повторно го ползувавме интегралот на Пуасон во последната апроксимација.

Ако x го замениме со доволно големи природни вредности, $x=n\in\mathbb{N}$, ја добиваме апроксимацијата на Стирлинг. ☻

Забелешка. Да забележиме дека доказот е апроксимативен☺, т.е. не е прецизен.

Задача 8.12. Ползувајќи ја формулата: $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$, докажи дека:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}, \text{ каде } 0<p<1.$$

Доказ: Во интегралот воведуваме смена $\frac{x}{1+x}=t$, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}dt=\mathrm{B}(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

откаде следува резултатот. ☻

Задача 8.13. Докажи дека $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx=\frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)}$, $0<p<1$.

Доказ: Да забележиме дека $\frac{1}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}u^{p-1}e^{-xu}du$. Оттука имаме:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{p-1} e^{-xu} \cos x du dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} \frac{u^p}{1+u^2} du$$

каде го сменивме редоследот на интегрирање и малку парцијално интегриравме☺ (деталите ги оставаме за вежба).

Во последниот интеграл воведуваме смена $u^2 = v$, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^p}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{v^{\frac{p-1}{2}}}{1+v} dv = \frac{\pi}{2\sin\frac{(p+1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}}$$

каде што го ползувавме резултатот од претходната задача. ☻

Задача 8.14. Пресметај го интегралот на Френел $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

Решение: Воведуваме смена $x^2 = y$, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

каде што го ползувавме претходниот резултат. ☻

Задача 8.15. Пресметај го следниов интеграл: $\int_0^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx,\ a > 0$.

Решение: Воведуваме смена $x = a\sqrt{t}, t > 0$ и добиваме:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{a^4}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{a^4\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)}=\frac{\pi a^4}{16}$$

каде што ги ползувавме задача 8.3, 8.6 и 8.10 во горниот резултат. ☻

Задача 8.16. Пресметај го интегралот: $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

Решение: Ќе го ползуваме следново претставување на Ојлеровата бета функција од воведот:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$$

Сега бараниот интеграл го добива обликот:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

Производот $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ го запишуваме во облик:

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

откаде за бараниот интеграл добиваме:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

каде што ја ползувавме задача 8.12. ☻

Задача 8.17. Запиши го во Ојлерова форма интегралот: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx,\ n>0$.

Решение: Воведуваме смена $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t>0$, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}$$

при што резултатот важи за $0<m<n$. ☻

Задача 8.18. Запиши го во Ојлерова форма интегралот: $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{\left(a+bx^n\right)^p},\ a>0,\ b>0,\ n>0$

Решение: Воведуваме смена $x = \left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}}$, $t>0$, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{\left(a+bx^n\right)^p} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{\left(1+t\right)^p} dt = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n}, p-\frac{m+1}{n}\right)$$

при што интегралот конвергира за $0<\frac{m+1}{n}<p$. ☻

Задача 8.19. Запиши го во Ојлерова форма следниов интеграл: $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$.

Решение: Воведуваме смена $\ln\frac{1}{x} = t$, па добиваме:

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1), \; p > -1 . \; ☻$$

Задача 8.20. Запиши го во Ојлерова форма следниов интеграл:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx, \; a > 0 .$$

Решение: Воведуваме смена $x = \frac{t}{a}$, па добиваме:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx = \frac{1}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} \ln t dt - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$$

Да забележиме дека првиот интеграл во горната релација од десно е извод на гама функција, па имаме:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx = \frac{1}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} \ln t dt - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt =$$

$$= \frac{\Gamma'(p+1)}{a^{p+1}} - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \Gamma(p+1) = \frac{d}{dp} \left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \right), \quad ☻$$

Задача 8.21. Запиши го во Ојлерова форма следниов интеграл:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx$$

Решение: Да забележиме дека интегралот е извод од бета функција, т.е. важи:

$$I(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{d}{dp} \mathrm{B}(p, 1-p) = \frac{d}{dp} \big(\Gamma(p) \Gamma(1-p) \big) =$$

$$= \frac{d}{dp} \left(\frac{\pi}{\sin p\pi} \right) = -\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}, \; 0 < p < 1$$

каде што ги ползувавме задачите 8.10, 8.12. ☻

Задача 8.22. Запиши го во Ојлерова форма следниов интеграл:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n} dx, \; 0<|k|<1, \; n>0 .$$

Решение: Воведуваме смена на променлива со релацијата $t = tg\,\frac{x}{2}$, па добиваме:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n} dx = \frac{2^n}{(1+k)^n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+\alpha^2 t^2)^n} dt$$

каде $\alpha = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$. Во последниот интеграл воведуваме нова смена на променлива со релацијата $\alpha t = \sqrt{u}$, откаде добиваме:

$$I = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \; n>0 \quad ☻$$

Задача 8.23. Запиши го во Ојлерова форма следниов интеграл: $\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^n} dx$,

каде што $m, n, a > 0$ се позитивни константи.

Решение: Воведуваме смена $ax^n = y$, па добиваме:

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^m e^{-y} d\left(\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right). \quad ☻$$

Задача 8.24. Пресметај го интегралот $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}dx$.

Решение: Воведуваме смена $x=t^{\frac{1}{3}}$, па добиваме: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}dx=\frac{1}{9}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}-1}}{1+t}\ln t dt$.

Сега заменуваме $p=\frac{2}{3}$ во претходната задача и добиваме:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}dx=\frac{1}{9}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}-1}}{1+t}\ln t dt=\frac{2\pi^2}{27} .$$ ☻

Задача 8.25. Пресметај го интегралот $I=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx$.

Решение: Воведуваме смена $x=t^{\frac{1}{4}},\ t>0$, па добиваме:

$$I=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}dx=\frac{1}{64}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}}\ln^2 t}{1+t}dt$$

откаде забележуваме дека бараниот интеграл е втор извод од бета функција:

$$\mathrm{B}\left(p,1-p\right)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{\left(1+t\right)^{p+(1-p)}}dt$$

за $p=\frac{1}{4}$. Оттука имаме:

$$I=\frac{1}{64}\frac{d^2}{dp^2}\left(\mathrm{B}\left(p,1-p\right)\right)\Bigg|_{p=\frac{1}{4}}=\frac{1}{64}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)\Bigg|_{p=\frac{1}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{64}\pi^3 .$$ ☻

Задача 8.26. Пресметај го интегралот $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}$.

Решение: Воведуваме смена $y^4 = x$, па интегралот го добива обликот:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{1+x}dx = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

каде што ја ползувавме задача 8.12. ☻

Задача 8.27. Докажи ја формулата за дупликација:

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2p)$$

Доказ: Нека $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x,\quad J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} 2xdx$. Тогаш имаме:

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(p+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}$$

Во интегралот J воведуваме смена $2x = u$, па добиваме:

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin^{2p} udu = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} udu = I\ . \tag{8.15}$$

Но, за интегралот J имаме дека важи следнава релација:

$$J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x\cos x)^{2p}\,dx = 2^{2p}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} x\cos^{2p} xdx =$$

$$= 2^{2p-1}\mathrm{B}\left(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2p-1}\left[\left(\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)\right]^2}{\Gamma(2p+1)}$$

Сега од релацијата (8.15) добиваме:

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2p\Gamma(p)}=\frac{2^{2p-1}\left[\left(\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)\right]^2}{2p\Gamma(2p)}.$$

Заклучокот следува. ☻

Задача 8.28. Пресметај го интегралот $I=\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx,\ 0<p<1$.

Решение: Го разгледуваме интегралот:

$$F(\varepsilon)=\int\limits_0^1\left(x^{p-1}-x^{-p}\right)(1-x)^{-1+\varepsilon}dx,\ \varepsilon\geq 0. \qquad (8.16)$$

Да забележиме дека подинтегралната функција:

$$f(x,\varepsilon)=\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}},\ 0<x<1,\ \ \varepsilon\geq 0$$

е непрекината на разгледуваната област, а според мајорантниот критериум на Вајерштрас:

$$\left|f(x,\varepsilon)\right|\leq\frac{\left|x^{p-1}-x^{-p}\right|}{1-x},\qquad \int\limits_0^1\frac{\left|x^{p-1}-x^{-p}\right|}{1-x}dx<+\infty,$$

интегралот (8.16) е рамномерно конвергентен, па функцијата $F(\varepsilon)$ е непрекината. Следува дека граничен премин во знакот на интегралот е дозволен при $\varepsilon\to 0^+$, т.е. важи $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}F(\varepsilon)=\int\limits_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx$.

Да забележиме дека:

$$F(\varepsilon)=\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon)$$

откаде следува дека:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}F(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\mathrm{B}(p,\varepsilon)-\mathrm{B}(1-p,\varepsilon)\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Gamma(\varepsilon)\left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)}-\frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)}\right)$$

Одиме со релацијата $\Gamma(\varepsilon)=\dfrac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ и правилото на Лопитал во продолжение, па добиваме:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Gamma(\varepsilon)\left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)}{\Gamma(p+\varepsilon)\Gamma(1-p+\varepsilon)}\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(p+\varepsilon)\Gamma(1-p+\varepsilon)}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma(p+\varepsilon)}{\varepsilon}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\Gamma(p)\Gamma'(1-p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)\Gamma'(p+\varepsilon)\right)$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{\Gamma'(1-p+\varepsilon)}{\Gamma(1-p)}-\frac{\Gamma'(p+\varepsilon)}{\Gamma(p)}\right)=\frac{\Gamma'(1-p)}{\Gamma(1-p)}-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}$$

$$=\left(-\left(\ln\left(\Gamma(1-p)\right)\right)'-\left(\ln\left(\Gamma(p)\right)\right)'\right)=-\left(\ln\left(\Gamma(1-p)\Gamma(p)\right)'\right)=$$

$$=-\left(\ln\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)\right)'=-\left(\ln\pi-\ln\sin p\pi\right)'=\pi ctgp\pi\ .\ ☻$$

Задача 8.29. Пресметај го интегралот $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{sh\alpha x}{sh\beta x}dx,\ 0<\alpha<\beta$.

Решение: Воведуваме смена $e^{-2\beta x}=t$, па добиваме: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{sh\alpha x}{sh\beta x}dx=\frac{1}{2\beta}\int_0^1\frac{t^{p-1}-t^{-p}}{1-t}dt$, каде што $p=\dfrac{\beta-\alpha}{2\beta}$. Да забележиме дека $0<p<\dfrac{1}{2}$, па може да ја ползуваме претходната задача. Добиваме: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{sh\alpha x}{sh\beta x}dx=\frac{1}{2\beta}\int_0^1\frac{t^{p-1}-t^{-p}}{1-t}dt=\frac{\pi}{2\beta}tg\frac{\alpha\pi}{2\beta}$. ☻

Задача 8.30. Пресметај го интегралот: $I=\displaystyle\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin\pi xdx$.

Решение: Воведуваме смена $x=1-t$, па добиваме:

$$I=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)\sin\pi xdx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right)\sin\pi xdx$$

Од релацијата $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$ следува:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\ln\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right)\sin\pi xdx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\ln\pi-\ln\sin\pi x\right)\sin\pi xdx$$

Конечно за интегралот се добива: $I=\dfrac{1}{\pi}\left(1+\ln\dfrac{\pi}{2}\right)$. Деталите околу последното интегрирање ги оставаме на читателот. ☻

Задача 8.31. Пресметај го интегралот:

$$I(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x}dx,\ 0<p<1,\ 0<q<1.$$

Решение: Да забележиме дека за $p=q$ интегралот е нула. Уште повеќе важи следнава релација:

$$I(p,q)=\int \mathrm{B}(p,1-p)dp-\int \mathrm{B}(q,1-q)dq+C$$

каде C е некоја константа. Од релацијата:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin \pi p}$$

добиваме:

$$I(p,q)=\pi\int\frac{dp}{\sin p\pi}-\pi\int\frac{dq}{\sin q\pi}+C=\pi\ln\left|\frac{tg\,\frac{p\pi}{2}}{tg\,\frac{q\pi}{2}}\right|+C$$

Од забелешката имаме $I(p,p)=0$, откаде заклучуваме дека $C=0$.

Следува резултатот:

$$I(p,q)=\pi\int\frac{dp}{\sin p\pi}-\pi\int\frac{dq}{\sin q\pi}+0=\pi\ln\left|\frac{tg\,\frac{p\pi}{2}}{tg\,\frac{q\pi}{2}}\right|,\ 0<p,q<1$$ ☻

Задача 8.32. Пресметај го интегралот

$$I=\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx.$$

Решение: Интегралот може да се запише како:

$$I=\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).$$

Од $p=q=\frac{3}{2}$ и од (8.11) имаме дека $B(p,p)=\frac{\Gamma^2(p)}{\Gamma(2p)}$, односно $B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}$. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Докажи дека бета функцијата $B(p,q)$ е непркината и има неорекинати парцијални изводи од кој било ред во областа $p>0$ и $q>0$.

2. Докажи дека гама функцијата $\Gamma(p)$ е непрекината и има непрекинати изводи од кој било ред во областа $p>0$.

Пресметај ги интегралите: (3-11)

3. $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}dx$.

4. $\int_{-1}^1 (1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

5. $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}dx$.

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 xdx$.

8. $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^3}dx$.

9. $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$;

10. $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}dx$, $m,n\in\mathbb{N}.$,

11. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$.

12. Докажи дека $\int_0^\infty x^m(\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$, ако $n\in\mathbb{N}, m>-1.$

Пресметај: (13-14)

13. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$;

14. $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$

Докажи ги равенствата: (15-18)

15. $\int_0^\infty e^{-x^4}dx\int_0^\infty x^2e^{-x^4}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$;

16. $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}dx = 1.$

17. $\int_0^\infty x^{p-1}\cos ax\,dx = \frac{1}{a^p}\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}, \quad (0<p<1).$

18. $\int_0^\infty x^{p-1}\sin ax\,dx = \frac{1}{a^p}\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}, \quad (-1<p<1).$

19. Пресметај го интегралот $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^s}dx, \quad (0<s<2).$

20. Пресметај го интегралот $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad (p,q\in\mathbb{N})$.

21. Изрази го интегралот $I_{m,n}=\int_0^1 \sin^m x\cos^n x dx, \quad (m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ со помош на бета функцијата.

ГЛАВА 9

РЕДОВИ НА ФУРЈЕ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Тригонометриски редови

Дефиниција 9.1. Редот

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{9.1}$$

се вика *тригонометриски ред,* а броевите $a_0, a_n, b_n,\ n\in\mathbb{N}$ се *коефициенти на редот*.

Ако редот (9.1) конвергира за секој $x\in\mathbb{R}$, тогаш тој дефинира функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Заради периодичноста на функциите $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$, тригонометрискиот полином $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$ и функцијата f се 2π-периодични функции.

Прашање што се наметнува е: кога периодична функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ со период 2π може да се прикаже како тригонометриски ред? Треба да се определат коефициентите $a_0, a_n, b_n,\ n\in\mathbb{N}$ така да важи (9.1).

Теорема 9.1. Нека редот од десната страна од (9.1) рамномерно конвергира на сегментот $\left[-\pi,\pi\right]$, тогаш

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad m = 0,1,2,3,\cdots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,3,\cdots \end{aligned} \tag{9.2}$$

Дефиниција 9.2. Нека f е апсолутно интеграбилна функција на сегментот $[-\pi,\pi]$. Тригонометрискиот ред (9.1), каде што коефициентите $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ се зададени како (9.2), се вика *Фурјев ред* на функцијата f, а броевите $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ се викаат *Фурјеви коефициенти.* Во овој случај симболички запишуваме:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Парцијалните суми од $n-$ти ред на редот (9.1) ги означуваме со

$$S_n(f,x) = S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right). \tag{9.3}$$

Фурјев ред со период $2L$

Дефиниција 9.3. Нека f е периодична функција со период $T = 2L$. *Репрезентација со Фурјев ред за функцијата* f е тригонометрискиот ред од облик:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{9.4}$$

каде што коефициентите се дадени со Ојлер-Фурјеви формули:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx, \quad m = 0,1,2,3,\cdots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1,2,3,\cdots \end{aligned} \tag{9.5}$$

Коефициентите a_m се викаат *Фурјеви косинусни коефициенти* (вклучувајќи го константниот член a_0, што е нултиот косинусен член), и b_n се викаат *Фурјеви синусни коефициенти.*

Конвергенција на Фурјевите коефициенти кон нула

Теорема 9.2. (Лема на Риман-Лебег) Ако функција f е апсолутно интеграбилна на интервалот (a,b) (конечен или бесконечен), тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx = 0 \tag{9.6}$$

што значи, Фурјевите коефициенти на апсолутно интеграбилна функција конвергираат кон нула кога $n \to \infty$.

Интеграл на Дирихле. Принцип на локализација

Нека f е апсолутно интеграбилна функција на $[-L, L]$. Тогаш, парцијалната сума (9.3) на Фурјевиот ред станува

$$S_n(f, x) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi(t-x)}{l}\right)dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} D_n(t-x) f(t)dt,\ n \in \mathbb{N}. \tag{9.7}$$

Притоа, $D_n(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos ku$ го викаме *јадро на Дирихле*, а интегралот од десната страна на (9.7) *интеграл на Дирихле*.

Лема 9.1. Јадрото на Дирихле е парна, непрекината, периодична функција на $\mathbb{R}$ со период $2L$ за која важи:

а) $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$,

б) $$\frac{1}{2L}\int_{0}^{L} D_n(u)du = 1 \tag{9.8}$$

в) За $u \neq 0$ точна е формулата

$$D_n(u) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\frac{\pi u}{L}}{2\sin\frac{\pi u}{2L}}. \tag{9.9}$$

Ако во последниот интеграл од (9.7) воведеме смена $u = t - x$, тогаш:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} D_n(t)\big(f(x+t) + f(x-t)\big)dt .$$

Теорема 9.3. (Риманов принцип за локализација) Нека $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е $2L-$периодична и апсолутно интеграбилна функција на $[-L, L]$ и нека $x \in (-L, L)$. Тогаш, однесувањето на Фурјевиот ред на функцијата f во точката x (конвергенција или дивергенција, и во случај на конвергенција, вредноста на неговиот збир) зависи само од вредностите кои функцијата ги има во произволно мала околина на точката x.

Критериуми за конвергенција на Фурјевите редови

Теорема 9.4. (Диниев критериум-доволни услови за конвергенција на Фурјев ред) Нека f е апсолутно интеграбилна, $2L-$периодична функција. Ако за некое $\delta, 0<\delta<L$, интегралот

$$\int_0^\delta \frac{\left|f(x+t)+f(x-t)-2S\right|}{t}dt \tag{9.10}$$

конвергира, тогаш Фурјевиот ред за функцијата f во точката x конвергира кон сумата S.

Дефиниција 9.4. За функцијата $f: X\to\mathbb{R}, X\subset\mathbb{R}$ велиме дека го задоволува Холдеровиот услов од десна (лева) страна со степен $\alpha>0$ во точката $x\in X$, ако постои конечната десна (лева) гранична вредност $f(x\pm 0)$ и реални броеви $\delta>0$ и $L>0$ така да важи неравенството:

$$\left|f(x\pm h)-f(x\pm 0)\right|\le L|h|^\alpha, \quad \forall h<\delta. \tag{9.11}$$

Ако $\alpha=1$, тогаш велиме дека функцијата f го задоволува *Липшицовиот услов во точката* x. Бројот L е *Липшицова константа.*

Теорема 9.5. Нека f е апсолутно интеграбилна, $2L-$периодична функција на сегментот $[-L,L]$. Ако таа го задоволува Холдеровиот услов со степен α во точка $x\in(-L,L)$, $\alpha>0$, тогаш Фурјевиот ред на функцијата f во таа точка конвергира и неговата сума е еднаква на:

$$\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}. \tag{9.12}$$

Ако функцијата f го задоволува условот на Холдер и тоа од десна страна во точката $x=-L$, а од левата страна во точката $x=L$, тогаш Фурјевиот ред конвергира во тие точки и неговата сума е:

$$\frac{f(-L)+f(L)}{2}. \tag{9.13}$$

Теорема 9.6. Нека f е $2L-$периодична функција и апсолутно интеграбилна на сегмент со должина $2L$. Ако во точка x постојат $f(x\pm 0)$ и $f'_\pm(x)$ тогаш Фурјевиот ред на функцијата f во таа точка конвергира кон вредноста (9.12).

Теорема 9.7. Нека f е по делови непрекинато диференцијабилна функција на сегментот $[-L,L]$, во секоја точка од интервалот $(-L,L)$ конвергира кон вредноста (9.12) , додека во точките $-L$ и L кон вредноста (9.13).

Теорема 9.8. Нека f е непрекината, по делови диференцијабилна функција на сегментот $\left[-L,L\right]$, во секоја точка од интервалот $\left(-L,L\right)$ конвергира кон вредноста на функцијата во таа точка.

Сумирање на Фурјевиот ред со методот на аритметички средини

Нека f е апсолутно интеграбилна функција на сегментот $\left[-L,L\right]$, $f\left(-L\right)=f\left(L\right)$. Ја продолжуваме на $\mathbb{R}$ до $2L$-периодична функција. Нека

$$\sigma_n\left(x\right)=\frac{S_0\left(x\right)+S_1\left(x\right)+\cdots+S_n\left(x\right)}{n+1} \tag{9.14}$$

и

$$\Phi_n\left(x\right)=\frac{D_0\left(x\right)+D_1\left(x\right)+\cdots+D_n\left(x\right)}{n+1} \tag{9.15}$$

се аритметичките средини од парцијалните суми на Фурјевиот ред и јадрата на Дирихле.

Сумата $\sigma_n\left(x\right)$ ќе ја викаме *Фејерова сума* од $n-$ти ред на функцијата f, а $\Phi_n\left(x\right)$ *Фејерово јадро* од $n-$ти ред.

Од (9.7) ја добиваме формулата:

$$\sigma_n\left(x\right)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\Phi_n\left(t\right)f\left(x+t\right)dt,\ n\in\mathbb{N}. \tag{9.16}$$

Теорема 9.9. Јадрото на Фејер ги има следниве својства:

1) $\Phi_n\left(x\right)$ е парна, непрекината, $2L$-периодична функција и важи $\Phi_n\left(0\right)=\frac{n+1}{2}$,

2) За секој $x\neq 2kL,\quad k\in\mathbb{Z}$ важи равенството $\Phi_n\left(x\right)=\dfrac{\sin^2\dfrac{n+1}{2}\dfrac{\pi x}{L}}{2\left(n+1\right)\sin^2\dfrac{\pi x}{2L}}$,

3) $\Phi_n\left(x\right)\geq 0,\quad \forall x$,

4) $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\Phi_n\left(x\right)dx=1,\ \forall n\in\mathbb{N}$,

5) За кој било фиксиран $\delta\in\left(0,1\right)$ важи $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{\delta\leq|x|\leq L}\Phi_n\left(x\right)=0.$

Теорема 9.10. (Фејер) Ако f е непрекината функција на сегмент $[-L,L]$ и $f(-L)=f(L)$, тогаш низата од Фејерови суми рамномерно конвергира на сегментот $[-L,L]$ кон функцијата f.

Апроксимацијана непрекинати функции со полиноми

Теорема 9.11. (Вајерштрас) Ако f е непрекината функција на сегмент $[-L,L]$ и $f(-L)=f(L)$, тогаш за произволно $\varepsilon>0$ постои тригонометриски полином $T(x)$ така што $\left|f(x)-T(x)\right|<\varepsilon, \quad \forall x\in[-L,L]..$

Теорема 9.12. (Вајерштрас) Ако f е непрекината функција на сегмент $[a,b]$, тогаш за произволно $\varepsilon>0$ постои алгебарски полином $P(x)$ така што $\left|f(x)-P(x)\right|<\varepsilon, \quad \forall x\in[a,b]..$

Својство на минималност на Фурјевите коефициенти. Неравенство на Бесел. Равенство на Парсевал

Теорема 9.13. Нека f е квадрат интеграбилна функција на сегмент $[-L,L]$. Ако $S_n(x)$ е $n-$тата парцијална сума на Фурјевиот ред, тогаш

$$\int_{-L}^{L}\left[f(x)-S_n(x)\right]^2 dx=\min_{T_n(x)}\int_{-L}^{L}\left[f(x)-T_n(x)\right]^2 dx \tag{9.17}$$

каде што минимумот се зема по сите тригонометриски полиноми $T_n(x)$ со степен не поголем од n.

Ако $a_0, a_n, b_n, n\in\mathbb{N}$ се Фурјевите коефициенти на функцијата f, тогаш е точно *неравенството на Бесел:*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f^2(x)dx \tag{9.18}$$

Диференцирање и интегрирање на Фурјеви редови

Теорема 9.14. Нека f е непрекината функција на сегмент $[-L,L]$, при што $f(-L)=f(L)$ и нека $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$. Ако f е по делови непрекинато диференцијабилна на $[-L,L]$, тогаш

$$f'(x)\sim\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-na_n\sin\frac{n\pi x}{L}+nb_n\cos\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{9.19}$$

односно Фурјевиот ред на f' се добива со почлено диференцирање на Фурјевиот ред на f.

Теорема 9.15. Нека f е непрекината функција на сегмент $[-L,L]$ и нека $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ е нејзиниот Фурјев ред. Тогаш,

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^t \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{a_0 t}{2} + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}\sin\frac{n\pi t}{L} + \frac{b_n}{n}\left(1 - \cos\frac{n\pi t}{L}\right) \tag{9.20}$$

и редот на десната страна на (9.20) рамномерно конвергира.

ЗАДАЧИ

Задача 9.1. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е реална функција дефинирана со:

$$f(x)=x,\ \ -\pi\le x<\pi \ \text{ и } \ f(x+2n\pi)=f(x),\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

(i) Докажи дека Фурјевиот ред на f е определен со:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2\sin nx}{n}$$

(ii) Докажи дека придружениот ред не е рамномерно конвергентен.

(iii) Пресметај ја сумата на редот за произволно $x\in\mathbb{R}$.

Решение: (i) Да забележиме дека за произволно $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=0$$

што следува од непарноста на подинтегралната функција. Од друга страна за коефициентите b_n имаме:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Оттука за Фурјевиот ред на f добиваме: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2\sin nx}{n}$.

(ii) Доколку редот рамномерно конвергира функцијата f би требало да е непрекината, што не е случај.

(iii) Од тоа што f е по делови глатка функција, за сумата на редот имаме:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}2\sin nx}{n}=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\begin{cases} f(x), & x\ne(2n+1)\pi\\ 0, & x=(2n+1)\pi\end{cases}$$

каде што $n\in\mathbb{Z}$. ☻

Задача 9.2. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е реална функција дефинирана со:

$$f(x)=x^3,\ \ -\pi \le x < \pi \ \text{ и } \ f(x+2n\pi)=f(x),\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

(i) Докажи дека Фурјевиот ред на f е од облик: $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$. Запиши ја интегралната формула за коефициентите b_n.

(ii) Докажи дека придружениот Фурјев ред е конвергентен за секој $x\in\mathbb{R}$.

(iii) Докажи дека важи: $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{2\pi^6}{7}$.

Доказ: (i) Да забележиме дека f е непарна функција на интервалот $[-\pi,\pi]$, па интегралите $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ се нули $\forall n\in\mathbb{N}$.

Следува дека Фурјевиот ред придружен на f има облик: $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$, каде што коефициентите b_n се определени од релацијата: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin nx dx,\ \forall n\in\mathbb{N}$

(ii) Од тоа што f е по делови глатка функција, според теоремата од воведот Фурјевиот ред е конвергентен $\forall x\in\mathbb{R}$ и важи:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \begin{cases} f(x), & x\neq (2n+1)\pi \\ 0, & x=(2n+1)\pi \end{cases}.$$

(iii) Според равенството на Парсевал имаме: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$

Ползувајќи го фактот дека $a_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ добиваме: $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6 dx = \frac{2\pi^6}{7}$. ☻

Задача 9.3. Нека $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ е непрекината функција така што:

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Дали f мора да е идентична на нула, т.е. $f(x)=0,\ \forall x\in[0,\pi]$?

Решение: Одговорот е негативен. Функцијата $f(x)=1$ го задоволува условот, но не е идентична на нула. ☻

Задача 9.4. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е реална функција дефинирана со:

$$f(x)=-x,\ \ -\pi\le x\le 0,\ \ f(x)=x,\ \ 0\le x\le\pi \text{ и } f(x+2n\pi)=f(x),\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

(i)Докажи дека Фурјевиот ред на f е определен со:

$$\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x\,.$$

(ii) Пресметај ја сумата на редот:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+$$

ползувајќи го Фурјевиот развој од (i).

Решение: (i) Одиме со пресметка на Фурјевите коефициенти:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right)=\pi$$

Да забележиме дека функцијата f е парна, па коефициентите b_m се нули за секој $m\in\mathbb{N}$. Ќе ги пресметаме коефициентите a_m:

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos mxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{m}x\sin mx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{m}\int_0^{\pi}\sin mxdx\right)=\frac{2}{\pi m^2}\left((-1)^m-1\right)$$

Следува дека $a_0=\pi,\ b_m=0,\ a_m=\begin{cases}0, & m=2n\\ -\dfrac{4}{\pi m^2}, & m=2n+1\end{cases}.$

Оттука придружениот ред на Фурје за функцијата f е : $\dfrac{\pi}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$

(ii) Да забележиме дека функцијата f е по делови глатка, а во $x=0$ е непрекината. Според теоремата 9.6 од воведот имаме:

$$\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)0=f(0),$$

откаде добиваме:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$ ☻

Задача 9.5. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е реална функција дефинирана со:

$$f(x)=-1,\ -\pi\le x<0,\quad f(x)=1,\ 0\le x\le\pi \ \text{ и } \ f(x+2n\pi)=f(x),\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

(i)Докажи дека Фурјевиот ред на f е определен со: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$.

(ii) Пресметај ја сумата на редот: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+$

Решение: (i) Да забележиме дека функцијата $f(x)$ е непарна, па за коефициентите a_m имаме дека:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0,\ a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx=0$$

Одиме со пресметка на коефициентите b_m:

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin mxdx=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{m}\cos mx\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{2}{\pi m}\left((-1)^m-1\right).$$

Следува дека $a_0=0,\ a_m=0,\ b_m=\begin{cases}0, & m=2n\\ \frac{4}{\pi m}, & m=2n+1\end{cases}$.

Оттука придружениот ред на Фурје за функцијата f е : $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$.

(ii) Да забележиме дека функцијата f е по делови глатка, а во $x=\frac{\pi}{2}$ е непрекината. Според теоремата 9.6. од воведот имаме:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Оттука следува дека: $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\sin n\pi\cos\frac{\pi}{2}+\cos n\pi\sin\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$. Значи бараната сума е: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+=\frac{\pi}{4}$. ☻

Задача 9.6. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината, по делови глатка реална функција така што:

$$f(x)=f(x+1)=f\left(x+\sqrt{2}\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Докажи дека f е константна функција.

Доказ: Од тоа што f е $\sqrt{2}-$ периодична, имаме:

$$\hat{f}(n)=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi nix}dx=\int_0^1 f\left(x+\sqrt{2}\right)e^{-2\pi nix}dx$$

Воведуваме смена $y=x+\sqrt{2}$ во последниот интеграл, па добиваме:

$$\hat{f}(n)=e^{2n\pi i\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}f(y)e^{-2\pi niy}dy.$$

Од тоа што f е $1-$периодична, имаме: $\hat{f}(n)=e^{2n\pi i\sqrt{2}}\int_0^1 f(y)e^{-2\pi niy}dy=e^{2n\pi i\sqrt{2}}\hat{f}(n)$,

откаде, со оглед на тоа што $e^{2n\pi i\sqrt{2}}\neq 1$ за $n\neq 0$, заклучуваме дека $\hat{f}(n)=0$ за $n\neq 0$.

Ова значи дека коефициентите на придружениот Фурјев ред се нули за секој $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Од непрекинатоста на f и од теоремата 9.6. од воведот заклучокот следува. ☻

Задача 9.7. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е реална функција дефинирана со:

$$f(x) = x^2, \ -\pi \leq x \leq \pi \ \text{ и } \ f(x + 2n\pi) = f(x), \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

(i)Докажи дека Фурјевиот ред на f е определен со: $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$.

(ii) Пресметај ја сумата на редот: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$.

Решение: (i) Одиме со пресметка на Фурјевите коефициенти:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Да забележиме дека функцијата f е парна, па коефициентите b_m се нули за секој $m \in \mathbb{N}$. Ќе ги пресметаме коефициентите a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos mx dx =$$
$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{m} x^2 \sin mx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{m} \int_0^{\pi} x \sin mx dx \right) = -\frac{4}{\pi m} \int_0^{\pi} x \sin mx dx.$$

Последниов интеграл го пресметуваме повторно со парцијална интеграција:

$$-\frac{4}{\pi m} \int_0^{\pi} x \sin mx dx = -\frac{4}{\pi m} \left(-\frac{1}{m} x \cos mx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos mx}{m} dx \right) =$$
$$= \frac{4}{\pi m^2} \pi (-1)^m - \frac{4}{\pi m^2} \sin mx \Big|_0^{\pi} = (-1)^m \frac{4}{m^2}.$$

Следува дека $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2,\ b_m = 0,\ a_m = (-1)^m \frac{4}{m^2}$. Оттука придружениот ред на Фурје за функцијата f е: $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$.

(ii) Да забележиме дека функцијата f е по делови глатка, а во $x = \pi$ е непрекината. Според теоремата 9.5. од воведот имаме: $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos n\pi = f(\pi)$, откаде добиваме: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, односно $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$. ☻

Задача 9.8. Развиј ја во Фурјев ред следнава реална функција:

$$f(x) = \frac{a + \cos x}{1 + 2a\cos x + a^2},\quad |a| < 1.$$

Решение: Да забележиме дека $f(x)$ е 2π-периодична и непрекината функција на реалната права. Имено за именителот важи:

$$1 + 2a\cos x + a^2 \geq 1 - 2|a||\cos x| + a^2 \geq 1 - 2|a| + a^2 = (1 - |a|)^2 > 0$$

Уште повеќе функцијата $f(x)$ е по делови глатка. Ќе го ползуваме Ојлеровиот идентитет: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, односно $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$.

Ја воведуваме ознаката $t = e^{ix}$. Следува дека $e^{-ix} = \frac{1}{t}$. Оттука добиваме дека:

$t + \frac{1}{t} = 2\cos x$, односно $\cos x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$. Ја заменуваме последнава релација во $f(x)$, па добиваме:

$$f(x) = \frac{a + \cos x}{1 + 2a\cos x + a^2} = \frac{a + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)}{1 + a^2 + 2a\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)} = \frac{2at + t^2 + 1}{2t + 2a^2 t + 2at^2 + 2a} =$$

$$=\frac{\left(t^2+at\right)+\left(at+1\right)}{2\left(t+a\right)+2at\left(t+a\right)}=\frac{t\left(t+a\right)+\left(at+1\right)}{2\left(a+t\right)\left(1+at\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+at}+\frac{1}{a+t}\right).$$

За продолжение ќе ни треба Тејлоров развој на функцијата: $\frac{1}{1+y}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n y^n,\ |y|<1$.

Да забележиме дека $|t|=1$, па $|at|=|a|<1,\ \left|\frac{a}{t}\right|=\frac{|a|}{|t|}=|a|<1$. Одиме со развојот на

функциите: $\frac{1}{1+at}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n a^n t^n$, односно $\frac{1}{1+\frac{a}{t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\frac{a^n}{t^n}$, па назад за функцијата

f добиваме:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(t\frac{1}{1+at}+\frac{1}{t}\frac{1}{1+\frac{a}{t}}\right)=\frac{1}{2}\left(t\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n a^n t^n+\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{a}{t}\right)^n\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n a^n\left(t^{n+1}+\frac{1}{t^{n+1}}\right)\right).$$

Според Моавровата формула за степенување на комплексен број: $t^n=e^{inx}=$ $=\cos nx+i\sin nx$ и $t^{-n}=e^{-inx}=\cos nx-i\sin nx$, добиваме: $t^n+\frac{1}{t^n}=2\cos nx,\forall n\in\mathbb{N}$, па за развојот на f конечно имаме:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n a^n 2\cos\left(n+1\right)x=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n a^n\cos\left(n+1\right)x.$$

Од непрекинатоста на f последнава релација важи за секој $x\in\mathbb{R}$. ☻

Задача 9.9. Докажи дека $\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx=0,\ \forall k\geq 1,\ k\in\mathbb{N}$.

Доказ: Одиме со пресметка на првиот интеграл:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx=-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}=-\frac{l}{k\pi}\cos k\pi+\frac{l}{k\pi}\cos\left(-k\pi\right)=0.$$

Слично за вториот интеграл имаме:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}=\frac{l}{k\pi}\sin k\pi-\frac{l}{k\pi}\sin(-k\pi)=2\frac{l}{k\pi}\sin k\pi=0\,.$$ ☻

Задача 9.10. Докажи дека:

(i) $$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ l, & m=n\end{cases}$$

(ii) $$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=0,\ \forall m,n\in\mathbb{N}\,.$$

Доказ: (i) Ќе ги ползуваме тригонометриските релации:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Сега ако $m\neq n$ од претходната задача имаме:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx=0.$$

Слично за $m\neq n$ имаме:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx=0\,.$$

Ако $m=n$ тогаш имаме:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx=l$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx=l.$$

(ii) Ќе го употребиме следниов тригонометрискиот идентитет:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

Од претходната задача за $m \neq n$ имаме:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}+\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx = 0$$

Ако пак $m = n$ тогаш:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{2n\pi x}{l}dx = 0\,.$$ ☻

Задача 9.11. Ако редот $A+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ конвергира рамномерно на интервалот $[-l,l]$ кон функцијата $f(x)$ тогаш:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ A = \frac{a_0}{2}.$$

Доказ: Ќе ја помножиме релацијата:

$$f(x) = A+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{9.21}$$

со фактор $\cos\frac{m\pi x}{l}$, а потоа ќе интегрираме на интервалот $[-l,l]$:

$$\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx = A\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx+$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) = a_m l$$

за $m \neq 0$, каде што ја ползувавме теоремата за почлено интегрирање на рамномерно конвергентен ред и претходната задача. Значи имаме: $a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx$, за секој $m \in \mathbb{N},\, m \geq 1$. Одиме сега со коефициентите b_m. Ќе ја помножиме релацијата:

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

со фактор $\sin\frac{m\pi x}{l}$, а потоа ќе интегрираме на интервалот $[-l,l]$:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = A\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx +$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) = b_m l$$

за $m \neq 0$, каде што ја ползувавме теоремата за почлено интегрирање на рамномерно конвергентен ред и претходната задача.

Значи имаме: $b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$, за секој $m \in \mathbb{N},\, m \geq 1$. Останува да го определиме коефициентот A.

Ќе ја интегрираме релацијата (9.21) на интервалот $[-l,l]$ и ќе ја употребиме задачата 9.9.. Добиваме: $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2Al$, односно $A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx.$ Да забележиме дека за $m = 0$ во релацијата за a_m добиваме: $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$, па $A = \frac{a_0}{2}$. ☻

Задача 9.12. Дали тригонометрискиот ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ е Фурјев ред на некоја реална функција?

Решение: Да забележиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ конвергира по точки, па постои некоја функција f така што $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$. Според критериумот на Вајерштрас може да заклучиме рамномерна конвергенција на дадениот ред. Имено, $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ и бројниот редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ е конвергентен. Според претходната задача заклучуваме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ е Фурјев ред на некоја реална функција f. ☻

Задача 9.13. Развиј ја функцијата $f(x)=\sin x,\ 0<x<\pi$ во косинусен Фурјев ред.

Решение: Фурјев ред што има само косинусни членови се добива од развој на парна функција. Значи ќе ја додефинираме функцијата со: $f(x+n\pi)=f(x),\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

Проширената функција ја сметаме за $2\pi-$периодична на $\mathbb{R}$. Сега за Фурјевите коефициенти на новата функција имаме:

$$\begin{aligned}
&b_n=0,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx=\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\right)dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_0^{\pi}=\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right)=\\
&=\frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)},\quad n\neq 1.
\end{aligned}$$

За $n=1$ имаме: $a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\Big|_0^{\pi}=0$. Да забележиме дека $a_0=\frac{4}{\pi}$, што се добива од горната релација за $n=0$. Значи, за развојот на функцијата добиваме:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\cos nx=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}+\frac{\cos 6x}{6^2-1}+...\right).\quad ☻$$

Задача 9.14. Развиј ја функцијата $f(x)=x,\quad 0<x<2$ во:

(i) синусен ред (ii) косинусен ред

Решение: (i) За развој во синусен ред ни треба непарно проширување на f на реалната права. Нека ја додефинираме функцијата на $[-2,2)$ со: $f(x)=x,\ \forall x\in[-2,2)$.

Сега, новодефинираната функција ќе ја продолжиме $4-$периодично на целата реална права $\mathbb{R}$ со: $f(x+4n)=f(x),\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in[-2,2)$. После ова непарно проширување на f, одиме со пресметка на Фурјевите коефициенти:

$$a_n=0,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Како што забележавме функцијата е $2l=4$-периодична, па $l=2$.

Одиме со парцијална интеграција на последниот интеграл:

$$\frac{2}{l}\int_{0}^{l} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$
$$=\left(x\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}-1\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^2=\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi.$$

Оттука за бараниот развој добиваме: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi x}{2}+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi x}{2}-...\right)$.

(ii) За развој во косинусен ред ни треба парно проширување на f реалната права. Нека ја додефинираме на интервалот $[-2,2)$ со: $f(x)=|x|,\ \forall x\in[-2,2)$.

Сега, новодефинираната функција ќе ја продолжиме $4-$периодично на целата реална права $\mathbb{R}$ со: $f(x+4n)=f(x),\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in[-2,2)$. После ова парно проширување на функцијата f, одиме со пресметка на Фурјевите коефициенти:

$$b_n=0,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} x\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Како што забележавме функцијата е $2l=4$-периодична, па $l=2$.

Одиме со парцијална интеграција на последниот интеграл:

$$\begin{aligned}&\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\\&=\left(x\left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)-1\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-1\right),\quad n\neq 0.\end{aligned}$$

За $n=0$ имаме: $a_0=\int_0^2 xdx=2$. Конечно за бараниот развој имаме:

$$\begin{aligned}&f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}=\\&=1-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+...\right).\ ☻\end{aligned}$$

Забелешка. Дадената функција $f(x)=x,\ 0<x<2$ е претставена подеднакво добро и со двата различни реда од (i) и (ii).

Задача 9.15. Нека Фурјевиот ред придружен на функцијата $f(x)$ рамномерно конвергира кон $f(x)$ на интервалот $[-l,l]$. Докажи го равенството на Парсевал:

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f(x)\right)^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

Доказ: Од претпоставката имаме: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$. Ќе ја помножиме горната релација со $f(x)$, а потоа ќе интегрираме на интервалот $[-l,l]$:

$$\begin{aligned}&\int_{-l}^{l}\left(f(x)\right)^2dx=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx+b_n\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)=\\&=\frac{a_0^2}{2}l+l\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\end{aligned}$$

каде ползувавме почлено интегрирање, според теоремата за интегрирање на рамномерно конвергентни редови. Со делење на горната релација од двете страни со l го добиваме равенството на Парсевал. ☻

Забелешка. Равенството на Парсевал важи и под послаби услови од наведените во задачата.

Задача 9.16. Запиши го равенството на Парсевал за Фурјевиот ред од задача 9.14 под (ii). Ползувајќи го претходното пресметај ја сумата на редот:

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots$$

Решение: Во задачата 9.14 под (ii) ги имаме следниве вредности за Фурјевите коефициенти: $l=2,\ a_0=2,\ a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1),\ n\neq 0,\ b_n=0$. Равенството на Парсевал го добива следниов облик: $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(f(x)\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{2^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi-1)^2$, откаде добиваме: $\frac{8}{3}=2+\frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)$, односно $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96}$. Одиме сега со пресметка на сумата на редот:

$$S=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\ldots\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots\right)+\frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)=\frac{\pi^4}{96}+\frac{S}{16},$$

откаде добиваме: $S=\frac{\pi^4}{90}$. ☻

Задача 9.17. Докажи дека за секој $M\in\mathbb{N}$ важи следново неравенство:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leq\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f\left(x\right)\right)^2dx$$

каде a_n, b_n се Фурјевите коефициенти придружени на $f\left(x\right)$, а функцијата $f\left(x\right)$ е по делови непрекината на сегментот $\left[-l,l\right]$.

Доказ: Ќе ја разгледаме M-тата парцијална сума на Фурјевиот ред придружен на $f\left(x\right)$:

$$S_M\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (9.22)$$

Имаме дека:

$$\int_{-l}^{l}\left(f\left(x\right)-S_M\left(x\right)\right)^2dx\geq 0,\ \ \forall M\in\mathbb{N}$$

со оглед на ненегативноста на подинтегралната функција. Квадрираме во интегралот, па добиваме:

$$2\int_{-l}^{l}f\left(x\right)S_M\left(x\right)dx-\int_{-l}^{l}S_M^2\left(x\right)dx\leq\int_{-l}^{l}\left(f\left(x\right)\right)^2dx \qquad (9.23)$$

Сега ги множиме двете страни од релацијата (9.22) со $2f\left(x\right)$, а потоа интегрираме на интервалот $\left[-l,l\right]$:

$$2\int_{-l}^{l}f\left(x\right)S_M\left(x\right)dx=2l\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right)$$

Квадрирањето на релацијата (9.22), а потоа интегрирањето на $\left[-l,l\right]$ ни дава:

$$\int_{-l}^{l}S_M^2\left(x\right)dx=l\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2+b_n^2\right)\right).$$

Со замена на последните две релации во (9.11) и после делењето со l го добиваме бараниот резултат.

Ако побараме лимес кога $M \to \infty$ во добиениот резултат го добиваме неравенството на Бесел:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f\left(x\right)\right)^2 dx \tag{9.12}$$

Специјално, кога важи равенство во (9.23) го добиваме равенството на Парсевал од задачата 9.15. ☻

Забелешка. Резултатите се поврзани со идејата за комплетност на ортонормално множество.

Задача 9.18. Нека $f\left(x\right)$ е по делови непрекината на интервалот $\left[-l, l\right]$. Докажи дека:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0 .$$

Доказ: Според претходната задача важи Беселовото неравенство:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f\left(x\right)\right)^2 dx.$$

Но, ова значи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ е конвергентен, па општиот член тежи кон нула, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0 . \quad ☻$$

Задача 9.19. Пресметај го следниов лимес: $\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1} x^p \cos^2 nxdx, \quad p > 0$.

Решение: Идејата е да ја ползуваме претходната лема. Тригонометријата помага☺:

$$\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}.$$

Ја заменуваме горната релација во интегралот, па добиваме:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^p\left(\frac{1+\cos 2nx}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 x^p dx + \int_0^1 x^p \cos 2nxdx\right) =$$
$$= \frac{1}{2(p+1)}x^{p+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^p\cos 2nxdx = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^p \cos 2nxdx$$

Последниот лимес според Риман-Лебеговата лема е нула, па имаме:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^p\cos^2 nxdx = \frac{1}{2(p+1)}. ☻$$

Задача 9.20. Дали постои непрекината реална функција $f(x)$, $0 \le x \le 1$ така што:

$$\int_0^1 xf(x)dx = 1 \text{ и } \int_0^1 x^n f(x)dx = 0, \quad n = 0,2,3,4,\ldots \ ?$$

Наведи пример или докажи дека не постои таква функција.

Решение: Ќе претпоставиме дека постои таква функција f. За $n > 0$ дефинираме коефициенти:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx.$$

Од рамномерната

конвергенција на Тејлоровиот развој за e^x имаме:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2\pi ni)^k}{k!}\int_0^1 x^k f(x)dx = -2\pi ni$$

според условот на задачата. Од друга страна според лемата на Риман-Лебег имаме дека $\lim_{n\to\infty}\hat{f}(n) = 0$. Последново е противречност. ☻

Задача 9.21. Нека f е Риман интеграбилна функција на интервалот $[-\pi, \pi]$. Ги придружуваме соодветните Фурјеви коефициенти a_n, b_n за f. Докажи дека редот: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ е конвергентен.

Доказ: Одиме со Беселово неравенство: $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)\right)^2 dx$.

Следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$ е конвергентен. Ќе ја ползуваме следнава лема:

Лема: Ако бројниот ред $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ е конвергентен тогаш конвергентен е и редот $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k}$.

Докa за на лемата: Ќе го разгледаме следново неравенство:

$$\left(|c_k| - \frac{1}{k}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow c_k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 2\frac{|c_k|}{k}.$$

Според критериумот за конвергенција со споредување на редови, од конвергенцијата на редовите $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ заклучуваме конвергенција на редот $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k}$.

Се враќаме на задачата. Според лемата заклучуваме конвергенција на редовите $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n}$. Оттука следува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ е конвергентен. ☻

Забелешка. Летово е проклето топло. Каде ли ми е асистентот за пивце? ☺

Задача 9.22. Нека f е по делови непрекината функција на интервалот $[-\pi, \pi]$. Докажи дека $\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) x dx = 0$.

Доказ: Тригонометријата повторно помага☺: $\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x = \sin\frac{x}{2}\cos mx + \cos\frac{x}{2}\sin mx.$

Ја заменуваме горната релација во интегралот, па добиваме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)xdx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\sin\frac{x}{2}\right)\cos mxdx + \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\cos\frac{x}{2}\right)\sin mxdx.$$

Воведуваме нови функции:

$$g_1(x) = f(x)\sin\frac{x}{2} \text{ и } g_2(x) = f(x)\cos\frac{x}{2}.$$

Да забележиме дека g_1 и g_2 се по делови непрекинати на интервалот $[-\pi,\pi]$ затоа што $f(x)$ е таква. Сега од лемата на Риман-Лебег (види задачата 9.18) добиваме:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_1(x)\cos mxdx = 0 \text{ и } \lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_2(x)\sin mxdx = 0.$$

Заклучокот следува. ☻

Задача 9.23. Развиј ја во Фурјев ред функцијата $f(x) = \cos\alpha x,\ -\pi \le x \le \pi$, каде параметарот $\alpha \notin \mathbb{Z}$, т.е. $\alpha \ne 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

Решение: Ќе ја сметаме f како 2π-периодична функција на реалната права. Ова значи дека $l = \pi$. Одиме со пресметка на Фурјевите коефициенти. Да забележиме дека функцијата f е парна, па коефициентите b_m се нули за секој $m \in \mathbb{N}$. Ќе ги пресметаме коефициентите a_m:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\alpha x\cos mx dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\big(\cos(\alpha-m)x + \cos(\alpha+m)x\big)dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha-m)\pi}{\alpha-m} + \frac{\sin(\alpha+m)\pi}{\alpha+m}\right) = \frac{2\alpha\sin\alpha\pi\cos m\pi}{\pi\left(\alpha^2-m^2\right)}.$$

Посебно, $a_0 = \frac{2\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}$. Оттука за Фурјевиот ред за f добиваме:

$$\cos\alpha x = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos m\pi}{\alpha^2-m^2}\cos mx =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2}\cos x + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2}\cos 2x - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2}\cos 3x + \ldots\right). \quad ☻$$

Задача 9.24. Докажи дека: $\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\ldots$

Доказ: Ќе го ползуваме Фурјевиот ред од претходната задача. Заменуваме $x=\pi$ и добиваме:

$$\cos\alpha\pi = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \ldots\right)$$

односно:

$$\pi ctg\alpha\pi - \frac{1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \ldots \qquad (9.24)$$

Да забележиме дека десната страна на горната релација рамномерно конвергира за $0 \le |\alpha| \le |x| < 1$, додека левата страна според правилото на Лопитал може да се продолжи по непрекинатост во нулата, т.е:

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\pi ctg\alpha\pi - \frac{1}{\alpha}\right) = 0 .$$

Следува дека почлено интегрирање на релацијата (9.24) од 0 до x е дозволено, па имаме:

$$\int_0^x \left(\pi ctg\alpha\pi - \frac{1}{\alpha}\right) d\alpha = \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2}\, d\alpha + \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2}\, d\alpha + \int_0^x \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2}\, d\alpha + \ldots$$

односно:

$$\ln\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}\right)\Big|_0^x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) + \ldots .$$

Оттука добиваме:

$$\ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right) + \ldots \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)\right).$$

Следува дека:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right).$$

Во горната релација доколку x го замениме со $\dfrac{x}{\pi}$ добиваме:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\ldots$$

важечка според нашата дискусија за $x \in (-\pi, \pi)$. ☻

Забелешка. Резултатот е од интерес затоа што прави факторизација на функцијата $\sin x$ на начин што е аналоген на полиномната факторизација во алгебрата.

Задача 9.25. Докажи дека важи следнава релација: $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8...}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9...}$.

Доказ: Во претходната задача заменуваме $x=\dfrac{\pi}{2}$ во релацијата:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)...$$

па добиваме:

$$\frac{2}{\pi}=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)...=\left(\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\frac{7}{6}\right)...$$

Заклучокот следува. ☻

Забелешка. Резултатот во задачата е познат како производ на Волис.

