НИКИТА ШЕКУТКОВСКИ

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА

УНИВЕРЗИТЕТ СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
СКОПЈЕ, 2023

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

517(075.8)

ШЕКУТКОВСКИ, Никита
Математичка анализа [Електронски извор] / Никита Шекутковски. - Скопје : Универзитет "Св. Кирил и Методиј", 2023

Начин на пристапување (URL):
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41
(Слободен пристап). - Текст во PDF формат, содржи 388 стр. - Наслов преземен од екранот.- Опис на изворот на ден 13.04.2023. - Фусноти кон текстот. -
Библиографија: стр. 387-388. - Регистар на поими

ISBN 978-9989-43-490-7

а) Математичка анализа -- Високошколски учебници

COBISS.MK-ID 60081157

ВОВЕД

Учебникот првенствено е наменет за студентите од студиската група Математика на Природно-математичкиот факултет во Скопје. Ќе набројам некои од основните карактеристики на учебникот.

Реалните броеви се експлицитно конструирани на почетокот на книгата од множеството на конечните децималните броеви . Овој пристап според мислењето на авторот треба да има предност, затоа што студентите во досегашното школување и секојдневен живот постојано се среќаваат со конечните децимални броеви при работата со компјутер и дигитрон.

Најпрво преку почетните интервали од позитивни конечни децимални броеви и бесконечните децимални записи се конструираат позитивните реални броеви, се дефинира подредувањето и операциите. Потоа се воведуваат и негативните броеви и операциите со нив се определуваат со добро познатите правила за собирање и множење на позитивни и негативни броеви.

Деталите на конструкцијата на реалните броеви се дадени на крајот и тие не се задолжителни за студентите.

При воведувањето на поимот лимес на низа се дозволува лимес да бидат и симболите ∞ и - ∞, со што се поедноставува формулацијата на многу понатамошни теореми. Ова е постигнато со дефинирање на околини во множеството реални броеви за симболите бесконечност ∞ и минус бесконечност $-\infty$, и определувањето на лимес со помош на околини.

Непрекинатоста на реалните функции и поимот лимес на функција заземаат централно место во поглавјето за реални функции. Внимание е посветено и на поврзаноста на овие два поими. Секако, најкарактеристичен за овој учебник е третманот на бесконечните лимеси и лимесите во бесконечност, кои се разгледани во ист контекст со конечните лимеси. На тој начин е избегнато повторувањето на формулациите и докажувањето на теоремите посебно за конечните и посебно за бесконечните лимеси. Со помош на соодветната теорема кај низи докажана е општата теорема за операции со лимеси, каде е вклучен и случајот
кога лимесот е еден од симболите ∞ и $-\infty$.. Со помош на теоремите од овој дел се воведени на прецизен, но сепак елементарен начин основните функции: степенsката, експоненцијалната, логаритамската, тригонометриските и инверзните тригонометриски функции.

Следуваат деловите посветени на поимите извод, неопределен интеграл и определен интеграл. Поимите се третирани на модерен начин при што е дадена предност на прецизноста на воведувањето на поимите и на доказите, пред обемноста на презентираниот материјал.

Поимот определен интеграл на функција на интервалот $[a,b]$.е воведен со помош на горната сума $S(T)$ и долната сума $s(T)$ на Дарбу за разбивање на интервалот $T=\{x_0,x_1,...,x_n\}$, $a=x_0<x_1<...<x_n=b$.

Функцијата е интеграбилна ако за една растечка низа (T_k) од разбивања такви што чекорот на разбивањата тежи кон нула е исполнето $\lim_{k\to\infty} S(T_k)=\lim_{k\to\infty} s(T_k)$. Тогаш

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{k\to\infty} S(T_k)=\lim_{k\to\infty} s(T_k)$$

На овој начин интегралот е сведен на обичен лимес на низа.. Ако постои, интегралот е лимес и на низа од Риманови суми на разбивањата. (T_k).

На конкретен пример е дадено приближно пресметување на определен интеграл.со избирање на разбивање со голем број на точки.

Примерот е даден за да се увиди дека ако се познава математичката теорија, тогаш со многу едноставен програм можеме да ја добиеме приближната вредност на интегралот со точност која ни е потребна

Друг пример од ваков тип даден во книгата е приближно наоѓање на корен на равенка, во кој експлицитно се применува методот од докзот на теоремата за постоење на корен x, $f(x)=0$, на непрекината функција f определена на интервалот $[a,b]$ таква што $f(a)<0$ и $f(b)>0$.

Во склоп на текстот се дадени и примери, во функција на дообјаснување на материјата која се изучува. Во најголемиот број тоа е: пример на поим кој е претходно воведен, конкретен случај како се применува некоја теорема или пак пример во кој се покажува дека ако некој од условите на теоремата се изостави тогаш тврдењето на теоремата не мора да е точно

Следува поглавје посветено на бројните редови. Се работи за класичен материјал во кој најпрво се обработени неколку критериуми за конвергенција на редовите со позитивни членови и критериумите со коренување и количник . Поглавје е посветено и на разместувањето на членовите во броен ред и на теоремата за конвергенција на производ на редови. На крајот се обработени бесконечните производи и е покажано дека тие се сведуваат на бесконечни редови.

Паралелно се разгледуваат редовите од реални и комплексни броеви - бројни редови.

Сите теореми се точни за редовите од реални броеви. Во теоремите кои се точни само за редовите од реални броеви, наместо броен ред стои ред од реални броеви. Рање на теоремите е

За разбирање на теормите за редовите од комплексни броеви, потребни се поимите и тврдењата како што се низа од комплексни броеви, комплексна функција од комплексна променлива, кои се дадени во 1,2 и 11 од поглавјето аналитички функции.

Во поглавјето за функционални низи и редови се обработени теоремите за промена на лимесите и теоремите за почлено диференцирање и интегрирање. Во делот за степенските редови се обработени редовите на Тејлор за бесконечно диференцијабилните функции. На крај е формулирана и докажана теоремета за апроксимација на непрекината функција со помош на полиноми.

Последното поглавје е посветено на аналитичките функции во комплексната рамнина кои се непосредно поврзани со теоријата на функционалните редови. Даден е само вовед во теоријата на аналитичките функции.

По уводните поглавја за комплексни броеви и комплексни функции, во третото поглавје се покажува теоремата за условите на Коши-Риман, секако една од централните теореми за функциите од комплексна променлива.

Следува поимот за комплексен интеграл при што се разгледува само комплексниот интеграл по диференцијабилен пат. При ова се обрнува посебно внимание на прецизноста на дефиницијата на пат, состав на патишта, инверзен пат и екввивалентни патишта (пат со друга параметризација). Понатаму, акцентот е на доказот на теоремата на Коши за анулирање на интегралот на аналитичка функција по затворен пат, интегралната формула и претставувањето на аналитичките функции со степенски ред.

Сметам дека овој материјал е непосредно сврзан со теоријата на редови и од овие причини е содржан во ракописот. Студентите можат да го користат за да се запознаат со основите на теоријата на аналитичките функции.

С О Д Р Ж И Н А

ОСНОВНИ ФУНКЦИИ

ИЗВОД НА РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

РЕДОВИ

ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ

АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ ОД КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

I. РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. МНОЖЕСТВА И ПРЕСЛИКУВАЊА - ОСНОВНИ ДЕФИНИЦИИ

Поимот множество е основен поим во Математиката и тој не се дефинира .

Под множество ќе подразбираме некој збир на објекти, кои ги нарекуваме елементи на множеството .

Множествата ги означуваме со големи загради во кои одделени со запирки се наведени елементите на множеството или во кои е наведено својството кое го исполнуваат неговите елементи.

Пример: 1) Множеството на природни броеви $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

2) $\{x \mid x$ е студент кој присуствува на ова предавање$\}$

3) $A = \{a,b,c,d\}$

Припадноста на елементот x на множеството A се означува со $x \in A$. Во спротивно пишуваме $x \notin A$.

Две множества A и B се еднакви ако имаат исти елементи т.е. секој елемент на A е елемент и на B, и обратно.

За A велиме дека е ***подмножество*** на B и означуваме $A \subseteq B$, ако секој елемент на A е елемент и на B.

Празно множество $\varnothing$ по дефиниција е множество кое не содржи ниеден елемент. .

Унија на множествата A_1, A_2, ... , A_n е множество

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

кое се состои од сите елементи кои припаѓаат барем на едно од множествата A_1, A_2, ... , A_n.

На исти начин може да определиме и унија на бесконечно многу множества A_1, A_2, A_3 ... како множество

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

кое се состои од сите елементи кои припаѓаат барем на едно од множествата A_1, A_2, A_3 ... .

Пресек

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

се состои од елементите кои припаѓаат на сите множества A_1, A_2, ... , A_n.

Истотака пресекот на бесконечно многу множества A_1, A_2, A_3, ... се означува со

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

и се состои од елементите кои се содржат во сите множества A_1, A_2, A_3, ...

Разлика на множествата A и B се состои од сите елементи кои припаѓаат на A, но не припаѓаат на B и се означува со $A \setminus B$.

Производ на множествата A и B е множеството

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Нека се дадени две множества A и B. Ако на секој елемент $x \in A$ му е придружен единствен елемент $y \in B$, велиме дека е зададено ***пресликување*** од A во B. Пресликувањето го означуваме со $f : A \to B$, и ако на елементот $x \in A$ му е придружен елементот $y \in B$, ова го означуваме со $f(x) = y$. Множеството од сите вакви равенства

$$\{f(x) = y \mid x \in A\}.$$

се нарекува правило на пресликувањето. Множеството A се нарекува ***дефинициона област*** или домен на пресликувањето, а B се нарекува ***кодомен*** на пресликувањето..

Две пресликувања се еднакви ако имаат иста дефинициона област, ист кодомен и исто правило.

Нека A и B се множества и $f : A \to B$ е пресликување.

Нека $C \subseteq A$, за пресликувањето со дефинициона област C, кодомен B и со правило на придружување $y = f(x)$, $x \in C$ велимедека е ***рестрикција*** на пресликувањето f на множеството C и го означуваме со $f : C \to B$.

Нека $A \subseteq X$. За пресликувањето $g : X \to B$ такво што $f(x) = g(x)$ за секој $x \in A$ велиме дека е ***проширување*** (или продолжување) на пресликувањето $f : A \to B$ на множеството X.

Слика на множеството $C \subseteq A$ со пресликувањето $f : A \to B$ е множеството

$$f(C) = \{ f(x) \mid x \in C \}$$

Инверзна слика на множеството $D \subseteq B$ со пресликувањето $f : A \to B$ е множеството

$$f^{-1}(D) = \{ x \mid f(x) \in D \}$$

За пресликувањето $f: A \to B$ велиме дека е

- сурјекција ако $f(A) = B$.
- инјекција ако за секој $b \in B$, во $f^{-1}(\{b\}) = \{x \mid f(x) = b)$ има најмногу еден елемент т.е. најмногу еден елемент се пресликува во b.
- биекција ако е сурјекција и инјекција

Нека $f: A \to B$ и $g: B \to C$ се пресликувања. ***Композиција*** на овие две пресликувања е пресликување $g \circ f: A \to C$ определено со: за $x \in A$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Ако пресликувањето $f: A \to B$ е биекција тогаш може да дефинираме пресликување $f^{-1}: B \to A$ со: за $y \in B$, $f^{-1}(y) = x$ ако $f(x) = y$.

Пресликувањето $f^{-1}: B \to A$ се нарекува ***инверзно пресликување*** на $f: A \to B$. За овие пресликувања е исполнето

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Пресликување $f: \mathbb{N} \to A$, од множеството природни броеви $\mathbb{N}$ во множество A се нарекува ***низа*** во A. Ако $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \ldots$, низата вообичаено се означува со : $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

2. РЕЛАЦИИ. ПОДРЕДУВАЊА

Релација R во A, е секое подмножество $R \subseteq A \times A$. Вообичаено е наместо $(a,b) \in R$ да се пишува aRb и чита a е во релација R со b.

Нека R е релација во A. Ако следните својства се исполнети за сите $a,b,c \in A$ тогаш за релацијата R велиме дека е :

- рефлексивна ако $a\,R\,a$.
- антирефлексивна ако a не е во релација R со a
- симетрична ако од $a\,R\,b$ следува $b\,R\,a$
- антисиметрична ако од $a\,R\,b$ и $b\,R\,a$ следува $a = b$
- транзитивна ако од $a\,R\,b$ и $b\,R\,c$ следува $a\,R\,c$

Релација која е рефлексивна,антисиметрична и транзитивна се нарекува ***подредување***. Вообичаено е подредувањата да ги означуваме со "$\leq$". Множество A со релација на подредување се нарекува подредено множество и се означува со $(A,\leq)$.

Нека $(A,\leq)$ е подредено множество .Тогаш и секое негово подмножество $A' \subseteq A$ е исто така подредено множество.

Подредувањето $\leq$ на A е ***линеарно подредување*** ако за секои $a,b \in A$, е исполнет еден од следниве два услова: $a \leq b$ или $b \leq a$.

Нека понатаму $(A,\leq)$ е линеарно подредено множество и $B \subseteq A$.

Мајорант за B е елемент $c \in A$ таков што $b \leq c$ за секој $b \in B$. Ако B има мајорант тогаш за B велиме дека е ***мајорирано*** множество или дека е ***ограничено од горе***.

Ако c е мајорант за B и уште $c \in B$, тогаш за c велиме дека е ***најголем елемент*** за B и го означуваме со $c = \max B$.

Минорант за B е елемент $a \in A$ таков што $a \leq b$ за секој $b \in B$. Ако B има минорант тогаш за B велиме дека е ***минорирано*** множество или дека е ***ограничено од доле***.

Ако a е минорант за B и уште $a \in B$, тогаш за a велиме дека е ***најмал елемент*** за B и го означуваме со $a = \min B$.

Најмалиот мајорант за B се нарекува ***супремум*** на B и се означува со $\sup B$.

Најголемиот минорант на B се нарекува ***инфимум*** на B и се означува со $\inf B$.

Теорема 1: *Ако B има најголем елемент $\max B$, тогаш $\sup B = \max B$. Ако B има најмал елемент $\min B$, тогаш $\inf B = \min B$.*

Релација која е транзитивна и антирефлексивна се нарекува ***строго подредување***. Вообичаено е строгото подредување да се означува со “$<$ “. Строгото подредување на A е линеарно ако за произволни $a, b \in A$ е исполнет еден и само еден од следниве три услова: или $a < b$ или $a = b$ или $b < a$.

Теорема 2: а) *Нека A е множество со линеарно подредување “$\leq$” и нека определиме релација* “$<$ “ *со: $a < b$ ако $a \leq b$ и $a \neq b$. Тогаш* “$<$ “ *е строго линеарно подредување на A*. б) *Нека A е множество со строго линеарно подредување* “$<$ “ *и нека определиме релација* “$\leq$“ *со: $a \leq b$ ако $a < b$ или $a = b$. Тогаш* “$\leq$“ *е линеарно подредување на A.*

Доказ: а) Нека “$\leq$ “ е линеарно подредување. Тогаш “$<$ “ е антирефлексивна релација. Ќе ја покажеме транзитивноста. Нека $a < b$ и $b < c$ т.е $a \leq b$, $a \neq b$ и $b \leq c$, $b \neq c$. Најпрво од $a \leq b$ и $b \leq c$, следува $a \leq c$. Мора $a \neq c$ затоа што ако $a = c$ би добиле $a \leq b$, $b \leq a$ и $a \neq b$ што е контрадикција.

б) Нека “$<$ “ е линеарно. Тогаш “$\leq$ “ е рефлексивна. За да ја покажеме антисиметричноста нека $a \leq b$ и $b \leq a$. Тогаш истовремено имаме $a < b$ или $a = b$, и истотака $b < a$ или $b = a$. Ова е можно само ако $a = b$.

За да ја покажеме транзитивноста нека $a \leq b$ т.е. $a < b$ или $a = b$. Нека, на пример $a < b$. Ако $b \leq c$ т.е. $b < c$ или $b = c$, тогаш во секој случај $a < c$ т.е $a \leq c$. Истото се добива и во случајот кога $a = b$.

Нека $(X, \leq)$ и $(Y, \leq)$ се подредени множества. За пресликувањето $f : X \to Y$ велиме дека е ***строго растечко*** ако за секои $x, x' \in X$ од $x < x'$ следува $f(x) < f(x')$.