Задача 9.26. Нека g е непрекината, по делови глатка и периодична функција на интервалот $[-\pi,\pi]$ со Фурјев развој:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Нека f е периодична функција на интервалот $[-\pi,\pi]$, таква што ја задоволува следнава диференцијална равенка:

$$f''(x)+kf(x)=g(x) \qquad (9.25)$$

каде $k\neq n^2$, за $n\in\mathbb{N}$, $n=1,2,3,...$ Развиј ја во Фурјев ред функцијата f и докажи дека редот конвергира во секоја точка кон f.

Решение: Да забележиме дека Фурјевиот ред придружен на функцијата f конвергира во секоја точка кон f, затоа што постои вториот извод f''. Имено, тоа значи непрекинатост на f и на нејзиниот прв извод.

Нека Фурјевиот ред придружен на f го има следниов облик:

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos nx+\beta_n \sin nx\right).$$

Да забележиме дека $f''=g-kf$ е непрекината и периодична функција на интервалот $[-\pi,\pi]$, како разлика од непрекинати и периодични функции на интервалот $[-\pi,\pi]$. Уште повеќе е по делови глатка затоа што g и f се такви. Следува дека Фурјевиот ред придружен на функцијата f'' конвергира во секоја точка кон f'' и може да се добие со почлено диференцирање на Фурјевиот ред за f. Го правиме токму тоа и добиваме:

$$\frac{k\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(k-n^2\right)\alpha_n \cos nx+\left(k-n^2\right)\beta_n \sin nx\right)=$$
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx+b_n \sin nx\right)$$

како Фурјев превод на диференцијалната равенка (9.25).

Оттука со израмнување на соодветните коефициенти добиваме:

$$\alpha_0=\frac{a_0}{k},\quad \alpha_n=\frac{a_n}{k-n^2},\quad \beta_n=\frac{b_n}{k-n^2},\ n\geq 1.$$ ☻

Задача 9.27. Нека f е двапати диференцијабилна реална функција на интервалот $[0,2\pi]$ таква што:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx=0=f(2\pi)-f(0)$$

Докажи дека важи следново неравенство:

$$\int_0^{2\pi}\left(f(x)\right)^2dx \le \int_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2dx.$$

Доказ: Да забележиме дека според условот важи $f(0)=f(2\pi)$, па функцијата f може да ја прошириме 2π-периодично на целата реална права. Го придружуваме соодветниот Фурјев ред за f:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Од тоа што функцијата f е двапати диференцијабилна на интервалот $[0,2\pi]$, заклучуваме дека f е непрекината и по делови глатка функција на произволен интервал $[c,c+2\pi]$, па важи:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{9.26}$$

Според условот на задачата имаме $\int_0^{2\pi}f(x)dx=0=f(2\pi)-f(0)$, па следува дека Фурјевиот коефициент $a_0=0$. Слично на претходната задача, првиот извод f' е непрекината функција на интервалот $[0,2\pi]$. Следува дека Фурјевиот ред придружен на f' е определен со:

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx\right). \tag{9.27}$$

Од неравенството на Бесел заклучуваме конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)$. Се враќаме на релацијата (9.26). Од неравенството на Коши- Шварц имаме:

$$\left(\sum_{n=1}^{M}|a_n|\right)^2=\left(\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n}\left(n|a_n|\right)\right)^2\le\left(\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{M}n^2|a_n|^2\right)$$

па од конвергентноста на редовите: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left|a_n\right|^2$ заклучуваме конвергенција на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$. Слично, редот $\sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|$ е конвергентен. Следува дека редот (9.26) е рамномерно конвергентен според мајорантниот критериум на Вајерштрас:

$$\left|a_n\cos nx+b_n\sin nx\right|\le\left|a_n\right|+\left|b_n\right|,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Според задачата 9.15 може да одиме со равенството на Парсевал:

$$\int_0^{2\pi}\left(f(x)\right)^2dx=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2a_n^2+n^2b_n^2\right)\le\int_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2dx$$

при што во последното неравенство го ползувавме неравенството на Бесел. ☻

Задача 9.28. Нека f и g се непрекинати функции на $\mathbb{R}$ со особина:

$$f(x+1)=f(x),\quad g(x+1)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Докажи дека важи следнава релација:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)dx=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx.$$

Доказ: Да забележиме дека според лемата на Риман-Лебег тврдењето е точно за сите функции $g(x)$ од типот:

$$\cos k\pi x \text{ односно } \sin k\pi x.$$

Ползувајќи ја линеарноста на интегралот резултатот се проширува на сите конечни тригонометриски полиноми од облик:

$$p(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\pi x)+b_k\sin(k\pi x)\right).$$

Во продолжение ја ползуваме апроксимационата теоремата на Стон-Вајерштрас според која множеството од тригонометриски полиноми е густо во просторот од непрекинати функции со sup норма.

Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Постои тригонометриски полином $p_{\varepsilon}(x)$ како погоре така што: $\left|g(x) - p_{\varepsilon}(x)\right| < \varepsilon$ Одиме со оценка на разликата:

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx - \left(\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)p_{\varepsilon}(nx)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 p_{\varepsilon}(x)\,dx\right)\right| \le$$

$$\le \left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\big(g(nx) - p_{\varepsilon}(nx)\big)dx\right| + \left|\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 \big(g(x) - p_{\varepsilon}(x)\big)dx\right| \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left|f(x)\right|\left|g(nx) - p_{\varepsilon}(nx)\right|dx + \int_0^1 \left|f(x)\right|dx\int_0^1 \left|g(x) - p_{\varepsilon}(x)\right|dx \le 2\varepsilon\int_0^1 \left|f(x)\right|dx.$$

Заклучокот следува. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Развиј ја во Фурјев ред функцијата $f(x)=x^2,\ x\in(1,3)$, а потоа пресметај го збирот $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Определи го Фурјевиот ред за функцијата: (Задачи 2-7)

2. $f(x)=x, \quad x\in(-2,2), \quad f(x+4)=f(x).$

3. $f(x)=x, \quad x\in(0,4), \quad f(x+4)=f(x).$

4. $f(x)=|x|, \quad x\in(-2,2), \quad f(x+4)=f(x).$

5. $f(x)=\begin{cases}-2, & -1\le x<0\\ 2, & 0\le x<1\end{cases}, \quad f(x+2)=f(x).$

6. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ \pi, & 0\le x<\pi\end{cases}, \quad f(x+2\pi)=f(x).$

7. $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0\\ x, & 0\le x<2\end{cases}, \quad f(x+4)=f(x).$

Скицирај го графикот на Фурјевиот ред од: (Задачи 8-10)

8. $f(x)=x, \quad x\in(-2,2), \quad f(x+4)=f(x).$

9. $f(x)=|x|, \quad x\in(-2,2), \quad f(x+4)=f(x).$

10. $f(x)=\begin{cases}-2, & -1\le x<0\\ 2, & 0\le x<1\end{cases}, \quad f(x+2)=f(x).$

11. Развиј ја функцијата $f(x)=\frac{\pi}{4}, \quad x\in(0,\pi)$ во непотполн Фурјев ред по синуси. Искористи го добиениот резултат за пресметување на сумите на следните редови:

1) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots;$ 2) $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\cdots;$ 3) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots.$

12. Нека функција f е антипериодична со период π и периодична со период 2π. Од каков облик е Фурјевиот ред, доколку постои, на таа функција на интервалот $(-\pi,\pi)$?

13. Развиј ја во Фурјев ред функцијата $f\left(x\right)=\operatorname{sgn}\left(\cos x\right)$ на $\left[-\pi,\pi\right]$.

14. Функцијата f дефинирана на следниот начин: $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & -\alpha<x<\alpha\\ 0, & \alpha\le\left|x\right|\le\pi\end{cases}$, $0<\alpha<\pi$

развиј ја во Фурјев ред на сегментот $\left[-\pi,\pi\right]$. Потоа, определи го α, под услов $\dfrac{a_0^2}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2.$

15. Испитај ја конвергенцијата на Фурјевиот ред за функцијата: $f\left(x\right)=\dfrac{\pi-x}{2},\ 0\le x\le 2\pi.$

16. Развиј ја во Фурјев ред функцијата $f\left(x\right)=e^{ax}$ на интервалот $\left(-\pi,\pi\right)$.

17. Развиј ја во Фурјев ред функцијата $f\left(x\right)=\cos ax$ на интервалот $\left(-\pi,\pi\right)$.

18. Развиј ја во Фурјев ред функцијата $f\left(x\right)=\left|x\right|$ на интервалот $\left(-1,1\right)$.

19. Развиј ја во Фурјев ред функцијата $f\left(x\right)=10-x$ на интервалот $\left(5,15\right)$.

20. Развиј ја во Фурјев ред функцијата $f\left(x\right)=\dfrac{\pi-x}{3}$ на интервалот $\left(0,2\pi\right)$.

21. Користејќи го Фурјевиот развој на функцијата $f\left(x\right)=x$ на сегментот $\left[0,2\right]$ пресметај ја сумата на редот $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}.$

22. Докажи дека $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}.$

23. Докажи дека тригонометрискиот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n},\ x\in\mathbb{R}$ не може да биде Фурјев ред непрекината функција.

24. Испитај кој од следните тригонометриски редови е Фурјев:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2},$ 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^3},$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}},$ 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx,$

ГЛАВА 10

ЖОРДАНОВА МЕРА

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Нека $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\, b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}^n$. Множеството

$$P_{a,b}=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\in\mathbb{R},\, a_i\le x_i\le b_i,\, i=1,2,\cdots,n\right\}\subset\mathbb{R}^n \qquad (10.1)$$

ќе го викаме $n-$*димензионален правоаголник* со страни паралелни на координатните оски.

Страните на n-правоаголникот се определени со условите:

$$a_i\le x_i\le b_i,\, i\ne k \text{ и } x_k=a_k, \text{ или } a_i\le x_i\le b_i,\, i\ne k \text{ и } x_k=b_k.$$

Ако $a_i=b_i$ барем за едно $i=1,2,\cdots,n,$ тогаш велиме дека $n-$правоаголникот $P_{a,b}$ е дегенериран во $\mathbb{R}^n$. Празното множество ќе го сметаме како дегенерирано множество во $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 10.1. *Мера* на $n-$правоаголникот $P_{a,b}$ (10.1) е бројот $mP_{a,b}$ дефиниран со

$$mP_{a,b}:=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

Јасно е дека $mP_{a,b}\ge 0$ и важи $mP_{a,b}=0$ ако и само ако n-правоаголникот $P_{a,b}$ е дегенериран во $\mathbb{R}^n$. Специјално, $m(\varnothing):=0.$

Дефиниција 10.2. Велиме дека множеството $P\subset\mathbb{R}^n$ е *елементарно множество (елементарна фигура)* ако е унија од конечен број $n-$правоаголници P_j, $P=\bigcup_{k=1}^{m}P_k$, кои се сечат само по своите страни. Овој приказ го нарекуваме *разложување на елементарното множество со* $n-$ *правоаголници.*

Дефиниција 10.3. Ако $P=\bigcup_{k=1}^{m}P_k$ е разложување на множеството P со $n-$правоаголници P_j, тогаш *мера на елементарното множество* е бројот mP дефиниран со $mP:=\sum_{k=1}^{m}mP_k$.

Да забележиме дека mP не зависи од начинот на разложување.

По дефиниција, празното множество се смета за елементарна фигура и неговата плоштина е енаква на 0.

За мера на елементарните множества важат следниве својства:

Теорема 10.1. а) Ако P',P'' се елементарни множества без заеднички внатрешни точки, тогаш важи $m\left(P'\cup P''\right)=mP'+mP''$. (адитивност на мера)

б) Ако $P'\subset P''$, тогаш $mP'\le mP''$. (монотоност на мера)

в) $m\left(P'\cup P''\right)\le mP'+mP''$. (полуадитивност на мера).

Жорданова мера

Нека $G\subseteq\mathbb{R}^n$ е ограничено множество и нека:

$$\mathrm{A}=\left\{P:P\subset\mathbb{R}^n \text{ е елементарно множество така што } P\subset G\right\}.$$

$$\mathrm{B}=\left\{Q:Q\subset\mathbb{R}^n \text{ е елементарно множество така што } G\subset Q\right\}.$$

Множествата $\mathrm{A}\ne\varnothing$, (бидејќи $\varnothing\in\mathrm{A}$) и $\mathrm{B}\ne\varnothing$ (бидејќи G е ограничено множество, па постои n-правоаголник што го содржи G). Исто така, множеството $\left\{m(Q):Q\in\mathrm{B}\right\}$ е ограничено од долу со 0, па постои $\inf\left\{m(Q):Q\in\mathrm{B}\right\}$, што се вика *надворешна* мера на множеството G и се означува со $m_e(G)$. ($J^*\left(A\right)$)

Од друга страна, бидејќи за $P\in\mathrm{A}$ важи $P\subset Q,\forall Q\in\mathrm{B}$, постои $m_i=J_*\left(A\right)=\sup\left\{m(P):P\in\mathrm{A}\right\}$ што го викаме *внатрешна мера* на множеството G .

Јасно е дека $m_i\left(G\right)\le m_e\left(G\right)$.

Дефиниција 10.4. Ако $m_i\left(G\right)=m_e\left(G\right)=m\left(G\right)$, велиме дека G е *мерливо по Жордан (Jordan),* а бројот $m\left(G\right)$ се вика *Жорданова мера* на множеството G .

ЗАДАЧИ

Задача 10.1. Нека I е интервал. Тогаш: $m(I)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|I\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right|$. Слично, ако $P\subseteq\mathbb{R}^m$ е m-димензионален правоаголник тогаш: $m(P)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^m}\left|P\cap\frac{\mathbb{Z}^m}{n}\right|$, и ако $P=P_1\cup\ldots\cup P_k$ е елементарно множество во $\mathbb{R}^m$, каде P_i се попарно дисјунктни m-димензионални правоаголници тогаш: $m(P_1)+m(P_2)+\ldots+m(P_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^m}\left|P\cap\frac{\mathbb{Z}^m}{n}\right|$.

Доказ: Нека $a<b$ и I е интервал со крајни точки a,b. Ќе ја оцениме кардиналноста на множеството $I\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}$:

$$\begin{aligned}\left|I\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right|&=\left|\left\{z\in\mathbb{Z}:\ \frac{z}{n}\in I\right\}\right|\leq\left|\left\{z\in\mathbb{Z}:\ na\leq z\leq nb\right\}\right|\leq\\&\leq\left|\left\{z\in\mathbb{Z}:\ \lfloor na\rfloor\leq z\leq\lceil nb\rceil\right\}\right|\leq nb+1-(na-1)+1=n(b-a)+3.\end{aligned}$$

Слично,

$$\left|I\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right|=\left|\left\{z\in\mathbb{Z}:\ \frac{z}{n}\in I\right\}\right|\geq\left|\left\{z\in\mathbb{Z}:\ na<z<nb\right\}\right|\geq nb-na-1.$$

Ако поделиме со n добиваме:

$$b-a-\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n}\left|I\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right|\leq b-a+\frac{3}{n}$$

откаде следува резултатот за интервали.

Сега, ако $P\subseteq\mathbb{R}^m$ е m-димензионален правоаголник $P=I_1\times I_2\times\ldots\times I_m$, тогаш имаме: $P\cap\frac{\mathbb{Z}^m}{n}=\left(I_1\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)\times\left(I_2\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)\times\ldots\times\left(I_m\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)$. Оттука заклучуваме дека:

$$\left|P\cap\frac{\mathbb{Z}^m}{n}\right|=\prod_{j=1}^{m}\left|I_j\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right|.$$

Ако поделиме со n^m во горната релација и побараме лимес кога $n \to \infty$ добиваме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m}\left|P \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} \prod_{j=1}^{m} \left|I_j \cap \frac{\mathbb{Z}}{n}\right| = \prod_{j=1}^{m} m\left(I_j\right) = m\left(P\right).$$

Последното тврдење е последица од релацијата:

$$\left(A \cup B\right) \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n} = \left(A \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n}\right) \cup \left(B \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n}\right)$$

каде што $A \cap B = \varnothing$. Доказот е комплетиран. ☻

Забелешка. Релациите во задачата се познати како формули за дискретизација.

Задача 10.2. Наведи пример на множество $A \subseteq [0,1]$ такво што лимесот: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|A \cap \frac{\mathbb{Z}}{n}\right|$ не постои. Потоа наведи пример на множество $A \subseteq [0,1]$ такво што лимесите:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|A \cap \frac{\mathbb{Z}}{n}\right|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left(A + x\right) \cap \frac{\mathbb{Z}}{n}\right|$ постојат, но се различни.

Решение: Го разгледуваме следново множество:

$$A = \left\{ \frac{2m-1}{2^n} \middle|\ m \geq 1,\ m,n \in \mathbb{Z},\ 2m-1 \leq 2^n \right\}$$

Да забележиме дека произволен $z \geq 1$ може да го запишеме во облик $z = \left(2m-1\right)2^k$, $k \geq 0,\ m \geq 1$, па добиваме: $\left|A \cap \frac{\mathbb{Z}}{2^n}\right| \geq \left|\left\{\frac{z}{2^n} : 1 \leq z \leq 2^n\right\}\right| = 2^n$. Оттука заклучуваме дека:

$\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|A \cap \frac{\mathbb{Z}}{n}\right| \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left|A \cap \frac{\mathbb{Z}}{2^n}\right| \geq 1$. Од друга страна, ако $x \in A \cap 3^{-k}\mathbb{Z}$ тогаш за некои $m \geq 1,\ n \in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{Z}$ важи релацијата $x = \frac{2m-1}{2^n} = \frac{z}{3^k}$, откаде добиваме дека $2^n z = 3^k\left(2m-1\right)$. Но, да забележиме дека левата страна од последната релација е парен број за $n>0$, додека десната страна е непарен број. Следува дека $n=0$, $m=1$ и $z=3^k$, односно $\left|A\cap 3^{-k}\mathbb{Z}\right|=\left|\{1\}\right|=1$, за произволно $k\in\mathbb{N}$, па заклучуваме дека:

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|A\cap\frac{\mathbb{Z}}{n}\right|\leq\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\left|A\cap\frac{\mathbb{Z}}{3^n}\right|=0.$$

За вториот дел правиме избор $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ и $x=\pi$. Доказот е готов. ☻

Забелешка. Последниов пример укажува на фактот дека формулата за дискретизација не е инваријантна при транслација, па затоа не е погодна за дефинирање на мера за произволни множества. Сепак може да биде полезна за класа поголема од елементарните множества.

Задача 10.3. Докажи дека мерата m на елементарни множества од $\varepsilon_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ ги има следниве особини:

(i) Ненегативност и адитивност, т.е:

$$m(P)\geq 0 \text{ и } m(P_1\cup P_2)=m(P_1)+m(P_2),\ P_1\cap P_2=\varnothing, \text{ за } P,P_1,P_2\in\varepsilon_0\left(\mathbb{R}^n\right)$$

(ii) Монотоност, т.е. ако $P\subseteq Q$ тогаш $m(P)\leq m(Q)$.

(iii) Субадитивност, т.е. $m(P\cup Q)\leq m(P)+m(Q)$.

(iv) Инваријантност при транслација, т.е. $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $m(x+P)=m(P)$.

Доказ: (i) Ненегативноста и адитивноста може да ги заклучиме од формулата за дискретизација.

(ii) Да забележиме дека ако P,Q се елементарни множества тогаш и пресекот $P\cap Q$ и разликата $Q\setminus P$ се елементарни множества. Ќе го запишеме Q како дисјунктна унија од елементарни множества со: $Q=(P\cap Q)\cup(Q\setminus P)$. Од условот имаме $P \subseteq Q$, па $P \cap Q = P$. Следува дека: $m(Q) = m(P) + m(Q \setminus P) \geq m(P)$, каде што ја ползувавме адитивноста и ненегативноста од (i).

(iii) За субадитивноста одиме со следниов запис на $P \cup Q$ како дисјунктна унија од елементарни множества: $P \cup Q = P \cup (Q \setminus P)$ откаде добиваме:

$$m(P \cup Q) = m(P) + m(Q \setminus P) \leq m(P) + m(Q)$$

каде што ја ползувавме монотоноста од (ii).

(iv) Останува да ја докажеме инваријантноста при транслација. Ќе ја добиеме како последица од формулата за дискретизација.

За произволен интервал I со крајни точки $a < b$ имаме дека: $\frac{z}{n} - x \in I$ акко $z \in nI + nx$.

Следува, ако $\frac{z}{n} - x \in I$ тогаш $z \in \left[\lfloor na + nx \rfloor, \lceil nb + nx \rceil\right] \cap \mathbb{Z}$. Слично, ако $z \in \left[\lceil na + nx \rceil, \lfloor nb + nx \rfloor\right] \cap \mathbb{Z}$ тогаш $\frac{z}{n} - x \in I$. Од тоа што:

$$\left|\left[\lfloor na + nx \rfloor, \lceil nb + nx \rceil\right] \cap \mathbb{Z}\right| \leq n(b-a) + 3,$$

$$\left|\left[\lceil na + nx \rceil, \lfloor nb + nx \rfloor\right] \cap \mathbb{Z}\right| \geq n(b-a) - 1$$

заклучуваме дека: $-3 \leq \left|\left\{z \in \mathbb{Z} : \frac{z}{n} - x \in I\right\}\right| - n(b-a) \leq 3$. Ако поделиме со n и побараме лимес кога $n \to \infty$ добиваме:

$$m(I + x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left|z \in \mathbb{Z} : \frac{z}{n} - x \in I\right| = b - a = m(I).$$

Сега претпоставуваме дека $P = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ е n-димензионален правоаголник во $\mathbb{R}^n$. Тогаш за произволен $x \in \mathbb{R}^n$ имаме: $P + x = (I_1 + x_1) \times (I_2 + x_2) \times \ldots \times (I_n + x_n)$, па за мерата добиваме: $m(P + x) = \prod_{j=1}^{n} m(I_j + x_j) = \prod_{j=1}^{n} m(I_j) = m(P)$.

Конечно, ако $P = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_k$ е елементарно множество, при што унијата е попарно дисјунктна тогаш имаме: $P + x = (P_1 + x) \cup (P_2 + x) \cup ... \cup (P_k + x)$. откаде следува:

$$m(P+x) = m(P_1 + x) + m(P_2 + x) + ... + m(P_k + x) =$$
$$m(P_1) + m(P_2) + ... + m(P_k) = m(P). \quad ☻$$

Задача 10.4. Докажи дека надворешната и внатрешната жорданова мера J^* и J_* се монотони. Докажи дека надворешната мера е субадитивна.

Доказ: Нека $A \subseteq C$. Одбираме низа од елементарни множества $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такви што $E_n \subseteq A, \forall n \in \mathbb{N}$ односно $C \subseteq F_n, \forall n \in \mathbb{N}$ и со особина:

$$m(E_n) \to J_*(A) \text{ односно } m(F_n) \to J^*(C)$$

Да забележиме дека за секој $n \in \mathbb{N}$:

$$J_*(C) \geq m(E_n) \to J_*(A) \text{ и } J^*(A) \leq m(F_n) \to J^*(C)$$

откаде следува првиот дел на задачата.

Нека сега A и C се произволни ограничени множества од $\mathbb{R}^m$. Одбираме низи од елементарни множества $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такви што $A \subseteq G_n, \forall n \in \mathbb{N}$ односно $C \subseteq F_n, \forall n \in \mathbb{N}$ и со особина:

$$m(G_n) \to J^*(A) \text{ односно } m(F_n) \to J^*(C).$$

Да забележиме дека $A \cup C \subseteq G_n \cup F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, па имаме:

$$J^*(A \cup C) \leq m(G_n \cup F_n) \leq m(G_n) + m(F_n) \to J^*(A) + J^*(C)$$

каде што ја ползувавме субадитивноста на мерата за елементарните множества. ☻

Забелешка. Да забележиме дека секое елементарно множество E е Жордан мерливо и важи $m(E)=J^*(E)=J_*(E)$. Всушност, Жордановите множества се оние што се „приближно елементарни", како што укажува и следнава задача.

Задача 10.5. Нека $A\subseteq\mathbb{R}^n$ е произволно ограничено множество. Докажи дека следниве тврдења се еквивалентни:

(i) A е Жордан мерливо.

(ii) За секое $\varepsilon>0$ постојат елементарни множества $E,F\in\varepsilon_0(\mathbb{R}^n)$ такви што $E\subseteq A\subseteq F$ и $m(F\setminus E)<\varepsilon$.

(iii) За секое $\varepsilon>0$ постои елементарно множество $E\in\varepsilon_0(\mathbb{R}^n)$, $E\subseteq A$ така што $J^*(A\setminus E)<\varepsilon$.

Доказ: Да забележиме дека за произволно $\varepsilon>0$ постојат елементарни множества $E\subseteq A\subseteq F$ така што:

$$m(E)>J_*(A)-\varepsilon \text{ односно } m(F)<J^*(A)+\varepsilon.$$

Сега, ако претпоставиме дека A е Жордан мерливо тогаш:

$$m(F)<J^*(A)+\varepsilon=J_*(A)+\varepsilon<m(E)+2\varepsilon.$$

Од тоа што $E\subseteq F$ имаме дека $m(F)=m(E)+m(F\setminus E)$ откаде добиваме дека $m(F\setminus E)<2\varepsilon$.

Сега претпоставуваме дека за секое $\varepsilon>0$ постојат елементарни множества $E,F\in\varepsilon_0(\mathbb{R}^n)$ такви што $E\subseteq A\subseteq F$ и $m(F\setminus E)<\varepsilon$.

Тогаш $A\setminus E\subseteq F\setminus E$, па $J^*(A\setminus E)\le J^*(F\setminus E)=m(F\setminus E)<\varepsilon$.

Останува да го претпоставиме третото тврдење, т.е. нека за секое $\varepsilon > 0$ постои елементарно множество $E_\varepsilon \in \varepsilon_0(\mathbb{R}^n)$, $E_\varepsilon \subseteq A$ така што $J^*(A \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$.

Од инклузијата $E_\varepsilon \subseteq A$ заклучуваме дека $m(E_\varepsilon) \le J_*(A)$. Сега од субадитивноста на надворешната Жорданова мера J^* имаме:

$$J^*(A) \le J^*(A \setminus E_\varepsilon) + m(E_\varepsilon) < \varepsilon + J_*(A).$$

Ако побараме лимес во горното неравевенство кога $\varepsilon \to 0$, имајќи во предвид дека од дефиницијата важи $J_*(A) \le J^*(A)$, заклучуваме дека $J_*(A) = J^*(A)$, па множеството A е Жордан мерливо. ☻

Задача 10.6. Докажи дека ограничено множество A е Жордан мерливо акко за секое $\varepsilon > 0$ постои елементарно множество E така што $A \subseteq E$ и важи неравенството $J^*(E \setminus A) < \varepsilon$.

Доказ: Нека P е n-димензионален правоаголник што го содржи ограниченото множество A. Претпоставуваме дека постои елементарно множество $F \subseteq P \setminus A$ такво што $J^*((P \setminus A) \setminus F) < \varepsilon$. Тогаш правиме избор за множеството $E = P \setminus F$, па добиваме дека $A \subseteq E$ и $J^*(E \setminus A) = J^*((P \setminus A) \setminus F) < \varepsilon$. Следува дека A е Жордан мерливо акко $P \setminus A$ е Жордан мерливо т.е. акко за секое $\varepsilon > 0$ постои елементарно множество $F \subseteq P \setminus A$ такво што $J^*((P \setminus A) \setminus F) < \varepsilon$ т.е. акко за секое $\varepsilon > 0$ постои елементарно множество E така што $A \subseteq E$ и важи $J^*(E \setminus A) < \varepsilon$. ☻

Забелешка. Во доказот ја ползувавме претходната задача и тврдењето дека разлика од Жордан мерливи множества е Жордан мерливо множество. Деталите околу ова тврдење ги оставаме на читателот за вежба☺.

Задача 10.7. Дали важи следнава релација:

$$J^*(E) = \sup_{E \supseteq U} J^*(U)$$

каде што супремумот е по сите отворени множества $U \subseteq E$?

Решение: Дефинираме множество $E = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Одбираме произволно отворено множество $U \subseteq E$. Да забележиме дека $U = \varnothing$ со оглед на фактот што E не содржи отворени интервали. Следува дека $\sup\limits_{E \supseteq U - отворено} J^*(U) = 0$. Од друга страна, ако одбереме произволно елементарно множество $F \in \varepsilon_0(\mathbb{R})$ така што $E \subseteq F$ тогаш може да го запишеме во облик $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$, каде што I_n се попарно дисјунктни интервали и уште повеќе може да ги одбереме така што $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$. Сега од монотоноста на мерата над елементарните множества имаме дека $\sum\limits_{i=1}^{n} m(I_i) \geq m([0,1]) = 1$. Следува дека $J^*(E) = 1$. Значи одговорот е: не мора да важи. ☻

Задача 10.8. Докажи ја формулата за дискретизација:

$$m(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^m} \left| A \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n} \right|$$

за секое Жордан мерливо множество $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

Доказ: Во задачата 10.1. докажавме дека формулата за дискретизација важи за елементарни множества. Ја воведуваме ознаката: $I_n(A) = \frac{1}{n^m} \left| A \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n} \right|$ заради едноставност. Сега, нека $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е произволно Жордан мерливо множество и нека $\varepsilon > 0$. Понатаму, нека $E \subseteq A \subseteq F$ се елементарни множества така што $m(F) < m(A) + \varepsilon$ односно $m(E) > m(A) - \varepsilon$. Да забележиме дека:

$$E \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n} \subseteq A \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n} \subseteq F \cap \frac{\mathbb{Z}^m}{n},$$

па $I_n(E) \le I_n(A) \le I_n(F)$. Оттука ако побараме лимес кога $n \to \infty$ во последните неравенства и ползувајќи ги горните неравенства за мерата на A добиваме:

$$m(A) < m(E) + \varepsilon = \varepsilon + \lim_{n\to\infty} I_n(E) \le \varepsilon + \lim_{n\to\infty} I_n(A) \le$$
$$\le \varepsilon + \lim_{n\to\infty} I_n(F) = \varepsilon + m(F) < 2\varepsilon + m(A)$$

Ако побараме лимес кога $\varepsilon \to 0$ во горните неравенства го добиваме бараното тврдење. ☻

Задача 10.9. Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n, C \subseteq \mathbb{R}^p$ се Жордан мерливи множества. Докажи дека множеството $A \times C \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ е Жордан мерливо и важи:

$$m(A \times C) = m(A)m(C)$$

Доказ: Прво да забележиме дека важи следнава:

Лема: Нека $A \subseteq \mathbb{R}^n, C \subseteq \mathbb{R}^p$ се елементарни множества. Докажи дека множеството $A \times C \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ е елементарно и важи:

$$m(A \times C) = m(A)m(C)$$

Доказот е лесна вежба и го оставаме на читателот.

Се враќаме на задачата. Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Од задачата 10.5 следува дека постојат елементарни множества $E, F \in \varepsilon_0(\mathbb{R}^n)$ такви што $E \subseteq A \subseteq F$ и $m(F \setminus E) < \varepsilon$ односно елементарни множества $E', F' \in \varepsilon_0(\mathbb{R}^p)$ такви што $E' \subseteq C \subseteq F'$ и $m(F' \setminus E') < \varepsilon$.

Да забележиме дека $E \times E' \subseteq A \times C \subseteq F \times F'$ и множествата $E \times E'$ и $F \times F'$ се елементарни. Сега од Жордан мерливоста на A и C имаме:

$$J^*(A\times C)\le m(F\times F')=m(F)m(F')<\big(m(E)+\varepsilon\big)\big(m(E')+\varepsilon\big)\le$$
$$\le\big(m(A)+\varepsilon\big)\big(m(C)+\varepsilon\big)$$

Од друга страна, од $m(A)=m(A\setminus E)+m(E)\le m(F\setminus E)+m(E)$ и слично од $m(C)=m(C\setminus E')+m(E')\le m(F'\setminus E')+m(E')$ добиваме:

$$J_*(A\times C)\ge m(E\times E')\ge\big(m(A)-\varepsilon\big)\big(m(C)-\varepsilon\big).$$

Ако побараме лимес кога $\varepsilon\to 0$ во горните неравенства добиваме:

$$J^*(A\times C)=J_*(A\times C)=m(A)m(C)$$

Доказот е комплетиран. ☻

Задача 10.10. (i) Ако $J^*(A)=0$ тогаш A е Жордан мерливо. Докажи!

(ii) Ако A е Жордан мерливо со мера $m(A)=0$ тогаш произволно $C\subseteq A$ е Жордан мерливо со мера $m(C)=0$.

Доказ: (i) Да забележиме дека од дефиницијата важи: $0\le J_*(A)\le J^*(A)=0$, па следува дека $J_*(A)=J^*(A)=0$.

(ii) Според задачаата 10.4 надворешната Жорданова мера е монотона, па имаме: $0\le J^*(C)\le J^*(A)=0$, следува дека $J^*(C)=0$. Од (i) заклучуваме дека C е Жордан мерливо со мера $m(C)=0$. ☻

Задача 10.11. Дали множеството $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ е Жордан мерливо?

Решение: Да забележиме дека множеството $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ е тотално несврзано, па не содржи нетривијални интервали. Следува дека $J_*(A)=0$. Од друга страна секое елементарно множество што го содржи множеството $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ може да сметаме дека го содржи и множеството $[0,1]$, па $J^*(A)\geq J^*([0,1])=1$. Значи одговорот е: не, множеството $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$ не е Жордан мерливо. ☻

Задача 10.12. Докажи дека секое конечно множество е Жордан мерливо.

Доказ: Нека $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}\subseteq\mathbb{R}$ е произволно конечно множество. Одбираме произволно елементарно множество E така што $E\subseteq A$. Следува дека E е конечна унија од тривијални интервали, па мерата на E е нула, т.е. $m(E)=0$. Следува дека $J_*(A)=0$.

Нека сега $\varepsilon>0$ е произволно мал број. Дефинираме елементарно множество F така што $A\subseteq F$ и од облик:

$$F=\bigcup_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{\varepsilon}{2n},a_i+\frac{\varepsilon}{2n}\right).$$

Да забележиме дека за доволно мало $\varepsilon>0$ унијата е дисјунктна, па за мерата на F важи: $m(F)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$. Следува дека $J^*(A)=0$. ☻

Забелешка. Доказот е аналоген и во повисоки димензии $\mathbb{R}^n$.

Задача 10.13. Испитај мерливост по Жордан на множеството:

$$A=\{(x,y)\,|\,\{x,y\}\subseteq\mathbb{Q}\cap[0,1]\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

Решение: Одбираме произволно елементарно множество E од $\mathbb{R}^2$ така што $E\subseteq A$. Во рамнината елементарно множество е конечна унија од правоаголници од облик:

$$(a,b)\times(c,d);(a,b)\times[c,d];(a,b)\times[c,d);(a,b)\times(c,d];$$

$$[a,b]\times(c,d);[a,b]\times[c,d];[a,b]\times[c,d);[a,b]\times(c,d];$$

$$[a,b)\times(c,d);[a,b)\times[c,d];[a,b)\times[c,d);[a,b)\times(c,d];$$

$$(a,b]\times(c,d);(a,b]\times[c,d];(a,b]\times[c,d);(a,b]\times(c,d].$$

Да забележиме дека само правоаголниците од облик $a=b$ и $(a,a)\times I$ или $c=d$ и $I\times(c,c)$, каде I е некој интервал, се содржат во A. Следува дека $E=\varnothing$. Заклучуваме дека $J_*(A)=0$.

Слично, за надворешната мера одбираме произволно елементарно множество F така што $A\subseteq F$. Од претходната дискусија за обликот на F може да сметаме дека е направен избор на правоаголници така што $[0,1]\times[0,1]\subseteq F$. (Во спротивно F ќе го замениме со F' при што $m(F)=m(F')$ и за F' важи $[0,1]\times[0,1]\subseteq F'$). Заклучуваме дека $m(F)\geq 1$, па следува неравенството $J^*(A)\geq 1$. Значи, множеството не е Жордан мерливо. ☻

Задача 10.14. Дали пребројлива унија од Жордан мерливи множества е Жордан мерливо множество?

Решение: Да забележиме дека множеството од рационални броеви е пребројливо. Го дефинираме следново множество:

$$A=\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\},$$

што како бесконечно подмножество од пребројливо е и самото пребројливо. Ги воведуваме следниве множества: $A_n=\{x_n\},\ \forall n\in\mathbb{N}$, што како едноелементни множества се Жордан мерливи. Тогаш важи:

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

Но, според задачата 10.11, множеството A не е Жордан мерливо. Следува дека пребројлива унија од Жордан мерливи множества не мора да е Жордан мерливо множество. ☻

Задача 10.15. Дијадична коцка од ред 2^{-n} е m-димензионален правоаголник од облик:

$$D_n\left(z_1, z_2, ..., z_m\right) = \left[\frac{z_1}{2^n}, \frac{z_1+1}{2^n}\right) \times ... \times \left[\frac{z_m}{2^n}, \frac{z_m+1}{2^n}\right),\ \textit{за}\ n \in \mathbb{N},\ \textit{и}\ \left(z_1, ..., z_m\right) \in \mathbb{Z}^m$$

Нека $\varepsilon_*\left(A,n\right)$ е бројот на дијадични коцки од ред 2^{-n} што се содржат во A, додека $\varepsilon^*\left(A,n\right)$ е бројот на дијадични коцки од ред 2^{-n} што имаат непразен пресек со A.

Докажи дека ограничено множество $A \subseteq \mathbb{R}^m$ е Жордан мерливо акко:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-mn}\left(\varepsilon^*\left(A,n\right) - \varepsilon_*\left(A,n\right)\right) = 0.$$

Докажи дека Жордан мерливите множества имаат мера определена со релацијата:

$$m\left(A\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{-mn}\varepsilon^*\left(A,n\right) = \lim_{n\to\infty} 2^{-mn}\varepsilon_*\left(A,n\right)$$

Доказ: Претпоставуваме дека важи $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-mn}\left(\varepsilon^*\left(A,n\right) - \varepsilon_*\left(A,n\right)\right) = 0$. Нека $S_*\left(A,n\right)$ е множеството од дијадични коцки од ред 2^{-n} што се содржат во A, додека $S^*\left(A,n\right)$ е множеството од дијадични коцки од ред 2^{-n} што имаат непразен пресек со A. Тогаш важи:

$$\bigcup S_*\left(A,n\right) \subseteq A \subseteq \bigcup S^*\left(A,n\right)$$

Да забележиме дека $\bigcup S_*\left(A,n\right)$ односно $\bigcup S^*\left(A,n\right)$ се елементарни множества. Уште повеќе дијадични коцки од ист ред се дисјунктни, па имаме дека:

$$2^{-mn}\varepsilon_*\left(A,n\right) = m\left(\bigcup S_*\left(A,n\right)\right) \le J_*\left(A\right) \le J^*\left(A\right) \le m\left(\bigcup S^*\left(A,n\right)\right) = 2^{-mn}\varepsilon^*\left(A,n\right)$$

Ако побараме лимес во горните релации кога $n\to\infty$ добиваме: $J_*\left(A\right) = J^*\left(A\right)$.

Уште повеќе за мерата на A имаме: $m(A)=\lim_{n\to\infty}2^{-mn}\varepsilon^{*}(A,n)=\lim_{n\to\infty}2^{-mn}\varepsilon_{*}(A,n)$.

Одиме сега со обратната насока. Претпоставуваме дека множеството A е Жордан мерливо. Нека $P=I_1\times I_2\times\ldots\times I_m$ е m- димензионален правоаголник, каде што I_j се интервали со крајни точки $a_j<b_j$. Ги дефинираме следниве множества:

$$(P)^n=\left[a_1-\frac{1}{2^n},b_1+\frac{1}{2^n}\right]\times\ldots\times\left[a_m-\frac{1}{2^n},b_m+\frac{1}{2^n}\right],$$

зголемување на P за $\frac{1}{2^n}$ во секој координатен правец.

$$(P)_n=\left(a_1+\frac{1}{2^n},b_1-\frac{1}{2^n}\right)\times\ldots\times\left(a_m+\frac{1}{2^n},b_m-\frac{1}{2^n}\right),$$

намалување на P за $\frac{1}{2^n}$ во секој координатен правец.

Според дефиницијата, да забележиме дека ако дијадична коцка $D_n(z)$ од ред $\frac{1}{2^n}$ има непразен пресек со P тогаш се содржи во $(P)^n$. Слично, ако $D_n(z)$ не се содржи во P тогаш $D_n(z)$ нема пресек со $(P)_n$. Да забележиме уште дека:

$$\begin{aligned}m\left((P)^n\right)-m\left((P)_n\right)&=\prod_{j=1}^{n}\left(b_j-a_j+2\cdot 2^{-n}\right)-\prod_{j=1}^{n}\left(b_j-a_j-2\cdot 2^{-n}\right)=\\&=\sum_{S\subseteq\{1,\ldots,m\}}\prod_{j\in S}\left(b_j-a_j\right)\left(\left(2\cdot 2^{-n}\right)^{m-|S|}-\left(-2\cdot 2^{-n}\right)^{m-|S|}\right)\\&\leq 2^m\cdot 4\cdot 2^{-n}m(P).\end{aligned}$$

Сега одбираме произволно $\varepsilon>0$. Постојат елементарни множества E и F така што $E\subseteq A\subseteq F$ и уште важи $m(F)\leq m(A)+\varepsilon$ односно $m(E)\geq m(A)-\varepsilon$. Ги запишуваме елементарните множества E и F како дисјунктна унија од m-димензионални правоаголници:

$$E = \bigcup_{k=1}^{p} E_k \text{ односно } F = \bigcup_{k=1}^{q} F_k$$

Нека $D_n(z)$ е дијадична коцка од ред $\frac{1}{2^n}$ таква што $D_n(z)$ има непразен пресек со A, но не се содржи во A. Тогаш постои некој j така што $D_n(z)$ има непразен пресек со F_j, па $D_n(z)$ се содржи во $(F_j)^n$. Да забележиме и тоа дека $D_n(z)$ не се содржи во E_k, за сите k, па добиваме дека $D_n(z)$ нема пресек со $(E_k)_n$, за секое k.

Ги дефинираме множествата:

$$(E)_n = \bigcup_{k=1}^{p} (E_k)_n \text{ односно } (F)^n = \bigcup_{k=1}^{q} (F_k)^n$$

па ги добиваме следниве неравенства:

$$m\left((E)_n\right) = \sum_{k=1}^{p} m\left((E_k)_n\right) \geq \sum_{k=1}^{p} m(E_k)\left(1 - 2^m \cdot 2^{2-n}\right) = m(E)\left(1 - 2^m \cdot 2^{2-n}\right),$$

$$m\left((F)^n\right) = \sum_{k=1}^{q} m\left((F_k)^n\right) \leq \sum_{k=1}^{q} m(F_k)\left(1 + 2^m \cdot 2^{2-n}\right) = m(F)\left(1 + 2^m \cdot 2^{2-n}\right).$$

Од друга страна за произволно Жордан мерливо множество G важи:

$$2^{-mn} \varepsilon_*(G) \leq m(G) \leq 2^{-mn} \varepsilon^*(G),$$

па имаме:

$$\begin{aligned}2^{-mn}\left(\varepsilon^*(A,n) - \varepsilon_*(A,n)\right) &\leq 2^{-mn}\left(\varepsilon^*\left((F)^n, n\right) - \varepsilon_*\left((E)_n, n\right)\right) \leq m\left((F)^n\right) - m\left((E)_n\right) \leq \\ &\leq m(F) - m(E) + 2^m \cdot 2^{2-n}\left(m(E) + m(F)\right) \leq 2\varepsilon + 2^m \cdot 2^{2-n}\left(2m(A) + \varepsilon\right).\end{aligned}$$

Ако побараме лимес кога $n \to \infty$ во горните неравенства добиваме:

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} 2^{-mn}\left(\varepsilon^*(A,n) - \varepsilon_*(A,n)\right) \leq 2\varepsilon \quad \text{за секое } \varepsilon > 0.$$

Заклучокот следува. ☻

Задача 10.16. Пресметај ја жордановата мера на множеството:

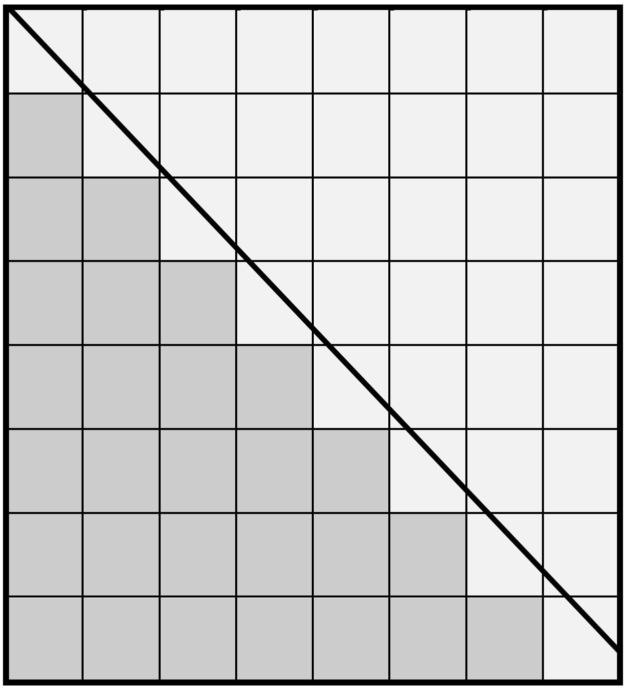
$$A = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0,\ x + y \leq 1\},$$

како подмножество од рамнината $\mathbb{R}^2$.

Решение: Дефинираме квадратна мрежа од 2-димензионални дијадични коцки од ред $\frac{1}{2^{\kappa}}$ со: $D_k(z_1, z_2) = \left[\frac{z_1}{2^k}, \frac{z_1+1}{2^k}\right) \times \left[\frac{z_2}{2^k}, \frac{z_2+1}{2^k}\right)$, $z_1, z_2 \in \{0,1,2,\ldots,2^{k-1}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Треба да ги пресметаме $\varepsilon_*(A,k)$ и $\varepsilon^*(A,k)$, за произволно $k \in \mathbb{N}$.

Да ја разгледаме квадратната мрежа:



Слика 10.1

Во првиот ред има $2^k - 1$ квадрат што се содржат во A. Во секој ред нагоре бројот се намалува за еден квадрат како што е прикажано на сликата. Следува дека бараниот број е:

$$\varepsilon_*(A,k) = (2^k - 1) + (2^k - 2) + \ldots + 1 = \frac{(2^k - 1)2^k}{2}$$

Слично, во првиот ред има 2^k квадрати што имаат непразен пресек со A. Понатаму, во вториот ред има повторно 2^k квадрати што имаат непразен пресек со A. Во секој ред нагоре бројот на квадрати се намалува за еден квадрат. Значи за бараниот број имаме:

$$\varepsilon^*(A,k) = \left(2^k\right) + \left(2^k\right) + \left(2^k - 1\right) \ldots + 2 = 2^k - 1 + \frac{2^k\left(2^k + 1\right)}{2}.$$

Конечно, за жордановата мера на A добиваме:

$$m(A) = \lim_{k\to\infty} 2^{-2k}\varepsilon^*(A,k) = \lim_{k\to\infty} 2^{-2k}\varepsilon_*(A,k) = \frac{1}{2}. \quad ☻$$

Задача 10.17. Докажи дека за произволно ограничено множество $A \subseteq \mathbb{R}^m$ важи:

(i) $J^*\left(\overline{A}\right) = J^*(A)$

(ii) $J_*\left(\operatorname{int} A\right) = J_*(A)$

(iii) Множеството A е Жордан мерливо акко $J^*(\partial A) = 0$.

Доказ: (i) Да забележиме дека $A \subseteq \overline{A}$, па од монотоноста на надворешната жорданова мера имаме $J^*(A) \le J^*\left(\overline{A}\right)$. Значи доволно е да го докажеме обратното неравенство. Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Постојат дисјунктни m-димензионални правоаголници $\left(P_i\right)_{i=1}^n$ така што $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$ и важи:

$$\sum_{i=1}^n m(P_i) \le J^*(A) + \varepsilon$$

Да забележиме дека: $\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^n P_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{P_i}$, па од фактот што $\overline{P_i}$ се исто m-димензионални правоаголници имаме:

$$J^*\left(\overline{A}\right) \le \sum_{i=1}^{n} m\left(\overline{P_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} m\left(P_i\right) < J^*\left(A\right) + \varepsilon$$

Ако побараме лимес кога $\varepsilon \to 0$ во горните неравенства го добиваме бараното неравенство $J^*\left(\overline{A}\right) \le J^*\left(A\right)$. Заклучокот следува.

(ii) Да забележиме дека од $\operatorname{int} A \subseteq A$, слично како под (i), доволно е да докажеме дека $J_*\left(A\right) \le J_*\left(\operatorname{int} A\right)$. Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Постојат дисјунктни m-димензионални правоаголници $\left(P_i\right)_{i=1}^{n}$ така што $\bigcup_{i=1}^{n} P_i \subseteq A$ и важи: $\sum_{i=1}^{n} m\left(P_i\right) \ge J_*\left(A\right) - \varepsilon$.

Сега од тоа што $\left(\operatorname{int} P_i\right)_{i=1}^{n}$ се исто така дисјунктни m-димензионални правоаголници такви што:

$$m\left(\operatorname{int} P_i\right) = m\left(P_i\right) \text{ и } \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{int} P_i \subseteq \operatorname{int} A,$$

заклучуваме дека:

$$J_*\left(\operatorname{int} A\right) \ge \sum_{i=1}^{n} m\left(\operatorname{int} P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m\left(P_i\right) \ge J_*\left(A\right) - \varepsilon .$$

Ако побараме лимес кога $\varepsilon \to 0$ во горните неравенства го добиваме бараното неравенство $J_*\left(A\right) \le J_*\left(\operatorname{int} A\right)$. Заклучокот следува.

(iii) Да забележиме дека $\operatorname{int} \partial A = \varnothing$.

Ако претпоставиме дека $D_n\left(z\right) \subseteq \partial A$, за некоја дијадична коцка тогаш $\operatorname{int} \partial A \supseteq \operatorname{int} D_n\left(z\right) \ne \varnothing$ што е противречност со забелешката. Следува дека ∂A не содржи дијадични коцки што значи дека $\varepsilon_*\left(\partial A, n\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Заклучуваме дека ∂A е Жордан мерливо со мера нула акко $2^{-mn} \varepsilon^*\left(\partial A, n\right) \to 0$.

Да забележиме и тоа дека ако $D_n\left(z\right)$ е дијадична коцка тогаш $D_n\left(z\right) \cap A \ne \varnothing$ и $D_n\left(z\right) \not\subset A$ акко $D_n\left(z\right) \cap \partial A \ne \varnothing$.

Следува дека $\varepsilon^*(\partial A,n)=\varepsilon^*(A,n)-\varepsilon_*(A,n)$.

Сега, од задача 15 имаме дека множеството A е Жордан мерливо акко $2^{-mn}\left(\varepsilon^*(A,n)-\varepsilon_*(A,n)\right)\to 0$ акко $2^{-mn}\varepsilon^*(\partial A,n)\to 0$ акко ∂A е Жордан мерливо со $J(\partial A)=0$ акко $J^*(\partial A)=0$.

Последниот чекор следува од фактот што ако $J^*(\partial A)=0$ тогаш важи $J_*(\partial A)\le J^*(\partial A)=0$, па ∂A е Жордан мерливо со мера $J(\partial A)=0$. ☻

Задача 10.18. Нека $P\subseteq\mathbb{R}^m$ е затворен m-димензионален правоаголник и нека $f:P\to\mathbb{R}$ е непрекината функција. Докажи дека:

(i) Графикот на функцијата $G_f=\{(x,f(x))\mid x\in P\}$ е Жордан мерливо множество со мера $J(G_f)=0$.

(ii) Множеството под графот $V=\{(x,t)\mid x\in P,\ 0\le t\le f(x)\}$ е Жордан мерливо.

Доказ: (i) Да забележиме дека функцијата $f:P\to\mathbb{R}$ е рамномерно непрекината на P (P е компактно множество). Следува дека за произволно $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ така што важи:

$$\|x-y\|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Ќе го запишеме P како дисјунктна унија $P=\bigcup_{n=1}^{r}P_\delta(x_n)$, каде $\left(P_\delta(x_n)\right)_n$ се дисјунктни m-димензионални правоаголници со дијаметар помал од δ и центроид во x_n. Од рамномерната непрекинатост на f имаме дека за секој $x\in P$ постои единствен n така што $x\in P_\delta(x_n)$ и:

$$(x,f(x))\in P_\delta(x_n)\times\left(f(x_n)-\varepsilon,f(x_n)+\varepsilon\right)=Q_{\delta,n}$$

Следува дека $\{(x, f(x)) \mid x \in P\} \subseteq \bigcup Q_{\delta,n}$. Сега од $m(Q_{\delta,n}) = m(P_\delta(x_n)) \cdot 2\varepsilon$ имаме дека:

$$J^*\left(\{(x, f(x)) \mid x \in P\}\right) \leq \sum_n m(Q_{\delta,n}) \leq 2\varepsilon \sum_n m(P_\delta(x_n)) = 2\varepsilon m(P)$$

Ако побараме лимес во горните релации кога $\varepsilon \to 0$ го добиваме бараното тврдење.

(ii) Нека $V = \{(x,t) \mid x \in P,\ 0 \leq t \leq f(x)\}$. Ги задржуваме $\varepsilon, \delta > 0$ и $P = \bigcup_{n=1}^{r} P_\delta(x_n)$ како погоре. За секој $n \in \{1, 2, ..., r\}$ означуваме:

$$m_n = \inf_{x \in P_\delta(x_n)} f(x), \qquad M_n = \sup_{x \in P_\delta(x_n)} f(x)$$

Да забележиме дека $|M_n - m_n| \leq \varepsilon$ што следува од рамномерната непрекинатост. Означуваме $K_n \left\lfloor \frac{m_n}{\varepsilon} \right\rfloor$. Понатаму, за $0 \leq k \leq K_n - 1$ нека $Q_{n,k} = P_\delta(x_n) \times \varepsilon[k, k+1)$ и $\tilde{Q}_n = P_\delta(x_n) \times [\varepsilon K_n, M_n]$. За секое n, ако $0 \leq k < K_n$ и $(x,t) \in Q_{n,k}$ тогаш $x \in P_\delta(x_n)$ и $t < \varepsilon K_n \leq m_n \leq f(x)$. Значи:

$$\bigcup_n \bigcup_{k=0}^{K_n - 1} Q_{n,k} \subseteq V.$$

Од друга страна, ако $x \in P$ и $0 \leq t \leq f(x)$ тогаш постои n така што $x \in P_\delta(x_n)$ па $f(x) \in [m_n, M_n]$. Знчи или $t < \varepsilon K_n$ во кој случај $(x,t) \in Q_{n,k}$ за некој $0 \leq k < K_n$ или $\varepsilon K_n \leq t \leq f(x) \leq M_n$ во кој случај $(x,t) \in \tilde{Q}_n$. Значи:

$$\bigcup_n \bigcup_{k=0}^{K_n - 1} Q_{n,k} \subseteq V \subseteq \bigcup_n \bigcup_{k=0}^{K_n - 1} Q_{n,k} \bigcup \bigcup_n \tilde{Q}_n$$

Нека $\Lambda = m\left(\bigcup_n \bigcup_{k=0}^{K_n - 1} Q_{n,k}\right)$. Тогаш имаме:

$$\begin{aligned} J^*(V) &\leq \Lambda + \sum_n m\left(\tilde{Q}_n\right) = \Lambda + \sum_n m\left(P_\delta\left(x_n\right)\right)\left(M_n - \varepsilon K_n\right) \leq \\ &\leq \Lambda + \sum_n m\left(P_\delta\left(x_n\right)\right)\left(M_n - m_n + \varepsilon\right) \leq \Lambda + m(P)2\varepsilon \leq \\ &\leq J_*(V) + m(P)2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ако побараме лимес во горните релации кога $\varepsilon \to 0$ го добиваме бараното тврдење. ☻

Задача 10.19. Докажи дека произволен триаголник ΔABC во $\mathbb{R}^2$ е Жордан мерливо множество.

Доказ: Работ на триаголникот ΔABC во рамнината се неговите страни. Секоја од нив може да ја сметаме како график на линеарна непрекината функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ на затворен интервал $[a,b]$. Според претходната задача 18 секоја од страните на триаголникот ΔABC има Жорданова мера нула. Да забележиме дека конечна унија од Жордан мерливи множества со мера нула е исто Жордан мерливо множество со мера нула. Следува дека работ на триаголникот ΔABC е Жордан мерливо множество со мера нула. Според задача 17 заклучуваме дека триаголникот (со неговата внатрешност) е Жордан мерливо множество. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Докажи дека мерата на елементарно множество, mP не зависи од начинот на разложување.

2. Докажи дека за елементарните множества P_1, P_2 важи:

а) Ако $P_1 \subset P_2$, тогаш $mP_1 \leq mP_2$.

б) $m(P_1 \cup P_2) \leq mP_1 + mP_2$, при што равенство важи ако, и само ако тие се пресекуваат по делови од нивните граници.

3. Докажи дека разликата $P' \setminus P''$ на две елементарни множества не мора да е елементарно множество. Затворачот $\overline{P' \setminus P''}$ е елементарно множество и важи: $m\left(\overline{P' \setminus P''}\right) \geq m(P') - m(P'')$. Кога важи равенство?

4. Ако $P', P'', \cdots, P^{(k)}$ се елементарни множества, докажи дека тогаш важи

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{k} P^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^{k} mP^{(i)} \text{ и } m\left(\bigcup_{i=1}^{k} P^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{k} mP^{(i)} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} m\left(P^{(i)} \cap P^{(j)}\right).$$

5. Докажи дека сфера во $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, не е елементарно множество.

6. Покажи дека секој правоаголник $\{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{R}^2$ е мерливо множество по Жордан.

7 Секоја елементарна фигура е мерливо множество. Покажи!

8. Нека f е ненегативна Риман интеграбилна функција на $[a,b]$ и $\Omega = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$. Покажи дека множеството Ω е мерливо и неговата мера е еднаква на интегралот $m(\Omega) = \int_a^b f(x)dx.$

9. Множество кое се добива со транслација или ротација на елементарно множество е мерливо, со иста мера.

10. Унија од две множества со Жорданова мера 0 е множество со Жорданова мера 0.

11. Ако $G_1 \subset G$ и $m(G) = 0$, тогаш и G_1 има Жорданова мера 0. Покажи!

12. Множество G^* кое се добива со транслација или ротација на Жордан мерливо множество G е мерливо по Жордан и важи $m(G^*) = m(G)$.

ГЛАВА 11

ПОВЕЌЕКРАТНИ ИНТЕГРАЛИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Нека $E \subset \mathbb{R}^n$ е Жордан мерливо множество и нека $P = \left\{ P_i : P_i ,\ i = \overline{1, N} \right\}$ е фамилија од затворени, Жордан мерливи множества со попарно дисјунктни внатрешности. Велиме дека P е *разбивање (поделба) на* множеството E ако $E = \bigcup_{i=1}^{N} P_i$.

Нека P' и P'' се две разбивања на множеството E, велиме дека P'' е *поситно (пофино) разбивање* од P', ако $\forall P_i'' \in P'', \exists\, P_j' \in P'$ така што $P_j'' \subseteq P_i'$.

За кое било разбивање P на множеството E важи $m\left(E\right) = \sum_{i=1}^{N} mP_i$

Нека $f : E \to \mathbb{R}$ е ограничена функција, P е произволна поделба на множеството E и нека $\xi^i = \left(\xi_1^{\ i}, \xi_2^{\ i}, \cdots, \xi_n^{\ i}\right) \in P_i, \forall i = \overline{1, N}$ е произволна точка во P_i. Сумата

$$\sigma\left(f, P, \xi\right) = \sum_{i=1}^{N} f\left(\xi^i\right) mP_i,\ \xi = \left(\xi^1, \cdots, \xi^N\right)$$

ќе ја викаме *интегрална сума за функцијата f на множеството E при разбивањето P и точките ξ^{i}.*

Дефиниција 11.1. (Риманов интеграл) Велиме дека функцијата f *е Риман интеграбилна на множеството* E ако постои границата $I = \lim\limits_{\Delta(P)\to 0} \sigma\left(f, P, \xi\right),$ каде што $\Delta\left(P\right) = \max\limits_{i\in\{1,\cdots,N\}} diam\left(P_i\right)$, односно ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ така што $\left|\sigma\left(f, P, \xi\right) - I\right| < \varepsilon$ за сите поделби P за кои важи $\Delta\left(P\right) < \delta$ и за произволен избор на точките ξ^i.

Ако бројот I постои, го викаме $n-$*интеграл* и користиме ознака:

$$I = \int\limits_E f\left(x\right)dx \text{ или } I = \overbrace{\int\cdots\int}^{n} f\left(x\right)dx .$$

За $n=2$ и $n=3$ имаме *двоен* и *троен интеграл* и означуваме $\iint\limits_E f(x,y)dxdy$ и $\iiint\limits_E f\left(x,y,z\right)dxdydz$, соодветно.

Дарбуови суми.

Нека $f : E \to \mathbb{R}$, е ограничена функција на мерливото множеството E, P е произволна поделба на множеството E и нека $m_i = \inf\limits_{x\in P_i} f\left(x\right)$ и $M_i = \sup\limits_{x\in P_i} f\left(x\right)$. Сумите

$$s = s\left(f, P\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot mP_i \text{ и } S = S\left(f, P\right) = \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot mP_i$$

ги викаме *долна*, односно *горна Дарбуова сума за функцијата* f *на множеството* E *при разбивањето* P.

Броевите $\underline{I} = \underline{I}\left(f\right)$ и $\overline{I} = \overline{I}\left(f\right)$ дефинирани со: $\underline{I}\left(f\right) = \sup\limits_P s\left(f, P\right) \le \inf\limits_P S\left(f, P\right) = \overline{I}\left(f\right)$ се викаат *долен и горен Дарбуов интеграл* на функцијата f.

Ако $\underline{I} = \overline{I} = I$, тогаш велиме дека функцијата е интеграбилна во Дарбуова смисла.

Повторни (итерирани) интеграли

Теорема 11.1. Нека функцијата f е интеграбилна на правоаголникот $G = \left[a,b\right]\times\left[c,d\right] \subset \mathbb{R}^2$ и нека за секој фиксен $x \in \left[a,b\right]$ f е интеграбилна по y на сегментот $\left[c,d\right]$. Тогаш, функцијата $g : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$:

$$g\left(x\right) = \int\limits_c^d f\left(x,y\right)dy \tag{11.1}$$

е интеграбилна на сегментот $\left[a,b\right]$ и важи

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy . \qquad (11.\ 2)$$

Интегралот од десната страна на (11.2) се вика *итериран* или *повторен интеграл.*

Последица 11.1. Нека функцијата f е интеграбилна на правоаголникот G и нека за секој $\xi \in [a,b]$ и $\eta \in [c,d]$ функциите $f(\xi, y)$ и $f(x,\eta)$ се интеграбилни на $[c,d]$ и $[a,b]$ соодветно. Тогаш,

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Нека сега, $y = \gamma_1(x)$ и $y = \gamma_2(x)$ се непрекинати функции дефинирани на сегмент $[\alpha, \beta]$ такви што $\gamma_1(x) \leq \gamma_2(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$, и нека

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha, \beta],\ y \in \left(\gamma_1(x), \gamma_2(x)\right) \right\} \qquad (11.3)$$

Теорема 11.2. Нека функцијата f е непрекината на затворачот од D (11.3), тогаш

$$\iint_D f(x,y)dD = \int_\alpha^\beta dx \int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} f(x,y)dy . \qquad (11.\ 4)$$

Напомена. Областа D се вика *правилна во однос на* $x-$*оската*. Аналогно се дефинира област *правилна во однос на* $y-$*оската* Областа D е *правилна* ако е правилна во однос на x или $y-$оската. Велиме дека областа D е *елементарна* ако е конечна унија на правини области: $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$. Претходните теореми важат и за елементарна област: $\iint_D f(x,y)dD = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x,y)dD_i.$

Смена на променливи

Теорема 11.3. Нека се дадени две мерливи множества A и B со просторни променливи $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ и $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ соодветно, нека $\varphi : \overline{A} \to \overline{B}$ е пресликување зададено со координатните функции:

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \cdots, t_m),$$

$$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \cdots, t_m),$$

$$\cdots$$

$$x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \cdots, t_m),$$

така што: φ биективно пресликува A на B, функциите φ_i и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_i}$, $i=1,2,\cdots,n$ се непрекинати на $\overline{A}$, јакобијанот $J=\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{D(t_1,t_2,\cdots,t_m)}\neq 0$ на множеството A, а функција f е интеграбилна на множеството B, тогаш:

$$\int_B f(x)\,dx=\int_A f\left(\varphi_1(t_1,t_2,\cdots,t_n),\cdots,\varphi_n(t_1,t_2,\cdots,t_n)\right)|J|\,dt.$$

ЗАДАЧИ

Задача 11.1 Пресметај го интегралот според дефиниција:

$$\iint_{\Omega} xydxdy$$

каде што $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ е единечниот квадрат.

Решение: Да забележиме дека подинтегралната функција $f(x, y) = xy$ е непрекината на Ω, па според тоа и интеграбилна на ова множество. Ќе дефинираме поделба π_n за произволно $n \in \mathbb{N}$ на единечниот квадрат Ω на следниов начин:

$$A_{k,m} = \left\{(x, y) \mid \frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n},\ \frac{m}{n} \le y \le \frac{m+1}{n}\right\}$$

каде што $0 \le k \le n-1,\ 0 \le m \le n-1$. Значи одиме со поделба:

$$\pi_n = \{A_{k,m} \mid 0 \le k \le n-1,\ 0 \le m \le n-1\}.$$

Правиме избор на точки $(\xi_{k,m}, \eta_{k,m}) \in A_{k,m}$ со $\xi_{k,m} = \frac{k+1}{n},\ \eta_{k,m} = \frac{m+1}{n}$. Ќе ја пресметаме интегралната сума за поделбата π_n:

$$\begin{aligned}\sigma(\pi_n, f) &= \sum_{0\le k,m\le n-1} f(\xi_{k,m}, \eta_{k,m}) J(A_{k,m}) = \sum_{0\le k,m\le n-1} f\left(\frac{k+1}{n}, \frac{m+1}{n}\right)\frac{1}{n^2} = \\ &= \frac{1}{n^4}\sum_{0\le k\le n-1}(k+1)\left(\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)\right) = \frac{1}{n^4}\sum_{0\le k\le n-1}(k+1)\frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4n^2}\end{aligned}$$

при што ползувавме дека мерата на Жордан на $A_{k,m}$ е $\frac{1}{n^2}$.

Оттука за бараниот интеграл добиваме:

$$\iint_{\Omega} xydxdy = \lim_{n\to\infty}\sigma(\pi_n, f) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}.$$

Забелешка. Коментиравме на почетокот дека интегралот постои. Тоа значи дека секоја интегрална сума со произволен избор на точки конвергира кон интегралот, па и нашата.

Задача 11.2. Пресметај ги сумите на Дарбу за интегралот:

$$I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy \,,$$

а потоа и интегралот, каде областа на интегрирање е правоаголникот $D = [1,2] \times [1,3]$.

Решение: Да забележиме дека подинтегралната функција во I $f(x, y) = x^2 + y^2$ е непрекината, па интегралот постои. Дефинираме поделба π_n за произволно $n \in \mathbb{N}$ на правоаголникот $D = [1,2] \times [1,3]$ со:

$$A_{i,j} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + \frac{i}{n} \le x \le 1 + \frac{i+1}{n},\, 1 + \frac{2j}{n} \le y \le 1 + \frac{2(j+1)}{n} \right\}$$

каде што $0 \le i \le n-1,\ 0 \le j \le n-1$. Значи одиме со поделба:

$$\pi_n = \left\{ A_{i,j} \mid 0 \le i \le n-1,\ 0 \le j \le n-1 \right\}$$

Ги пресметуваме $f_{\min} = f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right)$ и $f_{\max} = f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right)$ за точките (x, y) од правоаголникот $A_{i,j}$. За долната и горната сума на Дарбу добиваме:

$$\underline{s}_{\pi_n}(f) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right) = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2} \,,$$

$$\overline{S}_{\pi_n}(f) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right) = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2} \,,$$

откаде со граничен премин го пресметуваме интегралот:

$$I = \lim_{n\to\infty} \underline{s}_{\pi_n}\left(f\right) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\pi_n}\left(f\right) = 13\frac{1}{3}.$$

Задача 11.3. Испитај интеграбилност на функцијата:

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \vee y \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

на правоаголникот $D = \left\{\left(x,y\right) | \, 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\right\}$.

Решение: Одбираме произволна поделба $\sigma = \left\{A_\alpha \,|\, \alpha \in I\right\}$ на D. Ги воведуваме ознаките:

$$m_\alpha = \inf_{(x,y)\in A_\alpha} \left\{f\left(x,y\right)\right\} \text{ односно } M_\alpha = \sup_{(x,y)\in A_\alpha} \left\{f\left(x,y\right)\right\}$$

и ги придружуваме соодветните суми на Дарбу:

$$\underline{s}\left(f,\sigma\right) = \sum_{\alpha\in I} m_\alpha J\left(A_\alpha\right) \text{ односно } \overline{S}\left(f,\sigma\right) = \sum_{\alpha\in I} M_\alpha J\left(A_\alpha\right)$$

Да забележиме дека долната сума на Дарбу е:

$$\underline{s}\left(f,\sigma\right) = \sum_{\alpha\in I} m_\alpha J\left(A_\alpha\right) = 0,$$

додека горната сума на Дарбу е:

$$\overline{S}\left(f,\sigma\right) = \sum_{\alpha\in I} M_\alpha J\left(A_\alpha\right) = J\left(D\right) = ab$$

што следува директно од дефиницијата на f.

Оттука добиваме дека за произволна поделба σ на D важи:

$$\left|\underline{S}\left(f,\sigma\right) - \underline{s}\left(f,\sigma\right)\right| = ab$$

Според теоремата за карактеризација на интеграбилност на функции од воведот заклучуваме дека функцијата не е интеграбилна на D. ☻

Задача 11.4. Испитај го знакот на интегралот:

$$I = \iint_D \arcsin(x+y)dxdy,$$

каде што $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1-x\}$.

Решение: Ќе го запишеме интегралот во следниов облик:

$$I = \iint_D \arcsin(x+y)dxdy = \iint_{D_1} \arcsin(x+y)dxdy + \iint_{D_2} \arcsin(x+y)dxdy = I_1 + I_2,$$

каде што $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0\}$ и $D_2 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$.

Да забележиме дека интегралот $I_2 > 0$. Не интересира знакот на I_1.

Областа на интегрирање на интегралот I_1 е единечниот квадрат $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0\}$. Во точките од квадратот D_1 што се симетрични во однос на дијагоналата $y = -x$, подинтегралната функцијата $f(x,y) = \arcsin(x+y)$ прима иста вредност по апсолутна вредност, но со спротивен знак. Следува дека во произволно квадратно разбивање на множеството D_1 на квадрати A_i, во секој пар на симетрични квадрати во однос на дијагоналата $y = -x$ може да се најдат точки (ξ_i, η_i), (ξ_i', η_i') такви што:

$$f(\xi_i, \eta_i) + f(\xi_i', \eta_i') = 0 \qquad (11.11)$$

Сега одбираме произволно мало $\varepsilon > 0$. Дефинираме квадратна мрежа $\pi_n = \{A_i \mid i = \overline{1,n}\}$ што го разбива D_1 со особина унијата на квадрати $\bigcup_k A_{i_k}$ што ја содржат дијагоналата на D_1 има Жорданова мера помала од ε. Правиме произволен избор на точки $(\tilde{\xi}_{i_k}, \tilde{\eta}_{i_k})$ од квадратите A_{i_k}, додека од останатите го правиме изборот така што важи релацијата (11.11). Интегралната сума го добива обликот:

$$\sigma\left(\pi_n, f\right) = \sum_k f\left(\tilde{\xi}_{i_k}, \tilde{\eta}_{i_k}\right) J\left(A_{i_k}\right)$$

Нека означиме $M = \sup_{(x,y)\in D_1} \left| f\left(x, y\right)\right|$. Тогаш ја добиваме оценката:

$$\left|\sigma\left(\pi_n, f\right)\right| \leq M\varepsilon .$$

Сега ако побараме лимес во горното неравенство добиваме:

$$0 \leq \left|I_1\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sigma\left(\pi_n, f\right)\right| \leq M\varepsilon$$

Од произволноста на ε заклучуваме дека $I_1 = 0$, па $\operatorname{sgn}\left(I\right) = 1$. ☻

Задача 11.5. Запиши го двојниот интеграл $I = \iint_D f\left(x, y\right) dxdy$ како повторен ако:

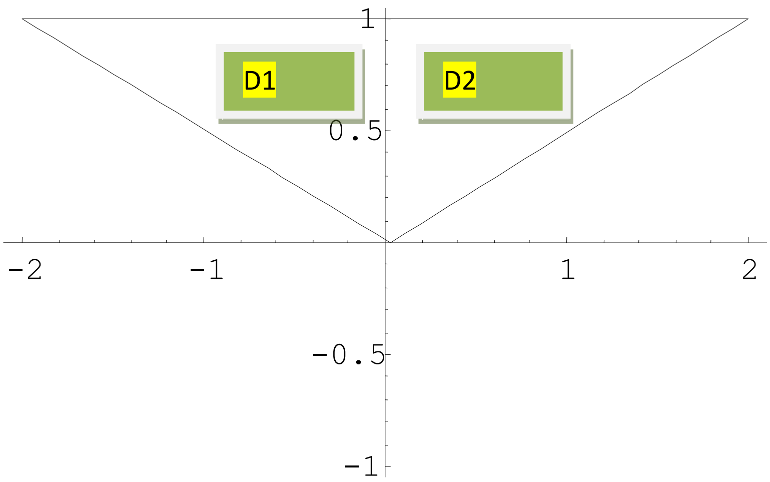
(i) Областа на интегрирање D е компактно и конвексно множество со раб ∂D: триаголник со темиња во точките $O(0,0); A(2,1)$ и $B(-2,1)$.

(ii) Областа на интегрирање е кругот $D = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq y\right\}$;

(iii) Областа на интегрирање D е компактно и конвексно множество со раб ∂D определен со равенката: $\left(x - y\right)^2 + x^2 = 1$.

Решение: (i) Ќе го запишеме интегралот I како повторен на два начина во зависност од редоследот на интегрирање. Прво одиме со поделба на D со $D = D_1 \cup D_2$, каде што:

$$D_1 = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0,\ -\frac{x}{2} \leq y \leq 1\right\} \text{ и } D_2 = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2,\ \frac{x}{2} \leq y \leq 1\right\}$$



Слика 11.1

Сега од адитивноста на двојниот интеграл добиваме:

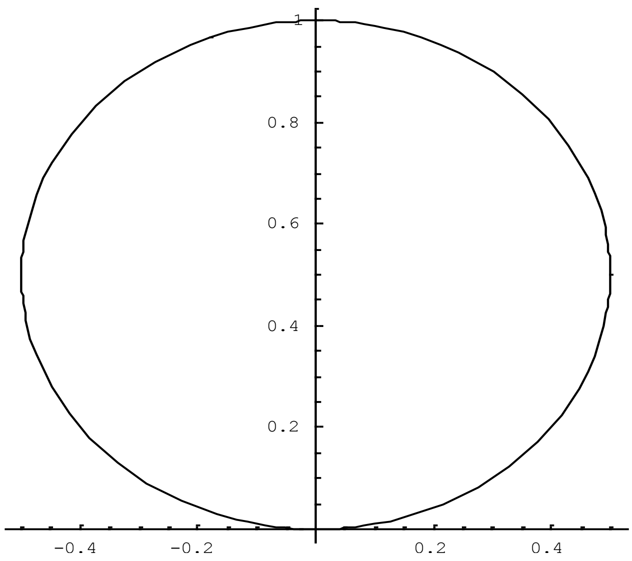
$$I=\iint_{D} f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy=$$
$$=\int_{-2}^{0}dx\int_{-\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)dy+\int_{0}^{2}dx\int_{\frac{x}{2}}^{1} f(x,y)dy.$$

Ако го смениме редоследот на интегрирање добиваме:

$$I=\int_{0}^{1}dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$$

(ii) Го запишуваме множеството во облик:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\le y\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\right\}=$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1,-\sqrt{y-y^2}\le x\le\sqrt{y-y^2}\right\}$$



Слика 11.2

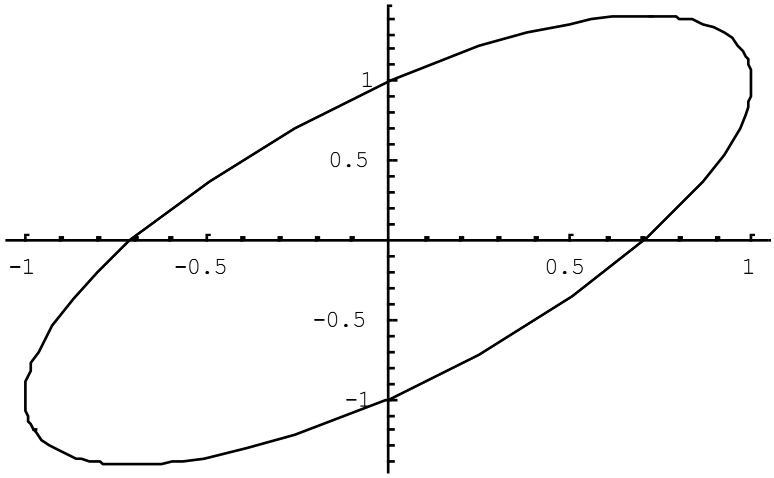
Сега може да ја ползуваме теоремата за премин од двоен на повторен интеграл, па добиваме:

$$I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}f\left(x,y\right)dy=\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}}f\left(x,y\right)dx$$

(iii) Слично на претходниот пример одиме со записот:

$$D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\mid -1\le x\le 1,\ x-\sqrt{1-x^2}\le y\le x+\sqrt{1-x^2}\right\}=$$

$$=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\mid -\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2},\ \frac{y-\sqrt{2-y^2}}{2}\le x\le\frac{y+\sqrt{2-y^2}}{2}\right\}$$



Слика 11.3

откаде за интегралот добиваме:

$$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{x-\sqrt{1^2-x^2}}^{x+\sqrt{1^2-x^2}}f\left(x,y\right)dy=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int_{\frac{y-\sqrt{2-y^2}}{2}}^{\frac{y+\sqrt{2-y^2}}{2}}f\left(x,y\right)dx\,.$$ ☻

Задача 11.6. Смени го редоследот на интегрирање во повторениот интеграл:

$$I=\int_{0}^{2\pi}dx\int_{0}^{\sin x}f\left(x,y\right)dy$$

Решение: Ползувајќи ја адитивноста на Римановиот интеграл имаме:

$$\begin{aligned}I=\int_{0}^{2\pi}dx\int_{0}^{\sin x}f\left(x,y\right)dy&=\int_{0}^{\pi}dx\int_{0}^{\sin x}f\left(x,y\right)dy+\int_{\pi}^{2\pi}dx\int_{0}^{\sin x}f\left(x,y\right)dy=\\&=\int_{0}^{\pi}dx\int_{0}^{\sin x}f\left(x,y\right)dy-\int_{\pi}^{2\pi}dx\int_{\sin x}^{0}f\left(x,y\right)dy.\end{aligned}$$

Во секој од интегралите на десната страна од горната релација ќе го смениме редоследот на интегрирање:

За првиот интеграл имаме дека при менување на променливата y од 0 до 1, променливата x се менува од $\arcsin y$ до $\pi - \arcsin y$. Слично за вториот интеграл, при менување на променливата y од -1 до 0, променливата x се менува од $\pi - \arcsin y$ до $2\pi + \arcsin y$.

Сега за промената на редоследот за интегрирање во интегралот I добиваме:

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,dx \text{ . ☻}$$

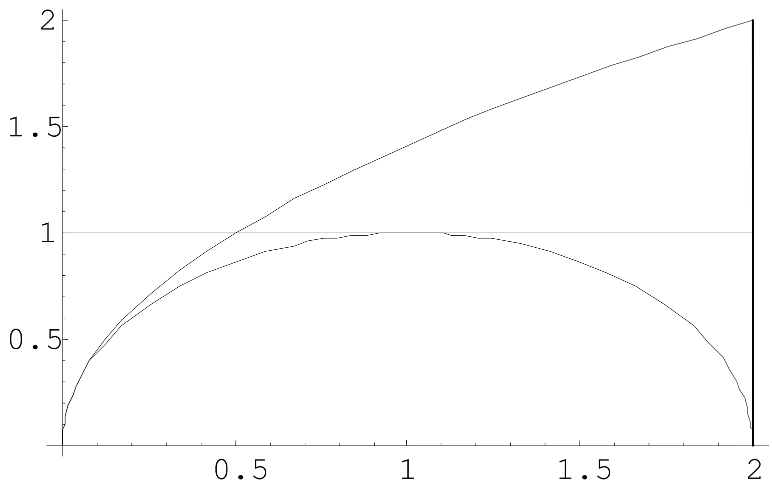
Задача 11.7. Смени го редоследот на интегрирање во повторениот интеграл:

$$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy$$

Решение: Областа на интегрирање:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ \sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{2x} \right\}$$

ќе ја поделиме на три подобласти со правата $y = 1$ како на сликата:



Слика 11.4

При смената на редоследот на интегрирање ја добиваме следнава сума од повторени интеграли:

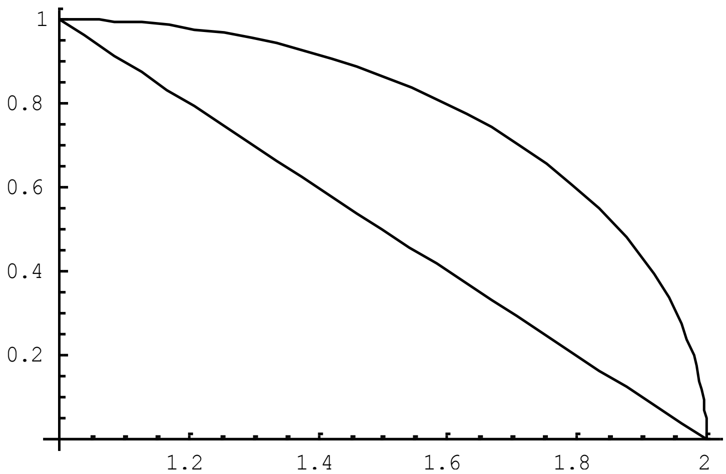
$$\int_0^1\left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx\right)dy+\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\,dx\,. \text{ ☻}$$

Задача 11.8. Смени го редоследот на интегрирање во повторениот интеграл:

$$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,.$$

Решение: Областа на интегрирање:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1\le x\le 2,\ 2-x\le y\le\sqrt{2x-x^2}\right\}$$



Слика 11.5

ќе ја запишеме во облик:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le y\le 1,\ 2-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}\right\}$$

откаде за промената на редоследот на интегрирање добиваме:

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$$ ☻

Задача 11.9. Пресметај ги следниве интеграли:

(i) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2},\quad D=\{(x,y)\,|\,3\le x\le 4,\ \ 1\le y\le 2\}$.

(ii) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, каде областа на интегрирање D е ограничена со триаголник $\triangle ABC$ со темиња во $A(0,0),\ B(0,1),\ C(1,0)$.

(iii) $\iint\limits_D xydxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2,\ \ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

Решение: (i) Да забележиме дека подинтегралната функција $f(x,y)$ е непрекината на правоаголникот D, па може да одиме со теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл. Добиваме:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}&=\int_3^4 dx\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}=\int_3^4 dx\left(-\frac{1}{x+y}\right)\Big|_1^2=\\&=\int_3^4\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln(x+1)-\ln(x+2)\right)\Big|_3^4=\\&=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Big|_3^4=\ln\frac{5}{6}-\ln\frac{4}{5}=\ln\frac{25}{24}\end{aligned}$$

(ii) Подинтегралната функција е $f(x,y)=x^2+y^2$ непрекината на D, па може да одиме со теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл. Добиваме:

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)dy$$

Пресметката ја оставаме на читателот како лесна вежба.

(iii) Областа на интегрирање ќе ја запишеме во следниов облик:

$$D = \left\{ (x,y) \,|\, 0 \le x \le a, \;\; 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$$

откаде за интегралот добиваме: $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xydy$

Деталите околу пресметката на повторениот интеграл ги оставаме како лесна вежба за читателот. ☻

Задача 11.10. Пресметај ги интегралите:

$$\text{(i)} \; \iint\limits_D \min\{x,y\} dxdy \qquad \text{(ii)} \; \iint\limits_D \max\{x,y\} dxdy,$$

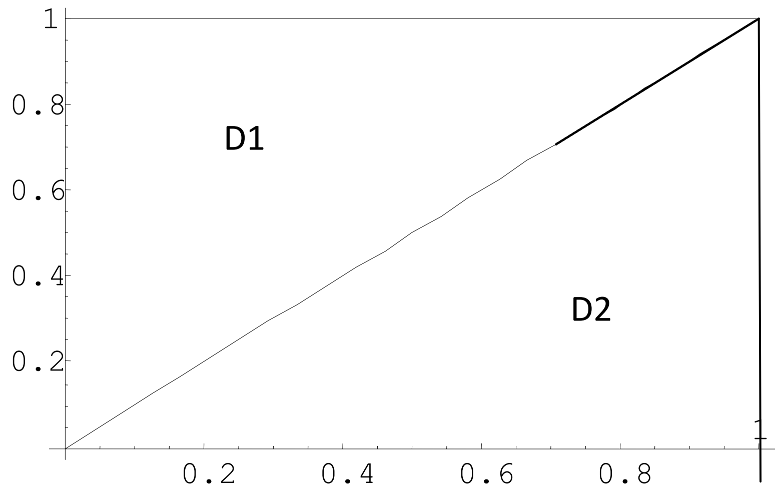
каде што областа на интегрирање е единечниот квадрат:

$$D = \left\{ (x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 1 \right\}$$

Решение: (i) Подинтегралната функција ја запишуваме во облик:

$$f(x,y) = \min\{x,y\} = \begin{cases} x, & x < y \\ y, & x \ge y \end{cases}$$

Областа на интегрирање ќе ја поделиме како на сликата:



Слика 11.6

каде $D_1 = \{(x, y) \in D \mid x < y\}$, $D_2 = \{(x, y) \in D \mid x \geq y\}$ и важи дека $D = D_1 \cup D_2$. Сега за интегралот добиваме:

$$\iint_D \min\{x, y\} dxdy = \iint_{D_1} \min\{x, y\} dxdy + \iint_{D_2} \min\{x, y\} dxdy$$

Ползувајќи ја дефиницијата на f и теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл имаме:

$$\iint_D \min\{x, y\} dxdy = \iint_{D_1} xdxdy + \iint_{D_2} ydxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 xdy + \int_0^1 dx \int_0^x ydy = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx + \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) Слично како под (i) подинтегралната функција ја запишуваме во облик:

$$f(x, y) = \max\{x, y\} = \begin{cases} y, & x < y \\ x, & x \geq y \end{cases}$$

Поделбата на D останува иста како во претходната дискусија. Значи имаме $D_1 = \{(x, y) \in D \mid x < y\}$ односно $D_2 = \{(x, y) \in D \mid x \geq y\}$ и важи:

$$D = D_1 \cup D_2, \; D_1 \cap D_2 = \varnothing.$$

Сега за интегралот добиваме:

$$\iint_D \max\{x, y\} dxdy = \iint_{D_1} \max\{x, y\} dxdy + \iint_{D_2} \max\{x, y\} dxdy =$$

$$= \iint_{D_1} ydxdy + \iint_{D_2} xdxdy = \int_0^1 dx \int_x^1 ydy + \int_0^1 dx \int_0^x xdy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1 - x^2}{2}\right) dx + \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{1 + x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

каде што повторно ја ползувавме теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл.

☻

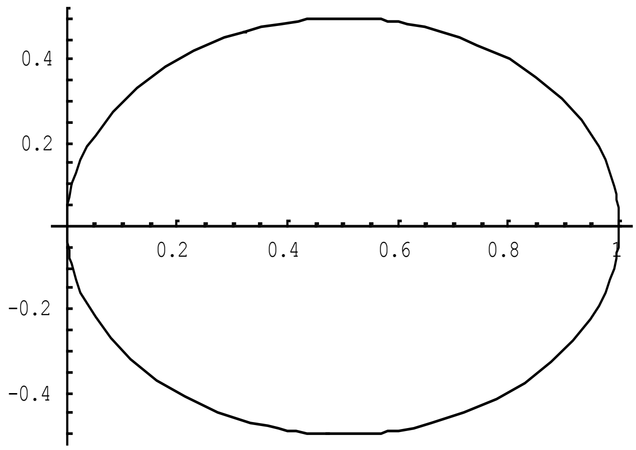
Задача 11.11. Во двојниот интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ воведи поларна смена и определи ги новите граници за интегрирање, каде што $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le x\}$. ☻

Решение: Го пресметуваме Јакобијанот на поларна смена:

$$x=r\cos\varphi,\;\; y=r\sin\varphi,\; J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}=r$$

Да забележиме дека новите граници за интегрирање се:

$$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \;\text{ и }\; 0\le r\le\cos\varphi$$



Слика 11.7

откаде за смената во интегралот добиваме:

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$ ☻

Задача 11.12. Воведи поларна смена во повторениот интеграл:

$$I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f\left(x,y\right)dy$$

сметајќи ја подинтегралната функција за непрекината во областа на интегрирање.

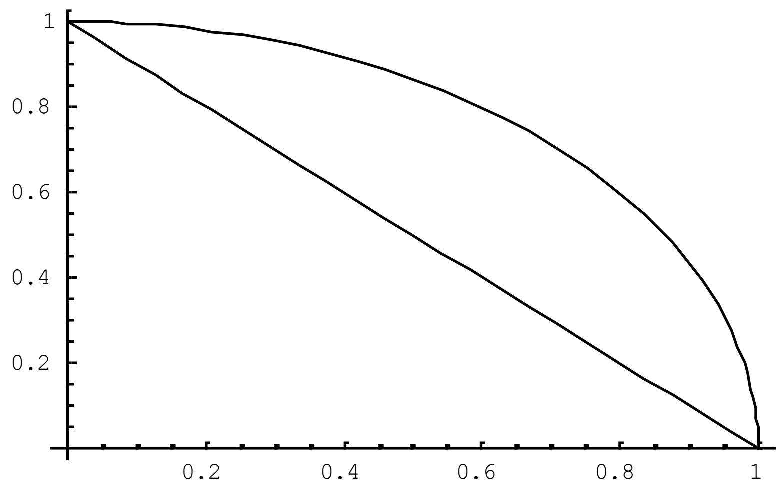
Решение: Подинтегралната функција f е непрекината на областа определена со:

$$D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\},$$

па повторениот интеграл I е еднаков со двојниот интеграл: $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$.

Воведуваме поларна смена $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, па го претставуваме множеството D во облик:

$$D=\left\{\left(r,\varphi\right)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}\le r\le 1\right\}$$



Слика 11.8

или во облик: $D=\left\{\left(r,\varphi\right)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{\sqrt{2}}\le r\le 1,\ \arcsin\frac{1}{r\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{r\sqrt{2}}\right\}$.

После замената на секое од наведените претставувања на областа D, соодветно, интегралот I го добива обликот:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) rdr = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} rdr \int_{\arcsin\frac{1}{r\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{r\sqrt{2}}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) d\varphi\,. \text{ ☻}$$

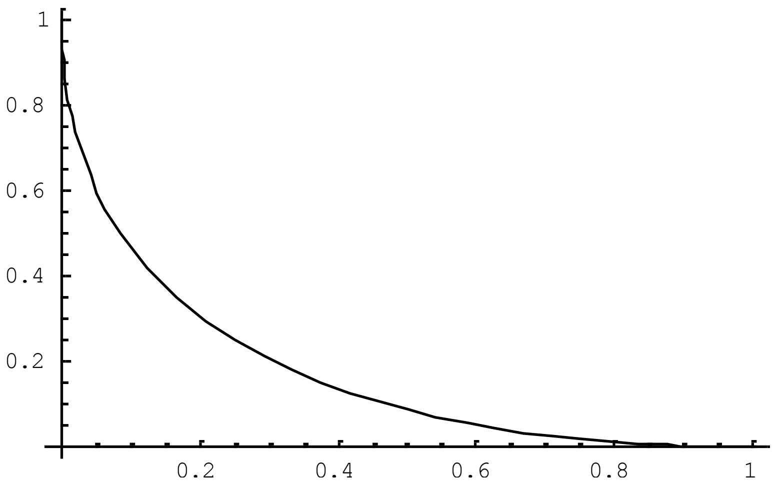
Задача 11.13. Во интегралот $I=\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)dxdy$ воведи смена на променливите со релациите $x=u\cos^4 v,\ y=u\sin^4 v$, а потоа направи премин од двоен кон повторен интеграл, сметајќи ја подинтегралната функција f за непрекината, каде што работ на областа за интегрирање ∂D е зададен со равенките ∂D: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\ x=0,\ y=0,\ a>0$.

Решение: Го пресметуваме Јакобијанот на пресликувањето:

$$J=\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\begin{vmatrix}\cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v\\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v\end{vmatrix}=4u\sin^3 v\cos^3 v$$

откаде добиваме: $I=4\iint\limits_{D'} f\left(u\cos^4 v, u\sin^4 v\right)\left|u\right|\left|\sin^3 v\right|\left|\cos^3 v\right|dudv$ каде што D' е новата област за интегрирање. За да направиме премин од двоен кон повторен интеграл останува да ги најдеме границите на новите променливи u и v.

Слично, произволна точка од $x-$оската со координати $\left(x,0\right),\ 0<x\le a$ се пресликува на правата $v=0$. Уште да забележиме дека точката од координатниот почеток $\left(0,0\right)$ се пресликува на правата $u=0$.



Слика 11.9 Пример на ∂D за $a=1$.

Оттука оправдано е равенството:

$$I = 4\int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(u\cos^4 v, u\sin^4 v\right)\sin^3 v\cos^3 v dv \,. \text{ ☻}$$

Задача 11.14. Пресметај го интегралот: $I = \iint\limits_D (x+y)\,dxdy$,

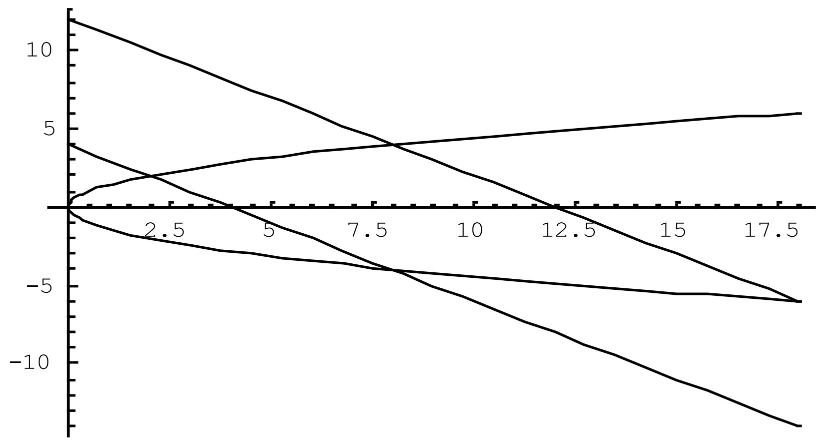
каде што областа на интегрирање е компактно множество D со раб ∂D определен со равенките:

$$\partial D: y^2 = 2x, \ \ x+y=4, \ \ x+y=12$$

Решение: Ги решаваме системите од равенки:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x+y=4 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y^2 = 2x \\ x+y=12 \end{cases}$$

Добиваме $x_1 = 2, \ x_2 = 8$ односно $x_1 = 8, \ x_2 = 18$ соодветно. Оттука ја добиваме поделбата на областа за интегрирање $D = D_1 \cup D_2$:



Слика 11.10

Областа D_1 е определена со: $D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \le x \le 8, 4 - x \le y \le \sqrt{2x} \right\}$.

Слично, областа D_2 е определена со: $D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 8 \le x \le 18, -\sqrt{2x} \le y \le 12 - x \right\}$

Ползувајќи ја адитивноста на двојниот интеграл добиваме:

$$I = \iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (x+y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x+y)\,dxdy$$

Сега од теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл имаме:

$$I = \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)dy + \int_8^{12} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y)dy .$$

Деталите околу пресметката ги оставаме на читателот☺. Конечниот резултат е $I = 543\frac{11}{15}$. ☻

Задача 11.15. Пресметај го интегралот $I = \iint\limits_D \left|\cos(x+y)\right| dxdy$, каде што областа на интегри-рање D е квадратот определен со: $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi \right\}$.

Решение: Да забележиме дека во точките од квадратот D што се симетрични во однос на дијагоналата $x+y=\pi$ подинтегралната функција прима иста вредност. Следува дека:

$$I=2\iint_{D'}\left|\cos\left(x+y\right)\right|dxdy$$

каде што $D'=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi-x\right\}$. Со помош на дел од правата $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ го разбиваме множеството D' на две подмножества $D_1\cup D_2$ така што подинтегралната функција на едното од нив е позитивна, а на другото негативна. Ги добивме следниве множества:

$$D_1=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}-x\right\} \text{ и } D_2=D'\setminus D_1.$$

Воведуваме поларна смена, па множествата го добиваат обликот:

$$D_1=\left\{\left(\varphi,r\right) \mid 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le\frac{\pi}{2\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)}\right\}$$

односно:

$$D_2=\left\{\left(\varphi,r\right) \mid 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)}<r\le\frac{\pi}{\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)}\right\}$$

додека интегралот го добива обликот:

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2(\sin\varphi+\cos\varphi)}} r\cos\left(r\sin\varphi+r\cos\varphi\right)dr-\int_{\frac{\pi}{2(\sin\varphi+\cos\varphi)}}^{\frac{\pi}{(\sin\varphi+\cos\varphi)}} r\cos\left(r\sin\varphi+r\cos\varphi\right)dr\right)d\varphi=$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)^2}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}=\pi ctg\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=2\pi$$

каде што повторно ја ползувавме теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл.

Задача 11.16. Пресметај го интегралот $I=\iint\limits_D \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right| dxdy$, каде што областа на интегрирање е единечниот круг $D=\left\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\right\}$.

Решение: Да забележиме дека подинтегралната функција:

$$f(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2$$

е позитивна на множеството $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right\}$ и негативна на множеството $D_2=D\setminus D_1$. Следува дека:

$$I=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy-\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=-\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy+2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy .$$

Оттука добиваме дека:

$$I=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)dxdy+2\iint\limits_{D_1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right)dxdy=I_1+I_2$$

Во интегралите I_1 и I_2 ги воведуваме смените:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \text{ односно } x-\frac{1}{2\sqrt{2}}=r\cos\varphi,\quad y-\frac{1}{2\sqrt{2}}=r\sin\varphi$$

соодветно, па добиваме:

$$I=-\iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 1}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\, rdrd\varphi+2\iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le \frac{1}{2}}} f\left(r\cos\varphi+\frac{1}{2\sqrt{2}},r\sin\varphi+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) rdrd\varphi$$

За завршница, одиме со теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл, па добиваме:

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(r^2-\frac{r}{\sqrt{2}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\right)rdr+2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-r^2\right)rdr$$

откаде следува дека $I=\frac{9}{16}\pi$. ☻

Задача 11.17. Пресметај го интегралот: $I=\iint_D\sqrt{|y-x^2|}dxdy$, каде што областа на интегри-рање е $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1, 0\le y\le 2\}$.

Решение: Областа на интегрирање ќе ја поделиме на две подобласти со множествата:

$$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1, x^2\le y\le 2\} \text{ и } D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1, 0\le y< x^2\},$$

при што важи $D=D_1\cup D_2$. Сега од адитивноста на двојниот интеграл добиваме:

$$I=\iint_{D_1}\sqrt{y-x^2}dxdy+\iint_{D_2}\sqrt{x^2-y}dxdy.$$

Ползувајќи ја теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл добиваме:

$$I=\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}dy+\int_{-1}^1dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dy$$

откаде по интегрирањето по y имаме:

$$I=\frac{2}{3}\int_{-1}^1\left(x^2|x|+\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_{-1}^1\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx$$

За последниот интеграл воведуваме смена $t=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$ и добиваме:

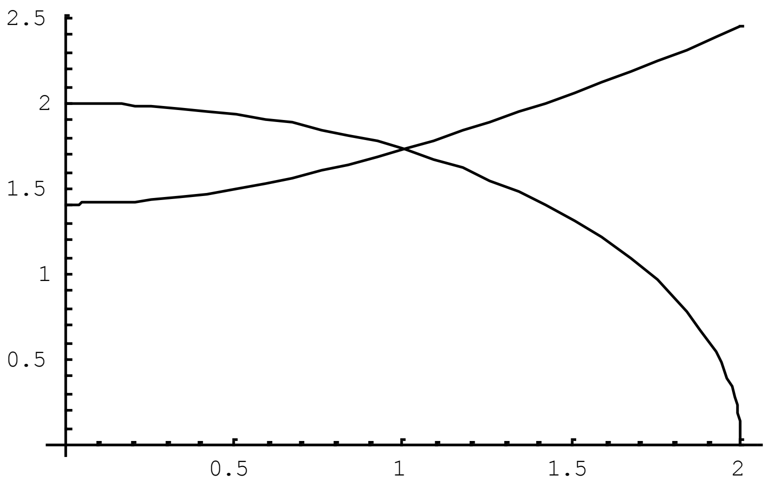
$$I = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{\cos 4t}{2} \right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}.$$ ☻

Задача 11.18. Пресметај го интегралот: $I = \iint\limits_D \operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right) dxdy$, каде што областа на интегрирање е кругот $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4 \right\}$.

Решение: Од причини на симетрија да забележиме дека важи следново равенство:

$$I = 4\iint\limits_{D_1} \operatorname{sgn}\left(x^2 - y^2 + 2\right) dxdy,$$

каде што $D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0 \right\}$.



Слика 11.11

Со помош на кривата $y = \sqrt{x^2 + 2}$ ќе го поделиме множеството D_1 на две подобласти:

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y < \sqrt{x^2 + 2} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le 2, 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2} \right\}$$

и

$$D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \sqrt{x^2 + 2} \le y \le \sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

Сега од адитивноста на двојниот интеграл имаме:

$$I = 4\left(\iint\limits_{D_2} 1dxdy + \iint\limits_{D_3}(-1)\,dxdy\right)$$

Преминуваме од двоен кон повторен интеграл:

$$I = 4\left(\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int_0^1 dx\int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right) = 4\left(\int_0^1\left(2\sqrt{x^2+2}-\sqrt{4-x^2}\right)dx + \int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx\right).$$

Ќе го разгледаме посебно интегралот:

$$\int_0^1\sqrt{x^2+2}dx = x\sqrt{x^2+2}\,\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$$

Последниот интеграл го запишуваме во облик:

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^1\frac{x^2+2-2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^1\sqrt{x^2+2}dx - 2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

Ако го замениме во горната релација добиваме:

$$2\int_0^1\sqrt{x^2+2}dx = x\sqrt{x^2+2}\,\Big|_0^1 + 2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \tag{11.12}$$

Да забележиме дека интегралот од десната страна на (11.12) е табличен, па останува да го дискутираме интегралот:

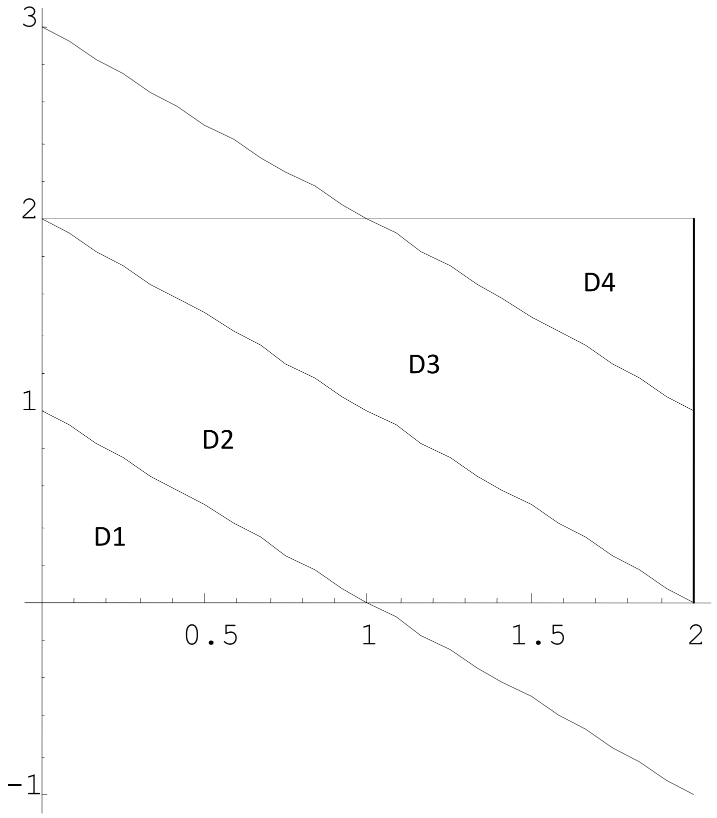
$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1+cos2t}{2}\right)dt$$

при што тригонометријата помогна☺ со смената $x = 2\sin t$.

Деталите околу пресметката ја оставаме на читателот. Конечниот резултат за интегралот под „истрага“☺ е $I = 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}$. ☻

Задача 11.19. Пресметај го интегралот: $I = \iint\limits_D [x+y]dxdy,$ каде што областа на интегрирање е $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$.