За пресликувањето $f : X \to Y$ велиме дека е ***растечко*** ако за секои $x, x' \in X$ од $x \leq x'$ следува $f(x) \leq f(x')$.

На крај треба да се каже дека при работењето со ознаките “$<$ “ (или “$\leq$ “) вообичаено е изразот $a < b < c$ да е скратена ознака за $a < b$, $b < c$ и $a < c$.

Релација која е рефлексивна, симетрична и транзитивна се нарекува ***релација за еквиваленција***.

Ако " ~ " е релација за еквиваленција, тогаш за секој $a \in A$ може да се определи множество

$$a^{\sim} = \{ b \mid b \in A, a \sim b \}$$

кое се нарекува ***класа на еквиваленција***.

Теорема 3: *Еден елемент се содржи само во една класа на еквиваленција.*

Доказ: Нека $c \in A$ и нека $c \in a^{\sim}$ и $c \in b^{\sim}$. Следува $a \sim c$ и $b \sim c$ од каде $a \sim b$. Заради претходното, ако $a_1 \in a^{\sim}$ т.е. $a_1 \sim a$ добиваме $a_1 \in b^{\sim}$, од што следува дека $a^{\sim} \subseteq b^{\sim}$. На ист начин добиваме дека $b^{\sim} \subseteq a^{\sim}$ со што е покажано дека $a^{\sim} = b^{\sim}$.

3. РЕАЛНИ БРОЕВИ

Множеството од природни броеви $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ со додавање на нулата се проширува до множество $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Нека $a_0 \in \mathbb{N}_0$ и $0 \le a_j \le 9$ за $j = 1,2,...,i$. Изразот

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_i$$

ќе го нарекуваме **(*позитивен*) *конечен децимален број***..

Со $\mathbb{K}^+$ ќе го означуваме множеството од сите (позитивни) ***конечни децимални броеви***,.

Дефинираме ***почетен интервал*** во $\mathbb{K}^+$: непразното подмножество $X \subseteq K^+$ е почетен интервал ако

1) за секој $x \in X$ и за секој $y \in \mathbb{K}^+$ таков што $y < x$, е исполнето $y \in X$.

2) X нема најголем елемент

Ако $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \ldots$ се почетни интервали тогаш и нивната унија е почетен интервал

Пример: 1) $\{x \mid x \in \mathbb{K}^+, 3x < 1\}$ е почетен интервал во $\mathbb{K}^+$.

2) За $k \in \mathbb{K}^+$ множеството $\{x \mid x \in \mathbb{K}^+, x < k\}$ е почетен интервал во $\mathbb{K}^+$.

Дефиниција: *Множеството од* ***позитивни реални броеви*** $\mathbb{R}^+$*.е множеството од сите почетни интервали во* $\mathbb{K}^+$*, различни од* $\mathbb{K}^+$.

Нека X е почетен интервал различни од $\mathbb{K}^+$. Постои најголем број $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, кој е содржан во X. Ставаме $\underline{a}_0 = a_0$. Нека a_0, a_1 е најголемиот број со една децимала содржан во X. Ставаме $\underline{a}_1 = a_0, a_1$. И така натаму $\underline{a}_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ е најголемиот број со n децимали содржан во X. Процесот го продолжуваме.

За бесконечен број децимали е исполнето $a_n > 0$, во спротивно во X би постоел најголем елемент.

Низата од конечни децимални броеви $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots$ ќе ја наречеме ***децимално претставување*** на почетниот интервал X, и на реалниот број определен со овој почетен интервал.

Наместо низата $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots$ најчесто се користи беконечниот децимален запис

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \ .$$

Со овој запис е определен почетниот интервал, и реалниот број определен со тој почетен интервал.

Притоа ако определиме почетни интервали со

$$X_n = \{x \mid x < \underline{a}_n\}$$

тогаш

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ .$$

Пример: 1) Почетниот интервал $\{x \mid 3x < 1\}$ во $\mathbb{K}^+$ е определен со низата конечни децимални броеви 0; 0,3; 0,33; 0,333; … на која одговара бесконечниот децимален запис 0,3333 ...

2) Ако k е позитивен конечен децимален број, тогаш го поистоветуваме со реалниот број определен со почетниот интервал $\{x \mid x \in \mathbb{K}^+, x < k\}$. На овој начин можеме да сметаме дека конечните децимални броеви се подмножество од реалните броеви.

Да забележиме дека за конечниот децимален број 1**,** почетниот интервал $\{x \mid x \in \mathbb{K}^+, x < 1\}$ е определен со низата конечни децимални броеви 0; 0,9; 0,99; 0,999; … на која одговара бесконечниот децимален запис 0,9999 ... т.е.

$$\{x \mid x < 1, x \in \mathbb{K}^+\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid x < 0,\underbrace{99\ldots9}_{n}, x \in \mathbb{K}^+\}$$

<u>**Подредување на реалните броеви**</u> Нека реалниот број x е определен со почетниот интервал $X \subseteq \mathbb{K}^+$, а реалниот број y е определен со почетниот интервал $Y \subseteq \mathbb{K}^+$.

Дефинираме подредување со $x \le y$ ако X е подмножество од Y. Дефининираното подредување е линеарно т.е. ако x, y се позитивни реални броеви тогаш или $x \le y$ или $y \le x$.

<u>**Собирање и множење на реалните броеви**</u> Дефинираме операции собирање $"+"$ и множење $"\cdot"$. Нека X е почетен интервал определен со бесконечниот децимален запис $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, а Y е почетен интервал определен со бесконечниот децимален запис $b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. По дефинициија

$$x + y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, z < \underline{a}_n + \underline{b}_n\}$$

и

$$x \cdot y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, z < \underline{a}_n \cdot \underline{b}_n\}.$$

За операциите собирање "+" и множење "•", точни се следниве својства за произволни броеви $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

(С1) $x + y = y + x$ (комутативност на собирање)

(С2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоцијативност на собирање)

(М1) $x \cdot y = y \cdot x$ (комутативност на множење)

(М2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (асоцијативност на множење)

(М3) $x \cdot 1 = x$ (1 е неутрален елемент за множење)

(М4) За секој $x \neq 0$ постои инверзен елемент y, т.ш. важи $x \cdot y = 1$ (y се нарекува инверзен за x и се означува со $\frac{1}{x}$).

(Д) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (дистрибутивност)

како и својствата за подредувањето

(П 1) ако $x \leq y$ тогаш $x + z \leq y + z$

(П 2) ако $x \leq y$ и z е позитивен тогаш $x \cdot z \leq y \cdot z$

(П3) Секое непразно мајорирано подмножество има супремум. Секое непразно минорирано подмножество има инфимум.

Ова својство се нарекува комплетност на реалните броеви.

Конструкцијата на реалните броеви подетално е реализирана и докажана на крајот од книгата.

Пример: Да забележиме дека за конечниот децимален број k, и за подмножеството од реалните броеви $\{t \mid t \in \mathbb{R}^+, t < k\}$ е исполнето**,**

$$\sup\{t \mid t \in \mathbb{R}^+, t < k\} = k .$$

Истотака ако е даден реален број определен со бесконечен децимален запис

$$a_0, a_1a_2a_3...$$

при што за бесконечен број децимали е исполнето $a_n > 0$ (т.е. определен со конечните децимални броеви $\underline{a}_1 = a_0, a_1$, $\underline{a}_2 = a_0, a_1a_2$, $\underline{a}_3 = a_0, a_1a_2a_3, ...$) , тогаш за подмножеството од реалните броеви определено со

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{t \mid t < \underline{a}_n, t \in \mathbb{R}^+\} = \{t \mid \text{постои } n \text{ за кој } t < \underline{a}_n, t \in \mathbb{R}^+\}$$

е исполнето

$$a_0, a_1a_2a_3... = \sup\bigcup_{n=1}^{\infty}\{t \mid t < \underline{a}_n, t \in \mathbb{R}^+\},$$

но исто така

$$a_0, a_1a_2a_3... = \sup\{\underline{a}_n \mid n = 1,2,3, ...\}$$

Негативни броеви Дефинираме множество негативни реални броеви со

$$\mathbb{R}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Дефиниција: *Множеството од реални броеви $\mathbb{R}$ се состои од позитивните и негативните реални броеви и од нулата т.е.*

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

Сега ќе ги дефинираме операциите и подредувањето во $\mathbb{R}$. Нека $x, y \in \mathbb{R}^+$. Дефинираме подредување со

$$-x < 0 < y,$$

и со: за $u, v \in \mathbb{R}^+$

$$-u < -v \text{ ако и само ако } v < u$$

Собирањето го дефинираме на следниов начин: Најпрво по дефиниција

(С 3) $x + 0 = x = 0 + x$ т.е. 0 е неутрален елемент за собирање
(С 4) $x + (-x) = 0$ и $(-x) + x = 0$

Потоа ако $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ и ако $y + z = x$ тогаш ќе речеме дека z е ***разлика*** на x и y и пишуваме

$$z = x - y$$

За $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ по дефиниција

$$x + (-y) = (-y) + x = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ -(y - x), & y > x \end{cases}$$

Истотака

$$(-x) + (-y) = -(x + y)$$

По дефиниција

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad .$$

За $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ по дефиниција

$$x \cdot (-y) = -x \cdot y = (-x) \cdot y$$
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

За на овој начин дефинираните подредување и операции собирање и множење на $\mathbb{R}$ исполнети се својствата (М1) - (М4), (Д), (П1) - (П3), својствата (С1) и (С2), и по дефиниција својствата (С3) и (С4). Од нив може да се изведат сите останати својства на реалните броеви.

<u>Рационални броеви</u> Ќе определиме неколку карактеристични подмножества на реалните броеви: множество $\mathbb{Z}$ на цели броеви

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

и множество $\mathbb{Q}$ на рационални броеви :

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \}.$$

Множеството $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ се нарекува множество на ирационални броеви.

Нека

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^{+} \cup \{0\} \cup \{-k \mid k \in \mathbb{K}^{+}\}$$

Точни се следните инклузии

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Теорема 1: *За два реални броја* $x < y$ *постои конечен децимален број* k *таков што*

$$x < k < y$$

Доказ: Најпрво нека двата броја се позитивни. Нека x е определен со почетниот интервал X, и нека y е определен со почетниот интервал Y. Заради $X \subset Y$ постои конечен позитивен децимален број k таков што $k \notin X$, но $k \in Y$. Тогаш

$$X \subset \{x \mid x \in \mathbb{K}^{+}, x < k\} \subset Y ,$$

т.е. $x < k < y$.

Ако $x \le 0$, тогаш постои $x \le 0 < x' < y$ и постои конечен позитивен децимален број меѓу x' и y, па според тоа и меѓу x и y.

Ако $x < y \le 0$, тогаш $0 \le -y < -x$. Постои конечен позитивен децимален број q таков што $-y < q < -x$. Тогаш $x < -q < y$.

Последица: За два реални броја $x < y$ постои рационален број q таков што

$$x < q < y$$

4. НЕКОИ ДОПОЛНИТЕЛНИ СВОЈСТВА НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Нека X и Y се подмножества на реалните броеви и c е реален број. Дефинираме множества

$$c \cdot X = \{c \cdot x \mid x \in X\},$$
$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$$

и

$$X \cdot Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$$

Специјално

$$-Y = \{-y \mid y \in Y\}$$

Заради $-x > -y$ ако и само ако $y > x$ добиваме: ако Y има мајорант тогаш

$$\inf(-Y) = -\sup Y \ .$$

Ако Y има минорант тогаш

$$\sup(-Y) = -\inf Y \ .$$

Теорема 1: *Нека X и Y се подмножества од реалните броеви. Ако тие се мајорирани тогаш*

1) $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$
2) *ако* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *тогаш* $\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$
3) *ако* $c > 0$ *тогаш* $\sup(c \cdot X) = c \cdot \sup X$

Ако X и Y се минорирани тогаш

1) $\inf(X+Y) = \inf X + \inf Y$
2) *ако* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *тогаш* $\inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y$

3) *ако* $c > 0$ *тогаш* $\inf(cX) = c \inf X$

Доказ: Ќе ја покажеме теоремата за супремум. Нека X и Y се мајорирани и нека $u = \sup X$ и $v = \sup Y$.

1) Затоа што за секој $x \in X$, $x \le u$ и за секој $y \in Y$, $y \le v$ следува $x + y \le u + v$ т.е $u + v$ е мајорант за $X + Y$. Да претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата дека $u + v$ не е најмал мајорант т.е. постои мајорант z за $X + Y$ таков што $z < u + v$ т.е. $z - u < v$..

Тогаш постои $y' \in Y$ таков што

$$z - u < y' < v$$

т.е. $z - y' < u$. Следува постои $x' \in X$ таков што

$$z - y' < x' < u$$

од каде добиваме $z < x' + y'$ т.е. z не е мајорант, што е контрадикција.

2) Ако $u = 0$, тогаш $X = \{0\}$ и теоремата е точна. Нека $u \ne 0$ и $v \ne 0$. За секој $x \in X$ и $y \in Y$ од $u \ge x$ и $v \ge y$ следува $uv \ge xy$ т.е. uv е мајорант за XY. Да претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата дека uv не е најмал мајорант. Ова значи дека постои мајорант z за XY таков што $z < uv$ т.е. $\frac{z}{u} < v$.

Заради $v = \sup Y$ постои $y' \in Y$, таков што

$$\frac{z}{u} < y' < v$$

Но,тогаш $\frac{z}{y'} < u$ и заради $u = \sup X$ постои $x' \in X$ таков што

$$\frac{z}{y'} < x' < u$$

Следува $z < x' y'$ т.е. z не е мајорант, што е контрадикција .

Соодветните својства 1) и 2) за инфимум се докажуваат аналогно.

3) Нека $X \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Заради $c \cdot X = \{c\} \cdot X$, од 2) следува дека равенството 3) е точно. Исто така заради својството 2) за инфимум добиваме

$$\begin{aligned}\sup c \cdot (-X) &= \sup(-(c \cdot X)) = -\inf c \cdot X \\ &= -c \cdot \inf X = c \cdot \sup(-X)\end{aligned}$$

Останува да се разгледа случајот кога множеството X содржи и позитивни и негативни броеви, но тогаш

$$\begin{aligned}\sup c \cdot X &= \sup c \cdot (X \cap \mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \\ &= c \cdot \sup(X \cap \mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \\ &= c \cdot \sup X\end{aligned}$$

Теорема 2: *Нека* $x > -1$ *е реален број. Тогаш за секој природен број* n *точно е неравенството*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Доказ: За природниот број 1, неравенството е точно т.е. $(1+x)^1 \geq 1 + x$.

Нека претпоставиме неравенството е точно за природните броеви $1,2,\ldots,n$. Тогаш заради

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

неравенството е точно и за природниот број $n+1$. Следува неравенството е точно за сите природни броеви.

Претходно докажаната теорема е позната како неравенство на Бернули.(Bernoulli, Jakob, 1654-1705, швајцарски математичар).

Нека x и y се реални броеви и n е природен број. Тогаш точно е следново равенство, познато како биномна формула

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot x^{n-m} y^m = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n$$

каде што биномните коефициенти $\binom{n}{m}$ се определени со:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$$

На пример $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ и $\binom{n}{n} = 1$

За биномните коефициенти се точни следниве две равенства :

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \quad \text{и} \quad \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}.$$

Со помош на овие две равенства, користејќи го принципот на математичка индукција ќе ја докажеме биномната формула .

Најпрво за природниот број 1 , формулата е точна. Нека претпоставиме дека формулата е точна за природните броеви $1, 2, \ldots, n$. Тогаш

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) = (x+y) \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot x^{n-m} y^m \\ &= x^{n+1} + \binom{n}{1} x^n y + \ldots + \binom{n}{n-1} x^2 y^{n-1} + x y^n \\ &\quad + \binom{n}{0} x^n y + \binom{n}{1} x^{n-1} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^n + y^{n+1}\end{aligned}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \left(\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}\right) \cdot x^{(n+1)-m} y^m + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} \cdot x^{(n+1)-m} y^m + y^{n+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} \cdot x^{(n+1)-m} y^m$$

и добиваме дека равенката е точна и за природниот број $n+1$.