Решение: Со помош на правите $x + y = j, (j = 1,2,3)$ ќе го поделиме квадратот D на множества $D_k, (k = 1,2,3,4)$ како на сликата подолу. Да забележиме дека за точка (x,y) од внатрешноста на областа D_k важи дека $[x+y] = k-1$, за $k = 1,2,3,4$ ($[x+y]$е ознака за функцијата цел дел од $x+y$) откаде добиваме:



Слика 11.12

$$I = \iint\limits_D [x+y]dxdy = \sum_{k=1}^{4} \iint\limits_{D_4} [x+y]dxdy = \sum_{k=1}^{4} (k-1)P_k = P_2 + 2P_3 + 3P_4,$$

каде што P_k е мерата на Жордан за множеството $D_k, (k = 1,2,3,4)$. Од тоа што $P_2 = P_3 = \dfrac{3}{2}$ односно $P_1 = P_4 = \dfrac{1}{2}$ за интегралот добиваме:

$$I = 3\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=6\,.$$ ☻

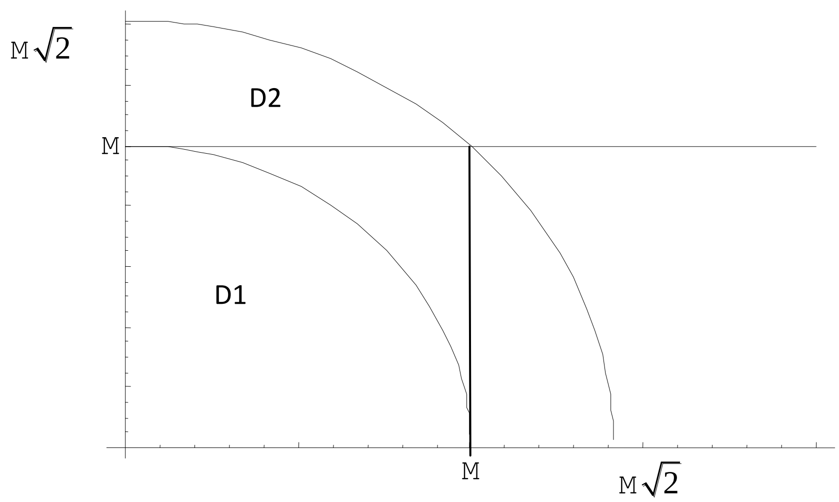
Задача 11.20. Пресметај го интегралот на Пуасон: $I=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Решение: Нека $I_M=\int\limits_0^M e^{-x^2}dx=\int\limits_0^M e^{-y^2}dy$, за произволно $M>0$. Тогаш $I=\lim\limits_{M\to\infty}I_M$ е бараниот интеграл на Пуасон. Ќе го оцениме производот I_M^2:

$$I_M^2=\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\right)=\int\limits_0^M\int\limits_0^M e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\iint\limits_{[0,M]^2}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

со менување на областа на интеграција. Имено, важи:

$$\iint\limits_{D_1}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\le I_M^2\le\iint\limits_{D_2}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$



Слика 11.13.

каде што D_1 е дел од кругот со радиус M во првиот квадрант, додека D_2 е дел од кругот со радиус $M\sqrt{2}$ во првиот квадрант. Воведуваме поларна смена во интегралите од горното неравенство, па добиваме:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^M e^{-r^2} r dr \le I_M^2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{M\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr$$

односно:

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-M^2}\right) \le I_M^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2M^2}\right).$$

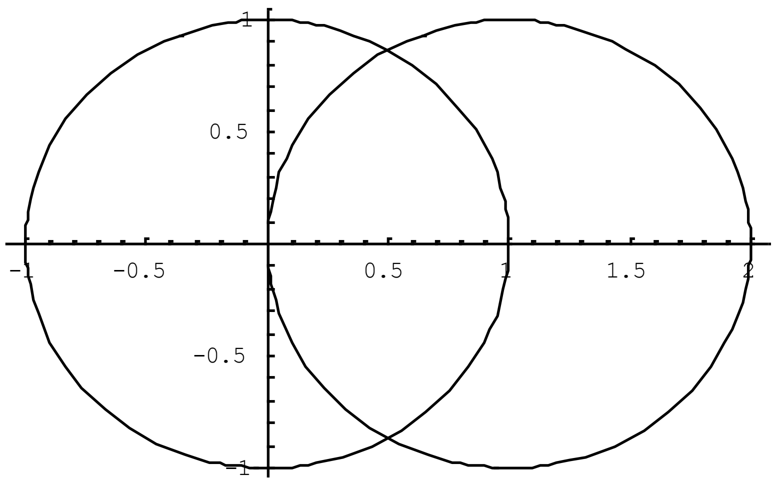
Ако побараме лимес во горното неравенство кога $M \to \infty$ имаме:

$$\lim_{M\to\infty} I_M^2 = I^2 = \frac{\pi}{4}$$

откаде го добиваме интегралот на Пуасон $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Задача 11.21. Пресметај го интегралот $I = \iint\limits_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 dxdy$ каде што областа на интегрирање е множеството $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 2x\right\}$.

Решение: Областа на интегрирање е дел од кругот $x^2 + y^2 \le 2x$ што е надвор од кругот $x^2 + y^2 < 1$.



Слика 11.14.

Равенките на граничните кружници ќе ги запишеме во поларна форма:

$$x^2+y^2=1 \Leftrightarrow r=1 \text{ односно } x^2+y^2=2x \Leftrightarrow r=2\cos\varphi$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I=\iint_{D_1} rtg^2\varphi dr d\varphi=\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi \int_{1}^{2\cos\varphi} rtg^2\varphi dr.$$

За да ги определиме границите на аголот φ во новата област D_1 што се добива од воведената поларна смена го решаваме системот од квадратни равенки:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2x. \end{cases}$$

Со замена на првата равенка во втората добиваме: $2x=1$, па оттука имаме дека решенијата се: $x=\frac{1}{2}, y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следува дека: $tg\varphi_0=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}=tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi_0=\frac{\pi}{3}$.

Се враќаме на интегралот:

$$I=\iint_{D_1} rtg^2\varphi dr d\varphi=\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} d\varphi \int_{1}^{2\cos\varphi} rtg^2\varphi dr=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{1}^{2\cos\varphi} rtg^2\varphi dr .$$

Всушност не, се предомислив, деталите околу пресметката ги оставаме за вежба☺. ☻

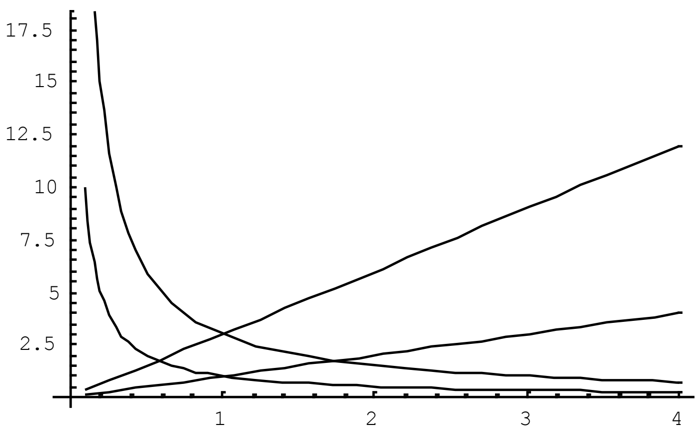
Задача 11.22. Пресметај го интегралот $\iint_D y^2 dxdy$, каде што областа на интегрирање е множеството $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0, y\ge 0, 1\le xy\le 3, x\le y\le 3x\right\}$.

Решение: Првата важна обзервација е да го запишеме условот: $x \le y \le 3x$ во еквивалентна форма $1 \le \frac{y}{x} \le 3$. Сега, смената $u = xy$ и $v = \frac{y}{x}$ е природно сугестивна. Границите на новите променливи се: $1 \le u \le 3,\ 1 \le v \le 3$.

За да го пресметаме Јакобијанот ќе ги решиме равенките од смената по променливите x и y. Ќе ги помножиме првата и втората равенка, па добиваме дека: $uv = y^2$ откаде следува $y = \sqrt{uv}$.

Сега, за другата променлива добиваме $x = \frac{u}{y} = \sqrt{\frac{u}{v}}$. Пресметката на Јакобијанот следува:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{v^3}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}.$$



Слика 11.15.

Оттука добиваме:

$$\iint_D y^2 dxdy = \iint_{D_1} uv\frac{1}{2v}dudv = \frac{1}{2}\iint_{D_1} ududv = \frac{1}{2}\int_1^3 du\int_1^3 udv = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

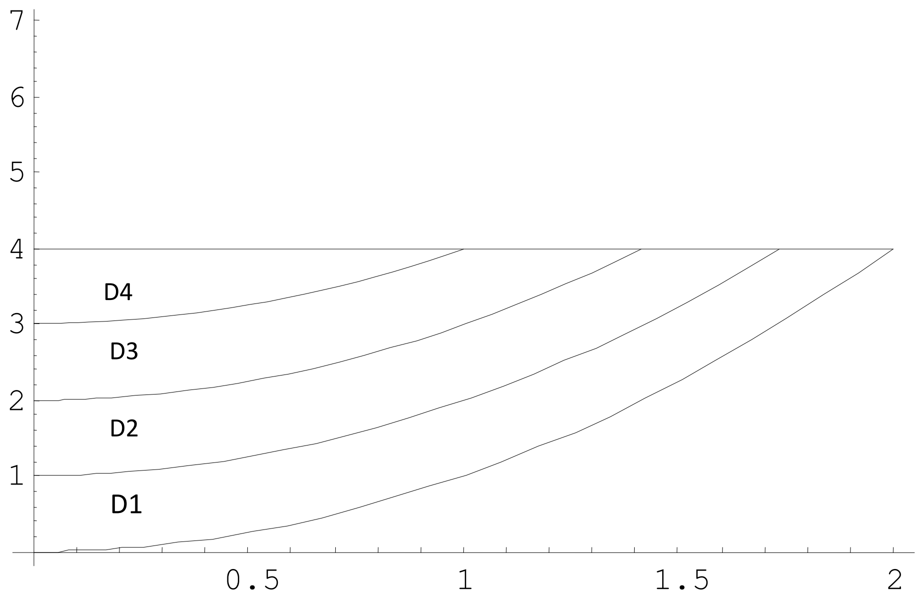
каде што D_1 е правоаголникот по новите променливи $1 \le u \le 3,\ 1 \le v \le 3$. ☻

Задача 11.23. Пресметај го интегралот $I = \iint\limits_{D} \sqrt{\left[y - x^2 \right]} dxdy$, каде што областа на интегри-рање е $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4 \right\}$.

Решение: Од причини на симетрија заклучуваме дека:

$$I = 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{\left[y - x^2 \right]} dxdy$$

каде што $D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4 \right\}$. Со помош на деловите од кривите $\gamma_j = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y = x^2 + j \right\}$, што се во внатрешноста на компактот D_1, за $j = 1, 2, 3$ го разбиваме множеството на интегрирање D_1 на множества D_k, за $k = \overline{1, 4}$ како на сликата.



Слика 11.16.

Ако (x, y) е внатрешна точка за множеството D_k тогаш важи: $\sqrt{\left[y - x^2 \right]} = \sqrt{k-1}$, за $k = \overline{1, 4}$.

Од адитивноста на двојниот интеграл добиваме: $I = 2\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k-1}\iint_{D_k} dxdy = 2\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k-1}\cdot P_k$

каде што P_k е Жорданова мера на множеството D_k. Множествата D_k ќе ги прикажеме во облик:

$$D_k = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le\sqrt{4-k},\, x^2+k-1\le y\le x^2+k\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{4-k}\le x\le\sqrt{4-(k-1)},\, x^2+k-1\le y\le 4\right\}$$

откаде за Жордановата мера на множествата D_k имаме:

$$P_k = \int_0^{\sqrt{4-k}} dx \int_{x^2+k-1}^{x^2+k} dy + \int_{\sqrt{4-k}}^{\sqrt{5-k}} dx \int_{x^2+k-1}^{4} dy =$$

$$= \sqrt{4-k} + (5-k)\left(\sqrt{5-k}-\sqrt{4-k}\right) - \frac{1}{3}\left((5-k)^{\frac{3}{2}} - (4-k)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Конечно, за интегралот добиваме:

$$I = 2\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k-1}\cdot P_k = 2\left(P_2+\sqrt{2}P_3+\sqrt{3}P_4\right) = \frac{4}{3}\left(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right).\ \text{☻}$$

Задача 11.24. Пресметај го интегралот $I = \iiint_K \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, каде што работ на областа за интегрирање е: $\partial K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

Решение: Воведуваме смена со обопштени сферни координати: $x = ar\sin\theta\cos\varphi,$, $y = br\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = cr\cos\theta$ за $0\le\theta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi$. Да забележиме дека Јакобијанот на смената е: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta$ што се добива со лесна пресметка на соодветната детерминанта од трет ред по парцијалните изводи од новите променливи.

Одиме со теоремата за премин од троен кон повторен интеграл, па добиваме:

$$I = abc\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{2}{5}\pi abc\cos\theta\Big|_{\pi}^{0} = \frac{4}{5}\pi abc\,.\ ☻$$

Задача 11.25. Пресметај го интегралот $\iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, каде што работ на областа за интегрирање е определен со равенките: $\partial K:\ \ x^2+y^2=z^2,\ \ z=1$.

Решение: Да забележиме дека работ на областа за интегрирање е дел од конусна површина и дел од рамнината $z=1$. Ќе ја проектираме областа за интегрирање на xy-рамнината: $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\right\}$.

Воведуваме цилиндрична смена во интегралот: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$ и го пресметуваме Јакобијанот:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Да забележиме дека границите на новите променливи се: $0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le 1, r\le z\le 1$ откаде за интегралот добиваме:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_r^1 dz = 2\pi\int_0^1 r^2(1-r)\,dr = \frac{\pi}{6}\,.\ ☻$$

Задача 11.26. Пресметај го интегралот $I=\iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, каде што областа на интегрирање е $K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le z\right\}$.

Решение: Воведуваме смена со сферни координати: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ и го пресметуваме Јакобијанот:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta .$$

Да забележиме дека границите на новите променливи се : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi,$ $0 \le r \le \cos\theta$, откаде за интегралот добиваме:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos\theta} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\sin\theta d\theta = \frac{\pi}{10}\cos^5\theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{10}. \quad ☻$$

Задача 11.27. Пресметај го интегралот $I = \iiint\limits_K x^2 dxdydz$, каде што работ на областа за интегрирање е определен со:

$$\partial K : z = ay^2,\ z = by^2,\ y > 0\ \left(0 < a < b\right),\ z = \alpha x,\ z = \beta x,\ \left(0 < \alpha < \beta\right),\ z = h\ \left(h > 0\right).$$

Решение: Ќе ја претставиме областа за интегрирање во облик:

$$K = \left\{ \left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h,\ \sqrt{\frac{z}{b}} \le y \le \sqrt{\frac{z}{a}},\ \frac{z}{\beta} \le x \le \frac{z}{\alpha} \right\}$$

откаде ползувајќи ја теоремата за премин од троен кон повторен интеграл добиваме:

$$I = \int_0^h dz \int_{\sqrt{\frac{z}{b}}}^{\sqrt{\frac{z}{a}}} dy \int_{\frac{z}{\beta}}^{\frac{z}{\alpha}} x^2 dx = \frac{1}{3}\left(\alpha^{-3} - \beta^{-3}\right)\left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)\int_0^h z^{\frac{7}{2}} dz$$

откаде за интегралот добиваме: $I=\frac{2}{27}\left(\alpha^{-3}-\beta^{-3}\right)\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)h^{\frac{9}{2}}$. ☻

Задача 11.28. Пресметај го интегралот $\iiint\limits_K xyzdxdydz$, каде што областа на интегрирање K е компактно множество во првиот октант $x>0,\ y>0,\ z>0$ и е ограничено со површините определени со равенките:

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\ z=\frac{x^2+y^2}{n},\ xy=a^2,\ xy=b^2,\ y=\beta x,\ y=\alpha x,$$

каде што $0<a<b,\ \ 0<\alpha<\beta,\ \ 0<m<n$.

Решение: Воведуваме смена со равенките: $xy=u,\ y=vx,\ z=z$ откаде за интегралот добиваме: $I=\iiint\limits_{K'} x(u,v)y(u,v)z\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}\right|dudvdz$, каде што K' е новата област за интегрирање определена со:

$$K'=\left\{(u,v,z)\in\mathbb{R}^3\ |\ a^2\le u\le b^2,\ \alpha\le v\le\beta,\ \frac{u\left(v+v^{-1}\right)}{n}\le z\le\frac{u\left(v+v^{-1}\right)}{m}\right\}.$$

Од равенките $x=u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}},\ y=u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}},\ z=z$ го пресметуваме Јакобијанот:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

па за интегралот имаме:

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2}udu\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{dv}{v}\int\limits_{\frac{u\left(v+v^{-1}\right)}{n}}^{\frac{u\left(v+v^{-1}\right)}{m}}zdz=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\int\limits_{a^2}^{b^2}u^3du\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(v+\frac{1}{v}\right)^2\frac{dv}{v}=$$

$$=\frac{1}{16}\left(m^{-2}-n^{-2}\right)\left(b^8-a^8\right)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(v+\frac{2}{v}+\frac{1}{v^3}\right)dv=$$

$$=\frac{1}{16}\left(m^{-2}-n^{-2}\right)\left(b^8-a^8\right)\left(\frac{1}{2}\left(\beta^2-\alpha^2\right)+2\ln\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\alpha^{-2}-\beta^{-2}\right)\right).\ ☻$$

Задача 11.29. Нека $f:K\to\mathbb{R}$ е непрекината реална функција дефинирана на компактно множество $K\subseteq\mathbb{R}^3$ со особина: $\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z)\,dxdydz=0$ за произволна област $\omega\subseteq K$. Докажи дека $f(x,y,z)=0,\ \forall(x,y,z)\in K$.

Доказ: Одбираме произволна точка P од внатрешноста на K. Нека $\varepsilon>0$ е доволно мал број така што важи $T(P,\varepsilon)\subseteq K$, каде што $T(P,\varepsilon)$ е отворена топка со центар во P и радиус ε. Ползувајќи ја теоремата за средна вредност кај повеќекратни интеграли добиваме: $\iiint\limits_{T(P,\varepsilon)} f(x,y,z)\cdot 1dxdydz=f(\bar{P})\iiint\limits_{T(P,\varepsilon)}1dxdydz=f(\bar{P})\frac{4}{3}\varepsilon^3\pi$ каде што $\bar{P}$ е некоја точка од топката $T(P,\varepsilon)$. Сега од условот на задачата имаме дека $f(\bar{P})=0$. Од непрекинатоста на функцијата f со контракција на топката $T(P,\varepsilon)$ со произволно мал радиус $\varepsilon\to 0$, заклучуваме дека $f(P)=0$, за произволна точка P од внатрешноста на K. Повторно од непрекинатоста на функцијата f на компактот K заклучуваме дека $f(x,y,z)=0$ и за точките $(x,y,z)\in\partial K$ од работ на K. Доказот е комплетиран. ☻

Забелешка. Интегралот $\iiint\limits_{T(P,\varepsilon)}1dxdydz$ е пресметан во глава 12.

Задача 11.30. Пресметај го интегралот: $I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le r^2} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$,

каде што $a^2+b^2+c^2 > r^2$.

Решение: Според теоремата за средна вредност кај повеќекратни интеграли имаме:

$$I = \iiint\limits_{K} f(x,y,z)\cdot 1dxdydz = f(M)J(K) = f(M)\frac{4}{3}r^3\pi,$$

каде што $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$, $J(K)$ е Жорданова мера на множеството $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2\right\}$, а M е некоја точка од топката K. Да забележиме дека од условот $a^2+b^2+c^2 > r^2$, функцијата

$$\varphi(x,y,z) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},\ (x,y,z) \in K$$

не достигнува екстремни вредности во внатрешноста на топката K, факт што може лесно да го заклучиме од геометриска перспектива. Следува дека најмалата и најголемата вредност функцијата φ ги достигнува на работ $\partial K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\right\}$ од топката K.

Ја формираме функцијата на Лагранж: $F(x,y,z) = \varphi(x,y,z) + \lambda\left(x^2+y^2+z^2-r^2\right)$ и го составуваме системот од равенки:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x-a}{\varphi} + 2\lambda x = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y-b}{\varphi} + 2\lambda y = 0,\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z-c}{\varphi} + 2\lambda z = 0$$

откаде со помош на равенката $x^2+y^2+z^2 = r^2$ добиваме дека $\lambda = \pm\frac{1}{2r}$, додека за точките на условен екстрем имаме:

$$M_1\left(\frac{ra}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{rb}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{rc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

односно:

$$M_2\left(-\frac{ra}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},-\frac{rb}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},-\frac{rc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right).$$

Од тоа што $\varphi(M_1)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}-r,\ \varphi(M_2)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+r$ заклучуваме дека важи оценката: $\varphi(M_1)<\varphi(M)<\varphi(M_2)$ што во еквивалентна форма може да го запишеме вака:

$$\left|\varphi(M)-\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right|<r,\ M\in K\setminus\partial K .$$

Означуваме $\theta=\dfrac{\varphi(M)-\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{r}$, откаде го добиваме равенството:

$$\varphi(M)=\sqrt{a^2+b^2+c^2}+r\theta \text{, каде што } |\theta|<1.$$

Да забележиме уште дека $f(M)=\dfrac{1}{\varphi(M)}$ откаде имаме:

$$I=f(M)\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{4}{3}r^3\pi\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+r\theta},\quad |\theta|<1.$$ ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Пресметај ги, по дефиниција интегралите:

1. $I=\iint\limits_D xydxdy$, каде што $D=\{(x,y): 0\le x\le a, \quad 0\le y\le b\}$.

2. $I=\iint\limits_D x^2y^2dxdy$, каде што $D=\{(x,y): a\le x\le b, \quad c\le y\le d\}$.

3. $I=\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$, каде што $D=\{(x,y): a\le x\le b, \quad c\le y\le d\}$.

Пресметај ги двојните интеграли: (2- 6)

2. $I=\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}, \quad D=\{(x,y): 3\le x\le 4, 1\le y\le 2\}$.

3. $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx$.

4. $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy, \quad D: \Delta ABC\,(A(0,0), B(1,0), C(1,1))$.

5. $I=\iint\limits_D xydxdy, \quad D=\{(x,y): x^2+y^2\le a^2, x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

6. $I=\iint\limits_D (x+y^2)dxdy, \quad D$ е област ограничена со кривите $y=x,\ y=x^2$.

Определи ги границите на интегрирање на двојниот интеграл $I=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$: (7-12)

7. Ако D е триаголникот ограничен со $y=x,\ y=-x+4,\ y=0.$

8. Ако D е ограничен со $x=3,\ x=5,\ 3x-2y+4=0,\ 6x-4y+2=0.$

9. Ако D е меѓу $y=x^2$ и $y=x+2.$

10. Ако D е кругот $x^2+y^2 \le x$.

11. Ако D е кружниот прстен $1 \le x^2+y^2 \le 4$.

12. Ако областа D е дефинирана со неравенството $|x|+|y| \le 1$.

Скицирај ги областите на интегрирање кај двојните интегралии, промени го редоследот на интегрирање : (13-16)

13. $I=\int_0^a dx\int_0^x dy,\, a>0.$

14. $I=\int_0^a dx\int_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy,\, a>0.$

15. $I=\int_0^a dx\int_x^{\sqrt{2a-x^2}} f(x,y)dy.$

16. $I=\int_{-6}^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$.

Менувајќи го редоследот на интегрирање, пресметај ги двојните интеграли: (17.-20.)

17. $I=\int_{\frac{a}{2}}^a dx\int_x^a \frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy, (a>0).$

18. $\int_0^a dy\int_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} \frac{xy\ln(x+a)}{(x-a)^2}dx.$

19. $\int_0^a dy\int_y^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx$.

20. $\int_0^1 dx\int_x^{2-x} \frac{x}{y}dy.$

Пресметај го двојниот интеграл: (21.-28)

21. $I=\iint_D xydxdy,$ каде што D е областа ограничена со кривите $y=x^2,\, y^2=x.$

22. $I=\iint_{D:|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy,$

23. $I=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dy,$

24. $I=\iint_D \left(x^2-y^2\right)\cos xydxdy,$ каде што $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x+y\le 4a,\, xy\ge a^2,\, y\ge x\right\}.$

25. $I=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy,$ каде што $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1,\, x\ge 0,\, y\ge 0\right\}.$

26. $I = \iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} dxdy,$ каде што $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le e^2,\, x^2+y^2 \ge 1 \right\}.$

27. $I = \iint\limits_D x^2 dxdy,$ каде што D е областа ограничена со: $y = x,\, y = 4x,\, xy = 2,\, xy = 5.$

28. $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy,$ каде што D е областа ограничена со $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Преминувајќи во поларни координати, определи ги границите на интеграција по новите променливи: (29- 31)

29. $I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy\,.$ 30. $I = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy\,.$

31. $I = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy,$ каде што D е областа ограничена со $y = x,\, y = -x,\, y = 1.$

Определи ги границите на x, y и z во тројниот интеграл $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz,$ каде што V е област во $\mathbb{R}^3$: (32-34)

32. V е тетраедар ограничен со рамнините $x = 0,\, y = 0,\, z = 0,\, x + y + z = 1.$

33. V е цилиндер огранчен со површините: $x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0, \quad z = h > 0.$

34. Скицирај ја областа на интегрирање во тројниот интеграл $I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{2y-y^2}}^2 x dx \int\limits_0^3 z^2 dz.$

Пресметај ги тројните интеграли: (35- 40)

35. $I = \iiint\limits_V z dxdydz,\quad V$ е областа ограничена со $z^2 = \frac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right), \quad z = h > 0.$

36. $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dxdydz, \quad V:\ x^2+y^2+z^2 = z.$

37. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2+z^2\right) dz\,.$

38. $I = \iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz,$ каде што V е внатрешноста на елипсоидот $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

39. $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(x+y+z+1\right)^3},$ каде што V е ограничена со координатните рамнини и рамнината $x+y+z=1.$

40. $I = \iiint\limits_V \left(x+y+z\right)^2 dxdydz,$ каде што V е заедничкиот дел на параболоидот $x^2+y^2 \le 2az$ и точката $x^2+y^2+z^2 \le 3a^2.$

ГЛАВА 12

ПРИМЕНА НА ПОВЕЌЕКРАТНИ ИНТЕГРАЛИ ВО ГЕОМЕТРИЈА

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

1) Плоштината (мерата) P на произволно Жордан мерливо множество $D \subset \mathbb{R}^2$ се пресметува со:

$$P = \iint_D dxdy \tag{12.1}$$

2) Нека $z = f(x, y)$ е непрекината и ненегативна функција на затворено и ограничено множество D и нека $l = \partial D$ е работ на D. Тогаш, волуменот на телото, ограничено со површината $z = f(x, y)$, рамнината $z = 0$ и цилиндричната површина со директриса l и генератриси паралелни со $z-$оската, се пресметува со:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy \tag{12.2}$$

3) Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е Жордан мерливо множество и $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ е равенка на површина S, при што функцијата f и нејзините парцијални изводи $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ се непрекинати на множеството D. Плоштината (мерата) $m(S)$ на површината S се пресметува со:

$$m(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \tag{12.3}$$

4) Со трансформацијата $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ добиваме:

$$m(S) = \iint_{D^*} \sqrt{EG - F^2}\, dudv \tag{12.4}$$

каде што:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

5) Волумен (мерата) V на произволно Жордан мерливо множество $T \subset \mathbb{R}^3$ се пресметува со:

$$V = \iiint_T dxdydz\,. \tag{12.5}$$

ЗАДАЧИ

Задача 12.1. Пресметај го интегралот:

$$I = \iint_D dxdy\,,$$

каде што D е произволно Жордан мерливо подмножество од рамнината.

Решение: Да забележиме дека подинтегралната функција е $f(x,y)=1$. Одбираме произволна поделба $\pi_D = \{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$ на областа за интегрирање D и правиме произволен избор на точки $(\xi_\alpha, \eta_\alpha) \in A_\alpha$, за $\alpha \in J$. Ја формираме интегралната сума:

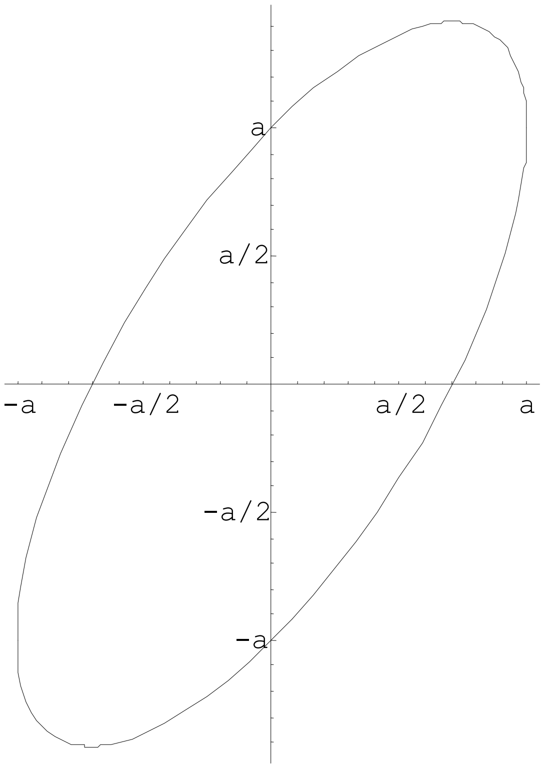
$$\sigma(f, \pi_D) = \sum_{\alpha \in J} f(\xi_\alpha, \eta_\alpha) m(A_\alpha) = \sum_{\alpha \in J} m(A_\alpha) = m(D)$$

каде што $m(D)$ е Жорданова мера на множеството D. Заклучуваме дека интегралната сума е константа за произволна поделба π_D на D и за произволен избор на точки од членовите на поделбата π_D. Следува дека интегралот $I = \iint_D dxdy = m(D)$. ☻

Забелешка. Релацијата $\iint_D dxdy = m(D)$ ни овозможува пресметување на плоштина на подмножества од рамнината во интегрална форма.

Задача 12.2. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата: $(x-y)^2 + x^2 = a^2,\ a > 0$.

Решение: Ќе ја примениме релацијата од претходната задача. Го пресметуваме интегралот $P(D) = \iint_D dxdy$, каде што областа на интегрирање е компактниот дел од рамнината ограничен со дадената крива.



Слика 12.1

Ја ползуваме теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл, па добиваме:

$$P(D)=\iint_D dxdy=\int_{-a}^{a}dx\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}}dy=2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ .$$

Последниот интеграл е веќе дискутиран. Тригонометриската смена $x=a\sin t$ ќе ни заврши работа. Резултатот е:

$$P(D)=\iint_D dxdy=a^2\pi\ .$$ ☻

Забелешка. Спореди го резултатот со резултатот што е добиен во задачата 9.

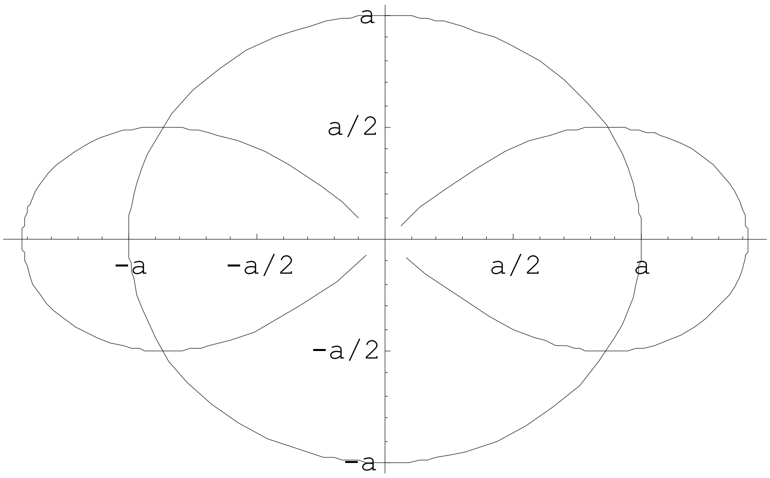
Задача 12.3. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината D ограничен со кривите:

$$\begin{aligned}&\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right),\\&x^2+y^2=a^2,\ (x^2+y^2\geq a^2)\end{aligned}.$$

Решение: Правиме превод на равенките во поларна форма, па добиваме:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2a^2\cos 2\varphi, \\ r^2 &= a^2, \quad (r > a) \end{aligned}.$$

Треба да ја пресметаме плоштината на делот од рамнината, ограничен со лемниската крива на Бернули и кружницата со радиус a, што лежи надвор од кругот со радиус a.



Слика 12.2

Лесно забележуваме дека точката $\left(a, \dfrac{\pi}{6}\right)$ е една од четирите точки на пресек меѓу кривата на Бернули и кружницата со радиус a. Од причини на симетрија доволно е да ја пресметаме плоштината на:

$$D_1 = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le r \le a\sqrt{2\cos 2\varphi},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}\right\}$$

затоа што е четвртинка од плоштината на D. Следува дека:

$$P(D) = \iint_D dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rdr = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1) d\varphi$$

откаде го добиваме резултатот $P(D) = \dfrac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2$. ☻

Задача 12.4. Квадратот $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<x<a+h,\ b<y<b+h\right\}$, $a>0,\ b>0$ со помош на пресликувањето:

$$u=y^2x^{-1},\ v=\sqrt{xy} \tag{12.6}$$

се пресликува во област D'. Пресметај го односот $\dfrac{P(D')}{P(D)}$ и границата на односот $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P(D')}{P(D)}$.

Решение: Според задача 12.1 важи релацијата:

$$P(D')=\iint\limits_{D'} dudv=\iint\limits_{D}\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|dxdy\,,$$

каде што $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ е Јакобијанот на пресликувањето (12.6). Го пресметуваме со формирање на соодветната детерминанта:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$$

Заменуваме во двојниот интеграл и добиваме:

$$P(D')=\frac{3}{2}\int\limits_a^{a+h}x^{-\frac{3}{2}}dx\int\limits_b^{b+h}y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{6}{5}\frac{\left(b^2+(b+h)^2+b(b+h)+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}\right)h^2}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b+h}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a(a+h)}}\,.$$

Од тоа што $P(D)=h^2$, за односот добиваме:

$$\frac{P(D')}{P(D)}=\frac{6}{5}\frac{b^2+(b+h)^2+b(b+h)+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b+h}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a(a+h)}}\,.$$

Оттука следува дека $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P(D')}{P(D)}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$. ☻

Задача 12.5. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината D ограничен со кривата:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k},\ a>0,\ b>0,\ h>0,\ k>0\,.$$

Решение: Ќе го запишеме работ на областа во облик:

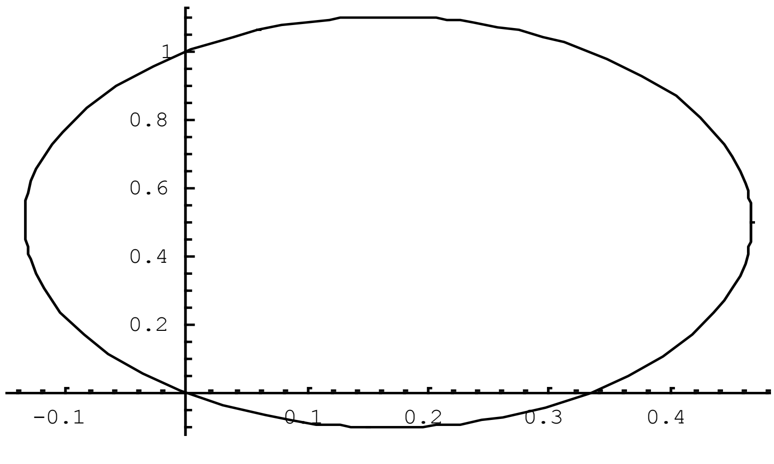
$$\partial D:\ \left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}\,.$$

Сега, во двојниот интеграл:

$$P(D)=\iint\limits_D dxdy$$

воведуваме смена со релациите:

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}=r\cos\varphi,\quad \frac{y}{b}-\frac{b}{2k}=r\sin\varphi\,.$$



Слика 12.3. Пример на ∂D за $a=1,\ b=2,\ h=3,\ k=4$

Да забележиме дека Јакобијанот на смената е:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}=abr,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}$$

откаде добиваме:

$$P(D)=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}} rdr=\frac{ab\pi}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$ ☻

Задача 12.6. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ограничен со кривите:

$$\begin{aligned}&x^2=ay,\\&x^2=by,\\&x^3=cy^2,\\&x^3=dy^2,\ (0<a<b,\ 0<c<d).\end{aligned}$$

Решение: Од равенките на работ ∂D, заклучуваме дека областа D лежи во првиот квадрант. Во двојниот интеграл:

$$P(D)=\iint_D dxdy$$

воведуваме смена со равенките:

$$x^2=uy,\quad x^3=vy^2$$

па добиваме: $a\le u\le b,\ c\le v\le d,\ x=u^2v^{-1},\ y=u^3v^{-2}$, откаде за Јакобијанот добиваме:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=u^4v^{-4}.$$

Следува дека:

$$P(D)=\iint\limits_{\substack{a\le u\le b\\ c\le v\le d}} u^4v^{-4}dudv=\int_a^b u^4du\int_c^d v^{-4}dv=\frac{1}{15}\left(b^5-a^5\right)\left(c^{-3}-d^{-3}\right).$$ ☻

Задача 12.7. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ограничен со кривите:

$$\begin{aligned}&y=ax^p,\\&y=bx^p,\\&y=cx^q,\\&y=dx^q\ \left(0<p<q,0<a<b,\ 0<c<d\right).\end{aligned}$$

Решение: Ќе ги запишеме равенките за работ ∂D во следниов облик:

$$\begin{aligned}&y=ax^p,\\&y=bx^p,\\&x=c^{-\frac{1}{q}}y^{\frac{1}{q}},\\&x=d^{-\frac{1}{q}}y^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Сега, во двојниот интеграл: $P(D)=\iint\limits_D dxdy$, воведуваме природно наметлива смена со равенките:

$$y=ux^p,\ x=vy^{\frac{1}{q}},$$

при која областа D се пресликува во правоаголникот:

$$D_1=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\mid a\le u\le v,\ d^{-\frac{1}{q}}\le v\le c^{-\frac{1}{q}}\right\}.$$

Релациите од смената ги запишуваме во следниов облик:

$$x=u^{\frac{1}{q-p}}v^{\frac{q}{q-p}},\ y=u^{\frac{p}{q-p}}v^{\frac{pq}{q-p}},$$

откаде го пресметуваме Јакобијанот: $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{q}{q-p} u^{\frac{p+1}{q-p}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}}$.

Се враќаме на пресметката на двојниот интеграл:

$$P(D) = \iint_D dxdy = \frac{q}{q-p}\int_a^b u^{\frac{p+1}{q-p}} du \int_{d^{-\frac{1}{q}}}^{c^{-\frac{1}{q}}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}} dv =$$

$$= \frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{p+1}{q-p}} - d^{-\frac{p+1}{q-p}}\right). \quad ☻$$

Задача 12.8. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ограничен со кривите:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \\ &\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4, \\ &\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \\ &8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \ x > 0, \ y > 0. \end{aligned}$$

Решение: Во двојниот интеграл $P(D) = \iint_D dxdy$ воведуваме смена со релациите:

$$\begin{aligned} x &= ar\cos^3 t, \\ y &= br\sin^3 t. \end{aligned} \quad .$$

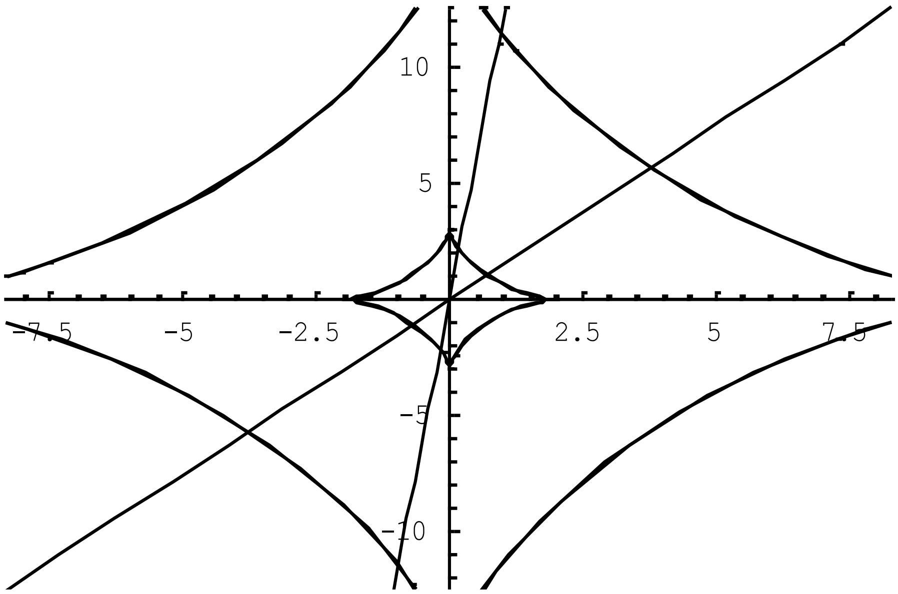
Го пресметуваме Јакобијанот на смената:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = 3abr\sin^2\varphi\cos^2\varphi ,$$

каде што $1 \le r \le 8,\ arctg1 \le \varphi \le arctg2$. Оттука за интегралот добиваме:

$$P(D) = 3ab \int_{arctg1}^{arctg2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi \int_1^8 rdr = \frac{189}{2} ab \int_{arctg1}^{arctg2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi =$$
$$= \frac{189}{8} ab \int_{arctg1}^{arctg2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{189}{16} ab \int_{arctg1}^{arctg2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi.$$

Следува дека $P(D) = \dfrac{189}{16} ab \left(arctg \dfrac{1}{3} + \dfrac{6}{25} \right)$.



Слика 12.4. Пример за ∂D за $a = 2,\ b = 3$

☻

Задача 12.9. Пресметај ја плоштината на областа $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ограничена со елипсата зададена со равенката:

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1,$$

каде што $\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \ne 0$.

Решение: Во двојниот интеграл $P(D)=\iint\limits_{D} dxdy$ воведуваме смена со релациите:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=u,\\ a_2x+b_2y+c_2&=v. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Да забележиме дека со афината трансформација (12.7) областа $D\subseteq\mathbb{R}^2$ се пресликува во единечниот круг:

$$D_1=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2<1\right\}$$

Го пресметуваме Јакобијанот на афината трансформација со:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{1}{\delta}.$$

Се враќаме на интегралот и добиваме:

$$P(D)=\iint\limits_{D} dxdy=\iint\limits_{D_1}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{|\delta|}\iint\limits_{D_1} dudv=\frac{\pi}{|\delta|}.$$ ☻

Задача 12.10. Пресметај ја плоштината на делот од сферата:

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=a^2\right\}$$

што се наоѓа во внатрешноста на цилиндричната површина:

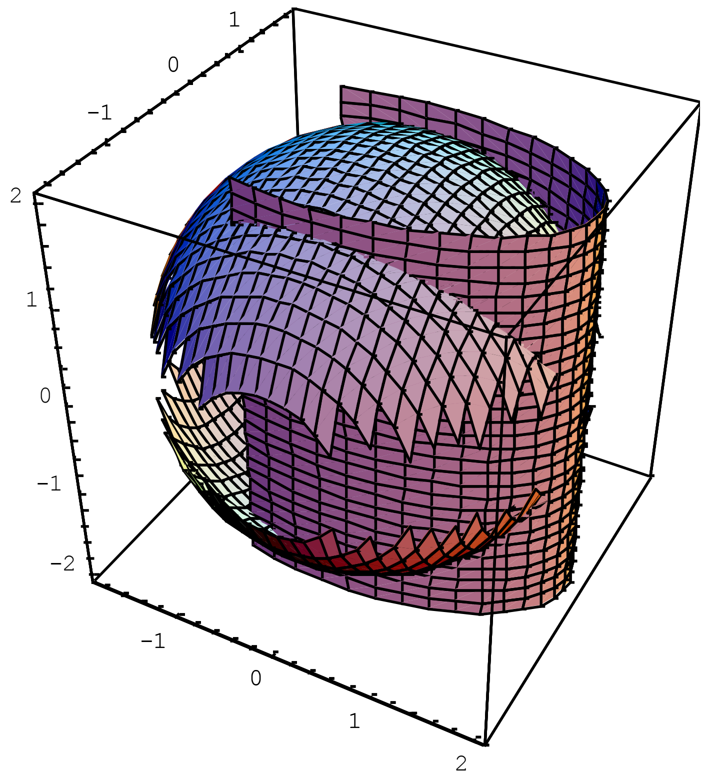
$$S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\},\ b\le a.$$

Решение: Да забележиме дека пресекот $S\cap S_1$ меѓу цилиндричната површина и сферата отсекува на сферата дел што е симетричен во однос на xOy рамнината. Делот од горната полусфера е поделен на четири еднакви делови со координатните рамнини

xOz и yOz. Аналогно, делот од долната полусфера е поделен на четири еднакви делови со координатните рамнини xOz и yOz.

Нека $z \geq 0$. За равенката на горната полусфера имаме:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \;\; 1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}$$



Слика 12.5. Пример за сфера со радиус $a = 2$ и $b = 1$

Од горната дискусија и од релациите од воведот имаме:

$$P = 8a \iint\limits_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0,\, y \geq 0}} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= 8a\int_0^a \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Bigg|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \right) dx = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}. \quad ☻$$

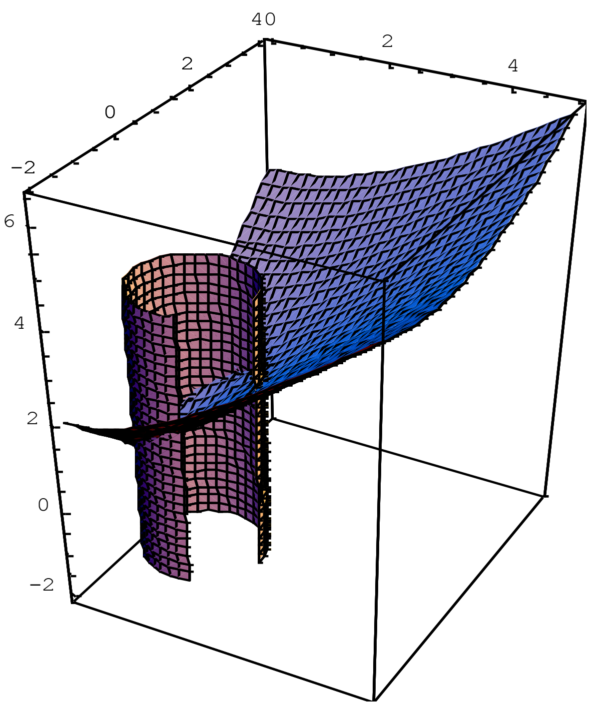
Задача 12.11. Пресметај ја плоштината на делот од површината:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

што се наоѓа во внатрешноста на цилиндричната површина:

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 2x \right\}.$$

Решение: Треба да ја пресметаме плоштината P на делот од површината што цилиндарот ја отсекува од конусната површина.



Слика 12.6.

Да забележиме дека цилиндарот S_1 ја сече xOy рамнината во крива со равенка

$$\gamma : (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

што е истовремено раб на компактна област D, круг со радиус 1 и центар во точката $(1,0)$.

За равенката на површината S имаме:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z_x = \frac{x}{z},\ z_y = \frac{y}{z}, \quad 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \frac{x^2+y^2}{z^2} = 2$$

Оттука, според релациите од воведот имаме:

$$P = \iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{2}\,dxdy = \pi\sqrt{2}\,. \quad ☻$$

Задача 12.12. Пресметај плоштина на дел од сфера $S \subseteq \mathbb{R}^3$ со радиус a, ограничен со две паралели и две меридијани.

Решение: Нека е дадена сферата $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2 \right\}$ со радиус a. Произволна точка $M = (x,y,z) \in S$ од сферата што припаѓа на укажаниот дел од сферата може да се запише во облик:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi\cos\theta, \\ y &= a\sin\varphi\cos\theta, \\ z &= a\sin\theta, \end{aligned}$$

каде што $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ е меѓу два гранични меридијана, додека $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ е меѓу две гранични паралели.

Ги пресметуваме коефициентите на Гаус $E,\ F$ и G:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = a^2 \cos^2 \theta ,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = a^2 ,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 ,$$

откаде добиваме $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \cos\theta$. Според релациите од воведот за бараната плоштината имаме:

$$P = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi d\theta = a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = a^2 \left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right). \quad ☻$$

Забелешка. Специјално за $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 2\pi$ и $\theta_1 = -\frac{\pi}{2},\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ја добиваме плоштината на сфера со радиус a, $P = 4a^2\pi$.

Задача 12.13. Пресметај ја плоштината на делот од торусот зададен во векторска форма со равенката:

$$\Phi = \Phi(\varphi, \theta) = \left(\left(b + a\cos\theta\right)\cos\varphi, \left(b + a\cos\theta\right)\sin\varphi, a\sin\theta\right),\ 0 < a \le b ,$$

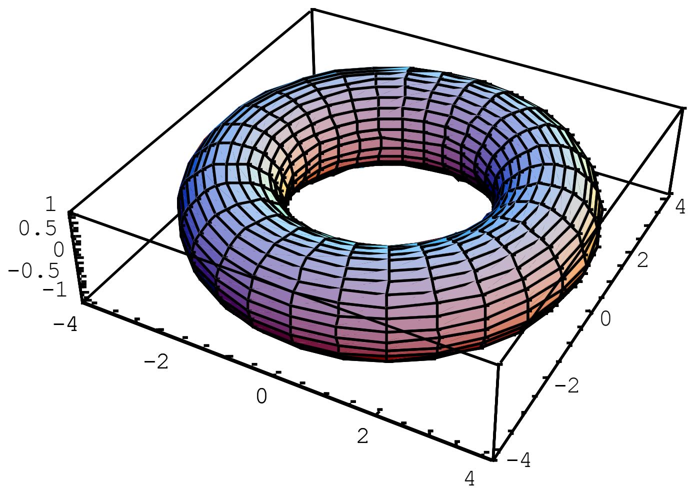
ограничен со два меридијана $\varphi = \varphi_1,\ \varphi = \varphi_2$ и две паралели $\theta = \theta_1,\ \theta = \theta_2$.

Колку е плоштината на целиот торус?

Решение: Ги пресметуваме коефициентите на Гаус за торусот:

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = \left(b + a\cos\theta\right)^2,\ G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle = a^2,\ F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle = 0$$

откаде добиваме: $\sqrt{EG - F^2} = a\left(b + a\cos\theta\right)$.



Слика 12.7. Пример на торус за $b=3,\ a=1$

Според релациите од воведот за бараната плоштина имаме:

$$P = a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(b + a\cos\theta\right) d\theta = a\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\left(b\left(\theta_2 - \theta_1\right) + a\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)\right)$$

Специјално за $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 2\pi$ и $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = 2\pi$ ја добиваме плоштината на целиот торус $P = 4\pi^2 ab$. ☻

Задача 12.14. Пресметај го интегралот:

$$I = \iiint_T dxdydz\,,$$

каде што $T \subseteq \mathbb{R}^3$ е произволно Жордан мерливо подмножество од просторот.

Решение: Да забележиме дека подинтегралната функција во I е $f\left(x,y,z\right)=1$, за секој $\left(x,y,z\right)\in T$. Одбираме произволна поделба $\pi_T = \left\{A_\alpha \mid \alpha \in J\right\}$ на областа за интегрирање T и правиме произволен избор на точки $\left(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\psi_\alpha\right)\in A_\alpha$, за $\alpha\in J$. Ја формираме интегралната сума:

$$\sigma\left(f,\pi_T\right) = \sum_{\alpha\in J} f\left(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\psi_\alpha\right) m\left(A_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in J} m\left(A_\alpha\right) = m\left(T\right)$$

каде што $m(T)$ е Жорданова мера на множеството T. Заклучуваме дека интегралната сума е константа за произволна поделба π_T на T и за произволен избор на точки од членовите на поделбата π_T. Следува дека интегралот $I = \iiint\limits_T dxdydz = m(T)$. ☻

Забелешка. Релацијата $\iiint\limits_T dxdydz = m(T) = V(T)$ ни овозможува пресметување на волумен на подмножества T од просторот во интегрална форма.

Задача 12.15. Пресметај го волуменот на телото T ограничено со површините зададени со равенките:

$$z = x^2 + y^2,$$
$$z = 2x^2 + 2y^2,$$
$$y = x, y = x^2.$$

Решение: Телото T чиишто волумен сакаме да го пресметаме може да го запишеме како множество точки во следниов облик:

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x, x^2 + y^2 \le z \le 2\left(x^2 + y^2\right)\right\}$$

Според релацијата од претходната задача 12.14 имаме:

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2\left(x^2+y^2\right)} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dy$$

откаде за бараниот волумен добиваме $V(T) = \dfrac{3}{35}$. ☻

Задача 12.16. Пресметај го волуменот на телото T ограничено со површините зададени со равенките:

$$\begin{aligned}&z = x + y,\\&z = xy,\\&x + y = 1,\\&x = 0,\\&y = 0.\end{aligned}$$

Решение: Множеството T го запишуваме во следниов облик:

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, xy \le z \le x + y \right\}.$$

Според релацијата од задачата 12.14 имаме:

$$V(T) = \iiint\limits_T dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y - xy)\, dy$$

откаде за бараниот волумен добиваме $V(T) = \dfrac{7}{24}$. ☻

Задача 12.17. Пресметај волумен на тело ограничено со површини зададени со равенките:

$$\begin{aligned}&az = x^2 + y^2,\\&z = \sqrt{x^2 + y^2}, a > 0.\end{aligned}$$

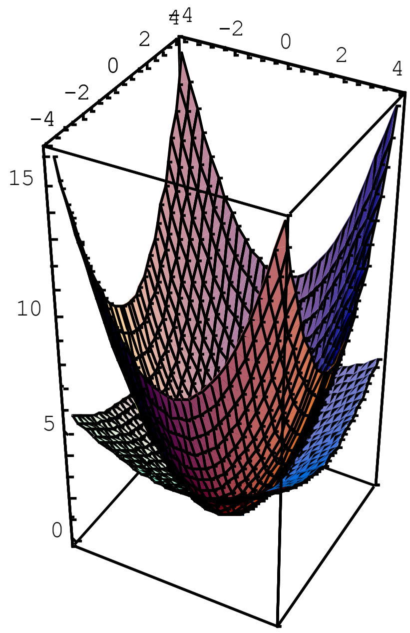
Решение: Да забележиме дека телото T е ограничено со параболоид и конусна површина чиј пресек е крива што во xOy-рамнината се проектира во кружница γ со равенка: $x^2 + y^2 = a^2$. Сега множеството T го добива обликот:

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -a \le x \le a, -\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}, \frac{x^2 + y^2}{a} \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Во тројниот интеграл $V(T) = \iiint\limits_T dxdydz$ воведуваме цилиндрична смена со равенките:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = r$$

откаде добиваме:



Слика 12.8. Пример на површините за $a = 2$

$$V(T) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_{\frac{r^2}{a}}^{r} dz = 2\pi\int_0^a \left(r^2 - \frac{r^2}{a}\right)dr = \frac{a^3\pi}{6}$$

при што ползувавме симетрија на телото во однос на рамнините xOz и yOz. ☻

Задача 12.17. Пресметај волумен на тело ограничено со површини зададени со равенките:

$$az = a^2 - x^2 - y^2,$$
$$z = a - x - y,$$
$$x = 0,$$
$$y = 0,$$
$$z = 0.$$

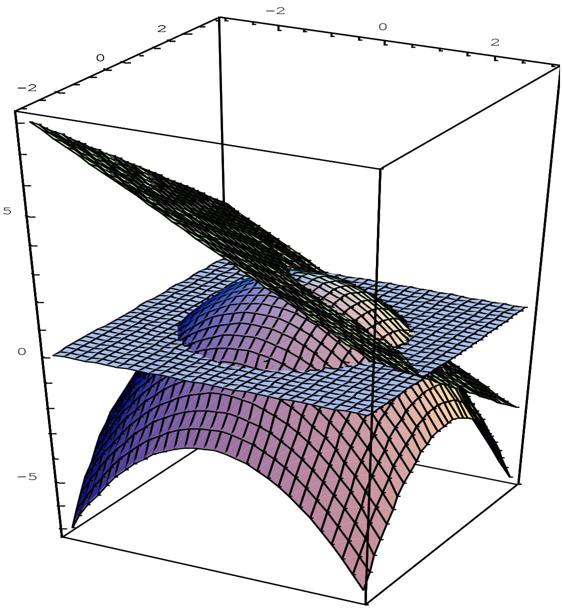
Решение: Да забележиме дека телото T лежи во првиот октант и е ограничено со параболоидот $az = a^2 - x^2 - y^2$ и рамнината $z = a - x - y$. Го запишуваме како унија од две множества $T = T_1 \cup T_2$, каде што:

$$T_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le a, a - x \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \le z \le a - \frac{x^2 + y^2}{a} \right\},$$

додека

$$T_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le a - x, a - x - y \le z \le a - \frac{x^2 + y^2}{a} \right\}.$$

Го пресметуваме волуменот $V = \iiint\limits_{T_1} dxdydz + \iiint\limits_{T_2} dxdydz$.



Слика 12.9. Пресек на параболоидот и рамнините $z = 0$ и $z = a - x - y$ за $a = 2$

Воведуваме смена со цилиндрични координати, па добиваме:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = z.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = r$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{a} rdr \int_0^{a-\frac{r^2}{a}} dz + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi}} rdr \int_{a-r(\sin\varphi+\cos\varphi)}^{a-\frac{r^2}{a}} dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{a} r\left(a-\frac{r^2}{a}\right)dr + \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi}} r\left(r(\sin\varphi+\cos\varphi)-\frac{r^2}{a}\right)dr \right) d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6(\sin\varphi+\cos\varphi)^2}\right) d\varphi = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^3}{24}\left(6\varphi + 2ctg\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{24}(3\pi-4).$$ ☻

Задача 12.18. Пресметај го волуменот на телото T ограничено со површините зададени со равенките:

$$z = 6 - x^2 - y^2,$$
$$z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение: Да забележиме дека телото T е ограничено со конусната површина $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$ и параболоидот определен со равенката $z = 6 - x^2 - y^2$.

Ја решаваме равенката:

$$6-x^2-y^2=\sqrt{x^2+y^2}$$

по $\sqrt{x^2+y^2}$ и добиваме:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$$

откаде следува дека параболоидот и конусната површина се сечат во крива γ, чија проекција на xOy рамнината е кружницата:

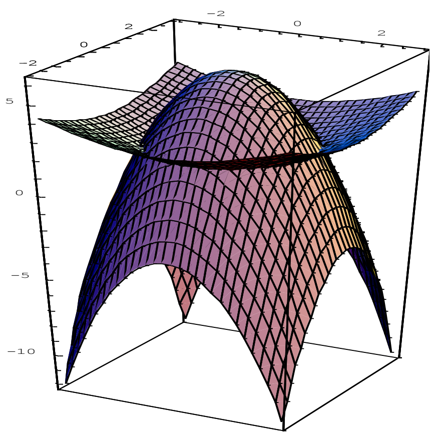
$$\gamma_{xoy}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\right\}$$

Оттука множеството точки од телото T може да го запишеме во следниов облик:

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le 4,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 6-x^2-y^2\right\}.$$

Во тројниот интеграл $V(T)=\iiint\limits_T dxdydz$ воведуваме цилиндрична смена со равенките:

$$\begin{aligned} x&=r\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi,\\ z&=z. \end{aligned} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=r$$



Слика 12.10. Пресек на параболоидот $z=6-x^2-y^2$ и конусот $z=\sqrt{x^2+y^2}$

Откаде за бараниот волумен на телото T добиваме:

$$V(T)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 rdr\int_r^{6-r^2}dz=2\pi\int_0^2 r\left(6-r^2-r\right)dr=\frac{32}{3}\pi$$

каде што ползувавме симетрија во однос на рамнините xOz и yOz. ☻

Задача 12.19. Пресметај волумен на дел од просторот ограничен со површината зададена со равенката:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}, a>0, b>0, c>0, h>0 .$$

Решение: Одиме со пресметка на тројниот интеграл $V(T)=\iiint\limits_T dxdydz$. Воведуваме смена со обопштени сферни координати:

$$\begin{aligned}x&=ar\cos\varphi\sin\theta,\\ y&=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z&=cr\cos\theta.\end{aligned}$$

Јакобијанот на смената со обопштени сферни координати е веќе пресметан во претходните задачи:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=abcr^2\sin\theta .$$

Да забележиме дека границите на новите променливи се:

$$0\le\theta\le\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

и $\quad 0\le r\le\sqrt[3]{\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{h}}$,

при што ползувавме дека $x>0$. Оттука за интегралот добиваме:

$$V=\iiint_T dxdydz=abc\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{h}}}r^2dr=$$

$$=\frac{a^2bc}{3h}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=\frac{\pi a^2bc}{3h}.$$ ☻

Задача 12.20. Пресметај волумен на дел од просторот ограничен со површините зададени со равенките:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ ,\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$$

Решение: Ќе ја најдеме равенката на проекцијата врз xOy рамнината на кривата што е пресек на елипсоидот со цилиндричната површина. Го заменуваме $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$ во равенката на елипсоидот и добиваме квадратна равенка $\left(\frac{z}{c}\right)^2+\frac{z}{c}=1$. Позитивното решение е $\frac{z}{c}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Оттука телото T го запишуваме како множество од точки:

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,(x,y)\in D, c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\le z\le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\},$$

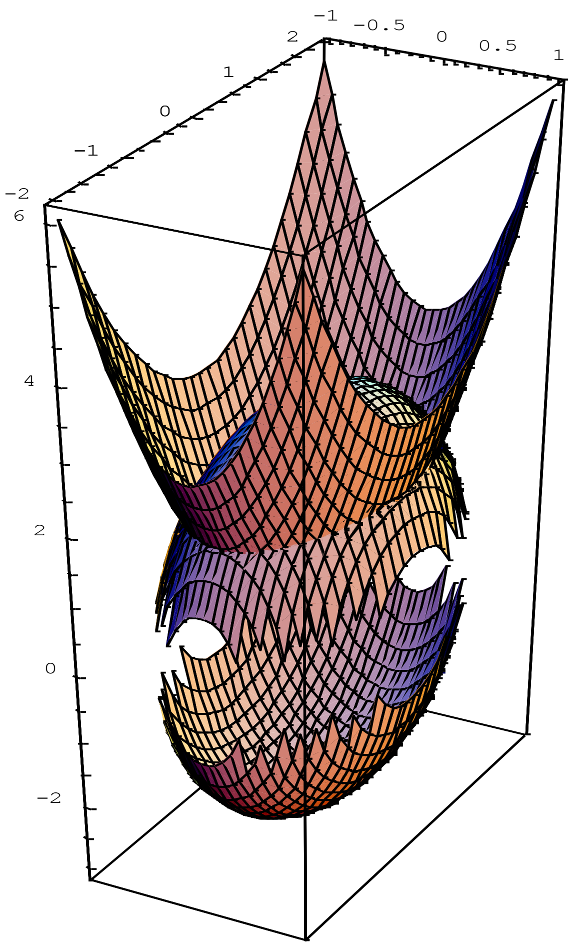
каде што $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

Одиме со пресметка на интегралот $V=\iiint_T dxdydz$. Воведуваме обопштена цилиндрична смена со релациите:

$$x = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}r\cos\varphi,$$

$$y = b\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}r\sin\varphi,$$

$$z = z.$$



Слика 12.111. Пресек на елипсоидот $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и површината $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

Јакобијанот на обопштената цилиндрична смена е:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\frac{ab}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)r$$

Се враќаме на интегралот $V=\iiint\limits_T dxdydz$. Да забележиме дека телото T е симетрично во однос на рамнините xOz и yOz, па ползувајќи ја теоремата за премин од троен кон повторен интеграл добиваме:

$$V=2ab\left(\sqrt{5}-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 rdr\int_{cr^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}^{c\sqrt{1-\frac{r^2\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}}}dz=$$

$$=\pi abc\left(\sqrt{5}-1\right)\int_0^1\left(r\sqrt{1-\frac{r^2\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r^3\right)dr=$$

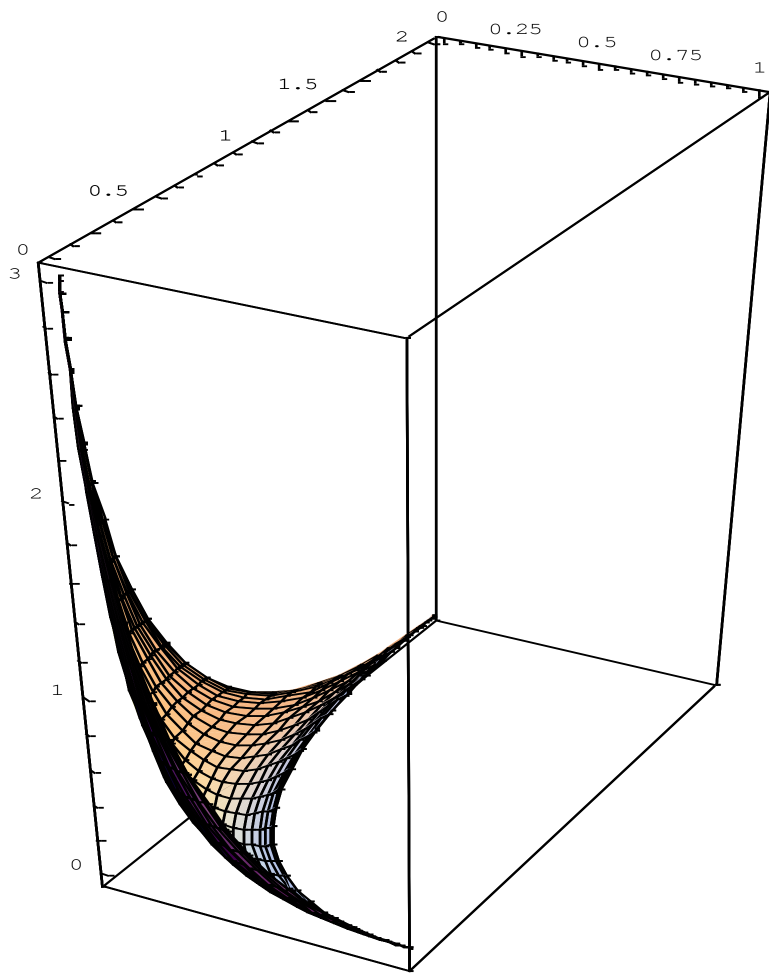
$$=\pi abc\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\frac{2}{3\left(\sqrt{5}-1\right)}\left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0-\frac{\sqrt{5}-1}{8}\right)=\frac{5}{12}\pi abc\left(3-\sqrt{5}\right).$$ ☻

Задача 12.21. Пресметај волумен на дел од просторот ограничен со површината зададена со равенката:

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1,\ \text{при}\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0.$$

Решение: Во интегралот $V=\iiint\limits_T dxdydz$ воведуваме обопштени сферни координати со релациите:

$$x=ar\sin^4\theta\cos^4\varphi,\ y=br\sin^4\theta\sin^4\varphi,\ z=cr\cos^4\theta$$



Слика 12.12. Пример на површината за $a=1, b=2, c=3$

Границите на новите променливи се:

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 1.$$

Јакобијанот на смената со обопштени сферни координати е:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = 16abcr^2 \cos^3\theta \sin^7\theta \sin^3\varphi \cos^3\varphi$$

Одиме со пресметка на интегралот:

$$V = 16abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin^7\theta d\theta \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos^3\varphi d\varphi = \frac{4}{3}abcB(4,2)B(2,2) = \frac{abc}{90}\,. \quad ☻$$

Задача 12.22. Пресметај го волуменот на делот од просторот ограничен со површината зададена со равенката:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

Решение: Да забележиме дека точките од телото T се симетрични во однос на координатните рамнини, па имаме:

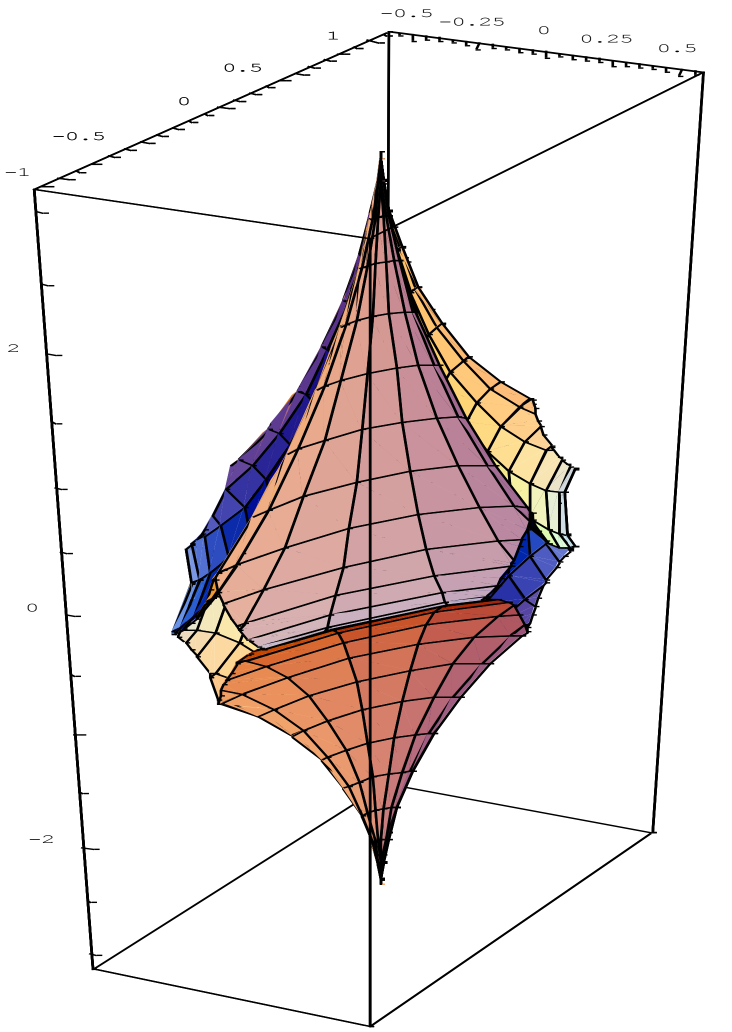
$$V = 8\iiint_{T'} dxdydz\,,$$

каде што T' е делот од телото што лежи во првиот октант.

Во тројниот интеграл воведуваме обопштени сферни координати со релациите:

$$\begin{aligned} x &= ar\sin^3\theta\cos^3\varphi,\\ y &= br\sin^3\theta\sin^3\varphi,\\ z &= cr\cos^3\theta. \end{aligned}$$

Границите на новите променливи се: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 1$, со оглед на тоа што интегрираме по T' што лежи во првиот октант.



Слика 12.13. Пример на површината за $a=1, b=2, c=3$

Јакобијанот на смената со обопштени сферни координати е:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = 9abcr^2 \cos^2\theta \sin^5\theta \sin^2\varphi \cos^2\varphi$$

Одиме со пресметка на интегралот:

$$V = 72abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^5\theta d\theta \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= 6abcB\left(3,\frac{3}{2}\right)B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = 6abc\frac{\Gamma(3)\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{4}{35}\pi abc \,.$$ ☻

Задача 12.23. Пресметај го волуменот на делот од просторот ограничен со површините зададени со равенките:

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),\\
&\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\\
&x=0,\\
&x=a,(a>0,b>0,c>0).
\end{aligned}$$

Решение: Заменуваме во равенката на површината $z=0$, па добиваме дека пресекот на површината и xOy рамнината е правата $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Во тројниот интеграл $V(T)=\iiint_T dxdydz$ воведуваме смена на променливите со релациите:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{a}=u,\\
&\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=v,\\
&\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=w,
\end{aligned}$$

откаде за границите на новите променливи добиваме:

$$0 \le u \le 1, \quad \frac{2w}{\pi}\arcsin w \le v \le 1, \quad -1 \le w \le 1 .$$

Го пресметуваме Јакобијанот на смената:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = abc$$

Се враќаме на пресметката на интегралот:

$$V(T) = abc\int_0^1 du\int_{-1}^1 dw\int_{\frac{2w}{\pi}\arcsin w}^1 dv = abc\int_{-1}^1\left(1-\frac{2}{\pi}w\arcsin w\right)dw =$$

$$= 2abc\left(1-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 w\arcsin w dw\right) = 2abc\left(1-\frac{1}{\pi}\left(\frac{w^2}{2}\arcsin w\Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{w^2dw}{\sqrt{1-w^2}}\right)\right) =$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{w^2dw}{\sqrt{1-w^2}}\right) = abc\left(1-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\sqrt{1-w^2}dw + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}\right) = \frac{3}{2}abc . \quad ☻$$

Задача 12.24. Пресметај волумен на дел од просторот ограничен со површината зададена со равенката:

$$\left(a_1x+b_1y+c_1z\right)^2 + \left(a_2x+b_2y+c_2z\right)^2 + \left(a_3x+b_3y+c_3z\right)^2 = h^2 ,$$

при што детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \ne 0$.

Решение: Во тројниот интеграл $V(T) = \iiint\limits_T dxdydz$ воведуваме смена со релациите:

$$a_1x+b_1y+c_1z = u_1, \quad a_2x+b_2y+c_2z = u_2, \quad a_3x+b_3y+c_3z = u_3 \tag{12.7}$$

Да забележиме дека со афината трансформацијата (12.7) областа $T \subseteq \mathbb{R}^3$ се пресликува во топката:

$$T_1 = \left\{ \left(u_1, u_2, u_3\right) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq h^2 \right\}.$$

Го пресметуваме Јакобијанот на афината трансформација со:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} = \frac{1}{\frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x,y,z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta}$$

Се враќаме на интегралот и добиваме:

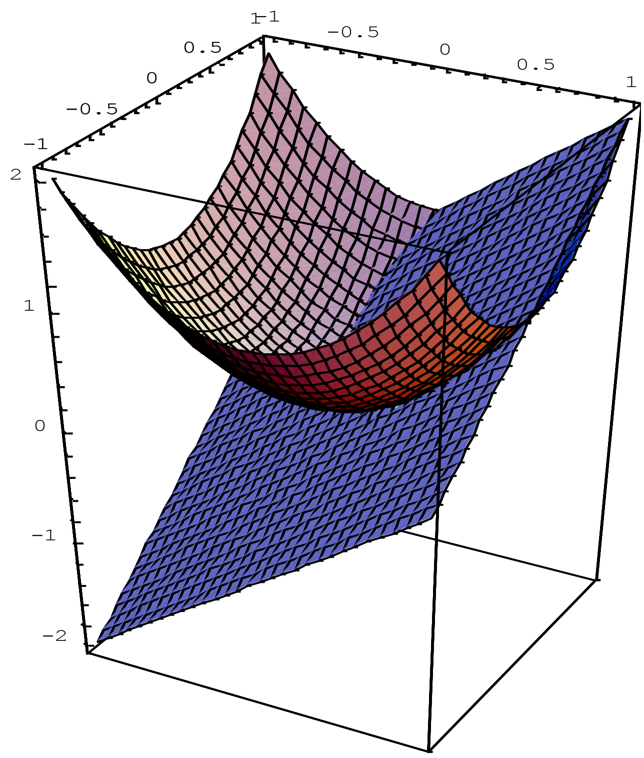
$$V(T) = \iiint\limits_{T} dxdydz = \iiint\limits_{T_1} \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} \right| du_1 du_2 du_3 = \frac{1}{|\Delta|} \iiint\limits_{T_1} du_1 du_2 du_3 = \frac{4h^3\pi}{3|\Delta|}.$$ ☻

Задача 12.25. Пресметај го волуменот на делот од просторот T ограничен со површините:

$$z = x^2 + y^2,$$
$$z = x + y.$$

Решение: Да забележиме дека параболоидот и рамнината се сечат во крива γ чија проекција на xOy рамнината има равенка:

$$\gamma_{xOy} : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$



Слика 12.14. Пресек на параболоидот и рамнината

Оттука, телото T може да го запишеме како множество на точки со:

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{2}, x^2 + y^2 \leq z \leq x + y \right\}$$

Следува дека за волуменот на T имаме:

$$V = \iint_D \left(x + y - x^2 - y^2 \right) dxdy \,,$$

каде што $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$..

Воведуваме смена во двојниот интеграл со релациите:

$$x-\frac{1}{2}=r\cos\varphi,$$
$$y-\frac{1}{2}=r\sin\varphi,$$

откаде за интегралот добиваме:

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{r}{2}-r^3\right)dr=\frac{\pi}{8}.$$ ☻

Задача 12.26. Пресметај волумен на дел од просторот ограничен со површините зададени со равенките:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1, x=0, y=0, z=0\,(a>0, b>0)$$

Решение: Да забележиме дека за $z=0$ имаме $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\le 1$, однодно важи:

$$0\le x\le a,\ \ 0\le y\le b\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

Телото T го запишуваме како множество на точки со:

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,0\le x\le a, 0\le y\le b\left(1-\frac{x}{a}\right), 0\le z\le c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\right\}.$$

Оттука за волуменот добиваме:

$$V=c\iint_D\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}\,dxdy,$$

каде што $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le a, 0\le y\le b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right\}$.

Во интегралот воведуваме смена на променливите со релациите:

$$x = ar\cos^2\varphi,$$
$$y = br\sin^2\varphi.$$

Границите на новите променливи се:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 1.$$

Го пресметуваме Јакобијанот на смената:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = 2abr\sin\varphi\cos\varphi,$$

Конечно, за интегралот добиваме:

$$V = 2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr = \frac{abc}{3}. \quad ☻$$

Задача 12.27. Пресметај го волуменот на делот од просторот T ограничен со површините:

$$z = xy, \quad x+y+z=1, \quad z=0$$

Решение: Да забележиме дека површината $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$ ја сече рамнината $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$ во крива чија проекција на xOy рамнината има равенка:

$$y = \frac{1-x}{1+x}, \ x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Оттука множеството на интегрирање:

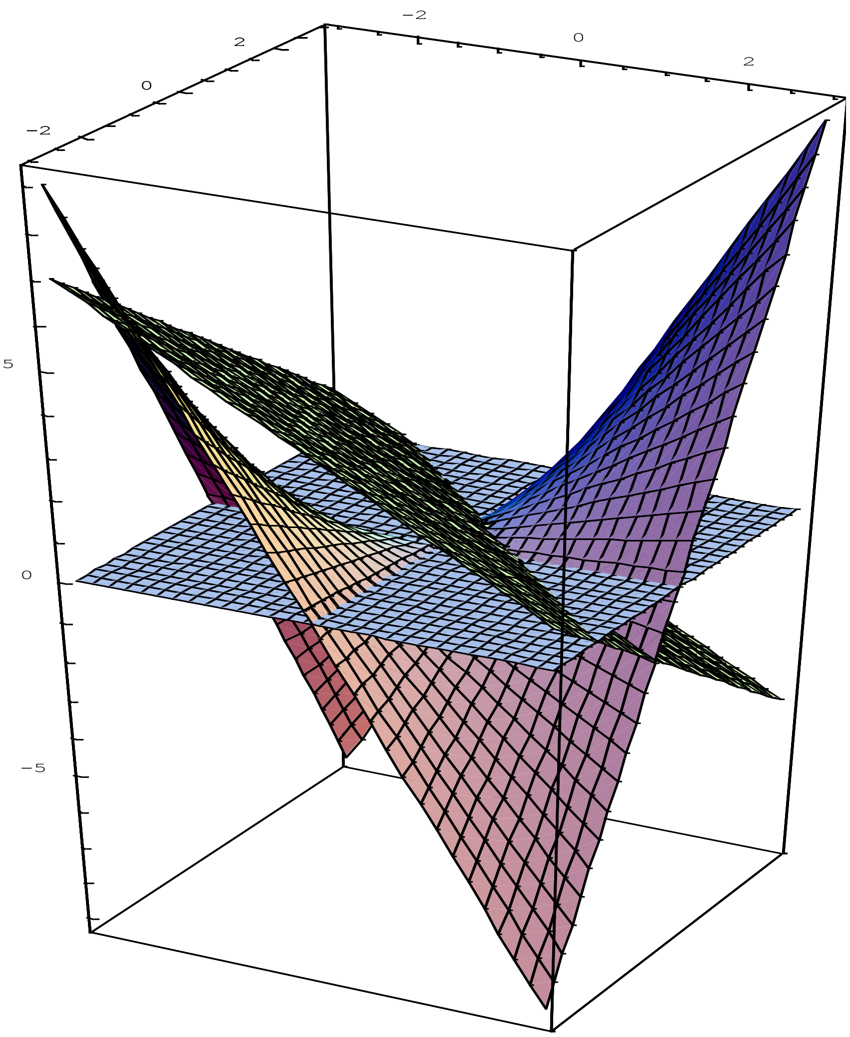
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1-x\}$$

ќе го запишеме како унија на две множества $D = D_1 \cup D_2$, каде што:

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \frac{1-x}{1+x} \right\}$$

и

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \frac{1-x}{1+x} \le y \le 1-x \right\}.$$



Слика 12.15. Пресек на површината $z = xy$ и рамнините $z = 1 - x - y, \quad z = 0$

Да забележиме дека на множеството D_1 треба да ја интегрираме функцијата $f_1(x,y)=xy$, додека на D_2 функцијата $f_2(x,y)=1-x-y$.

Одиме со пресметка на интегралите:

$$V(T)=\iint_{D_1} f_1(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f_2(x,y)dxdy$$

Од теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл, добиваме:

$$V(T)=\int_0^1 xdx\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} ydy+\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x(1-x)^2}{1+x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-3x+4-\frac{4}{1+x}\right)dx=\frac{17}{12}-2\ln 2. \quad ☻$$

Задача 12.28. Нека $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ е инјективно C^1-пресликување и нека J е ознака за детерминантата на Јакобијанот за пресликувањето f. Одбираме произволна точка $x_0\in\mathbb{R}^3$ и произволна коцка $Q_r(x_0)$ со центар во x_0 и должина на страна r, со рабови паралелни на координатните оски. Докажи дека:

$$|J(x_0)|=\lim_{r\to 0} r^{-3}vol\left(f\left(Q_r(x_0)\right)\right)\le\limsup_{x\to x_0}\frac{\|f(x)-f(x_0)\|^3}{\|x-x_0\|^3}.$$

Доказ: Одиме со теоремата за смена на променливи кај повеќекратни интеграли:

$$vol\left(f\left(Q_r(x_0)\right)\right)=\iiint_{f(Q_r(x_0))} dxdydz=\iiint_{Q_r(x_0)}|J(u,v,w)|dudvdw$$

Нека M_r и m_r се соодветно максимумот и минимумот на $|J(x)|$, за произволно $x\in Q_r(x_0)$. Тогаш имаме:

$$m_r \le r^{-3} vol\left(f\left(Q_r\left(x_0\right)\right)\right) \le M_r$$

Сега од непрекинатоста на J, имаме дека $m_r \to J\left(x_0\right)$ и $M_r \to J\left(x_0\right)$ кога $r \to 0$ откаде следува бараното равенство.

За да го докажеме неравенството, да забележиме дека слично резонирање ни дава:

$$\left|J\left(x_0\right)\right| = \lim_{r\to 0} \frac{vol\left(f\left(T_r\left(x_0\right)\right)\right)}{\frac{4}{3} r^3 \pi} \tag{12.7}$$

каде што $T_r\left(x_0\right)$ е произволна топка со центар во x_0 и радиус r. Нека

$$K = \limsup_{x\to x_0} \frac{\left\| f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right\|}{\left\| x - x_0 \right\|}.$$

Одбираме произволно $\varepsilon > 0$. Постои $r_\varepsilon > 0$ така што важи:

$$\left\| f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right\| \le \left(K+\varepsilon\right)\left\| x - x_0\right\|, \text{ за сите } \left\| x - x_0\right\| \le r_\varepsilon .$$

Последново значи дека за $r \le r_\varepsilon$ ќе важи:

$$f\left(T_r\left(x_0\right)\right) \subseteq T_{(K+\varepsilon)r}\left(f\left(x_0\right)\right)$$

откаде добиваме:

$$\frac{vol\left(f\left(T_r\left(x_0\right)\right)\right)}{\frac{4}{3} r^3 \pi} \le \frac{\frac{4}{3}\left(K+\varepsilon\right)^3 r^3 \pi}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = \left(K+\varepsilon\right)^3$$

Сега од (12.7) заклучуваме дека $\left|J\left(x_0\right)\right| \le \left(K+\varepsilon\right)^3$. Од произволноста на ε следува бараното неравенство. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Пресметај ја плоштината на ликот ограничен со кривите: (1-8)

1. $xy=1,\ xy=8,\ y^2=x,\ y^2=8x.$ **2.** $xy=a,\ xy=b,\ x^2y=c,\ x^2y=d.$

3. $y^2=2px,\ y^2=2qx,\ x^2=2ry,\ x^2=2sy,\ \left(0<p<q,\ 0<r<s\right).$

4. $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy.$ **5.** $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2-4y=0.$ **6.** $\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2.$

7. $x^2+y^2=2x,\quad x^2+y^2=4x,\quad y=x,\quad y=0.$

8. $x^2=ay,\ x^2=by,\ y^2=cx,\ y^2=dx,\left(0<a<b,0<c<d\right).$

Конструирај ја областа чија плоштина е изразена со интгралот: (9-12)

9. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy.$ **10.** $\int\limits_0^a dy\int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy.$ **11.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho d\rho.$ **12.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho d\rho+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \rho d\rho.$

13. Пресметај ја плоштината на оној дел од рамнината $x+y+z=4$ што се проектира на рамнината xOy во квадратот ограничен со правите: $x=0, x=2, y=0, y=2.$

14. Пресметај ја плоштината на оној дел од параболоидот $z=x^2+y^2$ што се наоѓа во внатрешноста на цилиндарот $x^2+y^2=1.$

15. Пресметај ја плоштината на оној дел од рамнината $x+y+z=4$ што се наоѓа во внатрешноста на цилиндарот $x^2+y^2=az,\ \left(a>0\right)..$

16. Пресметај ја плоштината на делот од конусот $z^2=x^2+y^2$ што се наоѓа во внатрешноста на цилиндарот $x^2+y^2=2x.$

Скицирај го телото чиј волумен е изразен со двојниот интеграл: (17-18)

17. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(1-x-y\right)dy.$ **18.** $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{y}{2}}^{-y}\left(x^2+y^2\right)dy..$

Пресметај го волуменот на телото ограничено со површините:

19. $z=x^2+y^2,\ z=0,\ y=2x,\ y=6-x.$ **20.** $x^2+y^2=az,\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ \left(a>0\right).$

21. $z = y\sin 2x,\;\; y = \sin x,\;\; y = \cos x,\; z = 0,\;\; 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}.$

22. $z = 4 - y^2,\;\; y = \dfrac{1}{2}x^2,\;\; z = 0.$

ГЛАВА 13

КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Дефиниција 13.1. Непрекинато пресликување $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ зададено со:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I \tag{13.1}$$

каде што I е интервалот $[a,b], (a,b), [a,b)$ или $(a,b]$, $a,b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ го викаме *параметризација на крива во* $\mathbf{R}^3$.

Сликата $\gamma(I)$ заедно со параметризацијата γ велиме дека е *крива определена со параметризацијата* γ.

Во понатамошниот текст со γ ќе ја означуваме кривата определена со параметризацијата γ.

Променливата t ја нарекуваме *параметар* на кривата.

За множеството $|\gamma| = \{\gamma(t) : t \in I\}$ велиме дека е *носач* на кривата γ.

Велиме дека γ е *проста незатворена крива а*ко е инјекција. Ако $\gamma(a) = \gamma(b)$ и $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ за различни $t_1, t_2 \in (a,b)$, тогаш велиме дека γ е *проста затворена крива.*

Велиме дека *кривата е во класа* C^k ако компонентните функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ се во класата C^k. Кривата γ е *глатка (мазна)* ако е во класата C^∞.

Кривата е *регуларна* ако е барем во класата C^1 и изводот на пресликувањето γ го задоволува условот $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0,0,0), \quad t \in I$.

Велиме дека кривата γ е *по делови глатка* ако се исполнети следниве услови:

1. $|\gamma| = |\gamma_1| \cup \cdots \cup |\gamma_p|$
2. $|\gamma_i|$ се носачи на глатки криви зададени со $\gamma_i : I_i \to |\gamma_i|$, каде што $I_1 = [a_1, b_1]$ или $(a_1, b_1]$; $I_i = [a_i, b_i]$ $i = 2, \cdots, p-1$ и $I_p = [a_p, b_p]$ или $[a_p, b_p)$.
3. $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}),\ i = 1, \cdots, p-1$

Велиме дека кривата γ е *ориентирана* ако постои непрекинато пресликување, кое на секоја точка од $|\gamma|$ и придружува единичен тангентен вектор (од можни два) на кривата во таа точка. Со други зборови, кривата γ ја ориентираме со избор на едно од двете непрекинати пресликувања: (*i*) $t \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ или (*ii*) $t \mapsto -\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$.

Ако, на пример, земеме $I = [a, b]$ и е избрана ориентацијата (*ii*), тогаш $\gamma(a)$ е почетна точка на кривата, а $\gamma(b)$ е крајна точка. Ако ориентацијата е дадена со (*ii*), тогаш $\gamma(a)$ е крајна а $\gamma(b)$ е почетна точка на ориентираната крива .

Ориентацијата на некоја крива е условна: ако една ориентација е избрана за позитивна, тогаш другата ќе биде негативна.

По делови глатка крива е ориентирана, ако за сите криви $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ е избрана иста ориентација ((*i*) или (*ii*)).

Кривата зададена со (1) е параметризирана со параметарот t. Дали таа може да се параметризира и со друг параметар?

Дефиниција 13.2. Нека γ и δ се криви во $\mathbf{R}^3$ зададени со

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad t \in I \quad \text{и}$$

$$\delta(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \quad t \in I'$$

Ако постои непрекината, сурјективна и строго монотона функција $p : I \to I'$ таква што $\delta(p(t)) = \gamma(t),\ t \in I$, тогаш велиме дека кривите γ и δ се *еквивалентни*. Функцијата p е *репараметризација* на γ. Велиме дека p е регуларна репараметризација ако припаѓа во класата C^1 и $p'(t) \neq 0,\ t \in I$.

Ако p монотоно расте, тогаш γ и δ имаат *иста ориентација*, а ако p монотоно опаѓа – *спротивна ориентација*.

Да забележиме, ако кривата δ е добиена со регуларна репараметризација од кривата γ, тогаш за секое t за кое постои $\delta'(p(t))$, имаме $\gamma'(t) = \delta'(p(t))p'(t)$. Значи, кривите γ и δ имаат иста (спротивна) ориентација ако тангентниот вектор на γ во t е помножен тангентниот вектор на δ во $p(t)$ со позитивен (негативен) скалар.

Забелешка: Од горе кажаното можеме да дефинираме **крива од класа** C^k како класа на еквиваленција определна со една крива со параметризација (13.1) и во класа C^k.

Дефиниција 13.3. Велиме дека бројот l е *должина на кривата* γ ако за произволно $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ такво што за секое разбивање $\pi : a = t_0 < \cdots < t_k = b$ на сегментот $[a,b]$ со дијаметар помал од δ, ($d(\pi) < \delta$) имаме $0 \le l - \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| < \varepsilon$.

Ако $l < \propto$, тогаш велиме дека кривата е *ректификациона.*

Теорема 13.1. Секоја глатка крива во $\mathbf{R}^3$, зададена со (1), е ректификациона со должина

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt . \tag{13.2}$$

Криволиниски интеграли од прв вид

Нека $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $t \in [a,b]$ е проста, ректификациона крива во $\mathbf{R^n}$, $|\gamma| = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ е носачот на γ и f е ограничена функција на $|\gamma|$. За секое разбивање $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ на сегментот $[a,b]$ и за произволно $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, ја формираме сумата $T = \sum_{i=1}^{k} f(\gamma(\tau_i)) l(\gamma_i)$ каде што $l(\gamma_i)$ е должината на кривата $\gamma(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Дефиниција 13.4. Ако за секое позитивно ε постои $\delta > 0$ и за секое разбивање π со дијаметар помал од δ како и за секое $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ постои број N таков што $|T - N| < \varepsilon$, тогаш велиме дека N е *криволиниски интеграл од прв вид* и пишуваме: $N = \int_\gamma f(x) ds$.

Нека γ е по делови глатка крива и f е непрекинато пресликување $:|\gamma| \to \mathbf{R}$. Криволиниски интеграл од прв вид над по делови глатка крива се дефинира со

$$\int_\gamma f ds = \sum_{i=1}^{p} \int_{\gamma_i} f ds .$$

Теорема 13.2. Ако кривите γ и δ се еквивалентни и ако постои $\int_\gamma f(x) ds$, тогаш постои и $\int_\delta f(x) ds$ и интегралите се еднакви.

Теорема 13.3. Нека γ е глатка крива зададена со (13.1) и нека f е непрекината функција на $|\gamma|$. Тогаш постои $\int\limits_{\gamma} f(x)ds$ и важи

$$\int\limits_{\gamma} f(x)ds = \int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt \tag{13.3}$$

Да забележиме дека теоремата важи и во случај кога γ е поделови глатка крива и f е по делови непрекината функција.

Кај криволиниските интеграли од прв вид можат да се пренесат особините од определен интеграл: линеарност, адитивност и др, како и теоремата за средна вредност.

Теорема 13.4. Ако f е непрекината функција на $|\gamma|$, тогаш постои точка $(\xi_1, \xi_{2,} \cdots \xi_n)$ на $|\gamma|$ таква што $\int\limits_{\gamma} f(x_1, x_2, \cdots x_n)ds = f(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n) \cdot l(\gamma)$.

Да забележиме дека од дефиницијата на криволиниски интеграл од прв вид имаме дека тој не се менува ако кривата ја смени орјентацијата.

Криволиниски интеграли од втор вид

Нека γ е ориентирана крива во $\mathbf{R}^3$ зададена со $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad a \le t \le b$. Нека f е ограничена функција дефинирана на $|\gamma|$. Ќе дефинираме криволиниски интеграл на f во однос на $h-$та координата на γ.

Нека

$$\pi : a = t_0 < \cdots < t_k = b \tag{13.4}$$

е разбивање на сегментот $[a,b]$. За произволно $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ја формираме сумата

$$T = \sum_{i=1}^{k} f(\gamma(\tau_i))[x_h(t_i) - x_h(t_{i-1})] \tag{13.5}$$

Дефиниција 13.5. Ако постои број N таков што за секое $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ такво што за секое разбивање π, со дијаметар помал од δ, и за секое $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, важи $|T - N| < \varepsilon$, тогаш велиме дека N е *криволиниски интеграл* на f во однос на компонентата $x_h(t)$ на кривата γ.

Означуваме

$$N = \int\limits_{\gamma} f(x)dx_h \tag{13.6}$$

Нека $f=(f_1,f_2,f_3)$ е вектор вредносна функција дефинирана на $|\gamma|$. Збирот $\sum_{h=1}^{3}\int_{\gamma} f_h(x)dx_h$ обично го пишуваме како $\int_{\gamma}\sum_{h=1}^{3} f_h(x)dx_h$ или $\int_{\gamma} fdx$ и го викаме *криволиниски интеграл од втор вид.*

Теорема 13.5. Нека γ е глатка крива во $\mathbf{R}^3$ и f е непрекината функција на $|\gamma|$. Тогаш, за секое $h\in\{1,2,3\}$ постои криволинискиот интеграл на f во однос на компонентата $x_h(t)$ и важи:

$$\int_{\gamma} f(x)dx_h=\int_a^b f(\gamma(t))x_h'(t)dt \tag{13.7}$$

како и

$$\int_{\gamma} f_1(x)dx_1+f_2(x)dx_2+f_3(x)dx_3=\int_a^b\Big(f_1\big(\gamma(t)\big)x_1'(t)+f_2\big(\gamma(t)\big)x_2'(t)+f_3\big(\gamma(t)\big)x_3'(t)\Big)dt \tag{13.8}$$

Векторско поле и криволиниски интеграл.

Користејчи се со векторски ознаки, скаларното поле $u=u(x,y)$ го означуваме со $u=u(\vec{r})$, каде што $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ е вектор положбата на точката (x,y) во рамнината O_{xy}. За векторското поле $\vec{v}=\vec{v}(x,y)$ се користи ознаката $\vec{v}=(v_1,v_2)=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}$ каде што $v_i=v_i(x,y),\ i=1,2$ се функции од x,y или $\vec{v}=\vec{v}(\vec{r})= =v_1(\vec{r})\vec{i}+v_2(\vec{r})\vec{j}$.

Нека $\vec{v}=\vec{v}(P,Q)$ е векторско поле дефинирано на крива L зададена со параметризацијата (13.1) $\gamma(t)=(x(t),y(t)),\quad t\in I$. Изводот на вектор положбата $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ на точката $M(x,y)$ на кривата L има облик $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial t}=\left(\dfrac{\partial x}{\partial t},\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)$.

Равенството (13.8):

$$\int_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt$$

може да се напише како: $\int_{\gamma}\vec{v}d\vec{r}=\int_a^b\vec{v}\cdot\vec{r}'(t)dt$ каде што $d\vec{r}=(dx,dy)$.

Независност на интеграција од патеката

Во општ случај, криволинискиот интеграл $\int_{\gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ зависи од патеката по која интегрираме. Меѓутоа, ако изразот $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ е тотален диференцијал на некоја функција или, поинаку кажано, ако постои скаларно поле $u=u(x,y)$, така што $gradu = (P, Q)$, тогаш интегралот на векторот (P, Q) по кривата γ не зависи од кривата туку само од нејзините крајни точки.

Теорема 13.6. Нека $\vec{v} = \vec{v}\left(P(x, y), Q(x, y)\right)$ е непрекинато векторско поле дефинирано во област $S \subset \mathbb{R}^2$. Следните тврдења се еквивалентни:

1) Постои функција $u = u(x, y)$ дефинирана на S, со непрекинати парцијални изводи, така што $gradu = (P, Q)$.

2) Нека $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$ се почетната и крајната точка на кривата $\gamma \subset S$. Вредноста на интегралот $\int\limits_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ зависи само од точките A и B, и е еднаква на $u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)$.

3) Криволинискиот интеграл $\oint\limits_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по која било затворена крива $\gamma \subset S$ е еднаков на нула.

Теорема 13.7. Нека $S \subset \mathbb{R}^2$ е просто сврзана област зададена со непрекинато векторско поле $\vec{v} = \vec{v}\left(P(x, y), Q(x, y)\right)$, кое има непрекинати парцијални изводи $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Тогаш интегралот $\int\limits_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависи од патот $\gamma \subset V$, туку само од крајните точки ако, и само ако е исполнето равенството: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Интуитивно, област е просто сврзана ако е пат сврзана и за произволни две криви со заеднички крајни точки непрекинато можат да се трансформираат една во друга.

Во случај на $\mathbb{R}^3$, ако изразот $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ е тотален диференцијал на некоја функција или, поинаку кажано, ако постои скаларно поле $u = u(x, y, z)$, така што $gradu = (P, Q, R)$, тогаш криволинискиот интеграл $\int\limits_{\gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ не зависи од кривата туку само од нејзините крајни точки.

Теорема 13.8. Нека $\vec{v} = \vec{v}\left(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\right)$ е непрекинато векторско поле дефинирано во област $V \subset \mathbb{R}^3$. Следните тврдења се еквивалентни:

1) Постои функција $u = u(x, y, z)$ дефинирана на V, со непрекинати парцијални изводи, така што $gradu = (P, Q, R)$.

2) Нека $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1)$ се почетната и крајната точка на кривата $\gamma \subset V$. Вредноста на интегралот $\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ зависи само од точките A и B, и е еднаква на $u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0)$.

3) Криволинискиот интеграл $\oint\limits_{C} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ по која било затворена крива $C \subset V$ е еднаков на нула.

Теорема 13.9. Нека $S \subset \mathbb{R}^2$ е просто сврзана област зададена со непрекинато векторско поле $\vec{v} = \vec{v}\left(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right)$, кое има непрекинати парцијални изводи: $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x}$ и $\frac{\partial R}{\partial y}$. Тогаш интегралот $\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ не зависи од патот $\gamma \subset V$, туку само од крајните точки ако, и само ако се исполнети равенствата: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$.

Гринова формула и нејзини примени.

Нека $P(x,y), \ Q(x,y), \ \frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ се непрекинати функции на ограничената затворена област D со раб $\partial D = L$. Тогаш, е точно равенството:

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy = -\oint\limits_{L} Pdx + Qdy \tag{13.9}$$

познато под името *Гринова формула*. Притоа, на контурата L е избрана позитивната ориентација.

Примена на криволиниски интеграли.

1. Плоштината на делот од рамнината D ограничен со проста затворена крива γ е определена со релацијата:

$$P(D) = \frac{1}{2} \oint\limits_{\gamma} xdy - ydx.$$

(Види ја задачата 13.30.)

ЗАДАЧИ

Задача 13.1. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од прв тип:

$$I = \int_{\gamma} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl$$

вдолж крива γ зададена со равенката: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$.

Решение: Ја параметризираме астроидата γ со равенките:

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ \left(0 \le t \le 2\pi\right)$$

откаде за интегралот I добиваме:

$$I = 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \left|\sin t \cos t\right| dt \tag{13.10}$$

при што ползувавме дека: $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right)$ односно:

$$dl = \sqrt{\left(-3a\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t \cos t\right)^2}\, dt = 3a\left|\sin t \cos t\right| dt$$

Да забележиме уште дека подинтегралната функција во интегралот I од релацијата (13.10) е $\dfrac{\pi}{2}$-периодична, па добиваме:

$$I = 12a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) \sin t \cos t dt = 2a^{\frac{7}{3}} \left(\cos^6 t - \sin^6 t\right)\Big|_{\pi/2}^{0} = 4a^{\frac{7}{3}}. \quad ☻$$

Забелешка. Интегрирањето вдолж крива и над површина е посебен случај на интегрирање над многуобразие со диференцијабилна структура. Кривата ја сметаме за 1-многуобразие додека површината за 2-многуобразие. Општиот концепт што ги опфаќа претходниве е се разбира поимот за n-многуобразие.

Задача 13.2. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од прв тип:

$$I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$$

вдолж крива $\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = ax \right\}$, каде што што $a > 0$.

Решение: Воведуваме поларни координати. Равенката на кривата γ во поларна форма гласи: $r = a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Параметризираме по поларниот агол φ, па равенките на кружницата во параметарска форма го добиваат обликот:

$$x = a\cos^2\varphi,\ \ y = a\cos\varphi\sin\varphi,\ \left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right)$$

Вдолж кривата γ за подинтегралната функција важи $\sqrt{x^2 + y^2} = a\cos\varphi$. Сега од $dl = a d\varphi$ за интегралот добиваме:

$$I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\, dl = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = 2a^2 .$$ ☻

Задача 13.3. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од прв тип:

$$I = \int_{\gamma} x^2 dl$$

вдолж крива γ што се добива како пресек на сфера со радиус a, $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \right\}$ и рамнина зададена со равенката $\Sigma : x + y + z = 0$.

Решение: Да забележиме дека дадената рамнина Σ минува низ координатниот почеток и ја сече сферата S во кружница со радиус a. Со циклична пермутација на променливите лесно се забележува дека важат равенствата:

$$I = \int_{\gamma} x^2 dl = \int_{\gamma} y^2 dl = \int_{\gamma} z^2 dl$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I=\frac{1}{3}\int_{\gamma}\left(x^2+y^2+z^2\right)dl.$$

Но вдолж кривата γ важи релацијата $x^2+y^2+z^2=a^2$, па следува дека бараниот интеграл е $I=\frac{2}{3}a^3\pi$, ползувајќи дека $\int_{\gamma}dl=2a\pi$. ☻

Задача 13.4. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од прв тип:

$$I=\int_{\gamma}zdl$$

вдолж крива γ што се добива како пресек на површините P_1 и P_2 зададени со равенките: $P_1: x^2+y^2=z^2$ и $P_2: y^2=ax$ од точката $O(0,0,0)$ до точката $A\left(a,a,a\sqrt{2}\right)$.

Решение: Ја параметризираме кривата γ по променливата x, па равенките на кривата во параметарска форма го добиваат обликот:

$$\gamma:\ \ x=x,\ y=\sqrt{ax},\ z=\sqrt{x^2+ax},\ \ (0\le x\le a)$$

Да забележиме дека:

$$dz=\frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax}}dx,\ dy=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}dx,\ dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}dx$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{8x^2+9ax+2a^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{\left(2\sqrt{2}x+\frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{17}{32}a^2}dx=$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\left(2\sqrt{2}x+\frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)\sqrt{8x^2+9ax+2a^2}\right)\Big|_0^a+$$
$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{17}{32}a^2\ln\left(2\sqrt{2}x+\frac{9a}{4\sqrt{2}}+\sqrt{8x^2+9ax+2a^2}\right)\right)\Big|_0^a=$$

$$=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right). \text{☻}$$

Задача 13.5. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I=\int_{\gamma^+}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$$

вдолж кривата $\gamma=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2,\ |x|\le 1\right\}$ со позитивна ориентација.

Решение: Ја параметризираме кривата по променливата x. Равенките на кривата во параметарска форма го добиваат следниов облик:

$$x=x,\ y=x^2,\ -1\le x\le 1$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2xx^2\right)dx+\left(\left(x^2\right)^2-2xx^2\right)2xdx=\int_{-1}^{1}\left(x^2-2x^3+2x^5-4x^4\right)dx=-\frac{14}{15}. \text{☻}$$

Задача 13.6. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I=\int_{\gamma^+}(2a-y)dx+xdy$$

вдолж циклоидата γ зададена со равенките:

$$\gamma: x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi .$$

Решение: Да забележиме дека вдолж кривата γ важи:

$$\begin{aligned}&(2a-y)dx+xdy=\left(2a-a(1-\cos t)\right)d\left(a(t-\sin t)\right)+\\&+a(t-\sin t)d\left(a(1-\cos t)\right)=a^2t\sin tdt\end{aligned}$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 \left(t \cos t \Big|_{2\pi}^{0} + \sin t \Big|_0^{2\pi} \right) = -2\pi a^2 .$$ ☻

Задача 13.7. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I = \oint_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

каде што $ABCDA$ е раб на квадратот со темиња во точките: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$.