5. ПРЕБРОИВИ И НЕПРЕБРОИВИ МНОЖЕСТВА

До сега работевме со бесконечни множества кои можеа да се претстават како $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$, но постојат и бесконечни множества кои не можат да се претстават на овој начин. Ќе дадеме прецизна дефиниција на овие поими:

Дефиниција: *За едно множество $X \neq \emptyset$ велиме дека е пребороиво ако постои сурјекција $f : \mathbb{N} \to X$. Ако вакво пресликување не постои велиме дека множеството е непреброиво.*

Ако X е преброиво множество тогаш ставајќи $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, $f(3) = x_3$, ... , множеството X секогаш може да го претставиме како

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}.$$

Пример: 1) Множеството природни броеви е преброиво

2) Множеството цели броеви е преброиво. Сурјекцијата $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ е определена со

$$f(n) = \begin{cases} k \text{ , за } n = 2k+1, \; k = 0,1,2,... \\ -m, \text{ за } n = 2m \;\; , \; m = 1,2,... \end{cases}$$

Теорема 1: 1) *Подмножество на преброиво множество е и самото преброиво.*

2) *Унија на две преброиви множества е преброиво множество.*

Доказ: 1) Нека A е преброиво, и нека $B \subseteq A$. Нека $f : \mathbb{N} \to A$ е сурјекција. Дефинираме сурјекција $g : \mathbb{N} \to B$ со

$$g(n) = \begin{cases} f(b)\text{, за } n \in f^{-1}(B) \\ b_0\text{, за } n \in f^{-1}(A \setminus B) \end{cases}$$

2) Нека $f : \mathbb{N} \to A$ и $g : \mathbb{N} \to B$ се сурјекции. Тогаш можеме да определиме сурјекција $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ со

$$h\ (n) = \begin{cases} f(k)\text{, } за\ n = 2k-1,\ k = 1,2,\ldots \\ g(m)\text{, } за\ n = 2m\ ,\ m = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Теорема 2: *Множеството рационални броеви е преброиво*

Доказ: Доволно е да покажеме дека множеството $\{r \mid r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ е преброиво. Ова множество е унија на следните множества:: $\{\frac{m}{n} \mid m+n=2\} = \{\frac{1}{1}\}$, $\{\frac{m}{n} \mid m+n=3\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\}$, $\{\frac{m}{n} \mid m+n=4\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\}$, ...

Определуваме сурјекција $f : \mathbb{N} \to \{r \mid r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ со:

$$f(1) = \frac{1}{1},\ f(2) = \frac{1}{2}\ ,\ f(3) = \frac{2}{1}\ ,\ f(4) = \frac{1}{3}\ ,\ f(5) = \frac{2}{2}\ ,\ f(6) = \frac{3}{1}\ ,\ \ldots$$

.

Редоследот по кој на природните броеви им се придружува рационален број е прикажан на следнава шема

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & & \cdots\cdots\cdots \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \cdots\cdots\cdots \\
& \nearrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Теорема 3: *Множеството реални броеви не е преброиво.*

Доказ: Да претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата , дека множеството $\mathbb{R}$ е преброиво. Тогаш и подмножеството од реалните броеви кое се состои од сите децимални броеви кои имаат беконечен децимален запис од вид $0,a_1a_2a_3\ldots$, е преброиво, т.е. тоа може да се претстави како $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Нека реалниот број x_i е определен со децималниот запис $0,a_1^i a_2^i a_3^i \ldots$.

Нека реалниот број y е определен со децималниот запис $0,b_1b_2b_3\ldots$ каде што

$$b_n = \begin{cases} b_n = 2\,,\ ако\ a_n^n \neq 2 \\ b_n = 1,\ ако\ a_n^n = 2 \end{cases}$$

Децималниот запис $0,b_1b_2b_3\ldots$ се разликува од $0,a_1^i a_2^i a_3^i \ldots$ заради тоа што $b_i \neq a_i^i$ и според тоа $y \notin \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, што е контрадикција.

Последица: *Множеството ирационални броеви е непреброиво.*

Доказ: Ако претпоставиме дека множеството ирационални броеви $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ е преброиво, тогаш и множеството $\mathbb{R} = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ би било преброиво што е контрадикција.

6. РЕАЛНА ПРАВА

Нека p е права. Множеството точки од правата можеме линеарно да го подредиме определувајќи подредување со: ако $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in p$ тогаш $\mathrm{P}<\mathrm{Q}$ ако P е лево од Q. За на овој начин определеното линеарно подредување исполнето е следново:

1) секое мајорирано подмножество има супремум

2) за секои две точки P,Q такви што $\mathrm{P}<\mathrm{Q}$ постои точка T таква што $\mathrm{P}<\mathrm{T}<\mathrm{Q}$

Овие тврдења не се докажуваат, туку се земаат како неопходни за едно множество од точки да претставува права и тие се во склад со нашата интуитивна претстава за права..

Ќе определиме строго растечко пресликување f од множеството на реални $\mathbb{R}$ броеви во множеството точки на правата на следниов начин: Избираме точка O на правата која ја нарекуваме координатен почеток и десно од неа точка E . Најпрво определуваме $f(1)=\mathrm{E}$ и $f(0)=\mathrm{O}$.

Отсечката со почетна точка O и крајна точка E се нарекува единична отсечка. Покрај оваа отсечка определуваме и отсечки OE_1, OE_2, OE_3, ... такви што точките E_1 ,E_2 ,E_3 ,... се десно од точката O , а чии должини се соодветно една десетина, една стотина, една илјадита, ... од должината на единичната отсечка. Позитивниот конечен децимален број $a_0,a_1a_2\dots a_n$ се пресликува во точката A на правата која се добива со последователно нанесување надесно од точката O , a_0 пати на отсечката OE , a_1 пати на отсечката OE_1 , a_2 пати на отсечката OE_2 , a_3 пати на отсечката OE_3 ... . На овој начин на секој позитивен конечен децимален број е придружена точка од полуправата десно од точката O.

Нека е даден реален број зададен со бесконечниот децимален запис

$$a_0,a_1a_2a_3\dots$$

при што за бесконечен број децимали е исполнето $a_n>0$.

Тогаш за конечните децимални броеви $\underline{a}_1 = a_0, a_1$, $\underline{a}_2 = a_0, a_1 a_2$, $\underline{a}_3 = a_0, a_1 a_2 a_3$, ... е исполнето

$$a_0, a_1 a_2 a_3 ... = \sup\{\underline{a}_n \mid n = 1,2,3, ...\}$$

На реалниот број зададен со бесконечниот децимален запис $a_0, a_1 a_2 a_3 ...$ му ја придружуваме точката од правата која е супремум од множеството точки од правата кои се придружени на конечните децимални броеви $\underline{a}_1 = a_0, a_1$, $\underline{a}_2 = a_0, a_1 a_2$, $\underline{a}_3 = a_0, a_1 a_2 a_3$, ...

На овој начин е определено пресликување f од множеството $\mathbb{R}^+$ во полуправата определена со точките O и E и почеток во O . Пресликувањето f е строго монотоно, што значи и инјекција. Ќе покажеме дека е и сурјекција. Нека Q е точка од полуправата. различна од O. Постои број $b_0 \in \mathbb{N}_0$ таков што $f(b_0) < \mathrm{Q}$ и $f(b_0 + 1) \geq \mathrm{Q}$. Постои број b_1 , $0 \leq b_1 \leq 9$ и таков што $f(b_0, b_1) < \mathrm{Q}$ и $f(b_0, b_1 + \frac{1}{10}) \geq \mathrm{Q}$. Продолжувајќи ја оваа постапка во n-тиот чекор добиваме конечен децимален број $b_0, b_1 b_2 ... b_n$ таков што $f(b_0, b_1 b_2 ... b_n) < \mathrm{Q}$ и $f(b_0, b_1 b_2 ... b_n + \frac{1}{10^n}) \geq \mathrm{Q}$. Нека y е реалниот број определен со бесконечниот децималниот запис $b_0, b_1 b_2 b_3 ...$.Тогаш

$$\mathrm{Q} = \sup\{f(b_0, b_1 b_2 ... b_n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Заради

$$y = \sup\{\, b_0, b_1 b_2 ... b_n \mid \; n \in \mathbb{N}\,\},$$

следува $f(y) = \mathrm{Q}$.

. Сега, ако на $x \in \mathbb{R}^+$ е придружена точката T, тогаш на реалниот број $-x$ ја придружуваме точката која се добива со нанесување на должината на отсечката OT налево од точката O. На овој начин е определено пресликување од множеството реални броеви во множеството точки на една права, кое е строго растечко и биекција. Со ова придружување секоја точка од правата претставува еден реален број и обратно.

7. АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ

Апсолутна вредност $|x|$ на реалниот број x е позитивниот реален број определен со

$$|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

На реалната права позитивниот број $|x|$ ја претставува бројната вредност на растојанието на реалниот број x од координатниот почеток.

Забелешка: За два реални броја x и y позитивниот број $|x-y|$ ја претставува бројната вредност на растојанието меѓу овие две точки на реалната права. Покажи !

За апсолутната вредност на реалните броеви x и y точни се следниве равенства:

1^0 $|x|\geq 0$ и $|x|=0$ ако и само ако $x=0$

2^0 $|-x|=|x|$

3^0 $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

4^0 $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

Ќе ја покажеме точноста на следните тврдења:

5^0 ако $a\geq 0$, тогаш $|x|\leq a$ ако и само ако $-a\leq x\leq a$

6^0 $|x+y|\leq|x|+|y|$

7^0 $|x-y|\geq||x|-|y||$

За доказот на 5^0 нека прво $x \geq 0$. Тогаш од $|x| \leq a$ следува $x \leq a$ т.е. $-a \leq x \leq a$ и обратно. Ако $x < 0$ тогаш $-x < a$ т.е $-a < x$.Значи тврдењето е точно за секој $x \in \mathbb{R}$.

Од

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &\leq (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

следува точноста на 6^0. Од 6^0 добиваме

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

од каде

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

Слично се покажува дека

$$|y - x| \geq |y| - |x|$$

од каде заради 5^0, следува неравенството 7^0.

Кај реалните броеви изразот ограничено од горе ќе означува мајорирано множество, а изразот ограничено од доле минорирано множество.

Дефиниција: *За множеството* $A \subseteq \mathbb{R}$ *велиме дека е ограничено ако е ограничено од горе и ограничено од доле.*

Ќе покажеме дека оваа дефиниција е еквивалентна со следнава:

Дефиниција ′: *За множеството* $A \subseteq \mathbb{R}$ *велиме дека е ограничено ако постои реален број* M *таков што за секој* $x \in A$,

$$|x| \leq M$$

Ако A е ограничено од горе и ограничено од долу, тоа значи дека постојат реални броеви b и c такви што за секој $x \in A$ да е исполнето

$$b \leq x \leq c$$

Ако сега избереме $M = \max\{|b|,|c|\}$ тогаш за секој $x \in A$ точно е $|x| \leq M$.

Обратно, од $|x| \leq M$ за секој $x \in A$ следува $-M \leq x \leq M$, т.е. множеството A е ограничено од горе и од доле .

8. ИНТЕРВАЛИ. ОКОЛИНИ

Множеството од реални броеви $\mathbb{R}$ заедно со два симбола ∞ и - ∞ се нарекува проширено множество реални броеви и се означува со $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Линеарното подредување на $\mathbb{R}$ може да се прошири до линеарно подредување на $\overline{\mathbb{R}}$ ставајќи за секој $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < \infty$.

Симболот ∞ се чита "бесконечност" и тој не е реален број, а исто така и симболот $-\infty$ кој се чита „минус бесконечност".

Со помош на подредувањето, за $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ги определуваме следниве подмножества од реалната права кои ги нарекуваме конечни интервали:

$$(a,b) = \{\, x \mid a < x < b,\, x \in \mathbb{R}\}$$

$$(a,b] = \{\, x \mid a < x \leq b,\, x \in \mathbb{R}\}$$

$$[a,b) = \{\, x \mid a \leq x < b,\, x \in \mathbb{R}\}$$

$$[a,b] = \{\, x \mid a \leq x \leq b,\, x \in \mathbb{R}\}$$

Интервалите (a,b) се нарекуваат отворени, $[a,b]$ се затворени интервали или сегменти, а интервалите $[a,b)$, $(a,b]$ се полуотворени интервали. Истотака, определуваме и бесконечни интервали со

$$(a,\infty) = \{\, x \mid a < x,\, x \in \mathbb{R}\}$$

$$(-\infty,b) = \{\, x \mid x < b,\, x \in \mathbb{R}\}$$

$$[a,\infty) = \{\, x \mid a \leq x,\, x \in \mathbb{R}\}$$

$$(-\infty, b] = \{ x \mid x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Сите набројани интервали за $a, b \in \mathbb{R}$ и за $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ги нарекуваме ***интервали со крајни точки*** a и b.

Интервалите може да ги определиме на единствен начин со следнава дефиниција

Дефиниција: *Подмножеството P на реалните броеви се нарекува интервал ако го има следното својство: ако* $x, y \in P$ *и* $x < z < y$ *тогаш и* $z \in P$.

Поради ова својство, ќе речеме дека интервалите се сврзани. Интервалите претставуваат подмножества од реалната права со наједноставна структура. Како што ќе видите понатаму, најголемиот број од теоремите и својствата е формулиран токму за интервали. Притоа, например, ако функцијата е определена на унија од повеќе интервали, тогаш својството се применува на секој интервал посебно !

Нека $x_0 \in \mathbb{R}$ е реален број и $\varepsilon > 0$. Интервалот $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ се нарекува ***околина на*** x_0 (или ε***-околина на*** x_0). Заради

$$\begin{aligned}(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) &= \{x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} \\ &= \{x \mid -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\} \\ &= \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\}\end{aligned}$$

ε-околината на x_0, може да ја претставиме како $\{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Околина на ∞ е секое подмножество на реалните броеви од вид (E, ∞) од вид каде $E \in \mathbb{R}$.

Околина на $-\infty$ е секое подмножество на реалните броеви од вид $(-\infty, E)$) каде $E \in \mathbb{R}$.

Следната теорема покажува дека произволни два елементи $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ можат да се раздвојат со околини.

Теорема 1: *Ако* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ *тогаш постојат околини* U *на* x *и* V *на* y *такви што* $U \cap V = \varnothing$.

Доказ: Ако $x, y \in \mathbb{R}$ и $|x-y| = \varepsilon$, за околините $U = (x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$ и $V = (x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$ е исполнето $U \cap V = \varnothing$.

Ако $x \in \mathbb{R}$, а $y = \infty$ тогаш за околините $U = (x-1, x+1)$ на x, и $V = (x+1, \infty)$ на ∞ е исполнето $U \cap V = \varnothing$.

Ако $x \in \mathbb{R}$, а $y = -\infty$ тогаш за околините $U = (x-1, x+1)$ на x, и $V = (-\infty, x-1)$ е исполнето $U \cap V = \varnothing$.

Наредната теорема е позната како теорема за вложени сегменти.

Теорема 2: *Ако* $[a_k, b_k]$, $k = 1,2,...$ *се затворени интервали такви што*

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq ...$$

тогаш постои барем еден реален број кој се содржи во сите интервали

Доказ: Заради $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le b_1$ постои

$$a = \sup\{ a_k \mid k = 1,2,... \}$$

Ако претпоставиме дека постои природен број n за кој $b_n < a$ тогаш заради $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le b_n$ би добиле дека b_n е помал мајорант од a за множеството $\{ a_k \mid k = 1,2,... \}$ што е контрадикција. Значи за сите природни броеви k, $a \le b_k$, заради што a се содржи во сите затворени интервали $[a_k, b_k]$, $k = 1,2,...$.

Теоремата не мора да биде точна ако интервалите не се затворени како што покажува следниот пример

Пример. За интервалите $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, n = 1, 2, ..., точно е

$$(0, 1) \supseteq (0, \frac{1}{2}) \supseteq (0, \frac{1}{3}) \supseteq ... ,$$

но

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n})=\varnothing$$

Дефиниција. *За* A *ќе речеме дека е* ***секаде густо*** *во* $\mathbb{R}$ *ако за секој* x *од* $\mathbb{R}$, *и секоја околина* U *на* x, *постои* $a\in A$ *таков што* $a\in U$.

Пример. Множеството конечни децимални броеви $\mathbb{K}$ и множеството рационални броеви $\mathbb{Q}$ се секаде густи во множеството реални броеви $\mathbb{R}$.

9. РЕАЛНА РАМНИНА. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

На секоја точка од рамнината можеме да и придружиме единствена точка од производот $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ на следниов начин: Избираме две взаемно нормални прави во рамнината кои ќе ги наречеме x-оска и y-оска.

Пресечната точка на двете прави ја избираме за координатен почеток на двете прави и избираме единична отсечка со еднаква должина на двете прави. Нека , сега според претходно утврдената постапка, воспоставиме биекција помеѓу реалните броеви и точките од секоја права пооделно.