Решение: Од адитивноста на криволинискиот интеграл имаме:

$$I = \oint_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_{AB} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{BC} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{CD} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{DA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$$

Да забележиме дека на сегментите AB и CD важат равенствата:

$$x + y = 1 \text{ односно } x + y = -1$$

соодветно, откаде добиваме дека $dx + dy = 0$. Следува дека:

$$\int_{AB} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_{CD} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0$$

На сегментите BC и DA важат равенствата:

$$y - x = 1 \text{ односно } y - x = -1$$

соодветно, откаде добиваме дека $dy = dx$ и $|x|+|y| = 1$. Уште повеќе за $(x, y) \in BC$ имаме дека x опаѓа од 0 до -1, додека за $(x, y) \in DA$ имаме дека x расте од 0 до 1. Консеквентно за интегралот добиваме:

$$I = 2\int_0^{-1} dx + 2\int_0^1 dx = -2 + 2 = 0 .$$ ☻

Задача 13.8. Докажи дека за произволен криволиниски интеграл важи следново неравенство:

$$\left|\int_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right| \leq LM$$

каде што L е должината на кривата γ и $M = \max\limits_{(x,y)\in\gamma} \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}$.

Доказ: Без губење од општоста кривата γ може да ја сметаме за глатка. Доколку кривата е по делови глатка тогаш интегралот може да се запише како сума од интеграли по глатки криви.

Ќе ја ползуваме врската меѓу криволиниските интеграли од прв и втор тип. Имено важи:

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\gamma} \langle F, \tau \rangle dl$$

каде што $F = (P, Q)$, а τ е единечен тангентен вектор за кривата γ. Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме:

$$\left|\langle F, \tau \rangle\right| \leq |F||\tau| = |F| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

откаде добиваме:

$$\left|\int_{\gamma} Pdx + Qdy\right| \leq \int_{\gamma} \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\,dl \leq \max_{(x,y)\in\gamma} \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)} \int_{\gamma} dl = LM \, .$$

при што ползувавме дека $\int_{\gamma} dl = L$. Доказот е комплетиран. ☻

Забелешка. Неравенството има природна генерализација и во n-димензионалниот простор $\mathbb{R}^n$.

Задача 13.9. Направи оценка на интегралот:

$$I_R = \oint_\gamma \frac{ydx - xdy}{\left(x^2 + xy + y^2\right)^2},$$

каде што $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\right\}$, а потоа пресметај $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R$.

Решение: За оценка на интегралот I_R ќе ја ползуваме задачата 13.8. Ги воведуваме ознаките:

$$P(x, y) = \frac{y}{\left(x^2 + xy + y^2\right)^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-x}{\left(x^2 + xy + y^2\right)^2}$$

откаде добиваме: $\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\left(x^2 + xy + y^2\right)^2}$.

Сега според претходната задача важи следново неравенство:

$$I_R \le 2R\pi \max_{(x,y)\in\gamma} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\left(x^2 + xy + y^2\right)^2} \tag{13.11}$$

Воведуваме параметризација на кривата γ со равенките:

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

откаде ги добиваме релациите:

$$\max_{(x,y)\in\gamma} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\left(x^2 + xy + y^2\right)^2} = \max_{(x,y)\in\gamma} \frac{1}{R^3\left(1 + \sin\varphi\cos\varphi\right)^2} = \frac{4}{R^3}, \tag{13.12}$$

при што го ползувавме неравенството:

$$\frac{1}{\left(1 + \sin\varphi\cos\varphi\right)^2} = \frac{4}{\left(2 + \sin 2\varphi\right)^2} \le 4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Конечно, од релациите (13.11) и (13.12) ја добиваме оценката: $\left|I_R\right| \leq \frac{8\pi}{R^2}$, откаде следува дека $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R = 0$. ☻

Задача 13.10. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I = \int\limits_{\gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$

вдолж крива γ со позитивна ориентација, што се добива како пресек на сфера S со радиус a, $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2\right\}$ и рамнина Σ зададена со равенката $\Sigma: y = xtg\alpha$.

Решение: Да забележиме дека кривата γ е кружница со центар во координатниот почеток $O(0,0,0)$ и радиус a што лежи во дадената рамнината Σ. Одбираме произволна точка $(x,y,z) \in \gamma$ од кривата γ и го придружуваме соодветниот радиус вектор $\vec{r}(x,y,z)$. Нека φ е аголот меѓу радиус векторот $\vec{r}(x,y,z)$ и неговата проекција на рамнината $z=0$, што лежи на правата $y = (tg\alpha)x$. Воведуваме параметризација на кривата γ со равенките:

$$x = a\cos\alpha\cos\varphi,\ \ y = a\sin\alpha\cos\varphi,\ z = a\sin\varphi,\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Оттука за криволинискиот интеграл добиваме:

$$I = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (\cos\alpha - \sin\alpha)\,d\varphi = 2\sqrt{2}a^2\pi\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$ ☻

Задача 13.11. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I = \int\limits_{\gamma} y^2dx + z^2dy + x^2dz$$

вдолж крива γ со позитивна ориентација, што се добива како пресек на сфера S_1 со радиус a,

$$S_1 = \left\{ \left(x, y, z \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \right\}$$

и цилиндар

$$S_2 = \left\{ \left(x, y, z \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = ax \right\}, \text{ при } z \geq 0.$$

Решение: Воведуваме поларни координати, па кривата на Вивијан γ

го добива обликот:

$$r = a\cos\varphi,\ z = \sqrt{a^2 - r^2},\ \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

Параметризираме по поларниот агол φ:

$$x = a\cos^2\varphi,\ y = a\sin\varphi\cos\varphi,\ z = a\left|\sin\varphi\right|,\ \left(\left|\varphi\right| \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

Го пресметуваме подинтегралниот израз во точките од кривата γ:

$$\begin{aligned} & dx = -2a\sin\varphi\cos\varphi d\varphi,\ dy = a\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \right) d\varphi, \\ & dz = \operatorname{sgn}\varphi\left(a\cos\varphi \right) d\varphi,\ \varphi \neq 0 \end{aligned}$$

откаде добиваме:

$$y^2dx + z^2dy + x^2dz = a^3\left(-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^4\varphi + \operatorname{sgn}\varphi\cos^5\varphi \right) d\varphi,\ \varphi \neq 0$$

Да забележиме дека важи следново равенство:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \operatorname{sgn}\varphi\cos^5\varphi \right) d\varphi = 0 \qquad (13.13)$$

Оттука го пресметуваме интегралот:

$$I = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\varphi - 2\sin^4\varphi\right) d\varphi = a^3 \left(B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) - 2B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)\right) = a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi a^3}{4}\ .$$ ☻

Забелешка1. Под позитивна ориентација на просторната крива γ во претходните две задачи подразбираме насока спротивна од насоката на стрелките на часовникот, но од перспектива на позитивниот дел од $x-$оската.

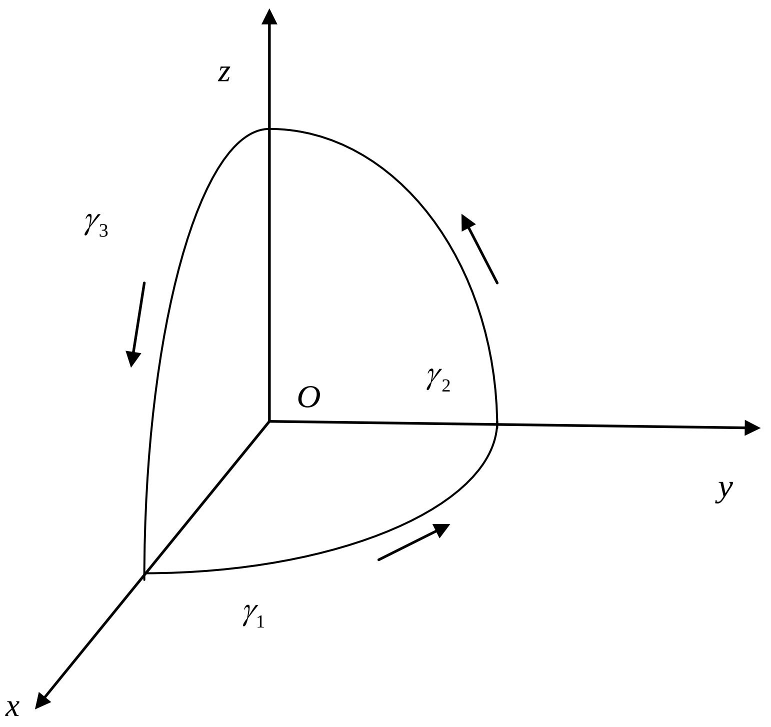
Забелешка2. Интегралот во релацијата (13.13) од последната задача е 0 затоа што интегрираме непарна функција на симетричен интервал.

Задача 13.12. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I = \int_\gamma \left(y^2 - z^2\right)dx + \left(z^2 - x^2\right)dy + \left(x^2 - y^2\right)dz$$

вдолж кривата γ што е раб на дел од сфера со радиус 1 од првиот октант $S = \left\{\left(x,y,z\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\ \right\}$ и со ориентација таква што внатрешната страна на површината S е секогаш од лево.

Решение: Го запишуваме интегралот I како сума од три интеграли вдолж кривите $\gamma_i,\ i = 1,2,3$ што лежат во координатните рамнини. Секоја од кривите γ_i претставува четвртинка од кружница со радиус 1 и центар во координатниот почеток O.



Слика 13.1.

Во рамнината xOy важат равенствата $z=0, dz=0$ откаде вдолж кривата γ подинтегралната диференцијална форма ω го добива следниов облик $\omega = y^2dx - x^2dy$.

Ја параметризираме кривата γ_1 со равенките $x=\cos\varphi, y=\sin\varphi, \left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$ откаде за диференцијалната форма ω вдолж γ_1 добиваме:

$$\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_1} y^2dx - x^2dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi\right)d\varphi = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi d\varphi = -\frac{4}{3}.$$

Да забележиме уште дека очигледно важат равенствата:

$$\int_{\gamma_2}\omega = \int_{\gamma_3}\omega = \int_{\gamma_1}\omega = -\frac{4}{3}$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I=\int_{\gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega+\int_{\gamma_3}\omega=3\int_{\gamma_1}\omega=-4\,.$$ ☻

Задача 13.13. Докажи дека секое потенцијално векторско поле е конзервативно.

Доказ: Нека $\vec{u}$ е произволно потенцијално векторско поле. Од тоа што $\vec{u}$ е потенцијално имаме дека постои скаларно поле φ така што $\vec{u}$ се совпаѓа со неговиот градиент, т.е. $\vec{u}=grad\varphi$.

Ќе го пресметаме криволинискиот интеграл:

$$A=\int_{\gamma}\langle u,\tau\rangle dl$$

вдолж по делови глатка крива γ, каде што τ е единечен тангентен вектор на кривата γ. Од условот $u=grad\varphi$, па имаме:

$$A=\int_{\gamma}\langle u,\tau\rangle dl=\int_{\gamma}\langle grad\varphi,\tau\rangle dl=\int_{M_0M_1}\frac{\partial\varphi}{\partial l}dl=\varphi\left(M_1\right)-\varphi\left(M_0\right)$$

Следува дека интегралот не зависи од кривата на интегрирање туку само од почетната и крајната точка. Заклучуваме дека полето е конзервативно. ☻

Забелешка. Криволинискиот интеграл $A=\int_{\gamma}\langle u,\tau\rangle dl$ има и физичко толкување. Работата што ја извршува сила u при пренос на материјална точка од позиција M_0 до позиција M_1 вдолж крива γ ја пресметуваме со релацијата $A=\int_{\gamma}\langle u,\tau\rangle dl$. Во потенцијално векторско поле таа се совпаѓа со разликата во потенцијали на точките M_1 и M_0.

Задача 13.14. Нека $\vec{u}$ е произволно векторско поле. Дали $rot\vec{u}$ е конзервативно векторско поле?

Решение: Да забележиме дека роторот на секое конзервативно поле е нула. Ако $\vec{u_1} = rot\vec{u}$ е конзервативно векторско поле тогаш би требало да важи $rot\vec{u_1} = rot\left(rot\vec{u}\right) = 0$. Нека $\vec{u} = \left(xz, yz, 0\right)$. Ако пресметаме ротор од роторот на $\vec{u}$ добиваме $rot\left(rot\vec{u}\right) \neq 0$. ☻

Задача 13.15. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy.$$

Решение: Да забележиме дека векторското поле $\vec{u}\left(x, y\right) = \left(x, y\right)$ е потенцијално. Имено важи релацијата:

$$xdx + ydy = \frac{1}{2} d\left(x^2 + y^2\right)$$

откаде заклучуваме дека интегрирањето не зависи од кривата вдолж која интегрираме туку од крајните точки. Следува дека:

$$I = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\Big|_{(0,1)}^{(3,-4)} = 12. \text{ ☻}$$

Забелешка. Во задача 14 ползувавме дека циркулацијата на дадено векторско поле $\vec{u}$ е нула акко роторот е нула, т.е.

$$curl\vec{u} = \oint_{\gamma} \langle u, \tau \rangle dl = 0 \Leftrightarrow rot\vec{u} = 0.$$

Задача 13.16. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$$

Решение: Слично на претходниот пример да забележиме дека важи:

$$(x-y)(dx-dy) = \frac{1}{2} d(x-y)^2$$

откаде за интегралот добиваме $I = \left.\frac{(x-y)^2}{2}\right|_{(1,-1)}^{(1,1)} = -2$. ☻

Задача 13.17. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$$

вдолж крива што не ја пресекува Oy-оската.

Решение: Нека $P(x,y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x,y) = -\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Да забележиме дека:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$$

Следува дека во произволна проста сврзана област што не содржи точки од Oy-оската подинтегралната диференцијална форма ω е потполн диференцијал на некоја функција. Оттука заклучуваме дека интегралот не зависи од кривата на интегрирање туку од крајните точки. Правиме специјален избор на по делови глатка крива:

$$y = 1,\ dy = 0 \text{, за } 2 \leq x \leq 1 \text{ и } x = 1,\ dx = 0 \text{, за } 1 \leq y \leq 2$$

Значи одиме по искршена линија. Прво интегрираме по сегментот $y = 1,\ x \in [2,1]$, а потоа по сегментот $x = 1,\ y \in [1,2]$. За интегралот добиваме: $I = \int_2^1 \frac{dx}{x^2} - \int_1^2 dy = -\frac{3}{2}$. ☻

Задача 13.18. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I=\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$$

вдолж крива што не ја пресекува симетралата на првиот квадрант.

Решение: Нека означиме $P(x,y)=-\dfrac{y}{(x-y)^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{x}{(x-y)^2}$, $x\neq y$. Да забележиме дека важат релациите:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}.$$

Следува дека во произволна проста сврзана област што не содржи точки од симетралата на првиот квадрант $y=x$, подинтегралната диференцијална форма ω е потполн диференцијал на некоја функција. Оттука заклучуваме дека интегралот не зависи од кривата на интегрирање туку од крајните точки. Правиме специјален избор на по делови глатка крива:

$$y=-1,\ dy=0,\ \text{за}\ 0\le x\le 1\ \text{и}\ x=1,\ dx=0,\ \text{за}\ -1\le y\le 0.$$

Значи одиме по искршена линија. Прво интегрираме по сегментот $y=-1,\ x\in[0,1]$, а потоа по сегментот $x=1,\ y\in[-1,0]$. За интегралот добиваме:

$$I=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0\frac{dy}{(1-y)^2}=\frac{1}{x+1}\Big|_1^0+\frac{1}{1-y}\Big|_{-1}^0=1.$$ ☻

Задача 13.19. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I=\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$$

вдолж крива што не ја пресекува Oy-оската.

Решение: Да забележиме дека важат релациите:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

Слично на претходната задача интегрираме вдолж сегментот:

$$y=\pi, dy=0, \ \ 1\le x\le 2$$

откаде за интегралот добиваме:

$$I=\int_1^2\left(1-\frac{\pi^2}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}\right)dx=\left(x+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right)\Big|_1^2=1+\pi\ .$$ ☻

Задача 13.20. Определи ја функцијата u ако е даден нејзиниот диференцијал:

$$du=\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$$

Решение: Одиме со релацијата:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt+C$$

при избор на точка $x_0=y_0=0$. Добиваме:

$$u(x,y)=\int_0^x t^2dt+\int_0^y\left(x^2-2xt-t^2\right)dt+C=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C\ .$$ ☻

Задача 13.21. Определи ја функцијата u ако е даден нејзиниот диференцијал:

$$du=\frac{\left(x^2+2xy+5y^2\right)dx+\left(x^2-2xy+y^2\right)dy}{(x+y)^3}$$

Решение: Одиме со релацијата:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt+C$$

при избор на точка $x_0 = 0$ и $y_0 \neq 0$ е произволно и фиксирано. Да забележиме дека:

$$P(x,y) = \frac{1}{x+y} + \frac{4y^2}{(x+y)^3}, \quad Q(x,y) = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}$$

откаде добиваме:

$$u(x,y) = \int_0^x \left(\frac{1}{t+y} + \frac{4y^2}{(t+y)^3} \right) dt + \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{t} + C =$$

$$= \ln|x+y| - \ln|y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + 2 + \ln|y| - \ln|y_0| + C =$$

$$= \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1, \ C_1 = const. \ ☻$$

Задача 13.22. Определи ја функцијата ω ако е даден нејзиниот диференцијал:

$$d\omega = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$$

Решение: Одиме со методот на групирање. Го запишуваме $d\omega$ во следниот облик:

$$d\omega = x^2dx + y^2dy + z^2dz - 2(yzdx + xzdy + xzdz) = d\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz \right)$$

откаде добиваме: $\omega(x,y,z) = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz + C$. ☻

Забелешка. Спореди го овој метод на групирање со методот на антидиференцирање од глава 2.

Задача 13.23. Определи ја функцијата ω ако е даден нејзиниот диференцијал:

$$d\omega = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz$$

Решение: Одиме со релацијата:

$$\omega(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + C$$

откаде добиваме:

$$\omega(x,y,z) = \int_{x_0}^{x}\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right)dt + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{t^2}\right)dt - \int_{z_0}^{z}\frac{xy}{t^2}dt + C$$

каде што (x_0, y_0, z_0) е некоја фиксирана точка од областа на интегрирање $K \subseteq \mathbb{R}^3$ што не содржи точки од рамнините xOy и xOz.

Со директно интегрирање имаме:

$$\omega(x,y,z) = x\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) - x_0\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) + \frac{xy}{z_0} - \frac{x}{y} - \frac{xy_0}{z_0} + \frac{x}{y_0} + \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z_0} + C\,.$$

Специјално, за избор на пример $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ добиваме:

$$\omega(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C_1\,.$$ ☻

Задача 13.24. Ползувајќи ја теоремата на Грин пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \oint_{\gamma^+}\left(e^x\left(1 - \cos y\right)\right)dx + \left(e^x\left(\sin y - y\right)\right)dy$$

каде што γ^+ е раб на областа $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi,\ 0 < y < \sin x\right\}$.

Решение: Одиме со теоремата на Остроградски во рамнина☺ :

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\left(\sin y - y\right)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\left(1-\cos y\right)\right)\right) dxdy = \\
&= -\iint_D ye^x dxdy = -\int_0^{\pi} e^x dx \int_0^{\sin x} ydy = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x \sin^2 xdx = \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^x\left(1-\cos 2x\right)dx = -\frac{1}{4}e^x\left(1-\frac{1}{5}\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}\right) = \\
&= -\frac{1}{5}\left(e^{\pi}-1\right)
\end{aligned}$$

при што ползувавме позитивна ориентација на кривата γ. ☻

Задача 13.25. Пресметај ја разликата на криволиниските интеграли:

$$I_1 = \int_{AmB} \left(x+y\right)^2 dx - \left(x-y\right)^2 dy \ \text{ и } \ I_2 = \int_{AnB} \left(x+y\right)^2 dx - \left(x-y\right)^2 dy$$

каде што AmB е сегмент од права што ги поврзува точките $A(1,1)$ и $B(2,6)$ додека AnB е дел од парабола со вертикална оска што минува низ точките $A(1,1)$, $O(0,0)$ и $B(2,6)$.

Решение: Да забележиме дека равенката на параболата што минува низ точките $A(1,1)$, $O(0,0)$ и $B(2,6)$ е определена со:

$$AnB:\ y = 2x^2 - x,$$

додека разликата на интегралите $I_2 - I_1$ претставува криволиниски интеграл по затворена крива $AnBmA$ со позитивна ориентација што ограничува област $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Исполнети се условите од теоремата на Грин, па имаме дека:

$$I_2 - I_1 = \oint_{AnBmA} \left(x+y\right)^2 dx - \left(x-y\right)^2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\left(x-y\right)^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x+y\right)^2 \right) = -4\iint_D xdxdy$$

откаде ползувајќи ја теоремата за премин од двоен кон повторен интеграл добиваме:

$$I_2 - I_1 = -4\int_1^2 x dx \int_{2x^2-x}^{5x-4} dy = -4\int_1^2 \left(6x^2 - 4x - 2x^3\right) dx = -2 .$$

Следува дека $I_1 - I_2 = 2$. ☻

Задача 13.26. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \int_{AmO} \left(e^x \sin y - my\right) dx + \left(e^x \cos y - m\right) dy ,$$

каде што AmO е горната полукружница зададена со равенката $x^2 + y^2 = ax$, и ориентација од точката $A(a,0)$ до точката $O(0,0)$.

Решение: Да забележиме дека подинтегралната диференцијалната форма:

$$\omega = \left(e^x \sin y - my\right) dx + \left(e^x \cos y - m\right) dy$$

вдолж сегментот $[0,a]$ е нула. Следува дека криволинискиот интеграл по кривата AmO е еднаков на криволинискиот интеграл по затворената крива $AmOA$ што се состои од кривата AmO и сегментот $[0,a]$. Да забележиме дека затворената крива $AmOA$ ограничува област D определена со:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \sqrt{ax - x^2}\right\}$$

Исполнети се условите од теоремата на Грин, па имаме:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y - m\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin y - my\right) \right) dxdy = m\iint_D dxdy = \frac{m}{8}a^2\pi . \quad ☻$$

Задача 13.27. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I=\int_{AmB}\left(\varphi(y)e^{x}-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^{x}-m\right)dy$$

каде што φ,φ' се непрекинати функции, додека AmB е произволна крива што ги поврзува точките $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ со особина областа D ограничена со кривата AmB и сегментот $\overline{AB}$ има Жорданова мера еднаква на дадена вредност P.

Решение: Интегралот I вдолж кривата AmB ќе го претставиме како збир на криволиниски интеграл вдолж затворена крива $AmBA$ и криволиниски интеграл вдолж сегментот $\overline{AB}$:

$$I=\oint_{AmBA}\left(\varphi(y)e^{x}-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^{x}-m\right)dy+\int_{AB}\left(\varphi(y)e^{x}-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^{x}-m\right)dy$$

Ги воведуваме ознаките:

$$I_1=\oint_{AmBA}\left(\varphi(y)e^{x}-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^{x}-m\right)dy$$

односно:

$$I_2=\int_{AB}\left(\varphi(y)e^{x}-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^{x}-m\right)dy$$

Да го пресметаме првиот интеграл I_1. Исполнети се условите од теоремата на Грин, па добиваме:

$$I_1=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(y)e^{x}-m\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi(y)e^{x}-my\right)\right)=m\iint_D dxdy=mP\,.$$

За пресметка на вториот интеграл I_2, од записот на I како збир $I=I_1+I_2$, подинтегралната диференцијална форма ω ја запишуваме во следниов облик:

$$\omega=\left(\varphi(y)e^{x}-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^{x}-m\right)dy=$$

$$=\left(\varphi(y)e^{x}-my\right)dx+\left(\varphi'(y)e^{x}-mx\right)dy+m(x-1)dy=$$

$$= du + m(x-1)\,dy \,.$$

каде што du е потполн диференцијал на некоја функција. Следува дека:

$$I_2 = \int\limits_{\overline{AB}} du + m\int\limits_{\overline{AB}} (x-1)\,dy \tag{13.14}$$

Да забележиме дека првиот интеграл од горната релација не зависи од кривата на интегрирање, па имаме:

$$\int\limits_{\overline{AB}} du = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\varphi(y_1)e^{x} - my_1\right)dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \left(\varphi'(y)e^{x_2} - mx_2\right)dy =$$
$$= \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - m(x_2y_2 - x_1y_1)$$

За вториот интеграл од горната релација (13.14) одиме со равенството што важи на сегментот $\overline{AB}$: $y = y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, откаде добиваме:

$$m\int\limits_{\overline{AB}} (x-1)\,dy = m\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} (x-1)\,dx = \frac{m}{2}(y_2 - y_1)(x_1 + x_2) - m(y_2 - y_1)$$

Конечно, за бараниот интеграл добиваме:

$$I = I_1 + I_2 = mP + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) - m(y_2 - y_1)\,. \quad ☻$$

Задача 13.28. Определи го обликот на двапати непрекинато диференцијабилни функции $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ Q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ со особина криволинискиот интеграл:

$$I = \oint\limits_{\gamma} P(x+\alpha, y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\,dy$$

за произволна затворена крива γ не зависи од параметрите α и β.

Решение: Да забележиме дека од условот на задачата функциите P и Q го задоволуваат следново равенство:

$$\oint_{\gamma} P(x+\alpha, y+\beta)dx + Q(x+\alpha, y+\beta)dy = \oint_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

вдолж произволна затворена крива γ, откаде добиваме:

$$I_1 = \oint_{\gamma} \overline{P}(x,y)\,dx + \overline{Q}(x,y)\,dy = 0\,,$$

каде што $\overline{P}(x,y) = P(x+\alpha, y+\beta) - P(x,y),\ \overline{Q}(x,y) = Q(x+\alpha, y+\beta) - Q(x,y)$.

Потребен и доволен услов за криволиниски интеграл вдолж произволна затворена крива γ да е еднаков на нула е во областа D ограничена со таа крива да важи равенството:

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial y}$$

тврдење што следува од теоремата на Грин. Другата перспектива на тврдењето е да заклучиме дека циркулацијата на векторското поле вдолж произволна затворена крива γ што лежи во проста сврзана област е нула, па векторското поле е потенцијално.

Ги воведуваме ознаките: $x+\alpha=\theta$ и $y+\beta=\vartheta$, откаде горното равенство го добива обликот:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}(\theta,\vartheta) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial \vartheta}(\theta,\vartheta) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

односно:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}(\theta,\vartheta) - \frac{\partial P}{\partial \vartheta}(\theta,\vartheta) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

Да забележиме дека левата страна на горното равенство не зависи од θ и ϑ со оглед на тоа што десната страна на равенството зависи само од x и y. Следува дека:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}(\theta,\vartheta) - \frac{\partial P}{\partial \vartheta}(\theta,\vartheta) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = C,\ C = const$$

Од последнава релација го добиваме равенството:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y)-Cx\right)=\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

откаде заклучуваме дека:

$$Q(x,y)-Cx=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\psi(y),\quad P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\varphi(x)$$

каде што $u,\ \varphi,\ \psi$ се двапати непрекинато диференцијабилни функции.

Конечно го добиваме обликот на бараните функции :

$$Q(x,y)=Cx+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\psi(y),\quad P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\varphi(x),\quad C=const.$$ ☻

Задача 13.29. Пресметај го криволинискиот интеграл:

$$I=\oint_{\gamma}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

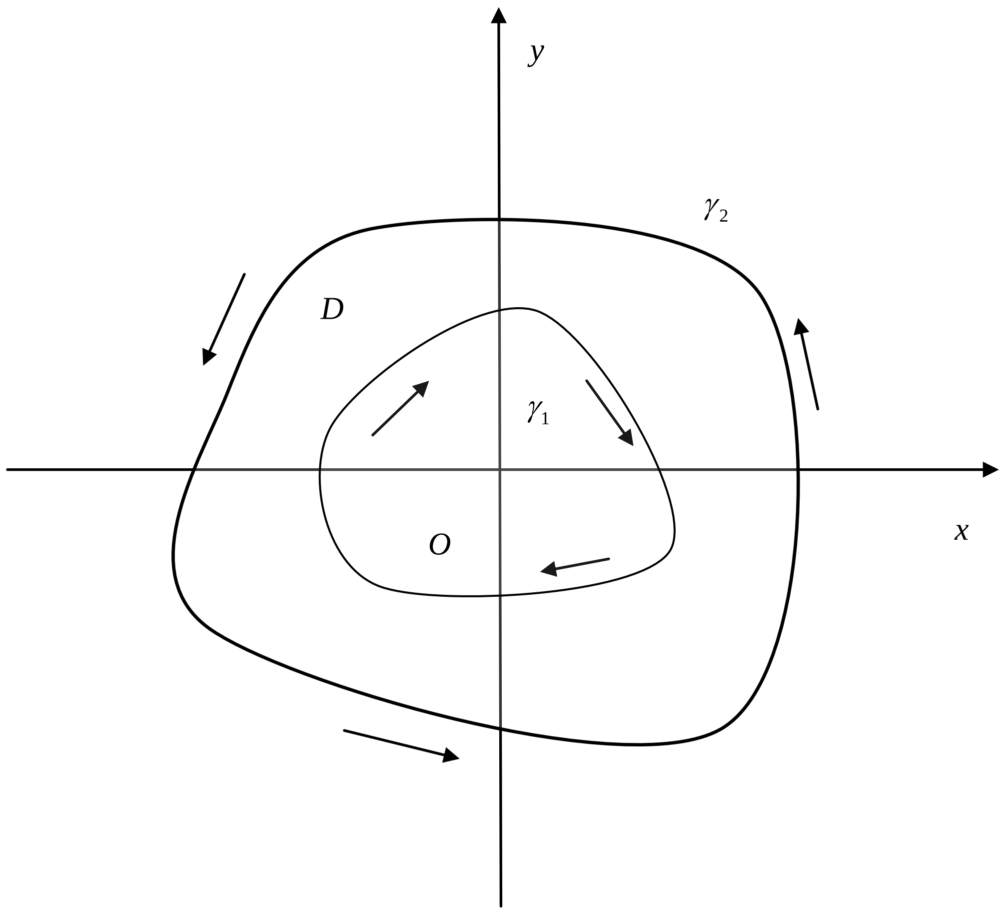
каде што γ е проста затворена крива што не минува низ координатниот почеток и со позитивна ориентација.

Решение: Ќе разгледаме две можности. Во првата претпоставуваме дека кривата γ не го обиколува координатниот почеток. Тогаш исполнети се условите од теоремата на Грин па имаме:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)dxdy=\iint_D\frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=0$$

Останува да го разгледаме вториот случај кога кривата γ го обиколува координатниот почеток $O(0,0)$. Првиот коментар е дека теоремата на Грин е неприменлива во овој случај.

Да го пресметаме интегралот I непосредно. Диференцијалната форма под знакот на интегралот ја означуваме со ω. Ќе докажеме дека интегралот $I=\oint\limits_{\gamma}\omega$ не зависи од кривата на интегрирање што го обиколува координатниот почеток. Нека γ_1 и γ_2 се две произволни



Слика 13.2.

затворени глатки или по делови глатки криви што го обиколуваат координатниот почеток, не се пресекуваат и ограничуваат област $D\subseteq\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Да забележиме дека при позитивна ориентација на работ $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$ на областа D, кривите γ_1 и γ_2 се со спротивна ориентација. Имено работ на повеќекратно сврзаната област D е со позитивна ориентација доколку при движењето вдолж работ во оваа насока областа D е секогаш од левата страна (види слика 13.2).

Со оглед на тоа што областа D не содржи сингуларни точки за диференцијалната форма ω (координатниот почеток не е во D), исполнети се условите од теоремата на Грин за повеќекратно сврзани области, па добиваме:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) dxdy = \oint_\gamma \omega = \oint_{\gamma_1} \omega + \oint_{\gamma_2} \omega = 0$$

Да забележиме дека γ_2 е со позитивна ориентација, додека γ_1 е со негативна, па заклучуваме дека важи:

$$\oint_{\gamma_2} \omega = -\oint_{\gamma_1} \omega = \oint_{\gamma_1^+} \omega$$

што и сакавме да докажеме. Правиме специјален избор на крива околу координатниот почеток со позитивна ориентација:

$$\gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \varepsilon \cos\varphi,\ y = \varepsilon \sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$$

откаде добиваме:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \cos^2\varphi + \varepsilon^2 \sin^2\varphi}{\varepsilon^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi .$$ ☻

Задача 13.30. Докажи дека плоштината на делот од рамнината D ограничен со проста затворена крива γ е определена со релацијата:

$$P(D) = \frac{1}{2}\oint_\gamma xdy - ydx \tag{13.15}$$

Доказ: Одиме со теоремата на Грин. Да забележиме дека $P(x,y) = -y$ и $Q(x,y) = x$ откаде нашиот интеграл го добива обликот:

$$\oint_\gamma xdy - ydx = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dxdy = 2\iint_D dxdy = 2P(D)$$

Релацијата (13.15) следува. ☻

Задача 13.31. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со елипсата

$$\gamma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Решение: Воведуваме параметризација на елипсата со релациите:

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

Ја ползуваме релацијата од претходната задача, па добиваме:

$$P=\frac{1}{2}\oint_{\gamma} xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos\theta\right)\left(b\cos\theta\right)d\theta-\left(b\sin\theta\right)\left(-a\sin\theta\right)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abd\theta=ab\pi\,.\quad ☻$$

Забелешка. Специјално за $a=b$ ја добиваме повторно формулата за пресметување на плоштина на круг со даден радиус a.

Задача 13.32. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата γ зададена со равенката:

$$\gamma:\ \left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1},\ a>0,\ b>0,\ n>0$$

и координатните оски.

Решение: Воведуваме обопштена поларна смена со равенките:

$$x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi,\ \ y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi,\ \ \left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$$

откаде ја добиваме равенката на кривата во поларна форма:

$$r = \cos^{2-\frac{2}{n}}\varphi + \sin^{2-\frac{2}{n}}\varphi$$

Ползувајќи ја горната релација ја параметризираме кривата по поларниот агол φ со равенките:

$$x = \frac{a\left(\cos^2\varphi\sin^{\frac{2}{n}}\varphi + \sin^2\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\right)}{\sin^{\frac{2}{n}}\varphi}, \quad y = \frac{b\left(\cos^2\varphi\sin^{\frac{2}{n}}\varphi + \sin^2\varphi\cos^{\frac{2}{n}}\varphi\right)}{\cos^{\frac{2}{n}}\varphi}, \; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Сега од равенството $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}tg^{\frac{2}{n}}\varphi, \; 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ добиваме:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{na}\frac{\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi}d\varphi, \quad \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ја квадрираме горната релација за x и заменуваме во последното равенство:

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{ab}{n}\left(\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^{3-\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\right)d\varphi$$

Да забележиме дека диференцијалната форма $\omega = xdy - ydx$ е нула на координатните оски, па плоштината на бараната фигура ја пресметуваме со релацијата $P = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} xdy - ydx$.

Од равенството:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3-\frac{2}{n}}\varphi\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi d\varphi$$

за плоштината P конечно добиваме:

$$P = \frac{2ab}{n}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\cos^{3-\frac{2}{n}}\varphi d\varphi\right) =$$

Со директна пресметка на првиот интеграл и ползувајќи ги резултатите за Ојлерови интеграли од глава 8 за вториот интеграл добиваме:

$$P=\frac{ab}{n}\left(\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+B\left(\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{ab}{n}\left(1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right). ☻$$

Задача 13.33. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата γ зададена со равенката:

$$\gamma:\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\left(\frac{y}{b}\right)^{n},\ a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0\,.$$

Решение: Воведуваме обопштена поларна смена со равенките:

$$x=ar\cos^{\frac{2}{2n+1}}\varphi,\quad y=br\sin^{\frac{2}{2n+1}}\varphi$$

откаде ја добиваме равенката на кривата γ во поларна форма:

$$\gamma:\quad r=c\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi$$

Од равенката заклучуваме дека при менување на параметарот φ од 0 до $\frac{\pi}{2}$ кривата „поаѓа“ од координатниот почеток и се враќа во него, т.е. кривата прави јазол. Ползувајќи ја равенката на кривата во поларна форма ја параметризираме по параметарот φ со равенките:

$$x=ac\cos^{\frac{2n+2}{2n+1}}\varphi\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi,\ y=bc\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\varphi\sin^{\frac{2n+2}{2n+1}}\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

Слично на претходниот пример го пресметуваме количникот:

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}tg^{\frac{2}{2n+1}}\varphi,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

откаде за диференцијалот на количникот добиваме:

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2b}{a(2n+1)}\frac{\sin^{\frac{2}{2n+1}-1}\varphi}{\cos^{\frac{2}{2n+1}-1}\varphi}d\varphi$$

Оттука за диференцијалната форма $\omega=\frac{1}{2}(xdy-ydx)$ имаме:

$$\omega=\frac{1}{2}x^2d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{abc^2}{2n+1}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$

Следува дека плоштината на бараната фигура е:

$$P=\frac{1}{2}\oint_{\gamma}xdy-ydx=\frac{abc^2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1.Нека кривите γ и δ се еквивалентни. Докажи дека тогаш тие се истовремено прости, затворени и ректификациони и имаат исти должини.

2.Нека кривата $\gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)),\ t \in I = [a,b]$ е ректификациона и нека со $l(\gamma, c, r)$ ја означиме должината на кривата $\gamma(t),\ t \in [c,r]$. Докажи дека важи $l(\gamma, a, r) = l(\gamma, a, c) + l(\gamma, c, r)$.

3.Нека $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$ е непрекинато диференцијаболна крива параметризирана со природниот параметар. Докажи дека тангентниот вектор $\gamma'(s)$ има единична должина.

4. Пресметај ја должината на лакот на винтовата линија

$$x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = bt,\ \ a,b > 0 \text{ од точката } t = 0 \text{ до } t = 2\pi .$$

5. Нека γ е по делови глатка крива со почетна и крајна точка A и B соодветно, f и g се ограничени функции на γ. Нека постојат интегралите $\int_\gamma fds$ и $\int_\gamma gds$.

Покажи дека тогаш важи:

а) $\int_\gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\gamma fds + \beta \int_\gamma gds,\ \ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

б) $\int_{AB} fds = \int_{AC} fds + \int_{CB} fds$ каде што $C \in |\gamma|$ е меѓу A и B.

в) $\left| \int_\gamma fds \right| \le \int_\gamma |f| ds$

г) Ако $f(x) \le g(x),\ \ \forall x \in |\gamma|$, тогаш $\int_\gamma fds \le \int_\gamma gds$.

6. Пресметај ја вредноста на криволинискиот интеграл на функцијата $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ по должината со параметризација

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),\ \ 0 \le t \le 2\pi .$$

7. Пресметај $\int_\gamma (x+y) ds$, каде што γ е триаголникот со темиња во точките $(0,0), (1,0), (0,1)$.

8. Пресметај го интегралот на функцијата $f(\ x,\ = y) +\ {}^{2}2$ долж горната полукружница на единечната кружница во рамнината.

9. Пресметај го интегралот на функцијата $f(\ x,\ y,\ z=)$ ys i долж едниот лак на кривата $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ t \in [0, 2\pi]$.

10. Пресметај го криволинискиот интеграл $\int_\gamma (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ каде што кривата γ е параболата $y = x^2$ од точката $A(-1,1)$ до точката $B(1,1)$.

Докажи ги следните тврдења: (11-13)

11. Ако постои $\int_{\gamma} f(x)dx_h$, тогаш $\int_{\gamma-} f(x)dx_h = -\int_{\gamma} f(x)dx_h$ каде што $\gamma-$ е кривата γ со спротивна орјентација.

12. Ако γ и δ се еквивалентни криви во $\mathbf{R}^3$ и ако $f(x)$ е ограничена функција дефинирана на $|\gamma|$, тогаш постои $\int_{\gamma} f(x)dx_h$ ако и само ако постои $\int_{\delta} f(x)dx_h$ и важи: $\int_{\gamma} f(x)dx_h = \int_{\delta} f(x)dx_h$ ако γ и δ имаат иста орјентација, и

$\int_{\gamma} f(x)dx_h = -\int_{\delta} f(x)dx_h$ ако γ и δ имаат спротивна орјентација.

13. Нека γ_1 и γ_2 се криви во $\mathbf{R}^3$ и нека $f(x)$ е ограничена функција дефинирана на $|\gamma_1| \cup |\gamma_2|$. Тогаш криволиниските интеграли $\int_{\gamma_1} f(x)dx_h$ и $\int_{\gamma_2} f(x)dx_h$ постојат ако и само ако постои криволинискиот интеграл $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(x)dx_h$. Во тој случај важи

$$\int_{\gamma_1} f(x)dx_h + \int_{\gamma_2} f(x)dx_h = \int_{\gamma_1+\gamma_2} f(x)dx_h .$$

Пресметај го следниов криволиниски интеграл од прв тип (12-17)

14. $I = \int_{\gamma} y^2 ds$, каде што γ е делот од циклоидата

$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$ меѓу точките $(0,0)$ и $(2\pi, 0)$.

15. $I = \int_{\gamma} (x - y)ds$, каде што γ е кружницата $x^2 + y^2 = ax.$

16. $I = \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2)ds$, каде што γ е делот од винтовата линија

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

17. $I = \int_{\gamma} xyds$, каде што γ е работ на правоаголникот ограничен со правите $x = 0, \quad y = 0, \quad x = 4, \quad y = 2.$

18. $I = \int_{\gamma} x^2 ds$, каде што γ е контурата на пресекот на $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x + y + z = 0$.

19. Пресметај ја должината на лакот на кривата $y = a \cdot \arcsin\frac{x}{a}, \quad z = \frac{a}{4} \cdot \ln\frac{a - x}{a + x}$ од точката $(0,0,0)$ до (x_0, y_0, z_0) каде што $a, x_0, y_0, z_0 > 0$.

20. Пресметај ја должината на делот од кривата γ_1, што е пресекот на површините $S_1 : (x - y)^2 = 3(x + y)$ и $S_2 : x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ меѓу точките $O(0,0,0)$ и $B(3, 0, \sqrt{8})$.

21. Пресметај ја должината на делот од кривата γ_1, што е пресекот на површините $S_1 : x^2 = 3y$ и $S_2 :\ 2xy = 9z$ меѓу точките $O(0,0,0)$ и $B(3,3,2)$.

Пресметај го криволинискиот интеграл од прв вид $I=\oint\limits_{\gamma}|y|ds$ каде што γ е кривата (лемниската): $\gamma:\ \left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right),\quad z=0,\quad a>0.$

22. Пресметај го криволинискиот интеграл од прв вид $I=\oint\limits_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2}ds$ каде што γ е кривата : $\gamma:\ x^2+y^2=ax,\quad z=0,\quad a>0.$

23. Пресметај го криволинискиот интеграл од втор вид $I=\int\limits_{\gamma}\frac{-ydx+xdy}{x^2+\left(y-6\right)^2}$ каде што γ е делот од кружницата : $\gamma:\ x^2+y^2-12y+18=0,\quad z=0$ меѓу точките $A\left(3,3,0\right)$ и $B\left(-3,9,0\right)$ со ориентација од точката B кон A.

24. Пресметај го криволинискиот интеграл од втор вид $I=\oint\limits_{\gamma}zdx+xdy+ydz$ каде што кривата γ е пресек на површините: $S_1:\ x^2+y^2+z=4,\quad S_2:\ x^2+y^2+z^2=4z.$ Гледајќи од позитивниот дел на $z-$оската, γ е позитивно ориентирана.

25. Пресметај го криволинискиот интеграл од втор вид $I=\oint\limits_{\gamma}zdx+xdy+ydz$ каде што кривата γ е пресек на површината: $S:\ z=x^2+y^2$ со површините $S_1:\ z=\frac{3}{4}-y,\quad S_2:\ z=\frac{3}{4}+y.$ Гледајќи од позитивниот дел на $z-$оската, γ е позитивно ориентирана.

26. Пресметај го криволинискиот интеграл од втор вид $I=\oint\limits_{\gamma}\left(x+y\right)dx+\left(x-y\right)dy$ каде што кривата γ е кружницата: $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=4.$

27. Пресметај го криволинискиот интеграл од втор вид $I=\int\limits_{AO}\left(e^x\sin y-py\right)dx+\left(e^x\cos y-p\right)dy$ каде што кривата AO е горната полукружница: $x^2+y^2=ax,\quad A\left(a,0\right),O\left(0,0\right).$

28. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со астроидата $x=a\cos^3 t,$ $y=b\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Докажи дека подинтегралниот израз е тотален диференцијал и пресметај го криволинискиот интеграл: (29.-30.)

29. $\int\limits_{AB}xdx-ydy,$ каде што $A\left(0,1\right),B\left(3,-4\right).$

30. $\int\limits_{AB}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy,$ каде што $A\left(-2,-1\right),B\left(3,0\right).$

31. Пресметај ја плоштината на областа во рамнината $z=0$, ограничена со затворената крива (елипса): $\gamma : x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\quad z=0,\quad t\in[0,2\pi]$ за $a>0$.

32. Пресметај ја плоштината на областа во рамнината $z=0$, ограничена со кривите: параболата $\gamma :\ \left(x^2+y^2\right)^2 = 2ax,\ a>0$ и $x-$оската.

33. Пресметај ја плоштината на делот од рамнината ограничен со кривата γ зададена со равенката:

$$\gamma :\ \left(x^2+y^2\right)^2 = ax\left(x^2-3y^2\right),\ z=0$$

каде $a>0.$

34. Со примена на Гриновата формула пресметај го интегралот

$$I=\oint_\gamma 2\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y\right)^2 dy,$$

каде γ е работ на триаголникот со темиња во точките $A(1,1), B(2,2), C(1,3)$ во позитивна ориентација.

35. Пресметај го криволинискиот интеграл од втор вид $I=\int_{OA} 2xydx - x^2dy$ каде што OA е лак со почеток во $O(0,0)$ и крај во $A(2,1)$

а) по правата $y=\dfrac{x}{2}$,

б) по $y=\dfrac{x^2}{4}$,

в) по $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}}$,

г) по искршената линија $OBA,\quad B(2,0)$,

д) по искршената линија $OCA,\quad C(0,1)$.

36. Пресметај $I=\oint_\gamma (x+y)dx+(x-y)dy$ каде што γ е елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ во насока спротивна од движењето на стрелките на часовникот.

37. Пресметај $I=\oint_\gamma \dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ каде што γ е кружницата $x^2+y^2=R^2$ во насока спротивна од движењето на стрелките на часовникот.

38. Пресметај го криволинискиот интеграл $I = \int\limits_{(a_1,a_2,a_3)}^{(b_1,b_2,b_3)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ каде што (a_1,a_2,a_3) е точка од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а (b_1,b_2,b_3) е точка од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$.

ГЛАВА 14

ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ

ДЕФИНИЦИИ И ТЕОРЕМИ

Плоштина на површина

Нека $S \subset \mathbb{R}^3$ е глатка површина дадена со равенката:

$$z = f\left(x, y\right), \quad \left(x, y\right) \in D \tag{14.1}$$

или имплицитно:

$$F\left(x, y, z\right) = 0, \tag{14.2}$$

или параметарски:

$$x = \varphi\left(u,v\right), \quad y = \psi\left(u,v\right), \quad z = \chi\left(u,v\right), \quad \left(u,v\right) \in \Delta, \tag{14.3}$$

каде што φ, ψ, χ се непрекинати функции на областа Δ. Променливите u, v ги викаме параметри.

Со формулата (14.3) на секоја точка $\left(u,v\right) \in \Delta,$ и` придружуваме точка $\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^3$. Множеството на тие точки формираат површина S.

Равенката (14.3) може да се запише во векторски облик:

$$\vec{r}\left(u,v\right) = \varphi\left(u,v\right)\vec{i} + \psi\left(u,v\right)\vec{j} + \chi\left(u,v\right)\vec{k}, \quad \left(u,v\right) \in \Delta \tag{14.4}$$

каде што $\vec{r} = \varphi\vec{i} + \psi\vec{j} + \chi\vec{k}$ е радиус вектор на точката $M\left(x, y, z\right)$, додека $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ е ортонормална база.

Површински интеграли од прв тип

Теорема 14.1. Нека е дадена површина $S \subset \mathbb{R}^3$ со равенката (14.4) и на неа е дефинирана непрекината функција $f(x,y,z)$. Тогаш,

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_\Delta f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}dudv$$

каде што $E = \dot{\vec{r}}_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $G = \dot{\vec{r}}_v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$, и

$F = \dot{\vec{r}}_u \cdot \dot{\vec{r}}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$ се Гаусови коефициенти.

Во специјален случај, ако равенката на S е од облик (14.1) каде што $z = f(x,y)$ е инјективна,непрекинато диференцијабилна функција, тогаш

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy,$$

каде што $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Овој интеграл не зависи од изборот на страната на површината S.

Површински интеграли од втор тип

Теорема 14.2. Нека $S \subset \mathbb{R}^3$ е глатка двострана површина, на која е избрана една од двете страни, определена со насоката на нормалата $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, а $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ и $R = R(x,y,z)$ се три функции дефинирани и непрекинати на површината S. Тогаш

$$\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma.$$

Теорема на Гаус Остроградски. Нека $V \subset \mathbb{R}^3$ е затворена област ограничена со по делови глатка површина S. Ако $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ се непрекинати функции на V, тогаш е точно равенството:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Теорема на Стокс. Нека S е глатка површина ограничена со по делови глатка крива Γ. Нека $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ се непрекинати функции на S заедно со своите парцијални изводи. Тогаш,

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

или

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{S}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma=$$

$$=\iint_{S}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}d\sigma,$$

каде што α,β и γ се аглите меѓу нормалата на S и позитивните насоки на координатните оски.

ЗАДАЧИ

Задача 14.1. Пресметај го следниов површински интеграл од прв тип:

$$I = \iint_S (x+y+z)\,dS$$

каде што $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2,\ z \geq 0 \right\}$.

Решение: Интегрираме по горната полусфера зададена со равенката $x^2+y^2+z^2=a^2$. Да забележиме дека во точките од множеството S важат равенствата:

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2},\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},\ z>0$$

откаде за диференцијалната елементарна плоштина на површината S имаме:

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

Одиме со пресметка на интегралот I според релацијата од воведот:

$$I = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, f\left(x,y,z(x,y)\right)dxdy = a\iint_D \left(\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+1\right)dxdy$$

каде што $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < a^2 \right\}$.

Воведуваме смена со поларни координати во последниот интеграл, па добиваме:

$$I = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a-0} \left(\frac{r(\sin\varphi+\cos\varphi)}{\sqrt{a^2-r^2}}+1\right) rdr = \pi a^3$$

при што ползувавме дека $\int_0^{2\pi} (\sin\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi \int_0^{a-0} \frac{r^2dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 0$. ☻

Забелешка. Двојниот интеграл на областа $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq a^2 \right\}$ е всушност несвојствен двоен интеграл и се третира со соодветна гранична процедура. ☻

Задача 14.2. Пресметај го следниов површински интеграл од прв тип:

$$I = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS$$

каде што S е работ на телото $T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\right\}$.

Решение: Интегрираме по основата на конусот S_1 и по бочната површина S_2, па интегралот го запишуваме во облик:

$$I = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS = \iint_{S_1} \left(x^2 + y^2\right) dS + \iint_{S_2} \left(x^2 + y^2\right) dS$$

За диференцијалната елементарна плоштина на S_1 имаме $dS = dxdy$ откаде за интегралот над S_1 добиваме:

$$\iint_{S_1} \left(x^2 + y^2\right) dS = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}$$

Слично, за диференцијалната елементарна плоштина на S_2 имаме $dS = \sqrt{2} dxdy$ откаде за интегралот над S_2 добиваме:

$$\iint_{S_2} \left(x^2 + y^2\right) dS = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Следува дека $I = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$. ☻

Задача 14.3. Пресметај го следниов површински интеграл од прв тип:

$$I = \iint_S f(x, y, z) dS$$

каде што $S=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid z=2-\left(x^2+y^2\right),\ z\geq 0\right\}$ е дел од параболоидот над xOy рамнината, а функцијата $f\left(x,y,z\right)$ е дефинирана со:

(i) $f\left(x,y,z\right)=1;$ (ii) $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2$

Решение: (i) Ја пресметуваме елементарната плоштина за 2- многуобразието S :

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

откаде за површинскиот интеграл добиваме:

$$I=\iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

каде $D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=2\right\}$ е проекцијата на површината S на xOy рамнината. Воведуваме поларна смена во двојниот интеграл, па имаме:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{12}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=\frac{13}{3}\pi\ .$$

Забелешка. Геометриското толкување на површинскиот интеграл од единечна функција над дадена површина S е нејзината плоштина, во случајов плоштината на делот од параболоидот $z=2-\left(x^2+y^2\right)$ над xOy-рамнината.

(ii) Ако подинтегралната функција во I е $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2$ тогаш интегралот го добива обликот:

$$I=\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$

Слично на претходниот пример воведуваме поларни координати, па за интегралот имаме:

$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr=\frac{149}{30}\pi$$

при што за интегрирање по r воведи смена $\sqrt{1+4r^2}=u$.

Забелешка. Физичкото толкување на површинскиот интеграл над материјална површина со единечна густина $\iint_S \left(x^2+y^2\right)\cdot 1dS$ е момент на инерција I_z на материјалната површина S околу z-оската.

Доколку густината е распределена по површината S според некоја функција $\rho\left(x,y,z\right)$ тогаш моментот на инерција I_z на материјална површина S околу z-оската го пресметуваме со површинскиот интеграл $\iint_S \left(x^2+y^2\right)\cdot\rho\left(x,y,z\right)dS$. ☻

(Под густина подразбираме маса на единица плоштина, а не волумен во случајов☺).