На произволна точка М може да и придружиме единствен пар реални броеви $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, каде што x е бројната вредност на растојанието на точката М до y-оската , а y е бројната вредност на растојанието на М до x-оската. За М велиме дека има координати (x,y) . И обратно, на секој пар реални броеви (x,y) одговара една точка од рамнината.

Рамнината со на овој начин воспоставената биекција , со точките од производот $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ја нарекуваме реална рамнина.

Во производот $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ можеме да определиме операции собирање "$+$" и множење "$\cdot$" ставајќи за $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Ако парот $(x,0)$ го идентификуваме со x и ја воведеме ознаката i за парот $(0,1)$ тогаш од

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

добиваме дека

$$i^2 = -1$$

и заради

$$\begin{aligned}(x,y) &= (x,0) + (0,y)\\ &= (x,0) + (0,1)\cdot(y,0)\end{aligned}$$

добиваме дека парот (x,y) е идентификуван со $x+iy$ Множеството

$$\mathbb{C} = \{x+iy \mid x,y \in \mathbb{R}\}$$

се нарекува множество на комплексни броеви. Формулите за собирање и множење преминуваат во

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2+x_2y_1)$$

За на овој начин определените операции исполнети се својствата (M1)-(M4),(C1)-(C4) и (Д) .

Ако $z = x+iy$ е комплексен број , тогаш комплексниот број

$$\bar{z} = x - iy$$

се нарекува конјугиран со $z = x+iy$. Од дефиницијата на собирање и множење следуваат следниве својства

$$1^0 \quad \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$2^0 \quad \overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

10*. КОНСТРУКЦИЈА НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ
со помош на почетни интервали во множеството на позитивни конечни децимални броеви

ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Множеството од природни броеви $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ со додавање на нулата се проширува до множество $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Во него е определено линеарно подредување со $0 < 1 < 2 < 3 < ...$.

Во множеството $\mathbb{N}_0$ се определени две операции: собирање: “+” и множење “•” . За овие операции точни се следниве својства за произволни броеви $x, y, z \in \mathbb{N}_0$.

(С1) $x + y = y + x$ (комутативност на собирање)

(С2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоцијативност на собирање)

(М1) $x \cdot y = y \cdot x$ (комутативност на множење)

(М2) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (асоцијативност на множење)

(М3) $x \cdot 1 = x$ (1 е неутрален елемент за множење)

(Д) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (дистрибутивност)

како и својствата за подредувањето

(П 1) ако $x \le y$ тогаш $x + z \le y + z$

(П 2) ако $x \le y$ и z е позитивен тогаш $x \cdot z \le y \cdot z$

КОНЕЧНИ ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

Нека $a_0 \in \mathbb{N}_0$ и $0 \le a_j \le 9$ за $j = 1,2, \dots , i$. Изразот

$$a_0 , a_1 a_2 \dots a_i$$

ќе го нарекуваме **(*позитивен*)** ***конечен децимален број***. Ако бројот $n \in \mathbb{N}_0$ е определен со

$$n = a_o \cdot 10^i + a_1 \cdot 10^{i-1} + \dots + a_{i-1} \cdot 10^1 + a_i$$

тогаш по дефиниција

$$\frac{1}{10^i} n = a_0 , a_1 a_2 \dots a_i$$

Множеството

$$\mathbb{K}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{ \frac{1}{10^i} n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$$

е множеството од сите (позитивни) ***конечни децимални броеви***, при што по дефиниција

$$a_0 , a_1 a_2 \dots a_j 00 \dots 0 = a_0 , a_1 a_2 \dots a_j \; .$$

Заради ова равенство за два децимални броја $a, b \in \mathbb{K}^+$ секогаш постои природен број i така што

$$a = \frac{1}{10^i} n \quad , \quad b = \frac{1}{10^i} m$$

каде $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Во $\mathbb{K}^+$ определуваме подредување со:

$$a \le b$$

ако и само ако $n \le m$ во $\mathbb{N}_0$.

Операцијата собирање "+" е дефинирана со

$$a+b=\frac{1}{10^i}(n+m)$$

и притоа дефиницијата не зависи од изборот на i.

Операцијата "+" е определена со

$$a+b=\frac{1}{10^i}(n+m)$$

и притоа дефиницијата не зависи од изборот на i.

За произволни два децималнии броја $a=\frac{1}{10^i}n$, $b=\frac{1}{10^j}m$ дефинираме операција множење "$\cdot$" со:

$$a\cdot b=\frac{1}{10^{i+j}}(n\cdot m)$$

каде $n,m\in\mathbb{N}_0$.

За на овој начин дефинираните операции во $\mathbb{K}^+$ точни се својствата (С1)-(С3),(М1)-(М3),(Д),(П1) и (П2). Ќе покажеме само некои од нив. Ако $a=\frac{1}{10^i}n$, $b=\frac{1}{10^j}m$, $c=\frac{1}{10^k}p$. Тогаш

$$\begin{aligned}a\cdot(b\cdot c)&=\frac{1}{10^i}n\cdot(\frac{1}{10^{j+k}}(m\cdot p))=\frac{1}{10^{i+j+k}}(n\cdot(m\cdot p))\\&=\frac{1}{10^{i+j+k}}((n\cdot m)\cdot p))=(\frac{1}{10^{i+j}}(n\cdot m))\cdot\frac{1}{10^k}p\\&=(a\cdot b)\cdot c\end{aligned}$$

со што е покажано својствата (М2). За доказот на (Д), m,p,j и k може да се изберат така што $j=k$. Тогаш

$$\begin{aligned} a\cdot(b+c) &= \frac{1}{10^i}n\cdot(\frac{1}{10^j}m+\frac{1}{10^j}p) = \frac{1}{10^i}n\cdot(\frac{1}{10^j}(m+p)) \\ &= \frac{1}{10^{i+j}}(n\cdot(m+p)) = \frac{1}{10^{i+j}}(n\cdot m+n\cdot p) \\ &= \frac{1}{10^{i+j}}n\cdot m+\frac{1}{10^{i+j}}n\cdot p = \frac{1}{10^i}n\cdot\frac{1}{10^j}m+\frac{1}{10^i}n\cdot\frac{1}{10^j}p \\ &= a\cdot b+a\cdot c \end{aligned}$$

Понатаму конечниот децимален број $\frac{1}{10^k}1 = 0,00...01$ при што, по запирката кај овој децимален број се појавува $k-1$ нула, ќе го означуваме скратено со $\frac{1}{10^k}$. Според ова понатаму

$$\frac{1}{10^k} = 0,\underbrace{00...0}_{k-1\ нула}1 \quad .$$

РЕАЛНИ БРОЕВИ

Реалните броеви ќе ги конструираме од конечните децимални броеви. Нека $\mathbb{K}^+ = \mathbb{K}_0^+ \setminus \{0\}$. Нека $X \subseteq \mathbb{K}^+, Y \subseteq \mathbb{K}^+$. Дефинираме:

$$\begin{gathered} X+Y = \{x+y \mid x\in X, y\in Y\} \\ X\cdot Y = \{x\cdot y \mid x\in X, y\in Y\} \\ c\cdot X = \{c\cdot x \mid x\in X\}\,. \end{gathered}$$

Дефиниција: ***Почетен интервал*** *во* $\mathbb{K}^+$ *е непразно подмножество* $X \subseteq K^+$ *такво што*

3) *за секој* $x\in X$ *и за секој* $y\in\mathbb{K}^+$ *таков што* $y<x$ *, е исполнето* $y\in X$.
4) X *нема најголем елемент*

Пример: 1) $\{x \mid 3x<1\}$ е почетен интервал во $\mathbb{K}^+$.

2) За $k \in \mathbb{K}^+$ множеството $\{x \mid x < k\}$ е почетен интервал во $\mathbb{K}^+$.

Од дефиницијата на почетен интервал следува точноста на следнава теорема.

Теорема 1: *Нека $X, Y \subseteq \mathbb{K}^+$ се почетни интервали во $\mathbb{K}^+$. Ако за секој $x \in X$ постои $y \in Y$ таков што $x \leq y$ тогаш $X \subseteq Y$.*

Теорема 2: *Ако*

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots$$

се почетни интервали тогаш и нивната унија $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ е почетен интервал.

Доказ: Нека $y < x$ и $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Тогаш постои X_n така што $x \in X_n$ и од $y < x$ следува $x \in X_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Ако претпоставиме дека во $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ има најголем елемент m, тогаш постои X_n така што $m \in X_n$. Но X_n нема најголем елемент и следува постои $x \in X_n$, $m < x$. Контрадикција.

Последица: *Нека е дадена низа децимални броеви $d_1, d_2, d_3, \dots$ која нема најголем елемент. Ако $X_n = \{x \mid x < d_n\}$ тогаш $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ е почетен интервал и тоа е најмалиот интервал кој ги содржи децимални броеви $d_1, d_2, d_3, \dots$.*

Доказ: Нека W е почетен интервал кој ги содржи $d_1, d_2, d_3, \dots$. Тогаш и $d_n \in W$ и следува $X_n \subseteq W$, за секој природен број . Значи Z е најмалиот интервал кој го содржи множеството $d_1, d_2, d_3, \dots$.

Дефиниција: *Множеството од **позитивни реални броеви** $\mathbb{R}^+$.е множеството од сите почетни интервали во $\mathbb{K}^+$, различни од $\mathbb{K}^+$.*

Нека X е почетен интервал различни од $\mathbb{K}^{+}$. Постои најголем број $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, кој е содржан во X. Ставаме $\underline{a}_0 = a_0$. Нека a_0, a_1 е најголемиот број со една децимала содржан во X. Ставаме $\underline{a}_1 = a_0, a_1$. И така натаму $\underline{a}_n = a_0, a_1 a_2 ... a_n$ е најголемиот број со n децимали содржан во X. Процесот го продолжуваме.

За бесконечен број децимали е исполнето $a_n > 0$, во спротивно во X би постоел најголем елемент.

Низата од конечни децимални броеви $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, ...$ ќе ја наречеме ***децимално претставување*** на почетниот интервал X, и на реалниот број определен со овој почетен интервал.

Наместо низата $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, ...$ најчесто се користи беконечниот децимален запис

$$a_0, a_1 a_2 a_3 ... \ .$$

Со овој запис е определен почетниот интервал, и реалниот број определен со тој почетен интервал.

Теорема 3: *Нека X е почетен интервал различни од $\mathbb{K}^{+}$, определен со бесконечниот децимален запис $a_0, a_1 a_2 a_3 ...$. Ако определиме почетни интервали со*

$$X_n = \{x \mid x \in \mathbb{K}^{+}, x < \underline{a}_n\}$$

тогаш

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ .$$

Доказ: Јасно е дека $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq X$. За да го покажеме обратното нека $x \in X$. За децималниот број x постои $\underline{a}_n$, таков што $x < \underline{a}_n$. Значи $x \in X_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

ПОДРЕДУВАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Нека реалниот број x е определен со почетниот интервал $X \subseteq \mathbb{K}^+$, а реалниот број y е определен со почетниот интервал $Y \subseteq \mathbb{K}^+$.

Дефинираме подредување со $x \leq y$ ако X е подмножество од Y. Да забележиме дека $x < y$ ако X е вистинско подмножество од Y.

Теорема 4: *Дефининираното подредување е линеарно т.е. ако x, y се позитивни реални броеви тогаш или $x \leq y$ или $y \leq x$.*

Доказ: Да претпоставиме дека не е линеарно т.е. дека не точно дека $X \subseteq Y$ и дека $Y \subseteq X$. Значи постои децимален број $u \in X$ таков што $u \notin Y$ и постои децимален број $v \in Y$ таков што $v \notin X$.

Но, заради линеарното подредување на децималните броеви мора или $u \leq v$ или $v \leq u$. Ако $u \leq v$, добиваме $u \in Y$ што е контрадикција. Контрадикција добиваме и во вториот случај.

СОБИРАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Теорема 5: *Ако X, Y се интервали тогаш и $X + Y$ е интервал.*

Доказ: Нека X е почетен интервал определен со бесконечниот децимален запис $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$. Ако определиме почетни интервали со

$$X_n = \{x \mid x \in \mathbb{K}^+, x < \underline{a}_n\},$$

тогаш

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \{x \mid x \in \mathbb{K}^+, \text{постои } n \text{ таков што } x < \underline{a}_n\}.$$

Слично, нека Y е почетен интервал определен со бесконечниот децимален запис $b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. Ако определиме почетни интервали со

$$Y_n = \{y \mid y \in \mathbb{K}^+, \, y < \underline{b}_n\}$$

тогаш

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = \{y \mid y \in \mathbb{K}^+, \text{постои } n \text{ таков што } y < \underline{b}_n\} \, .$$

Ќе покажеме дека

$$X + Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, \, z < \underline{a}_n + \underline{b}_n\}$$

и според тоа е почетен интервал како унија на почетни интервали.

Заради

$$\begin{aligned} X + Y &= \{x \mid x \in \mathbb{K}^+, \exists n \text{ т. ш. } x < \underline{a}_n\} + \{y \mid y \in \mathbb{K}^+, \exists n \text{ т. ш. } y < \underline{b}_n\} \\ &\supseteq \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, \exists n \text{ т. ш. } z < \underline{a}_n + \underline{b}_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, \, z < \underline{a}_n + \underline{b}_n\} \end{aligned}$$

Обратно, нека $x + y \in X + Y$. Тогаш постои m таков што $x < \underline{a}_m$ и постои p таков што $y < \underline{b}_p$. Ако избереме $n = \max\{m, p\}$ тогаш $x < \underline{a}_n$ и $y < \underline{b}_n$, и следува

$$x + y < \underline{a}_n + \underline{b}_n \; .$$

Дефинираме операција собирање: $" + "$. Нека реалниот број x е определен со почетниот интервал $X \subseteq \mathbb{K}^+$, а реалниот број y е определен со почетниот интервал $Y \subseteq \mathbb{K}^+$. По дефинициија

$$x+y=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z \mid z\in\mathbb{K}^{+}, z<\underline{a}_n+\underline{b}_n\}$$
$$=X+Y$$

Заради тоа што

$$X+Y=Y+X$$
$$(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$$

точни се својствата (С1) и (С2) за собирањето на реалните броеви.

Својството (П1) важи заради тоа што ако X,Y,Z се множества такви што $X\subseteq Y$, тогаш $X+Z\subseteq Y+Z$.

МНОЖЕЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Нека $X\subseteq\mathbb{K}^{+}$ и $Y\subseteq\mathbb{K}^{+}$ се почетни интервали.

Теорема 6: *Постои најмал почетен интервал кој го содржи множеството* $X\cdot Y=\{x\cdot y \mid x\in X, y\in Y\}$.

Доказ: Нека $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$, каде што $X_n=\{x \mid x<\underline{a}_n\}$ и децималните броеви $\underline{a}_n$ се како во теорема на почетокот. Слично нека и Y го претставиме на овој начин $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n$, каде што $Y_n=\{y \mid y<\underline{b}_n\}$.

Нека $Z=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z \mid z<\underline{a}_n\cdot\underline{b}_n\}$. Ќе покажеме дека Z е најмалиот интервал кој го содржи множеството $X\cdot Y$.

Најпрво, ако $x\in X$ тогаш постои децимален број $\underline{a}_n$ таков што $x<\underline{a}_n$, и за $y\in Y$ тогаш постои децимален број $\underline{b}_m$ таков што $y<\underline{b}_m$, Нека $k=\max\{n,m\}$.Тогаш $x\cdot y<\underline{a}_k\cdot\underline{b}_k$ и следува $x\cdot y\in Z$ т.е. $X\cdot Y\subseteq Z$.

Низата $\underline{a}_n \cdot \underline{b}_n$ нема најголем елемент. Значи Z е најмалиот интервал кој го содржи множеството $X \cdot Y$.

Најмалиот почетен интервал кој го содржи множеството $X \cdot Y$ ќе го означуваме со $\operatorname{Int} \overline{X \cdot Y}$. Според претходната теорема

$$\operatorname{Int}\overline{X \cdot Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, z < \underline{a}_n \cdot \underline{b}_n\}$$
$$= \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, \text{постои } n \text{ таков што } z < \underline{a}_n \cdot \underline{b}_n\}$$

Теорема 7: 1) $\operatorname{Int} \overline{X \cdot Y} = \operatorname{Int} \overline{Y \cdot X}$

2) $\operatorname{Int} \overline{(X \cdot Y) \cdot Z} = \operatorname{Int} \overline{X \cdot (Y \cdot Z)}$

3) $\operatorname{Int} \overline{X \cdot (Y + Z)} = \operatorname{Int} \overline{X \cdot Y + X \cdot Z}$

Доказ: 1) е тривијално, бидејќи комутативноста важи за множење на множества.