Задача 14.4. Пресметај го следниов површински интеграл од прв тип:

$$I=\iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS$$

каде што $\vec{A}$ е векторското поле $A=xy\vec{i}-x^2\vec{j}+\left(x+z\right)\vec{k}$, додека S е делот од рамнината $2x+2y+z=6$ во првиот октант, а $\vec{n}$ е единечниот вектор што е нормален на површината S.

Решение: Го пресметуваме векторот нормален на површината S:

$$\nabla\left(2x+2y+z-6\right)=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

откаде за единечниот нормален вектор $\vec{n}$ добиваме:

$$\vec{n}=\frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{3}$$

Оттука за скаларниот производ имаме:

$$\vec{A}\cdot\vec{n}=\left(xy\vec{i}-x^2\vec{j}+\left(x+z\right)\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{3}\right)=\frac{2xy-2x^2+\left(x+z\right)}{3}=$$

$$=\frac{2xy-2x^2+\left(x+6-2x-2y\right)}{3}=\frac{2xy-2x^2-x-2y+6}{3}$$

Одиме со пресметка на интегралот:

$$I=\iint_S\left(\frac{2xy-2x^2-x-2y+6}{3}\right)dS=\iint_D\left(\frac{2xy-2x^2-x-2y+6}{3}\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=$$

$$=\iint_D\left(\frac{2xy-2x^2-x-2y+6}{3}\right)\sqrt{1+2^2+2^2}\,dxdy=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}\left(2xy-2x^2-x-2y+6\right)dy=$$

$$=\int_0^3\left(xy^2-2x^2y-xy-y^2+6y\right)\Big|_0^{3-x}dx=\frac{27}{4}$$

Задача 14.5. Пресметај го следниов површински интеграл од прв тип:

$$I=\iint_S\left(x^2+y+z\right)dS$$

каде што $S=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\right\}$ е единечната сфера во $\mathbb{R}^3$.

Решение: Воведуваме сферна параметризација на површината S со равенките: $x=\cos\varphi\sin\theta,\ y=\sin\varphi\sin\theta,\ z=\cos\theta,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi$

Ја пресметуваме елементарната плоштина на 2-многуобразието S со помош на релацијата:

$$dS=\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi d\theta$$

ползувајќи ги коефициентите на Гаус $E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$ односно

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2,\ F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\theta}.$$

За коефициентите на Гаус имаме: $E = \sin^2\theta,\ G = 1,\quad F = 0$.

откаде за елементарната плоштина на многуобразието S добиваме:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,d\varphi d\theta = \sin\theta d\varphi d\theta$$

Одиме со пресметка на интегралот:

$$I = \iint_S \left(x^2 + y + z\right)dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\theta\right)\sin\theta d\varphi d\theta$$

Го разделуваме на три собирока:

$$I_1 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\varphi d\theta = 2\pi\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2\theta d\theta = 0$$

$$I_2 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\sin\varphi d\varphi d\theta = \int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = 0$$

односно: $I_3 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\cos^2\varphi d\varphi d\theta = \int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi$

За последниот интеграл тригонометријата помага со релациите:

$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}\left(3\sin\theta - \sin 3\theta\right),\quad \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

откаде со замена на горните релации во I_3 добиваме: $I_3 = \frac{4}{3}\pi$.

Конечно за бараниот интеграл имаме: $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 0 + \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$. ☻

Задача 14.6. Пресметај го следниов површински интеграл од прв тип:

$$I = \iint_S z dS$$

каде што S е дел од површината на хеликоидот зададен во параметарска форма со равенките: $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v,\ \left(0 < u < a,\ \ 0 < v < 2\pi\right)$.

Решение: Слично на претходниот пример одиме со пресметка на коефициентите на Гаус:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

односно: $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2$ и

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0$$

Оттука за елементарната плоштина на хеликоидот добиваме:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,dudv = \sqrt{1+u^2}\,dudv$$

Подготовките за површинскиот интеграл се завршени, па одиме со негова пресметка:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du \int_0^{2\pi} v\,dv = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du = \\ &= \pi^2\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right)\Big|_0^a = \\ &= \pi^2\left(a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a + \sqrt{1+a^2}\right)\right) \end{aligned}$$

при што ползувавме парцијална интеграција во горните релации. ☻

Задача 14.7. Пресметај го флуксот на топлинскиот поток низ површината S зададена во цилиндрични координати со равенката:

$$z = \theta, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

каде што топлинскиот поток е векторска функција определена со релацијата: $\vec{F}(x,y,z) = -\nabla T(x,y,z)$, а T е функција за температурата во просторот зададена со: $T(x,y,z) = z^2 - xy$.

Решение: Ќе ја параметризираме површината S ползувајќи ги како параметри дадените цилиндрични координати. Ставаме $u = r,\ v = \theta$, па добиваме: $(x,y,z) = \vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v),\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi$. Оттука за бараниот флукс го пресметуваме следниов површински интеграл:

$$\iint_S \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \vec{F}(u\cos v, u\sin v, v)\cdot\left(\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right)dudv$$

каде што $\vec{F}(x,y,z) = -\nabla T(x,y,z) = -(-y,-x,2z) = (y,x,-2z)$. Значи имаме:

$$\vec{F}(u\cos v, u\sin v, v) = (u\sin v, u\cos v, -2v)$$

односно: $\vec{r_u} = (\cos v, \sin v, 0)$, $\vec{r_v} = (-u\sin v, u\cos v, 1)$, откаде за векторскиот производ добиваме:

$$\vec{r_u}\times\vec{r_v} = (\sin v, -\cos v, u)$$

Сега го пресметуваме скаларниот производ:

$$\vec{F}(u\cos v, u\sin v, v)\cdot\left(\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right) = u\left(\sin^2 v - \cos^2 v - 2v\right)$$

па се враќаме на површинскиот интеграл:

$$\iint_S \left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \vec{F}(u\cos v, u\sin v, v)\cdot\left(\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right)dudv =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 u\left(\sin^2 v - \cos^2 v - 2v\right)dudv = -2\pi^2$$

Задача 14.8. Пресметај го следниов површински интеграл од прв тип:

$$I=\iint_S (xy+yz+zx)\,dS$$

каде што S е дел од конусната површина $S_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ што го отсекува цилиндарот $S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=2ax,\ z\in\mathbb{R}\right\}$.

Решение: Дадената површина ја проектираме на xOy-рамнината во кругот $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+y^2\le a^2\right\}$. Ја пресметуваме елементарната плоштина на површината S:

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$$

Оттука за површинскиот интеграл имаме:

$$I=\sqrt{2}\iint_D \left(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

Воведуваме поларни координати, па областа D го добива обликот:

$$D=\left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2a\cos\varphi\right\}$$

откаде со замена во интегралот добиваме:

$$I=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^3dr=$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\cos^5\varphi+\cos^4\varphi\right)\sin\varphi+\cos^5\varphi\right)d\varphi=$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi=4\sqrt{2}a^4B\left(3,\frac{1}{2}\right)=4\sqrt{2}a^4\,\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)}=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$$

Задача 14.9. Пресметај го следниов површински интеграл од втор тип:

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

каде што S е надворешната страна на сферата со радиус a зададена со равенката $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение: Ќе го разгледаме интегралот: $I_1 = \iint_S zdxdy$. Ориентацијата на површината е таква што единечниот нормален вектор $\vec{n}$ е насочен кон надворешната страна на сферата S. Ова значи дека косинусот од аголот меѓу векторот $\vec{n}$ и ортот $\vec{k}$ на Oz-оската е позитивен на горната и негативен на долната полусфера. Равенката на горната полусфера S^+ е $z^+ = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, додека на долната полусфера S^- е зададена со $z^- = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Одиме со пресметка на интегралот:

$$I_1 = \iint_{S^+} zdxdy + \iint_{S^-} zdxdy = \iint_D z^+ dxdy - \iint_D z^- dxdy = 2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

Воведуваме поларна смена во горниот интеграл, па имаме:

$$I_1 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr = \frac{4}{3}\pi\left(a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Да забележиме дека од симетрија важат равенствата:

$$\iint_S xdydz = \iint_S ydzdx = I_1$$

откаде заклучуваме дека:

$$I = I_1 + I_1 + I_1 = 3I_1 = 4\pi a^3 .$$ ☻

Задача 14.10. Пресметај го следниов површински интеграл од втор тип:

$$I = \iint_S (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy$$

каде што S е надворешната страна на конусната површина зададена со равенката: $x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \le z \le h$.

Решение: Конусната површина ја проектираме на xOy-рамнината во круг $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le h^2\right\}$. Во координатниот почеток векторот на нормалата $\vec{n}$ не е определен, па имаме:

$$I = \iint_{S \setminus \{(0,0,0)\}} \left((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma\right) dS$$

каде што векторот на нормалата $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ е пресметан во точките од множеството $S \setminus \{(0,0,0)\}$. Исклучувањето на множеството $\{(0,0,0)\}$ од областа на интегрирање е дозволено имајќи во предвид дека има Жорданова мера нула.

Со оглед на тоа што векторот на нормалата е насочен кон надворешната страна на површината S аголот меѓу ортот $\vec{k}$ на Oz-оската и векторот $\vec{n}$ е тап, па имаме:

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\quad \cos\alpha = \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

односно $\cos\beta = \dfrac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, каде што $z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Да забележиме уште дека елементарната плоштина на површината S ја пресметуваме со:

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

откаде добиваме:

$$I=\iint_D\Big(\big(y-z(x,y)\big)z_x+\big(z(x,y)-x\big)z_y+y-x\Big)dxdy=$$
$$=2\iint_D(y-x)dxdy=2\int_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi\int_0^h r^2=$$
$$=\frac{2}{3}h^3\int_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi=0$$

Задача 14.11. Пресметај го следниов површински интеграл од втор тип:

$$I=\iint_S\left(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\right)$$

каде што S е надворешната страна на елипсоидот $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение: Површината S ја претставуваме во следниов облик:

$$S=\Phi(D),\ \Phi(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi,b\sin\theta\sin\varphi,c\cos\theta)$$

каде што $D=\left\{(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$. Според дефиницијата на површински интеграл по ориентирана површина имаме:

$$I=\iint_S\left(\frac{\cos\alpha}{x}+\frac{\cos\beta}{y}+\frac{\cos\gamma}{z}\right)dS$$

каде што $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ ги пресметуваме според релациите:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

односно $\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, каде што $A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}$, $B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)}$ и $C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}$.

Ги пресметуваме коефициентите A,B,C:

$$A=bc\sin^2\theta\cos\varphi,\ B=ac\sin^2\theta\sin\varphi,\ C=ab\sin\theta\cos\theta$$

Да забележиме дека при $0<\theta<\frac{\pi}{2},\ C>0$ и $C<0$ при $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$. Ова значи дека во релациите за $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ пред дропката правиме избор на знак "+" со оглед на фактот што на горната половина од површината на елипсоидот важи $\cos\gamma>0$, додека на долната $\cos\gamma<0$. Ја пресметуваме елементарната плоштина на површината S со:

$$dS=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\theta d\varphi$$

откаде за интегралот добиваме:

$$\begin{aligned}
I&=\iint_D\left(\frac{A}{x(\theta,\varphi)}+\frac{B}{y(\theta,\varphi)}+\frac{C}{z(\theta,\varphi)}\right)d\theta d\varphi=\\
&=\iint_D\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\sin\theta d\theta d\varphi=\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\\
&=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)=4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)
\end{aligned}$$

Задача 14.12. Дадено е векторско поле $\vec{F}(x,y,z)=(P,Q,R)=(y+z,x-z,zy)$.

Дали е конзервативно?

Решение: Одиме со теоремата според која полето е конзервативно акко роторот на $\vec{F}$ е нула. Го пресметуваме $rot\vec{F}$:

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

откаде добиваме: $rot\vec{F}=(z+1,1,0)\neq 0$. ☻

Задача 14.13. Пресметај го градиентот на следниве скаларни полиња:

(i) $u = r,\ grad(u) = ?$; (ii) $u = r^2,\ grad(u) = ?$; (iii) $u = \frac{1}{r},\ grad(u) = ?$

каде што $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Решение: Го разгледуваме скаларното поле $\varphi(M) = f(r),\ r \in \mathbb{R}$, каде што f е диференцијабилна функција. Да забележиме дека градиентот на скаларното поле φ во точката M е колинеарен со векторот на нормалата на сфера со центар во координатниот почеток и радиус $r = OM$, т.е. е колинеарен со радиус векторот $\vec{r}(M)$. Уште повеќе важи $\left|grad(f(r))\right| = \left|f'(r)\right|$, при што насоката на градиентот се совпаѓа со радиус векторот $\vec{r}(M)$ за $f'(r) > 0$ или е спротивна за $f'(r) < 0$. Оттука следува дека:

$$grad(f(r)) = \frac{f'(r)}{r}\vec{r}$$

Посебно за (i) имаме $f(r) = r$ откаде $f'(r) = 1$, па заклучуваме дека

$grad(r) = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}(O,M)$. Слично ги пресметуваме (ii) и (iii). ☻

Задача 14.14. Пресметај $div(u\vec{r})$, каде што $u = u(x,y,z)$ е дадено скаларно поле.

Решение: Одиме со теоремата според која за дадено скаларно поле $u(x,y,z)$ и векторско поле $\vec{v}(x,y,z)$ важи:

$$div(u\vec{v}) = u\,div(\vec{v}) + \vec{v} \cdot grad(u)$$

Доказот го оставаме како лесна вежба. Специјално за нашиот проблем имаме $\vec{v} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, откаде добиваме:

$$div\left(u\vec{r}\right)=u\,div\left(\vec{r}\right)+\vec{r}\cdot grad\left(u\right)$$

Да забележиме дека $div\left(\vec{r}\right)=3$ и $grad\left(u\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, па имаме:

$$div\left(u\vec{r}\right)=3u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}.$$ ☻

Задача 14.15. Пресметај $div\left(grad\left(f\left(r\right)\right)\right)$, каде што $f\left(r\right)$ е двапати диференцијабилна реална функција.

Решение: Според задача 13 имаме дека:

$$grad\left(f\left(r\right)\right)=\frac{f'\left(r\right)}{r}\vec{r}$$

откаде добиваме дека:

$$div\left(grad\left(f\left(r\right)\right)\right)=div\left(\frac{f'\left(r\right)}{r}\vec{r}\right)$$

Дефинираме скаларно поле $u=\frac{f'\left(r\right)}{r}$, па според претходната задача имаме дека:

$$div\left(u\vec{r}\right)=3u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

Заменуваме во горната релација $u=\frac{f'\left(r\right)}{r}$, па добиваме:

$$div\left(grad\left(f\left(r\right)\right)\right)=div\left(\frac{f'\left(r\right)}{r}\vec{r}\right)=3\frac{f'\left(r\right)}{r}+\vec{r}\cdot grad\left(\frac{f'\left(r\right)}{r}\right)$$

Дефинираме нова функција $g\left(r\right)=\frac{f'\left(r\right)}{r}$, па имаме:

$$grad\left(\frac{f'(r)}{r}\right)=grad\left(g(r)\right)=\frac{g'(r)}{r}\vec{r}$$

Пресметуваме прв извод на новата функција g :

$$g'(r)=\frac{f''(r)r-f'(r)}{r^2}=\frac{f''(r)}{r}-\frac{f'(r)}{r^2}$$

Со замена во горната релација добиваме:

$$div\Big(grad\left(f(r)\right)\Big)=div\left(\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\right)=2\frac{f'(r)}{r}+f''(r)\,.$$ ☻

Задача 14.16. Пресметај $rot\left(f(r)\vec{c}\right)$, каде што $\vec{c}$ е константен вектор, а $f(r)$ скаларна диференцијабилна функција.

Решение: Одиме со теоремата според која за дадено скаларно поле $u(x,y,z)$ и векторско поле $\vec{v}(x,y,z)$ важи:

$$rot\left(u\vec{v}\right)=u\cdot rot\left(\vec{v}\right)+\left[grad\left(u\right),\vec{v}\right]$$

Посебно за нашиот случај имаме дека $u=f(r)$ и $\vec{v}=\vec{c}$. Со замена добиваме:

$$rot\left(f(r)\vec{c}\right)=f(r)\cdot rot\left(\vec{c}\right)+\left[grad\left(f(r)\right),\vec{c}\right]$$

Но роторот на константно векторско поле е нула, а градиентот на u е определен со релацијата $grad\left(f(r)\right)=\dfrac{f'(r)}{r}\vec{r}$, па имаме:

$$rot\left(f(r)\vec{c}\right)=\frac{f'(r)}{r}\left[\vec{r},\vec{c}\right].$$ ☻

Забелешка: Роторот е мерка за вртложност на полето. Природно во константно векторско поле роторот е нула. Дивергенцијата во теоријата на флуиди се толкува како промена на маса на флуидот на единица волумен и единица време. Точките во кои $div\vec{F} > 0$ се нарекуваат извори, а оние во кои $div\vec{F} < 0$ понори.

Задача 14.17. Нека $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ е векторско поле од облик $F(\vec{r}) = g(\|r\|)\vec{r}$, каде што g е глатка реално вредносна функција на $(0,\infty)$, а $\| \; \|$ е ознака за Евклидска норма. Докажи дека:

$$\oint_C F \cdot d\vec{l} = 0$$

за произволна глатка затворена крива C што не минува низ $(0,0,0)$.

Решение: Нека $C \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ е произволна глатка затворена крива што не минува низ координатниот почеток $(0,0,0)$. Дефинираме произволна искршена линија L од координатниот почеток $(0,0,0)$ кон бесконечност т.ш. нема пресечни точки со C. Да забележиме дека областа $V = \mathbb{R}^3 \setminus L$ е просто сврзана област.

Оттука одиме со теоремата според која во проста сврзана област V циркулацијата $\oint_C F \cdot d\vec{l}$ е нула вдолж произволна крива $C \subseteq V$ акко роторот на векторското поле е нула, т.е $rot\vec{F} = 0$. Ќе го пресметаме роторот на $\vec{F}$. Нека $r = (x, y, z)$ и $F = (P, Q, R)$. Од условот имаме:

$$F(r) = \left(g(\|r\|)x, g(\|r\|)y, g(\|r\|)z\right)$$

Одиме со правилото за диференцирање на сложена функција:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= g'(\|r\|)\frac{\partial \|r\|}{\partial y} z + g(\|r\|)\frac{\partial z}{\partial y} - g'(\|r\|)\frac{\partial \|r\|}{\partial z} y - g(\|r\|)\frac{\partial y}{\partial z} = \\ &= g'(\|r\|)\frac{yz}{\|r\|} - g'(\|r\|)\frac{yz}{\|r\|} = 0\end{aligned}$$

Слично добиваме дека:

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

откаде заклучуваме дека:

$$rot\overrightarrow{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=0\,.$$ ☻

Задача 14.18. Нека S е проста затворена површина и $\vec{e}$ е произволен единечен вектор. Докажи дека:

$$I=\iint_S \cos\left\langle \vec{n},\vec{e}\right\rangle dS=0$$

каде што $\vec{n}$ е единечниот вектор на нормалата насочен кон надворешниот дел на површината S.

Доказ: Нека $\vec{e}=\left(\cos\alpha_0,\cos\beta_0,\cos\gamma_0\right)$ е произволен фиксиран единечен вектор. Тогаш важи следново равенство:

$$\cos\left\langle \vec{n},\vec{e}\right\rangle=\vec{n}\cdot\vec{e}=\cos\alpha\cos\alpha_0+\cos\beta\cos\beta_0+\cos\gamma\cos\gamma_0$$

каде што $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ се координатите на векторот на нормалата $\vec{n}$. Одиме со теоремата на Гаус-Остроградски:

$$\iint_S \vec{n}\cdot\vec{e}dS=\iiint_K\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_0+\frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_0+\frac{\partial}{\partial z}\cos\gamma_0\right)dxdydz=0\,.$$ ☻

Задача 14.19. Нека $J=\left(J_1,J_2,J_3\right)$ е глатко векторско поле на $\mathbb{R}^3$ со особина $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$ и такво што $J\left(x,y,z\right)=\left(0,0,0\right),\ \forall\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\setminus T$, каде што $T=\left\{r\in\mathbb{R}^3\,|\,\|r\|\le 1\right\}$ е единечната топка во $\mathbb{R}^3$.

(i) Докажи дека:

$$\iiint_T \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{J} dxdydz = 0$$

каде што f е глатка скаларна функција дефинирана во околина на T.

(ii) Докажи дека:

$$\iiint_T J_1 dxdydz = 0 .$$

Доказ: (i) Одиме со теоремата од задача 14 според која важи:

$$div\left(f\vec{J}\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{J}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{J} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{J}$$

при што го ползувавме и условот дека $div\left(\vec{J}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

Според дивергентната теорема на Гаус-Остроградски имаме:

$$\iiint_T \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{J} dxdydz = \iiint_T \vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{J}\right) dxdydz =$$
$$= \iiint_T div\left(f\vec{J}\right) dxdydz = \iint_{\partial T} f\vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0$$

при што го ползувавме условот $J(x,y,z) = (0,0,0),\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus T$.

(ii) Правиме специјален избор за скаларната функцијата $f(x,y,z) = x$ и го ползуваме претходното тврдење (i). ☻

Забелешка. Ознаката $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ е скаларен производ на векторите $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ и $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ што соодветствува на дивергенцијата на векторското поле $div\left(\vec{J}\right)$.

Задача 14.20. Нека u е сопствена функција за Лапласијанот $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ на D, каде што D е единечниот диск во $\mathbb{R}^2$. Поинаку кажано, u е реално-вредносна функција од класа C^2 дефинирана на $\overline{D}$, нула на работ ∂D но не е нулта функција, што ја задоволува следнава ПДР:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u\text{,}$$

каде што λ е некоја константа. Докажи дека:

$$\iint_D \left|grad\left(u\right)\right|^2 dxdy + \lambda \iint_D u^2 dxdy = 0$$

односно дека $\lambda < 0$.

Доказ: Одиме со теоремата на Гаус-Остроградски во рамнина:

$$\iint_D div\left(ugrad\left(u\right)\right)dxdy = \int_{\partial D} \left(ugrad\left(u\right)\right) \cdot \vec{n} dl$$

каде што $\vec{n}$ е единечниот вектор на нормалата насочен „нанадвор“☺. Да забележиме дека десната страна на горното равенство е нула, затоа што $u = 0$ на работ ∂D.

Ќе ја пресметаме левата страна:

$$div\left(ugrad\left(u\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \left|grad\left(u\right)\right|^2 + \lambda u^2$$

Заклучокот следува.

Задача 14.21. Пресметај го следниов површински интеграл од прв тип:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

каде што S е конусната површина $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$, ориентирана т.ш. единечниот нормален вектор е насочен „нанадвор“ , а $\vec{F}$ е векторско поле зададено со:

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(x+\tan^{-1}\left(y^2\right),-y+\sec\left(x+z\right),z^2\right)$$

Решение: Да забележиме дека површината не е затворена, па директна примена на дивергентната теорема не е во игра.

Во ваков случај понекогаш пресметката на површинскиот интеграл може да ја направиме ако ја гледаме површината S како дел од раб на затворена „исполнета“ тродимензионална област K. Во случајов нека K е тродимензионална област зададена во цилиндрични координати со: $0\le r\le z\le 1$. Работ на областа K се два дела: површината S со дадената ориентација и дискот S_1 зададен со равенките: $x^2+y^2\le 1,\ \ z=1$, ориентиран така што нејзиниот единечен нормален вектор е насочен нагоре, $\vec{n}=\vec{k}=(0,0,1)$.

Сега според дивергентната теорема имаме:

$$\iiint\limits_K div\vec{F}dxdydz=\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Ги пресметуваме прво интегралите за кои всушност и не сме заинтересирани:

$$\iiint\limits_K div\vec{F}dxdydz=\iiint\limits_K 2zdxdydz=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_r^1 2zrdzdrd\theta=\frac{\pi}{2}$$

односно:

$$\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_{S_1}\left(x+\tan^{-1}\left(y^2\right),-y+\sec\left(x+z\right),z^2\right)\cdot(0,0,1)dS=$$
$$=\iint\limits_{S_1} z^2dS=\iint\limits_{S_1}1dS=J\left(S_1\right)=\pi$$

Оттука добиваме дека: $\frac{\pi}{2}=\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}+\pi$ или за интегралот што не' интересира $\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=-\frac{\pi}{2}$. ☻

Задача 14.22. Пресметај го следниов површински интеграл од втор тип:

$$I=\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$$

каде што S е надворешната страна на сфера со радиус a зададена со равенката $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$.

Решение: Одиме со теоремата на Гаус-Остроградски, па добиваме:

$$I=3\iiint\limits_K \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

каде што $K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le a^2\right\}$ е топка со радиус a. Воведуваме смена со сферни координати во горниот интеграл, па добиваме:

$$I=3\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^4dr=\frac{12}{5}\pi a^5.$$ ☻

Задача 14.23. Пресметај го следниов површински интеграл од втор тип:

$$I=\iint\limits_S (x-y+z)\,dydz+(y-z+x)\,dzdx+(z-x+y)dxdy$$

каде што S е надворешната страна на површината определена со равенката $S:\ |x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$. ☻

Решение: Го означуваме со T телото ограничено со површината S. Повторно според теоремата на Гаус-Остроградски имаме:

$$I=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-y+z)+\frac{\partial}{\partial y}(y-z+x)+\frac{\partial}{\partial z}(z-x+y)\right)=$$
$$=3\iiint\limits_T dxdydz$$

За пресметка на горниот интеграл воведуваме смена со релациите:

$$u=x-y+z,\ v=y-z+x,\ w=z-x+y$$

па за Јакобијанот имаме:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}}=\frac{1}{4}.$$

Оттука за интегралот имаме:

$$I=\frac{3}{4}\iiint\limits_{|u|+|v|+|z|\le 1}dudvdw=6\iiint\limits_{\substack{u+v+w\le 1\\ u\ge 0,\ v\ge 0,\ w\ge 0}}dudvdw=$$
$$=6\int_0^1 du\int_0^{1-u}dv\int_0^{1-u-v}dw=6\int_0^1 du\int_0^{1-u}(1-u-v)dv=$$
$$=6\int_0^1\frac{(1-u)^2}{2}du=(1-u)^3\Big|_1^0=1.\quad ☻$$

Задача 14.24. Пресметај го следниов површински интеграл:

$$I=\iint\limits_S\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$$

каде што S е дел од конусна површина зададена со равенката $x^2+y^2=z^2,\ \ 0\le z\le h$, а $\cos\alpha,\cos\beta,\ \cos\gamma$ се координатите на единечниот нормален вектор на површината S насочен нанадвор.

Решение: Да забележиме дека површината S не е затворена, па директна примена на дивергентната теорема не е можна. Ја разгледуваме затворената површина S_1 што е унија од површината S, разгледувана како множество од точки, и множеството точки од кругот $S_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le h^2,\ z=h\right\}$. Множеството S_1 е во соодветна геометриска терминологија псевдомногуобразие, со оглед на фактот што во врвот на конусот т.е. точката $(0,0,0)$ и вдолж кружницата $\gamma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=h^2,\ z=h\right\}$ единечниот векторот на нормалата $\vec{n}$ не е дефиниран. Овој проблем може да го заобиколиме ако интегрираме на множеството $S_3=S_1\setminus\gamma\cup\left\{(0,0,0)\right\}$, при што вредноста на интегралот е запазена со оглед на тоа што исклученото множество е со мера нула.

Го имаме следново равенство:

$$I=\iint_{S_3}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS-\iint_{S_2\setminus\gamma}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$$

Сега на првиот интеграл над множеството S_3 може да ја примениме дивергентната теорема на Гаус-Остроградски, додека за вториот интеграл над множеството $S_2\setminus\gamma$ имаме дека:

$$\cos\alpha=\cos\beta=0,\ \cos\gamma=1,\ z^2=h^2,\ dS=dxdy$$

откаде добиваме:

$$\begin{aligned}I&=2\iiint_T(x+y+z)\,dxdydz-h^2\iint_{x^2+y^2<h^2}dxdy=\\&=2\iiint_T(x+y+z)\,dxdydz-\pi h^4\end{aligned}$$

каде што $T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2<h^2,\ \sqrt{x^2+y^2}<z<h\right\}$.

Во последниот троен интеграл воведуваме смена со цилиндрични координати, па добиваме:

$$\iiint_T (x+y+z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h rdr \int_r^h \left(r(\sin\varphi+\cos\varphi)+z\right)dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(r(h-r)(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{h^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right)rdr = \frac{\pi}{4}h^4$$

Конечно за бараниот интеграл имаме:

$$I = \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4 .\ ☻$$

Задача 14.25. Нека γ е затворена крива што лежи во рамнина Σ зададена со равенката $\Sigma : x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ и ограничува површина $S \subseteq \Sigma$ што лежи во рамнината Σ. Понатаму, нека $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ е единечниот нормален вектор на рамнината Σ. Пресметај го следниов криволиниски интеграл:

$$I = \oint_\gamma \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

при позитивна ориентација на кривата γ. ☻

Решение: Одиме со теоремата на Штокс. Да забележиме дека според ознаките од теоремата имаме:

$$P = z\cos\beta - y\cos\gamma,\ \ Q = x\cos\gamma - z\cos\alpha,\ R = y\cos\alpha - x\cos\beta$$

Со примена на теоремата добиваме:

$$I = 2\iint_S \cos\alpha dydz + \cos\beta dzdx + \cos\gamma dxdy =$$
$$= 2\iint_S \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)dS = 2\iint_S dS = 2P$$

каде што P е плоштината на површината S. ☻

Задача 14.26. Дадено е следново векторско поле $\vec{F}(x,y,z)=(y+z,x-z,zy)$. Нека C е произволна проста затворена крива со позитивна ориентација во xOy рамнината. Докажи дека $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{l}=0$.

Доказ: Кривата C ограничува површина S што се содржи во xOy рамнината со равенка $z=0$. Со оглед на тоа што S се содржи во xOy рамнината придружениот единечен нормален вектор е или $(0,0,1)$ или $(0,0,-1)$. Со оглед на тоа што C е позитивно ориентирана, за да ја направиме да биде и позитивно ориентиран раб на површината S правиме ориентација на S така што $\vec{n}=(0,0,1)$. Ова се подготовките за теоремата на Штокс. Одиме сега со теоремата:

$$\oint\limits_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}=\iint\limits_S rot\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$$

Го пресметуваме роторот на векторското поле $\vec{F}$:

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=(z+1,1,0)$$

Откаде за циркулацијата добиваме:

$$\oint\limits_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{l}=\iint\limits_S rot\left(\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS=\iint\limits_S (z+1,1,0)\cdot(0,0,1)dS=0\text{. ☻}$$

Задача 14.27. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I=\oint\limits_\gamma ydx+zdy+xdz$$

каде што γ е кружница што се добива како пресек на сфера S со радиус a определена со равенката $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$ и рамнина S_1 зададена со равенката $S_1: x+y+z=0$.

Ориентацијата на кривата γ е спротивна на стрелките од часовникот од перспектива на позитивниот дел од $x-$оската.

Решение: Ја применуваме теоремата на Штокс со избор на површина круг S_2, со радиус a, што лежи во рамнината S_1:

$$I=-\iint_{S_2} dydz+dzdx+dxdy=-\iint_{S_2}\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right)dS$$

каде што $\vec{n}=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)$ е единечниот нормален вектор на површината S_2. Да забележиме дека векторот $\vec{n}$ и ортот $\vec{k}$ на z-оската образуваат остар агол, па имаме: $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откаде за бараниот интеграл добиваме: $I=-\sqrt{3}\iint_{S_2} dS=-\sqrt{3}\pi a^2$, имајќи во предвид дека плоштината на S_2 е $a^2\pi$. ☻

Задача 14.28. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I=\oint_{\gamma}\left(y-z\right)dx+\left(z-x\right)dy+\left(x-y\right)dz$$

каде што γ е крива што се добива како пресек на цилиндар определен со

$T=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le a^2,\ z\in\mathbb{R}\right\}$ и рамнина S_1 зададена со равенката $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1,\ a>0,\ h>0$. Ориентацијата на кривата γ е спротивна на стрелките од часовникот од перспектива на позитивниот дел од $x-$оската.

Решение: Одиме со теоремата на Штокс:

$$I=-2\iint_{S_2} dydz+dzdx+dxdy=-2\iint_{S_2}\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right)dS$$

каде што $S_2 = T \cap S_1$ е множество на точки од елипсата (со внатрешниот дел): $S_2 : x^2 + y^2 \le a^2,\ \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, додека $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ е единечниот нормален вектор на рамнината S_1.

Множеството на точки S_2 го проектираме на xOy-рамнината во круг определен со $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$. Да забележиме дека векторот $\vec{n}$ и ортот $\vec{k}$ на z-оската образуваат остар агол, па во релациите:

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\pm\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},\ \cos\beta = \frac{-z_y}{\pm\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

правиме избор на знакот „$+$“. Елементарната плоштина на површината S_2 е определена со: $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$. Подготовките за премин од површински кон двоен интеграл се направени, па имаме:

$$I = 2\iint\limits_D (z_x + z_y - 1)\,dxdy$$

На множеството S_1 важи релацијата $z = h - \frac{h}{a}x$, откаде за парцијалните

изводи добиваме: $z_x = -\frac{h}{a},\ z_y = 0$. Консеквентно,

$$I = -2\iint\limits_D \left(1 + \frac{h}{a}\right)dxdy = -2\left(1 + \frac{h}{a}\right)\pi a^2 = -2\pi a(a + h).$$ ☻

Задача 14.29. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I = \oint\limits_\gamma (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$$

каде што γ е крива што се добива како пресек на полусфера S зададена со $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=2Rx,\ z>0\}$ и површина S_1 определена со $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=2rx,\ z\in\mathbb{R}\}$, $0<r<R$. Ориентацијата на кривата γ е таква што при движење вдолж неа од перспектива на позитивниот дел на $z-$оската површината S останува од левата страна.

Решение: Ја применуваме теоремата на Штокс, па добиваме:

$$\begin{aligned}I&=2\iint_{S_2}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=\\&=2\iint_{S_2}\big((y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma\big)dS\end{aligned}$$

каде што S_2 е делот од полусферата S што го отсекува од неа површината S_1, додека $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ е единечниот нормален вектор на површината S_2. На множеството S_2 важат равенствата:

$$z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{R-x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

Да забележиме дека векторот $\vec{n}$ и ортот $\vec{k}$ на z-оската образуваат остар агол, па во релациите:

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\pm\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ \cos\beta=\frac{-z_y}{\pm\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\pm\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

правиме избор на знакот „$+$“. Елементарната плоштина на површината S_2 е определена со: $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$. Подготовките за премин од површински кон двоен интеграл се направени, па имаме:

$$\begin{aligned}I&=2\iint_D\Big(\big(y-z(x,y)\big)\big(-z_x(x,y)\big)+\big(z(x,y)-x\big)\big(-z_y(x,y)\big)+(x-y)\Big)dxdy=\\&=2\iint_D\left(\frac{\big(y-z(x,y)\big)(x-R)+\big(z(x,y)-x\big)y}{z(x,y)}+x-y\right)dxdy=2R\iint_D\left(1-\frac{y}{z(x,y)}\right)dxdy\end{aligned}$$

каде што $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2rx\right\}$. Го пресметуваме интегралот:

$$\iint_D \frac{y}{z(x,y)}dxdy=\int_0^r dx\int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}\frac{ydy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}=$$
$$=\int_0^r\left(\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\,\Big|_{y=\sqrt{2rx-x^2}}^{y=-\sqrt{2rx-x^2}}\right)dx=0$$

откаде за бараниот интеграл добиваме: $I=2R\iint_D dxdy=2\pi Rr^2$. ☻

Задача 14.30. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип:

$$I=\oint_\gamma y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$$

каде што γ е затворена крива зададена со равенките:

$$x=a\cos t,\ y=a\cos 2t,\ z=a\cos 3t$$

Ориентацијата е определена според растот на параметарот t.

Решение: При менување на параметарот t на интервалот $[0,\pi]$, подвижната точка $M(x,y,z)$ го минува делот на кривата од точката $M_0(a,a,a)$ до точката $M_1=(-a,a,-a)$. При менување на параметарот t на интервалот $[\pi,2\pi]$ подвижната точка $M(x,y,z)$ го минува истиот дел од кривата но во спротивна насока, од точката $M_1=(-a,a,-a)$ до точката $M_0(a,a,a)$. Следува дека затворената крива γ не ограничува никаква површина. Заклучуваме дека вредноста на криволинискиот интеграл е нула, т.е. $I=0$. ☻

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Пресметај ги плоштините на површините: (1.- 4.)

1. S е дел од хиперболичен параболоид $z = xy$ којшто се наоѓа во цилиндарот $x^2 + y^2 = 8.$

2. $S: x + 2y + 3z = 6;$ каде што $x, y, z \geq 0.$

3. $S: \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 2a^2 xy,\ a > 0.$

4. $S: x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = \varphi;$ каде што $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

5. Пресметај ја плоштината на делот од сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ што се наоѓа во цилиндарот $x^2 + z^2 = b^2,\ 0 < b < a.$

Пресметај го површинскиот интеграл: (6.- 9.)

6. $I = \iint\limits_S (6x + 4y + 3z) d\sigma$, каде што S е делот од рамнината $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, во првиот октант.

7. $I = \iint\limits_S z d\sigma$, каде што $S: x + y + z = 1$ и лежи во првиот октант.

8. $I = \iint\limits_S (x + y + z) d\sigma$, каде што S е полусферата

$$\vec{r} = a\cos u \sin v\vec{i} + a\sin u \sin v\vec{j} + a\cos v\vec{k},.\ 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

9. $I = \iint\limits_S \frac{d\sigma}{(1 + x + y)^2}$, каде што S е површината на тетраедарот определен со рамнините: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

10. Пресметај го интегралот од задачата 14.1. ползувалќи ја проекцијата на површината на Oxz-рамнината.

11. Пресметај $\iint\limits_S xyzdxdy$, по надворешната страна на сферата $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

12. Пресметај $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, по надворешната страна на полусферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

13. Пресметај $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, по внатрешната страна од полусферата $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0$.

14. Пресметај $\iint\limits_S zdxdy$, по надворешната страна на елипсоидот $S:\frac{x}{a^2}^2+\frac{y}{b^2}^2+\frac{z}{c^2}^2=1.$

15. Пресметај го следниов површински интеграл од втор тип: $I=\iint\limits_S \frac{x^3}{a^2}dydz+\frac{y^3}{b^2}dzdx+\frac{z^3}{c^2}dxdy,$ каде што $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и $a,b,c>0.$ Интеграцијата се врши по надворешната страна од површината S.

16. Пресметај го следниов криволиниски интеграл од втор тип: $I=\oint\limits_L ydx+x^2dy+zdx,$ каде што кривата L е пресекот на површините $S_1: x^2+y^2=2(x+y)$ и $S_2: z=x^2+y^2.$ L е позитивно ориентирана, гледаќи ја од позитивниот дел на $z-$оската.

17. Пресметај $I=\iint\limits_S xydydz+y^2dxdz+yzdxdy$ по надворешната страна на $S: x^2+y^2+z^2=a^2.$

18. Пресметај $I=\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$ по надворешната страна на коцката $S: 0\leq x\leq a,\quad 0\leq y\leq a,\quad 0\leq z\leq a.$

19. Пресметај го интегралот $\oint\limits_\gamma dx+2x^3y^2dy+3zdz$, каде што γ е пресекот на сферата $x^2+y^2+z^2=a^2$ и xOy рамнината.

20. Со помош на Штоксовата формула, пресметај го криволинискиот интеграл:

$\oint\limits_\gamma ydx+zdy+xdz$, каде што γ е пресекот на сферата $x^2+y^2+z^2=4$ и рамнината $x+y+z=0.$

21. Со помош на формулата на Гаус-Остроградски пресметај го интегралот:

$I=\iint\limits_S \left(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma\right)dS,$ ако S е сферата $x^2+y^2+z^2=R^2,$ а $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ се косинусите на правците на надворешните нормали.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

ГЛАВА 1

1. Ако $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, искористиме: непрекинатост на експоненцијална функција и $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^4\ln\rho^2=0,$ тогаш $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}e^{x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)}=e^{\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^4\ln\rho^2}=1.$ **2.** За $x=t, y=t$**,** имаме $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2},$ а ако $x=t, y=-t$**,** ќе имаме $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-t^2}{2t^2}=-\frac{1}{2}.$ Ова е доволно да заклучиме дека не постои $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$**.** **3.** Од неравенството $x^2-xy+y^2\ge xy$, за $x\ne 0, y\ne 0,$ имаме $0\le\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\left|\frac{x+y}{xy}\right|\le\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}$**,** па следува $0\le\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\ \le\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)=0.$ **4.** 0. Следува од неравенството: $0<\frac{\left(x^2+y^2\right)}{e^{(x+y)}}=\ =\frac{x^2}{e^{x+y}}+\frac{y^2}{e^{x+y}}<\frac{x^2}{e^x}+\frac{y^2}{e^y}.$ **5.** 0. Упатство: Од $x^2+y^2\ge 2xy\Rightarrow\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}.$ **6.** $\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{\rho^2}{\rho^4\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)}=\ =\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{1}{\rho^2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi\right)}=0,$ бидејќи изразот во заградата е секогаш позитивен. **7.** Ќе покажеме дека не постои граничната вредност на функцијата $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ во точката (0,0). Ги разгледуваме низите $\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, и двете конвергираат кон (0,0), меѓутоа $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n},0\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(0,\frac{1}{n}\right)=-1.$

8. Не постои. **9.** Не постои. **10.** $\frac{5}{2}$. **11.** 1. **12.** $\frac{1}{7}$**.** **13.** $\sqrt{24}$. **14.** $\frac{1}{2}$**.** **15.** 0. **16.** $\frac{1}{6}$**.** **17.** 0. **18.** Не постои. **19.** 0. **20.** Не постои. **21.** 0. **22.** Не постои. **23.** 0. **24.** Не постои. **26.** $|y|>|x|$. **31.** Отстранливи прекини во точките за кои $y=-x$ и $x\neq 0$. Прекината во точката $(0,0)$. **34.** Има прекин во токите на координатните рамнини: $x=0,\ y=0,\ z=0.$ **35.** Има прекин во токите на рамнините: $x=0,\ y=0,\ z=0.$ **36.** $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. **47.** За произволно $\varepsilon>0$**,** избираме $\delta=\frac{\varepsilon}{6}>0.$ Тогаш, од $|x-x'|<\delta,$ $|y-y'|<\delta$ следува $|f(x,y)-f(x',y')|= \ =|2(x-x')-3(y-y')|\leq 2|x-x'|+3|y-y'|<5\delta=5\frac{\varepsilon}{6}<\varepsilon,$ значи функцијата е рамномерно нерекината на целата рамнина. **48.** За произволно $\varepsilon>0$**,** избираме $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0.$ Тогаш, од $|x-x'|<\delta,$ $|y-y'|<\delta$ следува $|f(x,y)-f(x',y')|=\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x'^2+y'^2}\right|=$

$$\frac{|(x-x')(x+x')+(y-y')(y+y')|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}\leq\frac{|x-x'||x+x'|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}+\frac{|y-y'||y+y'|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}\leq$$

$$\leq|x-x'|\frac{|x|+|x'|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}+|y-y'|\frac{|y|+|y'|}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}=|x-x'|+|y-y'|<2\delta=\varepsilon,$$

Значи, функцијата е рамномерно нерекината на целата рамнина. **49.** Функцијата не е рамномерно непрекината во областа $x^2+y^2<1$**.** **50.** $f(x,y)=\arcsin\frac{y}{x}.$

ГЛАВА 2

1. $\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3y^3-5,\ \frac{\partial f}{\partial y}=3x^4y^2+7$.**2.** $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0$.

3. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}$. **4.** $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}$. **5.** $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2y-5}{2xy-5x+2},$ $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x}{2xy-5x+2}$. **6.** $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{x(x^2+y^2)},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{y(x^2+y^2)}$. **7.** $\frac{\partial f}{\partial x}=-5y^3e^{-5x+7y+2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=(3y^2+7y^3)e^{-5x+7y+2}$.

8 $\frac{\partial f}{\partial x}=(2y-5)sin(2xy-5x+2)+5cos(5x),\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2xsin(2xy-5x+2)$.

9. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2+(x+y)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2+y^2-2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2+(x+y)^2}$. **12.** $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\,ln\,x$.

13. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **14.** $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$. **16.** $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{x}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{z}{x}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^z$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z ln\frac{x}{y}$.
17. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. За $x=1, y=1$ добиваме $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

19. $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0)=$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,0)=\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0)=\frac{1}{2}$. **24.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(1-xy)e^{xy}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$. **25.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{x+y}\left(cos\, e^{x+y}-e^{x+y}\, sin\, e^{x+y}\right)$. **28.** $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=$ $=e^{xyz}\left(1+3xyz+x^2y^2z^2\right)$. **34.** Од дефиницијата на парци-јален извод имаме: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. **35.** Го диференцираме по x условот $u(x,y)=1$, каде што $y=x^2$: $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}=0$. $x+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot 2x=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{2}$. **43.** $du=2xydx+x^2dy$.

44. $du=\frac{1}{(x-y)^2}\left(x^2dy-y^2dx\right)$. **46.** $du=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left(\left(x^2+y^2\right)dz-2zxdx-2zydy\right)$.

47. $du=\frac{2}{x^2+y^2}(xdx+ydy)$. **48.** $du=sin2x(dx-dy)$. **49.** $du=cos\, xy(ydx+xdy)$ **51.** $du=\frac{1}{x^2+y^2}(dy-xdx)$. **52.** $du=\frac{1}{x^3+2^y+tg3z}\left(3x^2dx+2^y\, ln2dy+\frac{3}{cos^2 3z}dx\right)$.. **53.**
$d^2u=$
$=d(du)=d\left(\left(3x^2-6xy+3y^2\right)dx+\left(3y^2-3x^2+6xy\right)dy\right)=(6x-6y)(dx)^2+(6y-6x)dxdy+$
$+(6y-6x)dydx+(6y+6x)(dy)^2=(6x-6y)(dx)^2+2(6y-6x)dxdy+(6y+6x)(dy)^2=$
$=6\left((x-y)(dx)^2+2(y-x)dxdy+(y+x)(dy)^2\right)$. **54.** $d^3u=d^2(du)=$
$=d^2\left(\left(3x^2-6xy+3y^2\right)dx+\left(3y^2-3x^2+6xy\right)dy\right)=(6x-6y)(dx)^2+2(6y-6x)dxdy+$
$+(6y+6x)(dy)^2=6\left((dx)^3-3(dx)^2dy+3dx(dy)^2+(dy)^3\right)$. **56.** $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx$
$\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$, $f(x,y)=x^y$, $x_0=1, y_0=1, \Delta x=0.02, \Delta y=0.05$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3)=3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3)=0$, $1.02^{3.05}\approx 1.06$. **57.** 1.32. **58.** 1.05. **59.** 1.01 **60.** 0.005.

62. $f(x,y)=sin\,x\cdot tgy, x_0=\frac{\pi}{6}, y_0=\frac{\pi}{4}, \Delta x=\frac{\pi}{180}, \Delta y=\frac{\pi}{180}$, $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)=1$,
$sin29^0\cdot tg46^0\approx\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{\pi}{180}=0.502$. **75.** $gradf(A)=(2\varepsilon,0,0)$, $gradf(B)=$

$=\left(0,2\varepsilon,0\right)$, $\quad cos\,\alpha=\dfrac{\left\langle gradf\left(A\right),gradf\left(B\right)\right\rangle}{\left\|gradf\left(A\right)\right\|\left\|gradf\left(B\right)\right\|}=0$. $\quad \varphi=\dfrac{\pi}{2}$. **76.** **5.** $g\quad r\varphi(a\quad d)=$

$=\left(\dfrac{\partial\varphi\left(f,g\right)}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial\varphi\left(f,g\right)}{\partial x_n}\right)=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial\varphi}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial g}\dfrac{\partial g}{\partial x_n}\right)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial f}gradf+\dfrac{\partial\varphi}{\partial g}gradg$.

78. **а.** $\dfrac{u-v}{a}$ **б.** $4\left(u^2+v^2\right)$ **в.** 2. **79.** **а.** $\dfrac{1}{u\left(u+v\right)}$. **б.** r. **в.** $r^2\cos\varphi$. **80.** **а.** $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$, **б.** $\dfrac{y^x\ln y-yx^{y-1}}{x^y\ln x-xy^{x-1}}$, **в.** $-\dfrac{y}{x}$. **81.** **а.** $-\dfrac{c^2}{u}\left(\dfrac{xdx}{a^2}+\dfrac{ydy}{b^2}\right)$, **б.** $\dfrac{u\left(ydx+udy\right)}{y\left(x+u\right)}$, **в.** $\dfrac{1}{\sin 2x}\left(\sin 2xdx+\sin 2ydy\right)$. **82.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$; $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow 2\dfrac{\partial z}{\partial v}=0\Rightarrow z=\varphi\left(u\right)=\varphi\left(x+y\right)$. **83.** $z=\varphi\left(x^2+y^2\right)$. **84.** $\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{2}$.

ГЛАВА 3

1. Скаларното поле е дефинирано во елипсоидот $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}\le 1$, а еквискаларните површини се елипсоидите $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1-C^2,\left(0\le C\le 1\right)$. **2.** кружните конуси во $\mathbb{R}^3$: $\left(x^2+y^2\right)\sin^2 C=z^2,\ C$ е константа. **3.** ако ставиме $u=c\ \left(c>0\right)$, добиваме $x^2+y^2+z^2=c$, значи ниво површините се концентрични сфери. **4.** $\left\|\vec{r}\right\|=c\ \left(c>0\right)$. **5.** Ниво површините се паралелните рамнини $\left\langle\vec{a},\vec{r}\right\rangle=C$, што се нормални на векторот $\vec{a}$. **6.** Рамнини паралелни со рамнината $x+y+z=0.$ **8.** $g\quad r\varphi a=c$ $=\dfrac{-xz\vec{i}-yz\vec{j}+\left(x^2+y^2\right)\vec{k}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. **9.** $grad\varphi=\dfrac{\vec{i}+\vec{j}}{x+y}$.

10. $gradu=\left(3x^2-3yz\right)\vec{i}+\left(3y^2-3xz\right)\vec{j}+\left(3z^2-3xy\right)\vec{k}$, $\quad gradu\left(A\right)=9\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$. $\left\|gradu\left(A\right)\right\|=3\sqrt{11}.$ $\quad z^2=xy$. $\quad x=y=z.$ **11.** $\dfrac{2u}{r}$, каде што $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\left(\left(x,y,z\right)\neq\left(0,0,0\right)\right)$. **12.** Единечен вектор на надворешната нормала на сферата во точката $A\left(a,b,c\right)$ е: $\vec{n}_0=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}.$ $\dfrac{df}{d\vec{n}}\left(a,b,c\right)=a+b+c$. Изводот во правец има најголена вредност во правец и насока на градиентот, а најмала во спротивна насока. $\vec{n}_0$ и $grad\,u$ се колинеарни во точките $A\left(a,b,c\right)$ од сферата за кои важи $a=b=c$. Изводот на функцијата во правец на надворешната нормала има најголема вредност во точката $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, најмала во точката $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и прима вредност нула во сите точки од кружницата $x^2+y^2+z^2=1,$, $x+y+z=0$. **13.** $grad\ F=\left(z^2+2xy, x^2, 2xz-1\right)$, $grad\ F\left(P\right)=\left(-3,4,-5\right)$; $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+1}{-5}$.

ГЛАВА 4

1. $1+\left(x-1\right)+\left(x-1\right)\left(y-1\right)$. **2.** $f\left(1,1\right)=1$. Со методата на имплицитно диференцирање, добиваме: $3z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z-2x\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ 3z^2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2x\dfrac{\partial z}{\partial y}+1=0.$ (4.25.)