2) За да покажеме дека $\operatorname{Int} \overline{(X \cdot Y) \cdot Z} \subseteq \operatorname{Int} \overline{X \cdot (Y \cdot Z)}$, доволно е да покажеме дека за секој $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, постојат $x' \in X$, $y' \in Y$, $z' \in Z$ такви што

$$x' \cdot (y' \cdot z') \geq (x \cdot y) \cdot z$$

Постои природен број k таков што $x' = x + \frac{1}{10^k} \in X$, $y' = y + \frac{1}{10^k} \in Y$, $z' = z + \frac{1}{10^k} \in Z$. Тогаш

$$x' \cdot (y' \cdot z') \geq (x + \frac{1}{10^k})(y \cdot z + \frac{1}{10^{2k}}) \geq x \cdot (y \cdot z) + \frac{1}{10^{3k}} \geq (x \cdot y) \cdot z$$

и следува $\operatorname{Int} \overline{(X \cdot Y) \cdot Z} \subseteq \operatorname{Int} \overline{X \cdot (Y \cdot Z)}$..

Заради

$$(x' \cdot y') \cdot z' \geq (x \cdot y + \frac{1}{10^{2k}})(z + \frac{1}{10^k}) \geq (x \cdot y) \cdot z + \frac{1}{10^{3k}} \geq x \cdot (y \cdot z)$$

следува и $\operatorname{Int} \overline{X \cdot (Y \cdot Z)} \subseteq \operatorname{Int} \overline{(X \cdot Y) \cdot Z}$.

3) Слично како во 2) од

$$(x+\frac{1}{10^k})((y+\frac{1}{10^k})+(z+\frac{1}{10^k})) \geq x \cdot y + x \cdot z + \frac{2}{10^k}$$

следува $\operatorname{Int} \overline{X \cdot (Y+Z)} \subseteq \operatorname{Int} \overline{X \cdot Y + X \cdot Z}$.

Исто така

$$\begin{aligned}(x+\frac{1}{10^k})(y+\frac{1}{10^k})+(x+\frac{1}{10^k})(z+\frac{1}{10^k})) &\geq x \cdot y + \frac{1}{10^k} + x \cdot z + \frac{1}{10^k} \\ &\geq x \cdot (y+z)\end{aligned}$$

што значи $\operatorname{Int} \overline{X \cdot Y + X \cdot Z} \subseteq \operatorname{Int} \overline{X \cdot (Y+Z)}$.

Дефинираме операција множење: " $\cdot$ " Нека реалниот број x е определен со почетниот интервал $X \subseteq \mathbb{K}^+$, а реалниот број y е определен со почетниот интервал $Y \subseteq \mathbb{K}^+$. По дефинициија

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, z < \underline{a}_n \cdot \underline{b}_n\} \\ &= \{z \mid z \in \mathbb{K}^+, \text{постои } n \text{ таков што } z < \underline{a}_n \cdot \underline{b}_n\} \end{aligned}$$

Според тоа $x \cdot y = \operatorname{Int} \overline{X \cdot Y}$, од претходната теорема директно следува точноста на **(**M1**), (**M2**),** и **(**Д**).**

(M3**)** Постои неутрален елемент 1 т.е. $a \cdot 1 = a$ за секој $a \in \mathbb{R}^+$.

Доказ на (M3**):** Нека реалниот број a е определен со почетниот интервал A. На реалниот број 1 одговара почетниот интервал

$$E = \{x \mid x < 1\} \subseteq \mathbb{K}^+ .$$

Ќе покажеме дека $A \cdot E = A$, Ќе следува дека $A \cdot E$ е интервал и $a \cdot 1 = a$.Всушност треба да покажеме дека $A \cdot E \subseteq A$ и $A \subseteq A \cdot E$.

Прво ќе покажеме дека $A \cdot E \subseteq A$. Нека $w \in A \cdot E$, т.е. $w = a \cdot x$, $a \in A, x < 1$. Заради $a > w$, добиваме $w \in A$.

Сега треба да ја покажеме другата насока дека $A \subseteq A \cdot E$. Нека $a \in A$. Бидејќи A нема најголем елемент, постои $b \in A$, т.ш. $b > a$.

Се поставува прашањето дали може за ској $x \in E$, $b \cdot x \le a$.

Бидејќи $b > a$, b може да се запише како $b > a + \frac{1}{10^k}$, каде што. k е фиксен број.

Заради тоа што за секој j , $1 - \frac{1}{10^j} \in E$, имаме дека

$$b \cdot (1 - \frac{1}{10^j}) \le a$$

$$(a + \frac{1}{10^k}) \cdot (1 - \frac{1}{10^j}) \le a$$

$$a - \frac{a}{10^j} + \frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^{k+j}} \le a$$

$$\frac{1}{10^k} \le \frac{a}{10^j} + \frac{1}{10^{k+j}}$$

Последново е контрадикција , бидејќи за k е фиксен број и j доволно големо нема да важи последното неравенство.

Тоа значи дека постои j, така што $1 - \frac{1}{10^j} \in E^+$. Имаме дека постои $x \in E$, $b \cdot x > a$. Следува $a \in A \cdot E$. Значи добиваме дека $A \subseteq A \cdot E$.

Доказ на (П2) Нека реалните броеви x, y, z се определени со почетните интервали во $\mathbb{K}^+$, X, Y, Z соодветно. Заради $x \le y$ т.е. $X \subseteq Y$, ако $c \in Z$ тогаш $X \cdot \{c\} \subseteq Y \cdot \{c\}$. Следува $X \cdot Z \subseteq Y \cdot Z$, односно $x \cdot z \le y \cdot z$.

За позитивните реални броеви е исполнето и следново својство.

Теорема 8: *За секој позитивен реален број* x *постои инверзен елемент* y*, т.ш. важи* $x \cdot y = 1$ *(*y *се нарекува инверзен за* x *и се означува со* $\frac{1}{x}$ *).*

Доказ: Нека x е определен со почетниот интервал X. Нека

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

каде

$$X_n = \{x \mid x < \underline{a}_n\}$$

се почетните интервали такви што за бесконечен број децимали е исполнето $a_n > 0$.

Постои децимал (или a_0) со најмал индекс така што $a_k > 0$.

Избираме $b_0, b_1 ... b_k$ така што .

$$a_0, a_1 ... a_k \cdot b_0, b_1 ... b_k < 1 \quad \text{и} \quad a_0, a_1 ... a_k \cdot (b_0, b_1 ... b_k + \frac{1}{10^k}) \geq 1$$

и понатаму избираме $b_0, b_1 ... b_{k+i}$ така што

$$a_0, a_1 ... a_{k+i} \cdot b_0, b_1 ... b_{k+i} < 1 \quad \text{и} \quad a_0, a_1 ... a_{k+i} \cdot (b_0, b_1 ... b_{k+i} + \frac{1}{10^{k+i}}) \geq 1$$

Нека y е реалниот број определен со почетниот интервал Y, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, каде што $Y_n = \{y \mid y < \underline{b}_n\}$. Ќе покажеме дека $x \cdot y = 1$.

На реалниот број 1 одговара почетниот интервал

$$E = \{x \mid x < 1\} \subseteq K^+ .$$

Нека

$$Z = \bigcup_{n=k}^{\infty} \{z \mid z < \underline{a}_n \cdot \underline{b}_n\}$$

Како што покажавме во една од претходните теореми,

$$\mathrm{Int}\,\overline{X \cdot Y} = Z\,.$$

Значи $x \cdot y$ е определен со почетниот интервал Z.

Најпрво $Z \subseteq E$. Ќе покажеме дека и $E \subseteq Z$ од каде ќе следува дека $x \cdot y = 1$. Нека $c \in E$. Тогаш $c \le 1 - \frac{1}{10^j} < 1$. Нека избереме n така што $\frac{a_0 + 1}{10^n} < \frac{1}{10^j}$. Тогаш од

$$a_0, a_1 \ldots a_n \cdot (b_0, b_1 \ldots b_n + \frac{1}{10^n}) \ge 1$$

добиваме

$$a_0, a_1 \ldots a_n \cdot b_0, b_1 \ldots b_n \ge 1 - \frac{a_0, a_1 \ldots a_n}{10^n} > 1 - \frac{a_0 + 1}{10^n} \ge 1 - \frac{1}{10^j} \ge c$$

Следува $c \in Z$.

Следното својство е познато како комплетност на реалните броеви:

Теорема 9: *Секое мајорирано подмножество од $\mathbb{R}^+$ има супремум.*

Доказ: Нека Y е мајорирано подмножество од $\mathbb{R}^+$. Постои природен број $a_0 \in \mathbb{N}_0$ таков што

1) за секој $y \in Y$, $a_0 + 1 \ge y$

2) постои $y' \in Y$ таков што $y' > a_0$

Постои a_1 , $0 \le a_1 \le 9$ таков што

1) за секој $y \in Y$, $a_0, a_1 + \frac{1}{10} \ge y$

2) постои $y' \in Y$ таков што $y' > a_0, a_1$

– –

Постои a_n , $0 \le a_1 \le 9$ таков што

1) за секој $y \in Y$, $a_0, a_1 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} \ge y$

2) постои $y' \in Y$ таков што $y' > a_0, a_1 \ldots a_n$

Заради 2) постојат бесконечно многу децимали различни од нула. Со децималните броеви a_0 ; a_0,a_1 ; ... е определен почетен интервал и реален број x за кој тврдиме дека е супремум.

x е мајорант. Да претпоставиме спротивно дека x не е мајорант. Тогаш постои $y \in Y$ таков што $y > x$. Тоа значи дека $y > a_0,a_1...a_n$ за секој природен број т.е. $y \geq a_0,a_1...a_n + \frac{1}{10^n}$ за некој n . Ова е во контрадикција со 1).

x е најмал мајорант. Да претпоставиме спротивно дека x не е најмал мајорант. Тогаш постои мајорант x' таков што $x' < x$. Заради ова постои $a_0,a_1...a_n \in Y$ таков пто $x' < a_0,a_1...a_n$. Според 2) постои $y' \in Y$ таков што $y' > x'$, што е контрадикција со тоа што x' е мајорант.

Пример: Да забележиме дека за конечниот децимален број k, и за подмножеството од реалните броеви $\{t \mid t \in \mathbb{R}^+, t < k\}$ е исполнето**,**

$$\sup\{t \mid t \in \mathbb{R}^+, t < k\} = k .$$

Истотака ако е даден реален број определен со бесконечен децимален запис

$$a_0,a_1a_2a_3...$$

при што за бесконечен број децимали е исполнето $a_n > 0$ (т.е. определен со конечните децимални броеви $\underline{a}_1 = a_0,a_1$, $\underline{a}_2 = a_0,a_1a_2$, $\underline{a}_3 = a_0,a_1a_2a_3$,...), тогаш за подмножеството од реалните броеви определено со

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{t \mid t < \underline{a}_n, t \in \mathbb{R}^+\} = \{t \mid \text{постои } n \text{ за кој } t < \underline{a}_n, t \in \mathbb{R}^+\}$$

е исполнето

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \sup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t \mid t < \underline{a}_n, t \in \mathbb{R}^+\},$$

но исто така

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \sup \{\underline{a}_n \mid n = 1,2,3, \ldots\}$$

НЕГАТИВНИ РЕАЛНИ БРОЕВИ

Дефинираме множество негативни реални броеви $\mathbb{R}^-$ со

$$\mathbb{R}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{R}^+\}.$$

Дефиниција: *Множеството од реални броеви* $\mathbb{R}$ *се состои од позитивните и негативните реални броеви и од нулата т.е.*

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

Сега ќе ги дефинираме операциите и подредувањето во $\mathbb{R}$.

Нека $x, y \in \mathbb{R}^+$. Дефинираме подредување со

$$-x < 0 < y$$

Собирањето го дефинираме на следниов начин: Најпрво по дефиниција

(С 3) $x + 0 = x = 0 + x$ т.е. 0 е неутрален елемент

(С 4) $x + (-x) = 0$ и $(-x) + x = 0$

Потоа ако $x, y, z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ и ако $x + z = y$ тогаш ќе речеме дека z е ***разлика*** на x и y и пишуваме

$$z = x - y$$

За $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ по дефиниција

$$x+(-y)=(-y)+x=\begin{cases} x-y, & x \geq y \\ -(y-x), & y > x \end{cases}$$

По дефиниција

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad .$$

За $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ по дефиниција

$$x \cdot (-y) = -x \cdot y = (-x) \cdot y$$
$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

(M4) Секој $u \in \mathbb{R}^+$, $u \neq 0$ има инверзен т.е. постои v така што $u \cdot v = 1$

Доказ: За позитивните броеви својството е докажано те за секој $x \in \mathbb{R}^+$ постои $\frac{1}{x}$. Тогаш $(-x)(-\frac{1}{x}) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Понатаму, се договараме дека

$$-0 = 0, \quad -(-x) = x, \quad x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

Нека Y е подмножество од реалните броеви и нека

$$-Y = \{-y \mid y \in Y\}$$

Тогаш заради $-x > -y$ ако и само ако $y > x$ добиваме: ако Y има мајорант тогаш

$$\inf(-Y) = -\sup Y \ ;$$

ако Y има минорант тогаш

$$\sup(-Y) = -\inf Y \ .$$

(П3)**:** Секое непразно мајорирано подмножество Y од $\mathbb{R}$ има супремум. Секое непразно минорирано подмножество Y од $\mathbb{R}$ има инфимум.

Доказ на (П3)**:** Ќе ја покажеме теоремата за $\sup Y$.Тврдењето е точно ако $Y \subseteq \mathbb{R}^+$. Тврдењето ќе биде точна и за множеството $-Y$.

Останува да се покаже само случајот кога Y содржи елементи и од $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ и негативни броеви .Но, тогаш

$$\sup Y = \sup Y \cap (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) .$$

Својствата (М1) - (М4), (С1) - (С4), (Д), (П1) - (П3) се исполнети за $\mathbb{R}$ Со овие основни својства можат да се изведат сите други својства на реалните броеви

II. НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. ЛИМЕС НА НИЗА. КОНВЕРГЕНЦИЈА

Дефиниција: *Низа од реални броеви е секое пресликување а: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ од множеството на природни брови во множеството на реални броеви.*

Ако $a:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е низа од реални броеви, и ако $a(n) = a_n$ т.е. природниот број n се пресликува во a_n, (или $1 \to a_1$, $2 \to a_2$, $3 \to a_3$, ...), тогаш оваа низа ја означуваме со $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ или со $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$.

Множество вредности на низата $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ е множеството $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Пример: 1) Низата $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ со n – ти член $a_n = \frac{1}{n}$ има множество вредности $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

2) Низата (2,0,2,0,2, ...) со n – ти член $a_n = 1-(-1)^n$ има множество вредности $\{0, 2\}$.

Понатаму за низата $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ ќе ја користиме скратената ознака (a_n).

Нека X е подмножество од реалните броеви. За низата од реални броеви (a_n) ќе речеме дека е ***низа во*** X, ако $a_n \in X$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција: *Ако постои реален број $x \in \mathbb{R}$ таков што за произволен $\varepsilon > 0$ може да се најде природен број n_0 таков што за секој природен број $n \geq n_0$ да е исполнето $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ќе речеме дека низата од реални броеви (x_n)* ***конвергира*** *кон реалниот број $x \in \mathbb{R}$.*

Пример: Ќе поксжеме декс низата со n – ти член $a_n = \frac{1}{n}$ конвергира кон 0.

Нека е даден $\varepsilon > 0$. Треба да најдеме n_0 *таков што за секој природен број* $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{н} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

т.е.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Треба $n > 1/\varepsilon$ и доволно е да избереме кој било природен број $n_0 > 1/\varepsilon$

ε	0,1	0,01	0,005	...
n_0	11	101	201	.

Дефиниција: *Низата од реални броеви* (x_n) *има лимес* $x \in \overline{\mathbb{R}}$ *ако за секоја околина* U *на* x*, може да се најде природен број* n_0 *таков што за секој природен број* $n \geq n_0$ *е исполнето* $x_n \in U$.

Ако низата (x_n) има лимес x, пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

или пак $x_n \to x$ (x_n “тежи” кон x) .

Од самите дефиниции следува: ако низата од реални броеви (x_n) конвергира кон реалниот број $x \in \mathbb{R}$, тогаш $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, и обратно т.е. дефинициите во овој случај се исти. Разликата е во тоа што една низа од реални броеви може да има лимес ∞ или $-\infty$, но може да конвергира само кон реален број.

Теорема 1: *Ако низата од реални броеви има лимес,тогаш тој е единствен.*

Доказ: Да претпоставиме спротивно,низата од реални броеви (x_n) има два лимеса $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$. Тогаш постојат околини U на x и V на y такви што $U \cap V = \emptyset$.

Постои природен број n_1, таков што за $n \geq n_1$ е исполнето $x_n \in U$, и постои природен број n_2, таков што за $n \geq n_2$ е исполнето $x_n \in V$. Тогаш за $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, реалниот број $x_{n_0} \in U$ и $x_{n_0} \in V$ што е во контрадикција со $U \cap V = \emptyset$.

2. ЛИМЕС НА НИЗА И ПОДРЕДУВАЊЕТО НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Следното својство покажува дека лимесот го чува подредувањето.

Теорема 1: *Нека (x_n) и (y_n) се низи од реални броеви кои имаат лимес, такви што:*

$$x_n \leq y_n$$

за секој природен број n. Тогаш:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

Доказ: Нека $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Ако тврдењето на теоремата не е точно и $x > y$, тогаш постојат околини U на x и V на y такви што $U \cap V = \emptyset$.

Постои природен број n_1, таков што за $n \geq n_1$, $x_n \in U$, и постои природен број n_2, таков што за $n \geq n_2$, $y_n \in V$. Ако избереме $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш $x_{n_0} > y_{n_0}$, што е во контрадикција со условите на теоремата.

Последица: *Нека (x_n) е конвергентна низа и x е реален број.*

1) *Ако за секој природен број* n, $x_n \geq x$ *тогаш и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq x$

2) *Ако за секој природен број* n, $x_n \leq x$ *тогаш и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq x$

Следната теорема е критериум за конвергенција на низа кој многу пати ќе го користиме понатаму.

Теорема 2: *Нека* $(x_n), (y_n)$ *и* (z_n) *се низи од реални броеви такви што:*

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

за секој природен број n. *Ако низите* (x_n) *и* (z_n) *имаат лимес и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p = \lim_{n\to\infty} z_n$$

тогаш и низата (y_n) *има лимес и притоа:*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = p$$

Доказ*:* За дадена околина U на p постои природен број n_0 таков што за $n \geq n_0$, $x_n \in U$ и $z_n \in U$. Заради $x_n \leq y_n \leq z_n$ следува и $y_n \in U$ за $n \geq n_0$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = p\ .$$

Дефиниција: *Низата од реални броеви* (x_n) *е* ***монотоно растечка*** *ако*

$$x_{n+1} \geq x_n$$

за секој природен број n. *Низата е* ***монотоно опаѓачка*** *ако*

$$x_{n+1} \leq x_n$$

за секој природен број n.

Низата (x_n) *е* ***ограничена*** *ако множеството вредности на низата е ограничено т.е постои реален број* M *така што*

$$|\, x_n \,| \leq M$$

за секој природен број n.

Низата (x_n) *е* ***ограничена од горе)*** *ако множеството вредности на низата е ограничено од горе.*

Низата (x_n) *е* ***ограничена од долу*** *ако множеството вредности на низата е ограничено од долу.*

Теорема 3: 1) *Монотоно растечка низа* (x_n) *ограничена од горе конвергира и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

2) *Монотоно опаѓачка низа* (x_n) *ограничена од долу конвергира.и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Доказ*:* Ќе го докажеме првото тврдење, а второто се докажува аналогно. Ако растечката низа (x_n) е ограничена од горе тогаш постои реален број x таков што

$$x = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Поради тоа што x е супремум, $x_n \le x$ за секој природен број n и за дадено ε > 0, постои природен број n_0 таков што:

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \le x .$$

Поради тоа што низата (x_n) е монотоно растечка низа следува:

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \le x_{n_0+1} \le x_{n_0+2} \le \ \dots \le x$$

т.е.

$$x - \varepsilon < x_n \le x$$

за секој $n \ge n_0$. Значи,

$$x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

за секој $n \ge n_0$, и низата (x_n) конвергира кон x.

Теорема 4: 1) *Нека* X *е множество ограничено од горе. Тогаш постои низа* (x_n) *во* X *таква што*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup X$$

2) *Нека* X *е множество ограничено од долу. Тогаш постои низа* (y_n) *во* X *таква што*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \inf X$$

Доказ: 1) Од дефиницијата на супремум постои $x_n \in X$ таков што

$$\sup X - \frac{1}{n} < x_n \le \sup X$$

За низата (x_n) следува

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup X .$$

Теорема 5: *Секоја конвергентна низа е ограничена.*

Доказ*:* Нека низата (x_n) конвергира кон x. Постои природен број n_0, таков што за секој $n \ge n_0$,

$$|x_n - x| < 1 .$$

Нека M го избереме така што

$$M = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ \ldots, |x_{n_0-1}|, \ 1+|x|\right\}$$

Тогаш за сите приодни броеви $n \ge n_0$,

$$\begin{aligned} |x_n| &= |(x_n - x) + x| \\ &\le |x_n - x| + |x| \\ &< 1+|x| \end{aligned}$$

и следува $|x_n| < M$ за сите природни броеви n.

3. ОПЕРАЦИИ СО НИЗИ

Производ на низата $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ со реален број c е низата $(c \cdot x_n \mid n \in \mathbb{N})$. Збир и производ на низите $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ и $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ се низите $(x_n + y_n \mid n \in \mathbb{N})$ и $(x_n \cdot y_n \mid n \in \mathbb{N})$ соодветно. Ако $y_n \neq 0$ за секој природен број n, тогаш може да се дефинира и количник на низите $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ и $(y_n \mid n \in \mathbb{N})$ како $(\frac{x_n}{y_n} \mid n \in \mathbb{N})$.

Претходно дефинираните операции со низи и лимесот на низа се сврзани со следнава теорема.

Теорема 1: *Нека* (x_n) *и* (y_n) *се конвергентни низи од реални броеви. Тогаш и низата:*

1) $(c \cdot x_n)$ *за фиксиран реален број c, конвергира и* $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2) $(x_n + y_n)$ *конвергира и* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3) $(x_n \cdot y_n)$ *конвергира и* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4) *ако* $y_n \neq 0$ *за секој природен број и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *тогаш и низата* $(\frac{x_n}{y_n})$ *конвергира и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Доказ*:* Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ и нека е зададен реален број $\varepsilon > 0$.

1) Ако $c = 0$ тогаш $c \cdot x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot x_n = 0$. Нека $c \neq 0$. Постои природен број n_0 таков што за сите $n \geq n_0$,

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad .$$

Следува,

$$|c\cdot x_n - c\cdot x| < \varepsilon .$$

2) Постои природен број n_1, таков што за $n \geq n_1$

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и постои n_2, таков што за $n \geq n_2$

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ако $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш за сите $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}|(x_n + y_n) - (x + y)| &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .\end{aligned}$$

3) Низата (y_n) конвергира, следува е ограничена и постои реален број $M_1 > 0$, таков што $|y_n| \leq M_1$ за n = 1, 2, 3, ... Нека $M = \max\{M_1, |x|\}$.

Постои природен број n_1 таков што за сите $n \geq n_1$:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

и постои природен број n_2 таков што за сите $n \geq n_2$

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Ако $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш за сите $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}|x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \\ &\leq |x_n - x| \cdot |y_n| + |x| \cdot |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon .\end{aligned}$$

4) Постои природен број n_1 таков што за сите $n \geq n_1$:

$$|y_n - y| < \frac{|y|}{2},$$

од што следува:

$$|y_n| = |y-(y-y_n)| \geq ||y|-|y-y_n||$$
$$> ||y| - \frac{|y|}{2}| = \frac{|y|}{2}$$

Постои природен број n_2 таков што за сите $n \geq n_2$,

$$|y_n - y| < \frac{|y|^2}{2} \cdot \varepsilon .$$

Ако $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш за сите $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y_n - y|}{|y_n| \cdot |y|} < 2\frac{|y_n - y|}{|y|^2} < \varepsilon \;,$$

со што е покажано дека

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$$

Сега, поради 3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{x}{y} .$$

Пример: 1) За даден реален број $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ и според тоа за сите $n \geq n_0$ добиваме

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Следува $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

<u>Бројот е</u> За низата со општ член

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ќе покажеме дека конвергира покажувајќи дека низата монотоно расте и е ограничена од горе.

Од неравенството на Бернули имаме:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n^2}\cdot n = 1-\frac{1}{n},$$

т.е.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 1-\frac{1}{n}.$$

Добиваме:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = x_{n-1}$$

и следува низата (x_n) монотоно расте. Ќе покажеме дека низата е ограничена од горе. За таа цел ја формираме низата со општ член:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ќе покажеме дека оваа низа монотоно опаѓа. Повторно од неравенството на Бернули добиваме:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n &> 1+\frac{n}{n^2-1}\\ &> 1+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

од каде

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}$$

Следува:

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

т.е. $y_{n-1} > y_n$. Покрај ова, за сите n точно е $y_n > x_n$ од што следува дека за сите природни броеви n, $y_1 > x_n$ т.е.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4 .$$

Лимесот на низата (x_n) ќе го означиме со e. Според тоа

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e .$$

Со помош на низата (x_n) може да определиме произволен број децимали на бројот e. Неговите први децимали се e = 2,7182...

4. БЕСКОНЕЧНИ ЛИМЕСИ

Целта на овој параграф е да докажеме дека теоремата за операции со лимеси е точна и во случајот кога низата има бесконечен лимес

Теорема 1: *Нека* (y_n) *е низа таква што* $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. *Тогаш*

1) $\lim_{n\to\infty} 0\cdot y_n = 0$ *и* $\lim_{n\to\infty} a\cdot y_n = \begin{cases} \infty, & ако\ \ a>0 \\ -\infty, & ако\ \ a<0 \end{cases}$

2) *ако* (x_n) *е низа таква што* $\lim_{n\to\infty} x_n > -\infty$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$$

3) *ако* (x_n) *е низа таква што* $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ *тогаш*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \begin{cases} \infty, & за\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0 \\ -\infty, & за\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n < 0 \end{cases}$$

Доказ: Нека E е произволен реален број.

1) Нека $a \neq 0$. Постои природен број n_0 таков што за сите $n \geq n_0$

$$y_n > \frac{E}{a} .$$

Ако $a > 0$ тогаш за сите $n \geq n_0$,

$$a \cdot y_n > E$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a \cdot y_n = \infty$. Ако $a < 0$ тогаш за сите $n \geq n_0$,

$$a \cdot y_n < E$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a \cdot y_n = -\infty$.

2) Можни се два случаја за $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ тогаш за фиксиран број M, постои природен број n_1, таков што за сите $n \geq n_1$, $x_n \in (M, \infty)$; ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, x реален број, тогаш избираме $M = x - 1$, и тогаш постои природен број n_1, таков што за сите $n \geq n_1$, $x_n \in (x-1, x+1) \subseteq (M, \infty)$.

И во двата случаја постои природен број n_2, таков што за сите $n \geq n_2$, $y_n \in (E - M, \infty)$.

Ако $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ тогаш за сите $n \geq n_0$, $x_n > M$, и $y_n > E - M$ и следува $x_n + y_n \in (E, \infty)$.

3) Нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$ (аналогно се покажува и за $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < 0$) . Можни се два случаја за $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ тогаш за фиксен број M постои природен број n_1, таков што за сите $n \geq n_1$, $x_n \in (M, \infty)$; ако $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, x реален број, избираме $M = \frac{x}{2}$, и тогаш постои природен број n_1, таков што за сите $n \geq n_1$, $x_n \in (x - \frac{x}{2}, x + \frac{x}{2}) \subseteq (M, \infty)$.

И во двата случаја постои природен број n_2 , таков што за сите $n \geq n_2$, $y_n \in (\frac{E}{M}, \infty)$.

Ако $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ тогаш за сите $n \geq n_0$, $x_n > M$, и $y_n > \frac{E}{M}$ и следува $x_n \cdot y_n \in (E, \infty)$.

Ако во претходната теорема $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ се замени со $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ се добива следнава теорема

Теорема 2: *Нека* (y_n) *е низа таква што* $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$.. *Тогаш*

1) $\lim_{n\to\infty} 0 \cdot y_n = 0$ и $\lim_{n\to\infty} a \cdot y_n = \begin{cases} -\infty, & \text{ако } a > 0 \\ \infty, & \text{ако } a < 0 \end{cases}$

2) ако (x_n) е низа таква што $\lim_{n\to\infty} x_n < \infty$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$$

3) ако (x_n) е низа таква што $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ тогаш

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{за } \lim_{n\to\infty} x_n > 0 \\ +\infty, & \text{за } \lim_{n\to\infty} x_n < 0 \end{cases}$$

Теорема 3: *Нека* (y_n) *е низа со* $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ *или* $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ *и за која за секој природен број* n , $y_n \neq 0$ *и нека* (x_n) *е низа таква што* $-\infty < \lim_{n\to\infty} x_n < \infty$. *Тогаш*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

Доказ: Нека $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Нека е даден број $\varepsilon > 0$.Постои природен број n_0 таков што за $n \geq n_0$

$$y_n > \frac{1}{\varepsilon} \ .$$

Тогаш

$$0<\frac{1}{y_n}<\varepsilon$$

и следува $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=0$. Истото се добива и кога $\lim_{n\to\infty}y_n=-\infty$.

Сега според соодветната теорема за конечни лимеси добиваме

$$\lim_{n\to\infty}x_n\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}$$
$$=(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot 0=0$$

Заради поефикасно работење со симболите ∞ и $-\infty$ по дефиниција се воведуваат следните равенства за $a\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$,

$$a+\infty=\infty+a=\infty \ \text{, за } \ a>-\infty$$

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\begin{cases}\infty, & 0<a\le\infty\\ -\infty, & -\infty\le a<0\end{cases}$$

$$a+(-\infty)=(-\infty)+a=-\infty \ \text{, за } \ a<\infty$$

$$a\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot a=\begin{cases}-\infty, & 0<a\le\infty\\ \infty, & -\infty\le a<0\end{cases}$$

Следниве изрази ги сметаме за неопределени: $\infty+(-\infty)$, $(-\infty)+\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)\cdot 0$, $\frac{\pm\infty}{\infty},\frac{\pm\infty}{-\infty},\frac{\infty}{\pm\infty},\frac{-\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$ (каде $\pm\infty$ значи ∞ или $-\infty$)..

Со овие равенства, како последица од теоремите 1, 2 и 3 се добива следнава општа теорема

Теорема 4: *Нека* (x_n) *и* (y_n) *се низи кои имаат лимес. Тогаш се точни следниве равенства, под услов од нивната десна страна да не се јави некој од неопределените изрази*

1) $\lim_{n\to\infty}0\cdot x_n=0$, *и за* $c\neq 0$, $\lim_{n\to\infty}c\cdot x_n=c\cdot\lim_{n\to\infty}x_n$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4) *ако* $y_n \neq 0$ *за секој природен број и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *тогаш* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Пример: 1) Изразот неопределеност може да се оправда со следниов пример: Нека низата (x_n) е определена со $x_{2k} = 4k$ и $x_{2k-1} = 2k-1$, а низите (y_n) и (z_n) се определени со $y_n = 2n$ и $z_n = -n$. За нив е точно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$. Тогаш збирот $(x_n + z_n)$ е низата 0,4,0,6, ... и таа нема лимес, додека $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n + z_n) = \infty$,

Иако, и во двата случаја со формална примена на претходната теорема за лимесот на збирот се добива неопределениот израз $\infty + (-\infty)$.