Заменуваме $x=1, y=1, z=1$ и добиваме $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-1.$ Со повторно диференцирање на (4.25) (првата по x и y, втората по y), добиваме: $6z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+3z^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$. $6z\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+3z^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$ $6z\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+3z^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$ Наоѓаме дека $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6.$ Бараниот полином е: $T_2(x,y)=1+2(x-1)$ $-\left(y-1\right)-8\left(x-1\right)^2+10\left(x-1\right)\left(y-1\right)-3\left(x-1\right)^2$. **3.** $f\left(x,y\right)=1-\left(x+2\right)^2+2\left(x+2\right)\left(y-1\right)+$ $+3\left(y-1\right)^2$. **4.** $\Delta f\left(x,y\right)=2h+k+h^2+2hk+h^2k.$

5. $1+\left(x-1\right)+\left(y+1\right)+\dfrac{\left(\left(x-1\right)+\left(y+1\right)\right)^2}{2!}+\quad+\dfrac{\left(\left(x-1\right)+\left(y+1\right)\right)^3}{3!}$. **6.** Бидејќи f е полином, тогаш и Тејлоровиот развој ќе биде полином (од трет степен) и остатокот $R_n\left(x,y,z\right)=0$ за $n\geq 3.$ $T_3\left(x,y,z\right)=$ $=3\left[3\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z-1\right)^2\right]-3\left[\left(x-1\right)\left(y-1\right)+\left(x-1\right)\left(z-1\right)+\left(y-1\right)\left(z-1\right)\right]+\left(x-1\right)^3+$ $+\left(y-1\right)^3+\left(z-1\right)^3-3\left(x-1\right)\left(y-1\right)\left(z-1\right).$ **7.** $f\left(x,y\right)=1-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{8}\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)+$ $+\dfrac{1}{16}\left(x^6+3x^4y^4+3x^2y^4+y^6\right)+\cdots$. **8.** Користејќи ги Маклореновите формули за функциите $\cos x,\ \cos y$ ќе извршиме апроксимација заклучно до втор ред за функцијата во околина на точката (0,0). Користејќи ги формулите: $\cos t=1-\dfrac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)$ и $\dfrac{1}{1-q}=1+q+q^2+o\left(q^2\right)$, добиваме:

$$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{1-\dfrac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)}=\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+x^2o\left(y^2\right)+y^2o\left(x^2\right)$$

$\approx 1-\frac{x^2-y^2}{2}$. **10.** $f(x,y,z)\approx -(xy+xz+yz)$. **11.** $e^x\cos y=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^m y^{2n}}{m!(2n)!}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

14. $f(x,y)\approx x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2$. **16.** 0.902. Ја применуваме Тејлоровата формула за функцијата $f(x,y)=x^y$ во околина на точката $(1,2)$. **17.** 1.0081. Ја применуваме Тејлоровата формула за функцијата $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ во околина на точката $(1,1)$. **18.** $\left(\frac{1}{2},-1\right)$. **19.** $(6\ ,\ 4)$ **20.** Стационарни точки: $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(0,-1)$, $M_4(1,0)$, $M_5(-1,0)$. **21.** Функцијата $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$ има систем стационарни равенки: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x(4x^2-1)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y(y^2-1)=0,$ од каде се добиваат следниве стационарни точки: $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(0,-1)$, $M_4\left(\frac{1}{2},0\right)$, $M_5\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $M_6\left(\frac{1}{2},1\right)$, $M_7\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $M_8\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $M_9\left(-\frac{1}{2},-1\right)$. Во произволна точка, Хесијанот е: $H(x,y)=\begin{vmatrix}24x^2-2 & 0\\ 0 & 12y^2-4\end{vmatrix}$. Според Силвестеровиот критериум ги добиваме следните резултати: Во точката $M_1(0,0)$, функцијата достигнува максимум и $f(M_1)=0.$ Точките $M_2(0,1), M_3(0,-1), M_4\left(\frac{1}{2},0\right)$, $M_5\left(-\frac{1}{2},0\right)$ се седлести точки и $f(M_i)=-1, i=2,3;\ f(M_i)=-\frac{1}{8}, i=4,5;\ f(M_i)=-1, i=2,3;\ f(M_i)=-\frac{1}{8}, i=4,5.$

Функцијата има локален минимум: $f(M_i)=-\frac{9}{8}$ во точките $M_6\left(\frac{1}{2},1\right)$, $M_7\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $M_8\left(-\frac{1}{2},1\right)$, $M_9\left(-\frac{1}{2},-1\right)$. **22.** Стационарни точки: $M(-5,3,9)$ -локален максимум и $f(M)=34.$ $N(-1,-1,1)$-седлеста точка... **23.** Стационарни точки се $(0,0)$ и сите точки од единечната кружница $x^2+y^2=1$. $f_{\min}=f(0,0)=0.$ Во точките од кружницата функцијата има нестрог максимум $f_{\max}=e^{-1}$. **25.** Минимум $f_{\min}=31$ во точката $(5,2)$. **26.** Функцијата $f(x,y)=x^2+y^3$ има стационарна точка $(0,0)$. Нема локален екстрем во $(0,0)$ бидејќи, на пример $f(0,y)=y^3$. **27.** Минимум во $M(-3,3)$. **28.** Минимум во $M(1,1)$ и максимум во $N(-1,-1)$. **29.** Минимум во точката $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$. **30.** Точката $M\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}},\frac{2}{\sqrt[3]{3}}\right)$ е единствена стационарна точка. Во таа точка функцијата има минимум $f_{\min}=\frac{10\sqrt[3]{3}}{3}$. **31.** $V=xy,z$ $x+y+z=a\Rightarrow z=a-x-y$, па имаме $V=xy(a-x-y)=$ $=axy-x^2y-xy^2.$ Парцијалните изводи $\frac{\partial V}{\partial x}=ay-2xy-y^2=y(a-2x-y)$ и

$\frac{\partial V}{\partial y}=x\left(a-x-2y\right)$ ги изедначуваме со нула и ги бараме решенијата на системот равенки $a-2x-y=0$, $a-x-2y=0$, бидејќи е јасно дека $\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$. Стационарна точка е $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$. $V_{\max}=\frac{a^3}{27}$. **32.** Минимум во $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ и максимум во $\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$. **33.** Минимум $f_{\min}=-5$ во $\left(-1,-2\right)$ и максимум $f_{\max}=5$ во $\left(1,2\right)$.
34. $\left(x,y,z\right)\mapsto f\left(x,y,z\right)=xy+yz$ при условот $x^2+y^2=2,\ y+z=2\ \left(x>0,\,y>0,\,z>0\right)$.
35. $v=\ln u=\ln x_1+\ln x_2+\ln x_3+\ln x_4$. $F\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\ln x_1+\ln x_2+\ln x_3+\ln x_4+$ $+\lambda\left(x_1+x_2+x_3+x_4-4c\right)$. Стационарна точка е $\left(c,c,c,c\right)$, во која функцијата има максимум $u_{\max}=e^4$. **36.** $u_{\min}=4$ во $\left(2,2,1\right),\left(1,2,2\right),\left(2,1,2\right)$. $u_{\max}=\frac{112}{27}$ во $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$. **37.** 1^0 Ако $a>0$, добиваме три стационарни точки: $M_1\left(0,0\right)$, $M_2\left(\sqrt{2a},-\sqrt{2a}\right)$ $M_3\left(-\sqrt{2a},\sqrt{2a}\right)$. 2^0 Ако $a\leq 0$, добиваме само една стационарна точка: $M_1\left(0,0\right)$. Да ја испитаме природата на овие точки. Во случајот 1^0, точката $M_1\left(0,0\right)$е седлеста точка, а во точките $M_2\left(\sqrt{2a},-\sqrt{2a}\right),M_3\left(-\sqrt{2a},\sqrt{2a}\right)$ функцијата има минимум $f_{\min}=-8a^2$. Во случајот 2^0 функцијата во точката $M_1\left(0,0\right)$ достигнува минимум $f_{\min}=0$. **38.** Задачата се сведува на наоѓање минимум на функцијата $\left(x,y,z\right)\mapsto f(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\left(x-x_i\right)^2+\left(y-y_i\right)^2+\left(z-z_i\right)^2$ при услов $x+2y+3z=1$. **39.** $B\left(1,0\right),C\left(0,1\right)$.

ГЛАВА 5

1. $\ln\sqrt{3}$; **2.** дивергира; **3.** π; **4.** дивергира; **5.** 1. **6.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **7.** $\frac{1}{\ln 2}$; **8.** 2; **9.** $\frac{1}{k}$; **10.** $\frac{\pi}{4}$. **11.** $-\frac{1}{32}$. **12.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}$. **13.** $\ln 1+\sqrt{2}$. **14.** $-\frac{1}{8}$. **15.** 1.**16.** Несвој-ствениот интеграл конвергира апсолутно. Навистина, од $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{4+x^5}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{4+x^5}}=1$ и од конвергенцијата на несвојствениот интеграл $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$, од вториот критериум за конвергенција со споредување следува дека несвојствениот интеграл $\int_1^\infty\frac{x}{\sqrt{x^5+4}}dx$ исто така конвергира. Од неравенството $\frac{\left|x\sin x\right|}{\sqrt{x^5+4}}\leq$

$\leq \dfrac{x}{\sqrt{x^5+4}}$, $\forall x>0$, и од првиот критериум за конвергенција со споредување, следува дека несвојствениот интеграл конвергира апсолутно. **17.** Нека. $0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$. Од неравенствата: $\sin x<x, \forall x>0$ и $1+\cos x\geq 1, \forall x\in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, добиваме $1-\cos x=$

$=\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\leq 1-\cos^2 x=\sin^2 x<x^2,\ \forall x\in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Така, $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{x}}{1-\cos x}dx>\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx=\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$.

Од произволноста на $0<\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$ и дивергенцијата на несвојствениот интеграл $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$, следува дека и интегралот $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{x}}{1-\cos x}dx$ дивергира. **18.** Од неравенството $\dfrac{x}{1+x^2\sin^2 x}\geq\dfrac{x}{1+x^2}>\dfrac{1}{x}, \forall x\in[0,1]$ и дивергенцијата на интегралот $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$ следува дека и несвојствениот интеграл $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{x}{1+x^2\sin^2 x}dx$ дивергира. **19.** дивергира. **20.** конвергира.

21. конвергира. **25.** Конвергенцијата следува од неравенството $\dfrac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}<$

$<\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^4}=\dfrac{1}{x^{3/2}}$ $x>0$ и фактот дека интегралот $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ постои. Со смената $x=t^2$ добиваме: $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}dx=2\int_{0}^{\infty}\frac{t^2}{(t+1)^4}dt=2\int_{0}^{\infty}\frac{(t+1-1)^2}{(t+1)^4}dt=\frac{2}{3}$. **26.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty}e^{-x}(x-1)\ln x dx=$

$=\displaystyle\lim_{\substack{A\to\infty\\ a\to 0^+}}\int_{a}^{A}e^{-x}(x-1)\ln x dx=\cdots=1$. **27.** За $x>0$ важи неравенството $\dfrac{x^3+1}{x^3\sqrt{x+1}}>$

$>\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>0$. Од $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\lim_{a\to\infty}\int_{1}^{a}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\infty$ заклучокот следува.

ГЛАВА 6

1. $\frac{8}{3}$. **2.** $\ln\frac{2e}{1+e}$. **3.** $\int_0^{\pi}\cos\alpha x dx=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha\pi$, па имаме $\frac{\partial\left(\int_0^{\pi}\cos\alpha x dx\right)}{\partial\alpha}=\frac{\partial\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}\right)}{\partial\alpha}=$ $=\frac{\pi\cos\alpha\pi}{\alpha}-\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2}$. Од друга страна, $\frac{\partial(\cos\alpha x)}{\partial\alpha}=-x\sin\alpha x,$ па имаме $\int_0^{\pi}\frac{\partial\cos\alpha x}{\partial\alpha}dx=$ $=-\int_0^{\pi}x\sin\alpha x dx=\frac{\pi\cos\alpha\pi}{\alpha}-\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha^2}$. **4.** Од $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\alpha\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}=\alpha$, заклучуваме дека нулата не е сингуларитет, па интегралот е Риманов. Подинтегралната функција $f(x,\alpha)=\frac{\ln\left(1+\alpha\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}$ и нејзиниот парцијален извод по α, $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{1}{1+\alpha\sin^2 x}$ се непрекинати на множеството $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\infty]$. Го применуваме Лајбницовото правило и добиваме $F'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\alpha\sin^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(1+\alpha)\sin^2 x+\cos^2 x}=$(смена: $t=tgx;\quad dt=\frac{dx}{\cos^2 x};$

$$x=0,t=0;\ x=\frac{\pi}{2},t=\infty)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{(1+\alpha)tg^2x+1}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+\alpha)t^2+1}=\frac{1}{(1+\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)}}\right)^2}=$$

$=\frac{1}{(1+\alpha)}\sqrt{(1+\alpha)}arctg\left(t\sqrt{(1+\alpha)}\right)\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha}}$. Оттука $F(\alpha)=\int\frac{\pi d\alpha}{2\sqrt{1+\alpha}}=\pi\sqrt{1+\alpha}+C,$ па од $F(0)=0$, следува $C=-\pi$. Конечно, $F(\alpha)=\pi\left(\sqrt{1+\alpha}-1\right),$ **5.** Прво го пресметуваме интегралот $G(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+\alpha^2}dx=\frac{1}{\alpha}arctg\frac{x}{\alpha}\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\alpha}$. Го користиме Лајбницовото правило, па $G'(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{x^2+\alpha^2}dx=\int_0^{\infty}\frac{-2\alpha}{\left(x^2+\alpha^2\right)^2}dx=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)=-\frac{\pi}{2\alpha^2}$. Од последниот израз гледаме дека $-2\alpha F(\alpha)=-\frac{\pi}{2\alpha^2}$, односно $F(\alpha)=\frac{\pi}{4\alpha^3}$. **6.** Не може. **7.** Прво напоменуваме дека интегралот конвергира по променливата x за сингуларните точки $x=0$ и $x=1$. $F'(\alpha)=\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\alpha^2\right)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$, оттука $F(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)+C.$ Како е $F(0)=0$ следува $C=0$, па имаме: $F(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)$. **8.** Функцијата $G(\alpha)=\int_0^1 x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1},\quad\alpha>-1$ ја диференцираме по α n пати и добиваме $F(\alpha)=G^{(n)}(\alpha)=\int_0^1 x^{\alpha}(\ln x)^n dx=\frac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}},\quad\alpha>-1$. **9.** Го разгледуваме интегралот

$F(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx, \quad \alpha \in [0,1]$. Бараниот интеграл I го добиваме заменувајќи $\alpha = 1$.

Функцијата $f(x,\alpha)=\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$ е непрекината и има непрекинат парцијален извод по α, па затоа можеме да го примениме Лајбницовото правило: $F'(\alpha)=\frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+\alpha)+\frac{1}{2}\ln 2+\alpha\frac{\pi}{4}\right]$; $\quad F(1)-F(0)=\int_0^1 F'(\alpha)d\alpha \Rightarrow \quad I=-I+\frac{\pi}{4}\ln 2 \Rightarrow$ $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$. **10.** $F(\alpha)=\pi\ln\frac{\alpha+1}{2}$. **11.** Функцијата $f(x,y)=x^y$ е непрекината на областа $[0,1]\times[c,d]$, па важи $\int_0^1 dx\int_c^d x^y dy=\int_c^d dy\int_0^1 x^y dx = =\int_c^d dy \left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_0^1=\int_c^d \frac{dy}{y+1}=\ln\frac{d+1}{c+1}$. **12.** Бидејќи $\frac{x^d-x^c}{\ln x}=\int_c^d x^y dy$, имаме $\int_0^1 \frac{x^d-x^c}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_c^d x^y dy = \int_c^d dy\int_0^1 x^y dx = \ln\frac{d+1}{c+1}$.

ГЛАВА 7

1. Конвергира на интервалот $(0,+\infty)$. **2.** Апсолутно конвергира за $|k|<1$, дивергира за $|k|\geq 1$. **3.** Дивергира. **4.** $\left|\frac{p-1}{q}\right|<1$. **5.** Да напоменеме дека интегралот не е несвојствен во однос на долната граница, бидејќи лимесот $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}$ е конечен за секои a и b. Од неравенството: $\left|\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\right| \leq \frac{e^{-ax^2}+e^{-bx^2}}{x^2}\leq\frac{2}{x^2}$, за $a\geq 0, b\geq 0$ и $x\geq 1$ и конвергенцијата на интегралот $\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2}dx$, според критериумот на Вајерштрас, дадениот интеграл апсолутно и рамномерно конвергира за $a\geq 0, b\geq 0$. За $a=b$ интегралот апсолутно конвергира. Ако $a\neq b$ и барем едниот параметар е негативен, тогаш дивергира. **6.** Конвергира на $[0,+\infty)$.

7. Не конвергира рамномерно. **8.** Рамномерно конвергира. **9.** Рамномерно конвергира. **10.**Рамномерно конвергира. **11.** Непрекината. **12.** Непрекината. **13.** Има прекин за $\alpha=0$. **14.** $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\left(\int_a^b x^\alpha d\alpha\right)dx = =\int_a^b\left(\int_0^1 x^\alpha dx\right)d\alpha=\int_a^b\frac{d\alpha}{\alpha+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$.
Можеме да го смениме редот на интегрирање, бидејќи функцијата $f(x,\alpha)=x^\alpha$ е непрекината на $[0,1]\times[a,b]$. **15.** $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

ГЛАВА 8

3. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. **4.** Воведуваме смена $1+t=u$ и добиваме $I=\int_0^2 u^{x-1}(2-u)^{y-1}du$; со нова смена: $u=2z$ добиваме $I=2^{x+y-1}\int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}dz=2^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. **5.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **6.** Воведуваме смена $x^3=u$ и добиваме $I=\frac{1}{3}\int_0^2 u^{-\frac{2}{3}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du.$; понатаму од $p-1=-\frac{2}{3}$ и $q-1=-\frac{1}{2}$ следува $p=\frac{1}{3}$ и $q=\frac{1}{2}$, па добиваме $I=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$. **7.** Воведуваме смена $\sin x=t$ и добиваме $I=\int_0^1 t^6\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}dt$; ако сега ставиме $t^2=u$ добиваме $I=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}du.$ Во овој случај $p=\frac{7}{2}$ и $q=\frac{5}{2}$, па добиваме: $I=B\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)=B\left(3+\frac{1}{2},2+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)}=\frac{3\pi}{2^8}$. **8.** $\ln 2$ **9.** $\frac{\pi}{4}$. **10.** Смена $y=ax^n$; резултат е $\frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$. **11.** Со смената $t=-\ln x$, резултат е $\sqrt{\pi}$. **12.** Смена $x=e^{-y},\cdots$.; резултат е $\frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$. **13.** $-2\sqrt{\pi}$; **14.** $-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$. **15.** $\frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}$.

20. Со повеќекратна парцијална интеграција, добиваме $\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$. **21.** Замени $\sin^2 x=t$. Резултат: $\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$.

ГЛАВА 9

1. Функцијата ја продолжуваме периодично, со период 2, на целата права. Новата функција ја означуваме со f^*. Тогаш, $f^*(x)=f(x),\quad \forall x\in(1,3)$. $f^*(x)$ ја развиваме во Фурјев ред на $[-1,1]$: $a_k=(-1)^k\frac{4}{k^2\pi^2}$. $b_k=(-1)^k\frac{8}{k\pi}$. $f^*(x)=\frac{13}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi}-\frac{2\sin k\pi x}{k\pi}\right),\quad \forall x\in(1,3)\quad f(x)=f^*(x)$. Во точките на прекин $x=2p+1,\ p\in\mathbb{Z}$, $f^*(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=5$. За $x=1$ ќе имаме:

$5=\frac{13}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(-1)^k}{k^2\pi} \quad \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$ **2.** Забележуваме дека $T=2L=4 \Rightarrow L=2.$ Константниот член е една половина од $a_0=0.$ Другите косинусни членови се: $a_n=0,$ за $n\in\mathbb{N}$. Синусните коефициенти се: $b_n=\frac{(-1)^{n+1}4}{n\pi},\quad n\in\mathbb{N}.$ Значи, $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$ **3.** $a_0=4.$ За $n\in\mathbb{N}:\ a_n=0,$ $b_n=\frac{-4}{n\pi}.$ Значи, $f(x)=2+\frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$

4. $f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$ **5.** $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin((2n-1)\pi x).$

6. $a_0=\frac{\pi}{2},\ a_n=0, n\geq 1,\ b_{2n}=0,\quad b_{2n+1}=\frac{2}{2n+1}.\ f(x)=\frac{\pi}{2}+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)}.$ **7.** $L=2,$ $a_0=\frac{1}{4}(xdx)=\frac{1}{2},\quad a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2((-1)^n-1),\quad b_n=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}, n\geq 1 \quad \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right].$ **11.** За добиениот Фурјев ред да содржи само синуси, треба $a_k=0,\ \forall k\in\mathbb{N}.$ За таа цел конструираме функција f^* дефинирана на $(-\pi,\pi)$ и која на $(0,\pi)$ се совпаѓа со $f(x).$ За да важи $a_k=0,$ потребно е f^* да биде непарна функција на $(-\pi,\pi)$. Значи, $f^*(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, & x\in(0,\pi)\\ 0, & x=0\\ -\frac{\pi}{4}, & x\in(-\pi,0)\end{cases}.$

$f^*(x)$ ќе ја развиеме во Фурјев ред на $(-\pi,\pi)$. $a_k=0,\ k\geq 0,$ $b_k=\frac{1-(-1)^k}{2k},\ f^*(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots.$

$$\Rightarrow \forall x\in(0,\pi),\quad f(x)=f^*(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots \tag{14.1}$$

1) $x=\frac{\pi}{2}\in(0,\pi),\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1}\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots.$
(14.2)

2) (14.2) множиме со $\frac{1}{3}$: $\quad \frac{\pi}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\frac{1}{27}-\frac{1}{33}+\cdots$
(14.3)

(14.2)+(14.3): $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\cdots=\frac{\pi}{3}.$

3) Во (14.1) заменуваме $x=\frac{\pi}{3}\in(0,\pi)$, добиваме $\frac{\pi}{4}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{5}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{11}+\cdots$ односно $\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$

12. Функцијата f е антипериодична функција со период π и периодична со период 2π, значи дека важи $f(x+\pi)=-f(x)$ и $f(x+2\pi)=f(x)$. Нека f може да се развие во Фуриев ред на $(-\pi,\pi)$. Тогаш, $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi)dx=$ (смена $x+\pi=t$) $=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(t)dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=-a_0$, па следува $a_0=0.$ $a_k=(-1)^{k+1}a_k$, следува

дека $a_{2k}=0.$ Слично се покажува дека $b_{2k}=0.$ Конечно, $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{2k-1}\cos(2k-1)x+b_{2k-1}\sin(2k-1)x\right).$ **13.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\cos(2p-1)x.$

14. $a_0=\alpha$. $a_k=\frac{\sin k\alpha}{k}.$ $b_k=0.$ $f(x)=s(x)=\frac{\alpha}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}\cos kx, \left(x\in[-\pi,\pi]\right)$, освен во точките $x=\pm\alpha$, каде што $s(x)=\frac{\pi}{4}.$ За да го определиме α, го применуваме Парсеваловото равенство: $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx \Rightarrow \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}\alpha.$

$\Rightarrow 2\frac{a_0^2}{2}=\frac{\pi}{2}\alpha \quad \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}.$ **15.** Ја прошируваме функцијата f од полуинтервалот $[0,2\pi)$ на $\mathbb{R}$ така што добиената функција да биде периодична со период $2\pi.$ Новата функција е непарна, па $a_n=0$ за $n\in\mathbb{N}_0$. Коефициентите b_n ги одредуваме со парцијална интеграција: $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{n}.$ Така, $\frac{\pi-x}{2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. Фуриевиот ред на зададената функција конвергира за $\forall x\in(0,2\pi)$ кон функцијата f, па важи $\frac{\pi-x}{2}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$ За $x=0$ сумата на Фуриевиот ред е нула, а $f(0)\neq 0$, па горното равенство не важи за $x=0$. Забележуваме дека Фуриевиот ред за функцијата f не конвергира рамномерно на сегментот $[0,2\pi]$, бидејќи во спротивно сумата на редот би била непрекината функција.

16. $f(x)=\dfrac{\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+a^2}\left(a\cos nx-n\sin nx\right)\right).$

17. $f(x)=\dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\left(\dfrac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a(-1)^n}{a^2-n^2}\cos nx\right).$ **18.** $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$

19. $L=5,\quad a_0=0,\quad a_n=0,\quad b_n=\dfrac{10(-1)^n}{n\pi}.\quad f(x)=\dfrac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{5}.$

20. $f(x)=\dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos ax}{n}.$ **21.** Ја продолжуваме функцијата до парност на сегментот $[-2,2]$. Фуриевите коефициенти за така добиената функција се $a_0=2,\quad a_n=\dfrac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1),\quad b_n=0.$ Функцијата f е квадрат интеграбилна на сегментот $[-2,2]$, па важи равенството на Парсевал: $\dfrac{2^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi-1)^2=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}x^2dx,$ односно $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-4)^4}=\dfrac{\pi^4}{96}.$ Од оваа сума лесно добиваме: $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^4}=\dfrac{\pi^4}{96}+\dfrac{S}{16}.$ Следува $S=\dfrac{\pi^4}{90}.$ **22.** Примени го равенството на Парсевал на функцијата $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ x\in(0,2\pi),\ f(0)=f(2\pi)=0.$

23. Упатство: Редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ е дивергентен. **24.** Редовите под 1), 2) и 3) се Фуриеви редови на функција.

ГЛАВА 10

1. Се докажува со средства на елементарна геометрија.

3. Разликата $P'\setminus P''$ не е затворено множество, па од таму следува не е елементарно множество. Елементарно множество е ако $P''\subset P'$ или $P'\cap P''=\varnothing$. Нервенството $m\left(\overline{P'\setminus P''}\right)\geq m(P')-m(P'')$ го добиваме од $P'\cup P''=(P'\setminus P'')\cup(P'\setminus P')$, па следува $m(P'\cup P'')=m(P'\setminus P'')+m(P''\setminus P')\Rightarrow m(P'\setminus P'')=m(P'\cup P'')-m(P''\setminus P')\geq mP'-m(P'')$

10. За секој $\varepsilon>0$ постојат елементарни фигури P_1 и P_2 така што $G_1\subset P_1$, $G_2\subset P_2$ и $m(P_1)<\dfrac{\varepsilon}{2},\quad m(P_2)<\dfrac{\varepsilon}{2}.$ Тогаш, $G_1\cup G_2\subset P_1\cup P_2=P$ и уште важи: $m(P)\leq m(P_1)+m(P_2)<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$ **12.** Бидејќи множеството G е мерливо, за секој $\varepsilon>0$ постојат елементарни фигури P_1 и P_2 така што $m(P_2)-m(P_1)<\varepsilon$ и важи

$P_1 \subset G \subset P_2$. Ако G^*, P_1^*, P_2^* се добиени со транслација или ротација на G, P_1, P_2, тогаш $P_1^* \subset G^* \subset P_2^*$. Заради задачата 9, $m(P_1) = m(P_1^*) = m_i(P_1^*) \le m_i(G^*) \le m_e(G^*) <$ $< m_e(P_2^*) = m(P_2)$, па добиваме $m_e(G^*) - m_i(G^*) < \varepsilon$. Од произволноста на ε следува тврдењето.

ГЛАВА 11

1. Функцијата $f:(x,y) \mapsto xy$ е непрекината на D, па интегралот постои. Со правите $x = \frac{a}{n}i,\ i = 0,1,\cdots,n$ и $y = \frac{b}{m}j,\ j = 0,1,\cdots,m$, ја делиме областа D на nm правоаголници $D_{ij} = \left\{(x,y): \frac{a}{n}(i-1) \le x \le \frac{a}{n}i, \frac{b}{m}(j-1) \le y \le \frac{b}{m}j\right\},\ i = 0,1,\cdots,n,\ \ j = 0,1,\cdots,m$, и ги избираме точките $(\xi_i, \eta_j) = \left(\frac{a}{n}(i-1), \frac{b}{m}(j-1)\right) \in D_{ij},\ \ i = 0,1,\cdots,n,\ j = 0,1,\cdots,m \Rightarrow$

$$m(D_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j = \frac{a}{n}\cdot\frac{b}{m}, \sigma(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) m(D_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{a}{n}(i-1)\frac{b}{m}(j-1)\frac{ab}{nm} =$$

$$= \frac{a^2b^2}{n^2m^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\sum_{j=1}^{m}(j-1) = \frac{a^2b^2}{n^2m^2}\frac{(n-1)n}{2}\frac{(m-1)m}{2} = \frac{a^2b^2(n-1)(m-1)}{4nm}.$$

По дефиниција, имаме:

$$I = \lim_{\max m(G_{i,j}) \to 0} \sigma(f,P) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{a^2b^2(n-1)(m-1)}{4nm} = \frac{a^2b^2}{4}.$$

2. $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} = \ln\frac{25}{24}.$ **4.** $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x (x^2+y^2)dy = \frac{1}{3}.$

5. $\iint\limits_D xydxdy = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xydy = \frac{a^4}{8}.$

6. $D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$. $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x+y^2)dy = \frac{5}{42}.$

7. $I = \int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_2^4 dx \int_0^{-x+4} f(x,y)dy$ и $I = \int_0^2 dy \int_y^{4-y} f(x,y)dx..$

8. $I = \int_3^5 dx \int_{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}x+2} f(x,y)dy$ и $I = \int_5^{\frac{13}{2}} dy \int_3^{\frac{2y-1}{3}} f(x,y)dx + \int_{\frac{13}{2}}^{8} dy \int_{\frac{2y-4}{3}}^{\frac{2y-1}{3}} f(x,y)dx + \int_8^{\frac{19}{2}} dy \int_{\frac{2y-4}{3}}^{5} f(x,y)dx.$

9. $I = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$ и $I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

10. $I=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}} f(x,y)dx.$

11. $I=\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_{1}^{2} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$

12. $I=\int_{-1}^{0} dx\int_{-x-1}^{x+1} f(x,y)dy+\int_{0}^{1} dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)dy.$ **13.** $I=\int_0^a dx\int_y^a dy,\ a>0.$

14. $I=\int_0^a dy\int_y^y dx+\int_a^{a\sqrt{2}} dy\int_0^{\sqrt{2a^2-y^2}} dx.$ **15.** $I=\int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f(x,y)dx.$

18. $\int_0^a dx\int_{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{a} \frac{xy\ln(x+a)}{(x-a)^2}dy.$

19. $\int_0^a dy\int_y^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx=\int_0^a dx\int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\int_0^a x^2\log\left(1+\sqrt{2}\right)dx=\frac{a^3}{3}\log\left(1+\sqrt{2}\right).$

20. $\int_0^1 dy\int_0^y \frac{x}{y}dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y}\frac{x}{y}dx=2\log 2-1.$ **21.** $\frac{1}{12}.$ **22.** Функцијата $f(x,y)=|x|+|y|$ е парна во однос на x и y. Следува $I=\iint\limits_D(|x|+|y|)dxdy=4\iint\limits_{D_1}(|x|+|y|)dxdy,$ каде што $D_1=\{(x,y)\in D: x\ge 0, y\ge 0\}$. Имаме $I=4\iint\limits_{D_1}(|x|+|y|)dxdy=4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy=\frac{4}{3}.$

25. Преминуваме во поларни координати $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi.$ Јакобијанот $J=\begin{vmatrix}-\rho\sin\varphi & \cos\varphi\\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}=\rho$. Од $0\le x^2+y^2\le 1$ следува $0\le\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi=\rho^2\le 1,$, $\rho\ge 0,$ односно $0\le\rho\le 1,\quad \rho\ge 0.$ Од $x\ge 0, y\ge 0$ следува $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

Така, $D^*=\left\{(\rho,\varphi): 0\le\rho\le 1, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$ $I=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_{D^*}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho d\varphi=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho=\frac{\pi}{6}.$ **26.** $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi.$ $J=\rho$. Од $1\le x^2+y^2\le e^2$ следува $1\le\rho\le e.$ $0\le\varphi\le 2\pi.$ Така, $D^*=\{(\rho,\varphi): 1\le\rho\le e, 0\le\varphi\le 2\pi\}.$

$$I=\iint\limits_D\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{D^*}\frac{\ln\rho^2}{\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^e\frac{2\ln\rho}{\rho}d\rho=2\pi.$$

27. Воведуваме смена: $x=\dfrac{y}{u},\ y^2=uv\Rightarrow y=\sqrt{uv},\ x=\sqrt{\dfrac{v}{u}}.$ Имаме, $J=-\dfrac{1}{2u}$.

$I=\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_{D^*}\dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{1}{2u}dudv=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^4 du\int\limits_2^5\dfrac{v}{u^2}dv=\dfrac{63}{16}.$ **28.** $I=\dfrac{2\pi}{3}.$ **29.** $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$

$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}.\quad 0\le\rho\le\dfrac{2}{\cos\varphi}.\quad J=\rho.\quad \int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi}}f(\rho)\rho d\rho.$

30. $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{x^2+1},$ односно $\rho\le\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+1}\Rightarrow\rho^2\le\rho^2\cos^2\varphi+1$

$\Rightarrow\rho^2\sin^2\varphi\le1\Rightarrow\rho\le\dfrac{1}{\sin\varphi}.\quad I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}}f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\rho d\rho.$

32. $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}f\left(x,y,z\right)dz.$ **33.** $I=\int\limits_{-r}^r dx\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dy\int\limits_0^R f\left(x,y,z\right)dz.$ **35.** Преминуваме во цилиндрични координати: $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z.$ $J=\rho;$ $0\le\theta\le2\pi,\quad 0\le\rho\le R,\quad \dfrac{\rho h}{R}\le z\le h.\ \Rightarrow\iiint\limits_V zdxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^R d\rho\int\limits_{\frac{\rho h}{r}}^h z\rho dz=\dfrac{\pi h^2R^2}{4}.$

36. Областа V е топка со центар во $\left(0,0,\dfrac{1}{2}\right)$ и радиус $R=\dfrac{1}{2}.$ Преминуваме во сферни координати: $x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\varphi.$ Проекцијата врз xOy рамнината е круг со центар во $(0,0)$ и радиус $\dfrac{1}{2}$, па следува $0\le\theta\le2\pi,\quad 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}.$ Од $\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\varphi=\rho\cos\varphi$ добиваме $\rho=\cos\varphi$, па следува $0\le\rho\le\cos\varphi.$ Јакобијанот $J=\rho^2\sin\varphi.$ Конечно, $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=$

$\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\cos\varphi}\rho\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho=\dfrac{\pi}{10}.$ **37.** Преминуваме во сферни координати $x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\varphi,\quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\quad 0\le\rho\le1.$

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3\sin\varphi d\rho=\dfrac{\pi}{8}.$ **38.** Преминуваме во цилиндрични координати: $x=a\rho\cos\varphi,\quad y=b\rho\sin\varphi,\ z=cu,\quad J=abc\rho.\quad I=\dfrac{abc\pi^2}{4}.$ **39.** $I=\dfrac{1}{2}\ln2-\dfrac{5}{16}.$ **40.** $I=\dfrac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\dfrac{97}{6}\right).$

ГЛАВА 12

1. Со смената $u = xy,\quad v = \dfrac{y^2}{x}$ областа D, ограничена со дадените криви се пресликува во областа $D^* = \{(u,v):\ 1 \le u \le 8, 1 \le v \le 8\}$. Јакобијанот: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \ = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \dfrac{x}{3y^2} = \dfrac{1}{3v}.$

Бараната плоштина: $P = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D^*} \dfrac{1}{3v} dudv = \dfrac{1}{3}\int_1^8 du \int_1^8 \dfrac{1}{v} dv = 7\ln 2.$ **2.** $(b-a)\ln\dfrac{d}{c}.$

3. Воведуваме смена: $y^2 = ux,\ x^2 = vy;$ новите граници: $2p < u < 2q,\ 2r < v < 2s$; јакобијанот: $-\dfrac{1}{3};\ P = \int_{2p}^{2q} du \int_{2r}^{2s} \dfrac{1}{3} dv = \dfrac{4}{3}(q-p)(s-r).$ **4.** $P = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2.$

5. $P = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \right).$ **6.** $P = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin 2\varphi} \rho d\rho = \dfrac{\pi}{2}.$ **7.** Преминуваме во поларни координати. $P = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho d\rho = \dfrac{3(\pi+2)}{4}.$ **8.** Упатство: Воведи смена: $x^2 = uy,\ y^2 = vx.$. **13.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -1.$ $P = \iint\limits_D \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dxdy = 4\sqrt{3}.$

14. Проекцијата врз xOy рамнината е областа $D: x^2 + y^2 \le 1.$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$. $P = \iint\limits_{D:x^2+y^2\le 1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy;$ преминуваме во поларни координати. $P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho = \dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$ **15.** $x^2 + z^2 - az + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow x^2 + \left(z - \dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$; $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\pi.$ **16.** Проекцијата врз xOy рамнината е областа $D: (x-1)^2 + y^2 \le 1.$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{z}.$ $P = 2\sqrt{2}\pi.$ **19.** $78\dfrac{15}{32}.$ **20.** $\dfrac{5\pi a^3}{12}\left(3 - \sqrt{5}\right).$ **21.** $\dfrac{1}{8}.$ **22.** $\dfrac{256}{21}.$

ГЛАВА 13

4. Должината на лакот ја пресметуваме со формулата $l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$. Ако кривата ја параметризираме со

природниот параметар, имаме $s(t)=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,d\tau = t\sqrt{a^2+b^2}$. Тогаш, од $t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, добиваме $x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $z=b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Така, имаме $l(\gamma)=\int_0^{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{a^2+b^2}+a^2\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{1}{a^2+b^2}+b^2\frac{1}{a^2+b^2}}ds=2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

6. $\left(2\pi a^2+\frac{8}{3}\pi^3b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$. **7.** $1+\sqrt{2}$. **8.** Горната полукружница на единечната кружница има параметризација: $\gamma(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi),\ 0\le\varphi\le\pi.$ Тогаш,

$$\int_\gamma\left(2+x^2y\right)ds=\int_0^\pi\left(2+\cos^2\varphi\sin\varphi\right)\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,d\varphi=2\pi+\frac{2}{3}.$$

10. За параметар на кривата земаме $x=t,\quad y=t^2,\ -1\le t\le 1.$

$$\int_\gamma\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy=\int_{-1}^1\left(\left(t^2-2t^3\right)+\left(t^4-2t^3\right)2t\right)dt=-\frac{14}{15}.$$

14. $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$. Границите на t ги наоѓаме од системите: $a(t-\sin t)=0,\ a(1-\cos t)=0$ и $a(t-\sin t)=2\pi,$ $a(1-\cos t)=0$. $I=\int_\gamma y^2ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=\int_0^{2\pi}8a^3\sin^3\frac{t}{2}dt=\frac{256}{15}a^3.$

15. Прв начин: да ја запишеме во параметарски облик равенката $x^2+y^2=ax$: $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Нека $x_1=x-\frac{a}{2},\quad y_1=y\ \Rightarrow\left(\frac{2}{a}x_1\right)^2+\left(\frac{2}{a}y_1\right)^2=1$. Воведуваме смена: $\frac{2}{a}x_1=\cos t,\ \frac{2}{a}y_1=\sin t$ односно $x=x_1+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}(\cos t+1),\quad y=\frac{a}{2}\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$.

$ds=\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2 t+\frac{a^2}{4}\cos^2 t}\,dt=\frac{a}{2}dt$. $I=\int_\gamma(x-y)ds=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}(1+\cos t-\sin t)\frac{a}{2}dt=\cdots$

Втор начин: Преминуваме во поларни координати: $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Заменуваме во равенката $x^2+y^2=ax$, добиваме $\rho=a\cos\varphi$ $\Rightarrow x=a\cos^2\varphi,\quad y=a\cos\varphi\sin\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$$ds=\sqrt{\left(-2a\sin\varphi\cos\varphi\right)^2+\left(-a\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi\right)^2}\,d\varphi=a\,d\varphi.\ \cdots$$

16. $I=\int_\gamma\left(x^2+y^2+z^2\right)ds=\int_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)\cdot\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$ **17.** Параметарски равенки на страните на правоаголникот $OABC$ се: $OA: x=t,\quad y=0,\quad 0\le t\le 4;$ $AB: x=4,\quad y=t,\quad 0\le t\le 2;$ $BC: x=t,\quad y=2,\quad 0\le t\le 4;$ $CO: x=0,\quad y=t,\quad 0\le t\le 2.$.

$I_1=\int_{OA}xyds=0,\ I_2=\int_{OC}xyds=0,\quad I_3=\int_{AB}xyds=\int_0^2 4tdt=8$ и $I_4=\int_{BC}xyds=\int_0^4 2tdt=16$.

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 24.$ **18.** $I = \frac{2}{3}a^3\pi.$ **21**. Нека $\gamma = OB$ е дел од кривата γ_1 и $l = l(\gamma)$. Прво ги наоѓаме параметарските равенки на кривата γ. Секоја точка $(x, y, z) \in \gamma_1$ припаѓа истовремено на површините S_1 и S_2, па е решение на системот равенки $(x-y)^2 = 3(x+y)$ и $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$. Со смената $u = x-y,\ v = x+y$ во предходниот систем, го добиваме системот $u^2 = 3v$, $uv = \frac{9}{8}z^2$. Ако ставиме $u = t$, имаме $v = \frac{1}{3}t^2$ и $z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}t\sqrt{t}$. Така, $x = \frac{3t+t^2}{6}$, $y = \frac{t^2-3t}{6}$ и $z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}t\sqrt{t}$. За точката $O(0,0,0)$, $t = u = x - y = 0$ а за точката $B\left(3, 0, \sqrt{8}\right)$, $t = u = x - y = 3 - 0 = 3$. Параметарските равенки на кривата се: $\gamma:\ x = \frac{3t+t^2}{6}$, $y = \frac{t^2-3t}{6}$, $z = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}t\sqrt{t}$, $t \in [0,3]$. Должината на кривата γ е $l = l(\gamma) = \int_0^3 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt = 3\sqrt{2}.$

22. $l = l(\gamma) = 5.$ **23.** $I = 2\left(2-\sqrt{2}\right)a^2.$ **24.** $I = 2a^2.$ **25.** Кружницата е со центар во $(0,6,0)$ и радиус $3\sqrt{2}$. Параметарските равенки на кривата се $\gamma:\ x = 3\sqrt{2}\cos\varphi,\ y = 6 + 3\sqrt{2}\sin\varphi,\ z = 0;\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ со ориентација од $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ до $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Наоѓајќи $x'(\varphi) = -3\sqrt{2}\sin\varphi,\ y'(\varphi) = 3\sqrt{2}\cos\varphi,\ z'(\varphi) = 0$ добиваме $I = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{-y(\varphi)x'(\varphi) + x(\varphi)y'(\varphi)}{x^2(\varphi) + \left[y(\varphi) - 6\right]^2}d\varphi = -(2+\pi).$ **26.** Упатство: Површината S_1 е параболоидот $z = -\left(x^2+y^2\right) + 4$ што ја сече $z-$оската во точката $(0,0,4)$. Површината S_2 е сферата $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ со центар во точката $(0,0,2)$ и радиус 2. Со елиминација на $z-$координатата од равенките на површините S_1 и S_2, ја добиваме равенката на проекцијата на кривата γ на рамнината $z = 0$: $\gamma_{xy}:\ x^2 + y^2 = 3,\ \ z = 0.$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}\sin\varphi + 3\cos^2\varphi\right)d\varphi = 3\pi.$$

26. $x = 1 + 2\cos t,\ y = 1 + 2\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi,$ $dx = -2\sin t dt,\ dy = 2\cos t dt,$ $\oint_\gamma (x+y)dx + (x-y)dy = 0.$

27. Означуваме: $P = e^x\sin y - py, Q = e^x\cos y - p$, ја дополнуваме кривата AO до затворена крива γ со отсечката OA од $x-$оската. Имаме: $I = \int_{AO} Pdx + Qdy = \oint_\gamma Pdx + Qdy - \int_{OA} Pdx + Qdy$. Од теоремата на Грин, бидејќи $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = p$, добиваме $\oint_\gamma P \quad +d \quad \Rightarrow x\iint_D \quad Q$, каде што

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=ax,\ y\geq 0\right\}$. Понатаму, $\iint_D p\,dxdy = pP(D)=p\dfrac{a^2\pi}{8}$;

$\int_{OA} Pdx+Qdy=0$ (бидејќи $P=0,\ dy=0$). Така, $I=p\dfrac{a^2\pi}{8}$.

28. Плоштината $P=\dfrac{1}{2}\oint_\gamma xdy-ydx=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3ab\cos^4 t\sin^2 t+3ab\sin^4 t\cos^2 t\right)dt=\dfrac{3ab\pi}{8}$.

29. Јасно е $xdx-ydy=du$, каде што $u=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}$. Тогаш, $\int_{AB} xdx-ydy=u(B)-u(A)=-\dfrac{7}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3.$

30. $P=x^4+4xy^3,\ Q=6x^2y^2-5y^4,\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, значи $Pdx+Qdy$ е тотален диференцијал, па криволинискиот интеграл не зависи од кривата по која интегрираме. Ќе интегрираме по кривата AMB, каде што $M(-2,0)$. Тогаш, $AM=\left\{(x,y): x=-2,\ -1\leq y\leq 0\right\}$, $MB=\left\{(x,y): y=0,\ -2\leq x\leq 3\right\}$.

$\int_{AM} Pdx+Qdy=\int_{-1}^{0}\left(24y^2-5y^4\right)dy=7.$ $\int_{MB} Pdx+Qdy=\int_{-2}^{3}x^4dx=55.$ Следува $\int_{AB}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy=62.$

31. $P=\dfrac{1}{2}\oint_\gamma xdy-ydx=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t\left(-a\sin t\right)\right)dt=ab\pi.$ **32.** $\dfrac{2a^2}{3}$. **33.** $\dfrac{a^2\pi}{4}$.

35. **а)** $\dfrac{4}{3}$, **б)** 0, **в)** $\dfrac{12}{5}$, **г)** -4, **36.** 0. **37.** $x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,$ $dx=-R\sin\varphi d\varphi,\ dy=R\cos\varphi d\varphi.$

$I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\left(R\cos\varphi+R\sin\varphi\right)\left(-R\sin\varphi d\varphi\right)-\left(R\cos\varphi-R\sin\varphi\right)\left(R\cos\varphi d\varphi\right)}{R^2}=-2\pi.$ $P=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$,

$Q=-\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-y^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ се непрекинати на $\mathbb{R}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}$, но $\mathbb{R}^2\setminus\left\{(0,0)\right\}$ не е просто сврзана област, па не се исполнети условите од Теоремата за независност од патот на интеграција. Доколку беа исполнети условите од теоремата, интегралот ќе трбаше да биде 0.

38. Областа меѓу двете сфери е просто сврзана. $P=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $Q=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $R=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$. Функциите P,Q,R и нивните парцијални изводи се непрекинати освен во $(0,0,0)$, но точката не е во областа. Значи, исполнети се условите од Теоремата за независност од патот на интеграција. Треба да најдеме функција u, така што $du=Pdx+Qdy+Rdz$: $u=\int_{x_0}^{x}P\left(t,y_0,z_0\right)dt+$

$+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,t,z_0)\,dt+\int_{x_0}^{x} R(x_0,y_0,t)\,dt$ каде што (x_0,y_0,z_0) е произволна точка од областа.

Добиваме $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}$, $du=d\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $I=\int_{(a_1,a_2,a_3)}^{(b_1,b_2,b_3)} du=b-a.$

ГЛАВА 14

1. Нека P е плоштината на површината S. $P=\iint_S d\sigma=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=$

$=\iint_D \sqrt{1+y^2+x^2}\,dxdy$ каде што $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 8\}$. Преминуваме во поларни координати: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$: $P=\iint_D \sqrt{1+y^2+x^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho=26\pi.$

2. $P=\iint_S d\sigma=\iint_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\iint_D \frac{\sqrt{14}}{3}\,dxdy=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^{6} dx\int_0^{-\frac{x}{2}+3} dy=3\sqrt{14}.$

3. $P=4\iint_{S_1} d\sigma$, каде што S_1 е делот од површината во првиот октант. Ако преминеме во сферна параметризација: $x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta,\quad \rho=\rho(\varphi,\theta)$, тогаш равенката на дадената површина ќе биде $\rho=a\sin\theta\sqrt{\sin 2\varphi}.$

$$d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,\rho d\theta d\varphi=\frac{a\sin\theta}{\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho d\theta d\varphi,\Rightarrow P=4\iint_{S_1} d\sigma=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta=\frac{a^2\pi^2}{2}.$$

4. Нека P е плоштината на површината S. $\frac{\partial x}{\partial \rho}=\cos\varphi,\ \frac{\partial x}{\partial \varphi}=-\rho\sin\varphi,\ \frac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\varphi,$

$\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\rho\cos\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial \rho}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \varphi}=1;\quad E=\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+0=1,$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi+1=\rho^2+1,$$

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)=-\rho\cos\varphi\sin\varphi+\rho\sin\varphi\cos\varphi+0\cdot 1=0.$$

$$P=\iint_S d\sigma=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,d\rho d\varphi=\iint_D \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho d\varphi=\int_0^{a} \sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi=$$

$=\pi\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right]$. Последниот интеграл се пресметува ползувајќи ја смената: $\rho=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$. За $\rho=0, t=0$ и за $\rho=a, t=\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\cdots$.

5. $P=2\iint\limits_{x^2+z^2\le b^2}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz=2\iint\limits_{x^2+z^2\le b^2}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}dxdz=4a\pi\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$.

6. $I=12\sqrt{61}$. **7.** $I=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **8.** $I=a^3\pi$. **9.** $I=\ln 2\left(\sqrt{3}-1\right)+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

10. Со кружницата $x^2+z^2=a^2$ површината S ја делиме на површини S_1 и S_2 за кои важат равенствата: $y=\pm\sqrt{a^2-x^2-z^2}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\pm\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}=\pm\dfrac{z}{y}$, и $\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz=$ $=\dfrac{adxdz}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}$. Тогаш, $I=2\iint\limits_{x^2+z^2\le a^2, z\ge 0}(x+z)\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz=\pi a^3$.

11. Нека S_1 е горната полусфера, а S_2 е долната полусфера. Тогаш, $\iint\limits_S xyzdxdy=\iint\limits_{S_1}xyzdxdy+\iint\limits_{S_2}xyzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}}xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy=0.$

12. $\dfrac{a^4\pi}{2}$. **13.** $-\dfrac{2\pi R^7}{105}$. **14.** $\dfrac{4\pi}{3}abc$. **15.** Површината S е централен елипсоид со полуоски a,b,c. Нека D е областа ограничена со S. Во интегралот I, $P(x,y,z)=\dfrac{x^3}{a^2}$, $Q(x,y,z)=\dfrac{y^3}{b^2}$, $R(x,y,z)=\dfrac{z^3}{c^2}$, па имаме $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=3\left(\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}\right)$. Исполнети се условите на теоремата на Остроградски и важи: $I=3\iiint\limits_D\left(\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}\right)dxdydz=\dfrac{12}{5}abc\pi$. **16.** Во интегралот I, $P(x,y,z)=y$, $Q(x,y,z)=x^2$, $R(x,y,z)=z$, па имаме $\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & x^2 & z\end{vmatrix}=(2x-1)\cos\gamma$.

Исполнети се условите на Штоксовата теорема,па со нејзина примена имаме: $I=\iint\limits_S(2x-1)\cos\gamma d\sigma$ каде што $S:\ z=z(x,y)=x^2+y^2$.

17. Исполнети се условите од теоремата на Гаус-Остроградски, па имаме: $I=\iiint\limits_V(y+2y+y)dxdydz=0$. **18.** $3a^4$.

19. Површината S ограничена со γ е кругот: $x^2+y^2<a^2,\ D=S\cup\gamma.$
$P=1,\quad Q=2x^3y^2,\quad R=3z;\ \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y^2,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial R}{\partial y}=0$

$\Rightarrow \oint\limits_{\gamma} dx+2x^3y^2dy+3zdz=\iint\limits_{D}6x^2y^2dxdy=\dfrac{\pi a^6}{4}.$ **20.** $-4\pi\sqrt{3}.$ **21.** $\dfrac{12}{5}\pi R^5.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Adnadjevic D., Kadelburg Z., Matematicka Analiza I-II, I-Naucna knjiga 1990, II-Zavod za udzbenike i nastavna sredstva 1991, Beograd.
2. Ariel Yadin , Measure theory, Ben –Gurion University, 2015.
3. Бутузов В. Ф., и др. Математический Анализ в Вопросах и Задачах, Функции нескольких переменньих, Москва, Вьисшая школа, 1988.
4. Demidovic B.P. i dr., Zadaci i rijeseni primeri iz Vise matematike sa primjenom na tehnicke nauke, Tehnicka knjiga, Zagreb, 1968.
5. Friedman A., Advanced Calculus, Holt, Rinehart &Winston, Inc, 1971
6. Кудрявцев Л. Д., Курс Математического Анализа, Том 1,2,3, Москва, Высшая Школа, 1989.
7. Kurepa S., Matematicka analiza, funkcije vise varijabli, Tehnicka knjiga, Zagreb, 1979.
8. И.И.Лашко, А.К.Боарчук, Г.Гаи, Г.П. Головач, Справочное Пособие по Математическому Анализу, Виша Школа-Киев-1986.
9. Lazarevic I., Visedimenzionalna matematicka analiza, Knjiga I, Orion-art, Beograd, 2003.
10. Milicic P., Uscumlic M., Zbirka zadataka iz vise matematike I, Naucna knjiga, Beograd, 1988.
11. Mitrinovic D., Matematika: u obliku metodicke zbirke zadataka sa reshenjima III deo, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1988
12. Ивановски М., Задачи од Анализа , Алби, Скопје 2000.
13. Radjenovic S., Matematicka analiza II: metodska zbirka zadataka, Beograd, Studentski krug, 2002

14. Rudin W., Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, Kogakusha, LTD, 1976
15. Paulo Ney de Souza, Jorge-Nuno Silva, Berkeley Problem in Mathematics, Springer -1998.
16. Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н., Предавања по Виша математика, Книга 3, Скопје, 1981
17. Ungar S., Matematička Analiza 3, Zagreb 2002.
18. William F. Trench, Introduction to Real Analysis , San Antonio, TX, USA-2003.
19. Wrede R., Murray R. Spiegel, Advanced Calculus, Schaum's Outlines, McGrawHill-2010
20. Shakarchi R., Problems and Solutions for Undergraduate Analysis, Springer -1998.

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41