2) За лимесот на низата (q^n), $q>0$ точно е:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ 0, & q < 1 \end{cases}.$$

Најпрво нека 1 < q. Тогаш $q = 1 + p$ каде што $p > 0$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty}(1+p)^n \geq \lim_{n\to\infty}(1+np) = \infty$$

Ако 0 < q < 1. Тогаш $q = \dfrac{1}{Q}$ каде што $Q > 1$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{Q^n} = 0$$

3) Ќе покажеме дека за реален број $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 .$$

Постои природен број n_0 таков што за $n \geq n_0$, $\frac{a}{n}<\frac{1}{2}$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\leq \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n_0}}{n_0!}\cdot(\frac{1}{2})^{n-n_0}=0$$

Теорема 5: *Нека* (y_n) *е низа и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$

1) *ако* $0<y_n<\infty$ *за секој природен број* n*, тогаш* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\infty$

2) *ако* $-\infty<y_n<0$ *за секој природен број* n*,тогаш* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=-\infty$

Доказ: Нека $E>0$ е реален број. Постои природен број n_0 таков што за $n\geq n_0$,

$$-\frac{1}{E}<y_n<\frac{1}{E}$$

или попрецизно $0<y_n<\frac{1}{E}$. Следува $\frac{1}{y_n}\in(E,\infty)$ за сите $n\geq n_0$.

Пример: Иако за низата со n-ти член $y_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, низата со n-ти член $x_n=\frac{1}{y_n}=(-1)^n\cdot n$ нема лимес.

5. ПОДНИЗИ

Дефиниција: *Нека* $(x_n \mid n \in N)$ *е низа од реални броеви и нека*

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

е строго растечка низа од природни броеви. Низата $(x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ *се нарекува подниза од низата* $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$.

Поднизата $(x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N})$ скратено ја означуваме со (x_{n_k}).

Теорема 1: *Ако низата* $(x_n \mid n \in N)$ *има лимес, тогаш и секоја нејзина подниза* $(x_{n_k} \mid k \in N)$ *има лимес и*

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Доказ: Нека $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. За дадена околина U на x постои природен број n' таков што за $k \geq n'$, $x_k \in U$.

Заради $n_k \geq k$ следува и $x_{n_k} \in U$ т.е. $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$.

Следната теорема е позната како теорема на Болцано – Вајерштас. (Bolzano, Bernhard, 1781-1848, чешки математичар, логичар, филозоф), (Weierstrass, Karl,1815-1891, германски математичар).

Теорема 2: *Секоја ограничена низа содржи конвергентна подниза.*

Доказ: Ако $(x_n \mid n \in N)$ е низа која е ограничена тогаш, постои број $M > 0$ таков што за секој природен број n, $|x_n| \leq M$. Значи $x_n \in [-M, M]$ за сите $n \in N$. Нека $[a_1, b_1] = [-M, M]$. Избираме член на низата x_{n_1} таков што $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$.

Ќе конструираме низа од затворени интервали

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\dots\supseteq[a_k,b_k]\supseteq\dots$$

такви што секој од нив содржи бесконечно членови од низата и подниза $(x_{n_k}\mid k\in N)$ таква што $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$, за $k=1,2,\dots$.Нека претпоставиме дека се конструирани затворените интервали $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\dots,[a_k,b_k]$ и природни броеви $n_1<n_2<\dots<n_k$ за кои $x_{n_1}\in[a_1,b_1], x_{n_2}\in[a_2,b_2],\ \dots,\ x_{n_k}\in[a_k,b_k]$. Интервалот $[a_k,b_k]$ неговата средна точка го дели на два подинтервала $[a_k,\frac{a_k+b_k}{2}]$ и $[\frac{a_k+b_k}{2},b_k]$. Макар еден од овие два интервали содржи бесконечен број членови на низата ; нека тој биде означен $[a_{k+1},b_{k+1}]$. Постои природен број n_{k+1} таков што $n_{k+1}>n_k$ и таков што $x_{n_{k+1}}\in[a_{k+1},b_{k+1}]$.

Заради теоремата за влпжени сегменти постои реален број x таков што $x\in[a_k,b_k]$ за $k=1,2,\dots$.

Должината на интервалот $[a_k,b_k]$ изнесува $b_k-a_k=M\cdot 2^{-(k-2)}$, Заради $x,x_{n_k}\in[a_k,b_k]$, имаме

$$|x_{n_k}-x|<M\cdot 2^{-(k-2)}$$

и следува

$$\lim_{k\to\infty}|x_{n_k}-x|=0$$

Значи поднизата $(x_{n_k}\mid k\in N)$ конвергира кон реалниот број x.

Теорема 3: *Секоја низа содржи подниза која има лимес.*

Доказ: Ако низата $(x_n\mid n\in N)$ е ограничена тогаш според претходната теорема, таа содржи конвергентна подниза.

Нека низата $(x_n\mid n\in N)$ не е ограничена од горе . Избираме член на низата x_{n_1} таков што $x_{n_1}>1$. Ако се избрани членовите на низата $x_{n_1},x_{n_2},\dots,x_{n_k}$ такви што $n_1<n_2<\dots<n_k$ и такви што $x_{n_1}>1,x_{n_2}>2,\dots,x_{n_k}>k$ тогаш постои член на низата $x_{n_{k+1}}>k+1$ и $n_{k+1}>n_k$. На овој начин добиваме подниза $(x_{n_k}\mid k\in N)$ таква што

$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$. Слично конструираме подниза со лимес $-\infty$ во случајот кога низата не е ограничена од доле.

Теорема 4: *Една низа или* 1) *има лимес или* 2) *постојат најмалку две подnизи со различни лимеси.*

Доказ: Според претходната теорема постои подниза со лимес $x \in \overline{R}$. Нека претпоставиме дека x не е лимес на почетната низа. Тогаш постои околина U на x, таква што надвор од неа се бесконечно многу членови на низата. Според претходната теорема тие членови ќе содржат подниза која има лимес $y \in \overline{R}$. Сите членови се надвор од околината U и според тоа $x \neq y$.

6. ФУНДАМЕНТАЛНИ НИЗИ

Дефиниција: *За низата од реални броеви* $(x_n \mid n \in N)$ *велиме дека е фундаментална ако за секое* $\varepsilon > 0$ *постои природен број* n_0 *таков што за сите* $n, m \geq n_0$

$$| x_n - x_m | < \varepsilon$$

Фундаментална низа се нарекува и Кошиева според Коши (|Caushy, Augustin Luis, 1789-1857, француски математичар).

Теорема 1: *Секоја фундаментална низа е ограничена.*

Доказ: Нека низата (x_n) е фундаментална низа. За $\varepsilon = 1$ постои природен број n_0 таков што за секој $n, m \geq n_0$, $| x_m - x_n | < 1$. Специјално за $m = n_0$, $| x_n - x_{n_0} | < 1$. Следува

$$| x_n | = | (x_n - x_{n_0}) + x_{n_0} | \leq | x_n - x_{n_0} | + | x_{n_0} | < 1 + | x_{n_0} |$$

за сите $n \geq n_0$. Ако M се избере така што

$$M = \max\{| x_1 |, | x_2 |, \ldots, | x_{n_0 - 1} |, 1 + | x_{n_0} |\},$$

тогаш $|x_n| \leq M$ за сите природни броеви n.

Теорема 2: Една *низа е конвергентна ако и само ако е фундаментална.*

Доказ: Нека низата $(x_n \mid n \in N)$ конвергира кон реалниот број x. За даден $\varepsilon > 0$ постои природен број n' таков што за $n, m \geq n'$,

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и тогаш

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \, .$$

Обратно, нека $(x_n \mid n \in N)$ е фундаментална низа.Тогаш таа е и ограничена, и според тоа содржи конвергентна подниза $(x_{n_k} \mid k \in N)$. Нека оваа подниза конвергира кон реалниот број x.

За даден број $\varepsilon > 0$ постои природен број n'' таков што за сите $k \geq n''$,

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Исто така, постои природен број n' таков што за сите $k, n \geq n'$

$$|x_n - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и заради $n_k \geq k$ како специјален случај добиваме

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогаш за $n \geq \max\{n'', n'\}$ добиваме:

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и следува низата $(x_n \mid n \in N)$ конвергира кон реалниот број x.

7. ЛИМЕС СУПЕРИОР И ЛИМЕС ИНФЕРИОР

Нека $(x_n \mid n \in N)$ е низа од реални броеви . Нека Y е подмножеството од $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ определено со: $y \in Y$ ако постои подниза $(x_{n_k} \mid k \in N)$ таква што $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Ова множество не е празно бидејќи секоја низа содржи подниза која има лимес.

По дефиниција

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup Y\,,\quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \inf Y$$

При ова sup и inf означуваат дека супремумот и инфимумот се бараат во проширеното множество на реални броеви т.е. допуштаме тие да бидат и ∞ или $-\infty$.

$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ се нарекуваат лимес супериор и лимес инфериор на низата $(x_n \mid n \in N)$. Понекогаш за нив се користат и ознаките $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, соодветно.

Теорема 1: *Ако $(x_n \mid n \in N)$ е низа од реални броеви, тогаш постојат поднизи чии лимеси се $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Доказ: Нека $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Ако $x = -\infty$ тогаш множеството Y има само еден елемент, $-\infty$, кој е лимес на некоја подниза.

Нека $x = \infty$. Постои $y_k \in Y$ таков што $y_k > k$. Тогаш $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \infty$. Заради $k < y_k$, постои x_{n_k} таков што $k < x_{n_k}$. Следува $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$.

Нека $x \in \mathbb{R}$. Ја разгледуваме низата $r_n = x - \frac{1}{n}$. Постои $y_1 \in Y$ таков што $x - 1 < y_1$, зашто во спротивно $x-1$ би бил мајорант за Y помал од x. Од иста причина ако се избрани $y_1, y_2, ..., y_{k-1}$ такви што

$$x - 1 < y_1,\ x - \frac{1}{2} < y_2,\ ...,x - \frac{1}{k-1} < y_{k-1}$$

може да се избере y_k така што $x - \frac{1}{k} < y_k$. На овој начин конструираме низа $(y_k \mid k \in N)$ за која заради

$$x - \frac{1}{k} < y_k \leq x$$

следува

$$\lim_{k \to \infty} y_k = x\,.$$

Во околината $(y_k - \frac{1}{k}, y_k + \frac{1}{k})$ постојат бесконечно многу членови на низата $(x_n \mid n \in N)$. Заради ова може да се избере $x_{n_1} \in (y_1 - 1, y_1 + 1)$ и ако се избрани членовите $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{k-1}}$ така што $n_1 < n_2 < ... < n_{k-1}$ и $x_{n_i} \in (y_i - \frac{1}{i}, y_i + \frac{1}{i})$ тогаш може да се избере член $x_{n_k} \in (y_k - \frac{1}{k}, y_k + \frac{1}{k})$ така што $n_{k-1} < n_k$. На овој начин добиваме подниза $(x_{n_k} \mid k \in N)$. Заради

$$y_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} < y_k + \frac{1}{k},$$

за секој природен број k, и заради

$$\lim_{k \to \infty}(y_k - \frac{1}{k}) = x = \lim_{k \to \infty}(y_k - \frac{1}{k}),$$

следува

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x\,.$$

Слично се покажува дека постои подниза чиј лимес е $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

Од самата дефиниција на лимес супериор и лимес инфериор следува:

1) $\liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n$

2) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ако и само ако $\limsup_{n\to\infty} x_n = x = \liminf_{n\to\infty} x_n$

Примери: 1) За низата $x_n = n^{(-1)^n}$ ќе ги разгледаме поднизите (x_{2k}) и (x_{2k-1}) за кои

$$\lim_{k\to\infty}(x_{2k}) = \lim_{k\to\infty} 2k = \infty$$

и

$$\lim_{k\to\infty}(x_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k-1} = 0$$

За $a \in \overline{R} \setminus \{0,\infty\}$ секогаш постои околина U на a во која се содржат само конечен број членови на низата, и според тоа a не е лимес на подниза на (x_n). Според тоа

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = 0, \ \limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$$

2) Нека $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, ..., q_n, ...\}$. Ја разгледуваме низата (q_n). За секој реален број x постои подниза на оваа низа која конвергира кон x. Ова е точно затоа што во околината $(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$ постои рационален број (q_{n_k}). Тогаш заради:

$$x - \frac{1}{k} < q_{n_k} < x + \frac{1}{k}$$

за поднизата (q_{n_k}) добиваме

$$\lim_{k\to\infty} q_{n_k} = x.$$

Според тоа,

$$\liminf_{n\to\infty} q_n = -\infty, \ \limsup_{n\to\infty} q_n = \infty.$$

III. РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

1. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

Нека X, Y се подмножества од множеството реални броеви $\mathbb{R}$.

Секое пресликување $f: X \to Y$ се нарекува ***реална функција од една променлива***.

Секоја реална функција $f: X \to Y$ определува единствена реална функција $f: X \to \mathbb{R}$ определена со истото правило на придружување, и обратно за дадено подможество $Y \subseteq \mathbb{R}$, секоја функција $f: X \to \mathbb{R}$ таква што $f(X) \subseteq Y$ определува единствена функција $f: X \to Y$ определена со истото правило на придружување.

Заради ова кај реалните функции сметаме дека се определени со својата дефинициона област X и правилото на придружување и велиме дадена е реална функција $f(x)$ определена на множество X.

Понекогаш, реална функција се задава и само со правилото за придружување $y = f(x)$. Во овој случај ќе сметаме дека дефиниционата област на пресликувањето f се состои од сите реални броеви x за кои равенството $y = f(x)$ има смисла.

Пример: Реалната функција зададена со правилото на придружување $f(x) = \dfrac{1}{x}$ има дефинициона област $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$ т.е. $f: (-\infty,0) \cup (0,\infty) \to \mathbb{R}$

Нека $f(x)$ и $g(x)$ се реални функции определени на множеството X и c реален број. Тогаш можеме да определиме реални функции $c \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ на X со:

$$(c\cdot f)(x)=c\cdot f(x)$$
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

Функцијата $(c\cdot f)(x)$ ја нарекуваме множење на функција со реален број, функцијата $(f+g)(x)$ збир на функции и $(f\cdot g)(x)$ производ на функции .

Ако $g(x)\neq 0$ за секој $x\in X$ тогаш на X може да се дефинира количник на функции $(\frac{f}{g})(x)$ со:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

Ако $f:X\to Y$ е реална функција тогаш подмножеството од реалната рамнина $\mathbb{R}^2$ кое се состои од сите парови $(x,f(x))$, $x\in X$ се нарекува ***график на функцијата*** $f:X\to Y$.

Нека f е реална функција определена на множество X. Тогаш со $f(X)$ се означува множеството $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$.

Ова множество се нарекува ***слика*** на X со функцијата f . Нека g е реална функција определена на Y . Ако $f(X)\subseteq Y$ тогаш на X е определена реална функција $g(f(x))$ која се нарекува ***композиција*** на g и f и се означува со $g\circ f$.

Дефиниција: *Нека f е реална функција определена на множеството X . Ќе речеме дека f* ***е ограничена*** *на множеството X ако множеството $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ е ограничено т.е. постои M таков што*

$$|f(x)|\leq M\ .$$

Ќе речеме дека f ***е ограничена од горе*** *на множеството X ако множеството $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ е ограничено од горе. Ќе речеме дека f* ***е ограничена од доле*** *на множеството X ако множеството $f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$ е ограничено од доле.*

2. НЕПРЕКИНАТОСТ

Нека X е подмножество од реалните броеви.

Дефиниција: *Реалната функција f определена на X е непрекината во точката $x_0 \in X$, ако за секоја ε-околина V на $f(x_0)$ постои δ-околина U на x_0 таква што*

$$f(U \cap X) \subseteq V$$

Во понатамошниот текст многу пати ќе ја користиме и следнава верзија на истата дефиниција

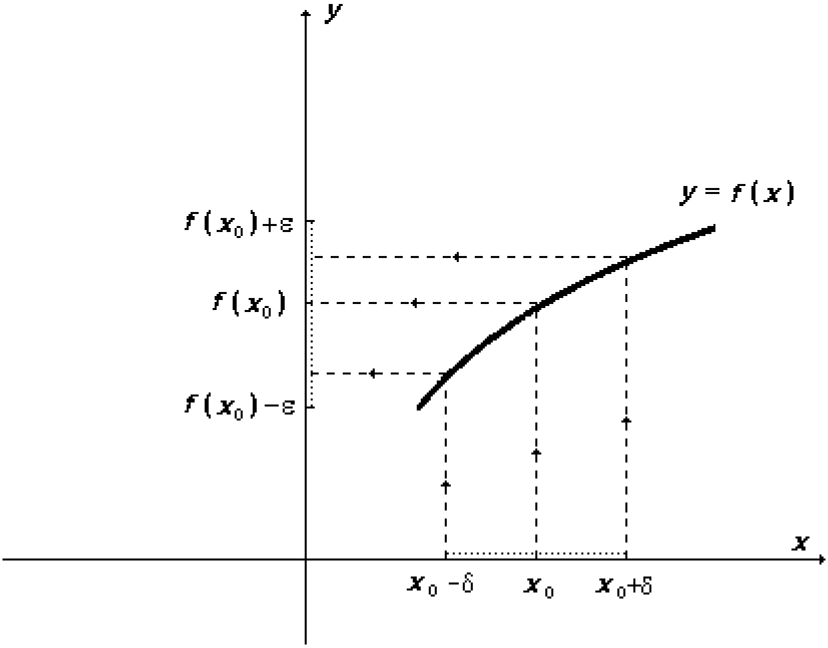
Дефиниција: *Нека f е реална функција определена на X и нека $x_0 \in X$. За функцијата f ќе речеме дека е* ***непрекината*** *во точката x_0 ако за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, така што од*

$$|x - x_0| < \delta$$

и $x \in X$ да следува

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Дефиницијата е илустрирана на следната слика:. Можеме да кажеме дека непрекинатоста во точка x_0 значи дека за точки x кои се на мало растојание („блиску”) до x_0, и вредноста на функцијата во тие точки $f(x)$ малку ќе се разликува од вредноста $f(x_0)$.



Дефиниција: *Нека f е реална функција определена на подмножество од реалните броеви X. Ќе речеме дека f е* ***непрекината на множеството*** *X ако е непрекината во секоја точка од X.*

Очигледно, ако $x_0 \in X' \subseteq X$ и ако $f : X \to Y$ е непрекината функција во точката x_0 тогаш и рестрикцијата на оваа функција $f : X' \to Y$ ќе е непрекината во точката x_0.

Обратното тврдење не е точно, но е точен следниов специјален случај: ако за некој $\varepsilon > 0$, $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap X \to Y$ е непрекината во точката x_0, тогаш и функцијата $f : X \to Y$ е непрекината во точката x_0.

Дефиниција: *Нека $f : X \to \mathbb{R}$ е реална функција и нека $x_0 \in X$. Ќе речеме дека $f : X \to \mathbb{R}$* ***има прекин во точката*** *x_0 ако не е непрекината во x_0. Во овој случај x_0 се нарекува точка на прекин на функцијата $f : X \to \mathbb{R}$.*

Ова значи дека постои $\varepsilon > 0$, таков што за секој $\delta > 0$, постои точка $x \in X$, за која

$$|x - x_0| < \delta,$$

но

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Пример: 1) Идентичната функција определена со правилото $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{R}$ и функцијата $g(x) = |x|$, се непрекината на целата реална права. Нека x_0 е реален број и нека е даден број $\varepsilon > 0$. Избираме $\delta = \varepsilon$. Тогаш, од

$$|x - x_0| < \delta$$

ќе следува

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

со што е покажана непрекинатоста на $f(x) = x$.

Од

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

следува непрекинатоста на функцијата $g(x) = |x|$.

2) Константната функција определена на реалната права со $f(x) = c$, каде c е фиксиран реален број е непрекината на целата реална права. За реален број x_0 и дадено $\varepsilon > 0$, за произволно избран $\delta > 0$ секогаш од $|x - x_0| < \delta$ следува

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |c - c| < \varepsilon$$

Следната теорема дава карактеризација на непрекинатоста со помош на низи.

Теорема 1: *Нека f е функција определена на X. Тогаш следните услови се еквивалентни*

1) *f е непрекината во точката $x_0 \in X$*

2) *за секоја низа (x_n) во X за која $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ да следува $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Доказ: Нека е исполнет условот 1). Тогаш за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што од

$$|x-x_0|<\delta$$

и $x \in X$ да следува

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon .$$

Нека (x_n) е низа во X за која $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогаш постои природен број n_0, таков што за сите $n \geq n_0$

$$|x_n - x_0|<\delta .$$

Следува за сите $n \geq n_0$

$$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) .$$

Обратно, нека е исполнет условот 2). Да претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата дека условот 1) не е исполнет. Тогаш постои $\varepsilon > 0$ таков што за секој $\delta > 0$ постои точка $x \in X$, таква што

$$|x-x_0|<\delta$$

но

$$|f(x)-f(x_0)|\geq\varepsilon .$$

Специјално, ако избереме $\delta = \frac{1}{n}$, тогаш постои реален број $x_n \in X$, за кој

$$|x_n - x_0|<\frac{1}{n},$$

но

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geq\varepsilon .$$

На овој начин е формирана низа (x_n) е низа во X. Поради тоа што

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n},$$

добиваме:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Меѓутоа, заради $|f(x_n)-f(x_0)|\geq \varepsilon$, не може да биде $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$, што е во контрадикција со условот 2).

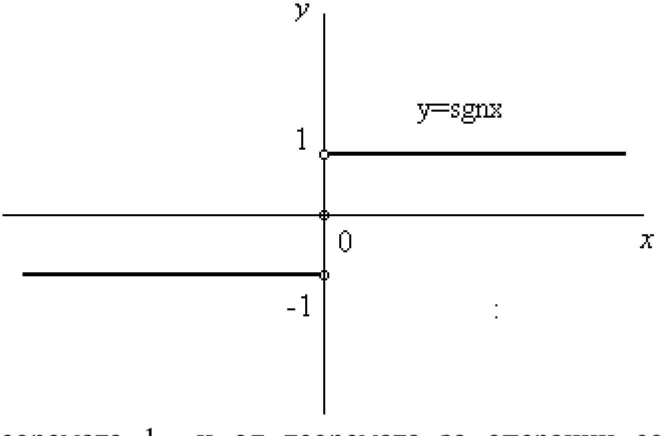
Последица : *Нека f е функција определена на X и нека f е непрекината во точката $x_0 \in X$. Нека (x_n) е низа во X за која $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогаш*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Пример: 3) Знаковната функција определена со

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

има прекин во точката $x_0 = 0$. Нека избереме низа $x_n = 1/n$. Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn} x_n = 1$, и според Теорема 1 знаковната функција $\operatorname{sgn} x$ има прекин во точката 0.



Од теоремата 1 и од теоремата за операции со низи , добиваме дека ако реалните функции f и g се непрекинати во точката $x_0 \in X$, тогаш и функциите $c \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$ и $\dfrac{f}{g}$ се непрекинати во точката $x_0 \in X$.

Теорема 2: *Ако* $f(x)$ *и* $g(x)$ *се реални функции определени на* X *и непрекинати во точката* $x_0 \in X$ *тогаш и функциите* $c \cdot f(x)$, $f(x)+g(x)$ *и* $f(x)\cdot g(x)$, *се непрекинати во* x_0; *Ако* $g(x) \neq 0$ *за секој* $x \in X$ *тогаш функцијата* $(\frac{f}{g})(x)$ *е непрекината во* x_0.

Доказ: Нека (x_n) е низа во X таква што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$ и според теоремата за операции со низи добиваме

$$\lim_{n\to\infty} c\cdot f(x_n) = c\cdot f(x_0)$$
$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n)+g(x_n)) = f(x_0)+g(x_0)$$
$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n)\cdot g(x_n)) = f(x_0)\cdot g(x_0)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

Следува функциите $c\cdot f(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $(\frac{f}{g})(x)$ се непрекинати во точката $x_0 \in X$.

Како последица на оваа теорема, имаме ако $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати функции на X тогаш и множењето на функција со реален број, збирот и производот на овие функции се непрекинати на X. Ако $g(x) \neq 0$ за секој $x \in X$ тогаш и функцијата $(\frac{f}{g})(x)$ е непрекината на можеството X .

Последица: Секој полином

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, е непрекината функција на целата реална права.

Пример: Ако е даден друг полином

$$q(x) = b_m x^m + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

тогаш функцијата $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ е непрекината во секоја точка од својата дефинициона област $\mathbb{R} \setminus D$ каде $D = \{x \mid q(x) = 0\}$.

Од следната теорема следува дека композиција на непрекинати функции е непрекината функција.

Теорема 3: *Нека $f : X \to Y$ е функција непрекината во точката $x_0 \in X$ и $g : Y \to Z$ е функција непрекината во точката $f(x_0) \in Y$. Тогаш нивната композиција $g \circ f : X \to Z$, определена со правилото $g \circ f(x) = g(f(x))$ е непрекината во точката $x_0 \in X$.*

Доказ: За дадена околина W на точката $g(f(x_0)) \in Z$ постои околина V на $f(x_0)$ за која

$$g(V \cap Y) \subseteq W$$

Постои околина U на x_0 за која

$$f(U \cap X) \subseteq V$$

Следува

$$g \circ f(U \cap X) \subseteq g(V \cap Y) \subseteq W.$$

.

3. НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ НА ИНТЕРВАЛ

Во овој дел ќе докажеме неколку својства на непрекинатите функции определени на интервал.

Теорема 1: *Нека функцијата* $f(x)$ *определена на* X *е непрекината во точката* $x_0 \in X$.

1) *Ако* $f(x_0) > 0$ *тогаш постои околина* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *таква што* $f(x) > 0$ *за секој* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$

2) *Ако* $f(x_0) < 0$ *тогаш постои околина* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *таква што* $f(x) < 0$ *за секој* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$

Доказ: $f(x_0) > 0$. За $\varepsilon = f(x_0)$, постои $\delta > 0$ така што за $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и $x \in X$ да следува $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ т.е. $f(x) \in (0, 2 \cdot f(x_0))$.

Теорема 2: *Нека* f *е непрекината функција на* $[a,b]$, *при што* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. *Тогаш постои реален број* c, $a < c < b$, *таков што* $f(c) = 0$.

Доказ: Нека ја избереме точката $\frac{a+b}{2}$ која е средина на интервалот $[a,b]$. Ако $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ тогаш $c = \frac{a+b}{2}$ е бараниот реален број. Ако $f(\frac{a+b}{2}) > 0$, ставаме $[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$. Ако $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, ставаме $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$.

Нека ја избереме точката $\frac{a_1+b_1}{2}$ која е средина на интервалот $[a_1, b_1]$. Ако $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$ тогаш $c = \frac{a_1+b_1}{2}$ е бараниот реален број. Ако $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > 0$, ставаме

$[a_2, b_2] = [a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}]$. Ако $f(\frac{a_1 + b_1}{2}) < 0$, ставаме $[a_2, b_2] = [\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1]$.

Овој процес го продолжуваме и добиваме растечка низа

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots$$

Низата е ограничена и заради тоа постои $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Исто така добиваме опаѓачка низа

$$b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots$$

Заради

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

добиваме

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

Следува

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Од конструкцијата $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$, за секој n Заради непрекинатоста на функцијата добиваме

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$$

и

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0.$$

Ова е возможно само ако $f(c) = 0$.

Пример: Во претходната теорема $f(c) = 0$ т.е. c е корен на равенката $f(x) = 0$. Заради $a_n \to c$, вредностите на низата a_n претставуваат приближувања на c.

Познато е дека не постои начин да се реши равенка од петти степен, За приближно да најдеме корен на равенката

$$x^5 - 4x^4 + x^2 + 1 = 0$$

ја формираме функцијата $y = x^5 - 4x^4 + x^2 + 1$. Тогаш $y(0) = 1$ и $y(1) = -1$ и според претходната теорема равенката има корен во интервалот $[0,1]$.

Со помош на едноставен програм направен во програмскиот јазик Visual Basic кој е презентиран подолу, коренот ќе го определиме со точност од $1/1000000$ со методот применет во доказот на теоремата, со тоа што интервалот $[0,1]$ наместо на два дела го делиме на десет дела со точките 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 и 1 .во првиот чекор.

```
Function y(x)
y = x ^ 5 – 4*x ^ 4 + x ^ 2 + 1
End Function
```

```
Private Sub Form_Activate()

a = 0 : b = 1 : decimali = 6

For n = 1 To decimali
For i = 0 To 9
   If y(a + i / 10 ^ n) * y(a + (i + 1) / 10 ^ n) <= 0 Then
   a = a + i / 10 ^ n
   b = a + (i + 1) / 10 ^ n
   Exit For
   End If
Next i
Next n

Print "Корен на равенката е"; a
End Sub
```

За помалку од секунда ќе испечати на екранот: Корен на равенката е 0.863817

Последица: *Нека* f *е непрекината функција на* $[a,b]$. *Ако* $f(a) < d < f(b)$ *(или* $f(a) > d > f(b)$*), тогаш постои реален број* c, $a < c < b$, *таков што* $f(c) = d$.

Доказ: Прво нека $f(a) < d < f(b)$. Тогаш за функцијата $h(x) = f(x) - d$ се исполнети условите на теоремата и постои c, $a < c < b$, таков што $h(c) = 0$ т.е. $f(c) = d$.

Ако $f(a) > d > f(b)$, тогаш за функцијата $-f(x)$ според претходниот случај, постои реален број c, $a < c < b$, таков што $-f(c) = -d$ т.е. $f(c) = d$

Примери: Физичките процеси се непрекинати.

1) Ако ја мериме температурата $f(t)$ во временски момент t и таа во време t_1 е негативна, а во време t_2 е позитивна тогаш постои временски момент t, $t_1 < t < t_2$ во кој температурата ќе биде 0.

2) Ако брзината на возилото $v(t)$ во временски момент t_1 изнесува 40 километри на час, а во време t_2 е 60 километри на час тогаш постои временски момент t, $t_1 < t < t_2$ во кој брзината ќе биде 50 километри на час.

Теорема 3: *Нека f е непрекината функција на интервалот P. Тогаш и $f(P)$ е интервал .*

Доказ: Нека $c, d \in f(P)$, $c < d$, и y е произволна точка $c < y < d$. Постојат реални броеви $a, b \in P$ такви што $f(a) = c$, $f(b) = d$. Според претходната последица постои реален број x, помеѓу a и b, т.е $x \in P$ таков што $f(x) = y$. Следува $y \in f(P)$ и $f(P)$ е интервал .

Теорема 4: *Непрекината функција определена на интервалот $[a,b]$ е ограничена на тој интервал.*

Доказ: Нека претпоставиме дека f е неограничена.од горе. Тогаш постои низа (x_n) во $[a,b]$ така што $f(x_n) \geq n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ т.е $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. Заради тоа што низата (x_n) е ограничена таа содржи конвергентна подниза (x_{n_k}). Нека $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Тогаш $x \in [a,b]$ и добиваме

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x),$$

што е контрадикција .

Теорема 5: *Ако $f(x)$ е непрекината функција определена на интервалот $[a,b]$, тогаш постојат точки $c,d\in[a,b]$ такви што*

$$f(c)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$$

и

$$f(d)=\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\}.$$

Доказ: Ќе ја покажеме теоремата за супремум. Нека

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$$

Да претпоставиме, спротивно на тврдењето на теоремата , дека за сите $x\in[a,b]$, $f(x)\neq M$.. Тогаш функцијата

$$g(x)=\frac{1}{M-f(x)},$$

е определена за секој $x\in[a,b]$, непрекината и $g(x)>0$ за секој $x\in[a,b]$. Според претходната теорема, постои реален број $M_1>0$ таков што за сите $x\in[a,b]$ да е исполнето

$$\frac{1}{M-f(x)}\le M_1$$

од каде

$$f(x)\le M-\frac{1}{M_1}\ .$$

Ова значи дека постои мајорант за множеството $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$, кој е помал од M, што е контрадикција .

Според претходната теорема $f([a,b])=[f(d),f(c)]$, од каде ја добиваме следнава последица

Последица: *Слика на затворен интервал при непрекинато пресликување е затворен интервал .*

5. ЛИМЕС НА ФУНКЦИЈА

При дефиниција на поимот лимес на реална функција (гранична вредност на реална функција) ќе разгледуваме функции определени на интервал P со крајни точки $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, или определни на P освен во еден реален број x_0, $a \le x_0 \le b$, значи определени на $P \setminus \{x_0\}$, каде што x_0 е точката во која се бара лимесот на функцијата. Да забележиме дека ако функцијата е определена на интервалот P, тогаш таа е определена и на $P \setminus \{x_0\}$.

Да забележиме дека дефиницијата на лимес во точката x_0 воопшто не зависи од вредноста на функцијата токму во таа точка. Затоа при дефинирањето на лимес на функција во точка x_0 доволно е функцијата да е определена на $P \setminus \{x_0\}$, т.е. можеме да ја сметаме како пресликување $f : P \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$

.

Дефиниција: *Нека P е интервал со крајни точки $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, и нека x_0 е реален број, $a \le x_0 \le b$. Реалната функција $f : P \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ **има лимес** $y_0 \in \mathbb{R}$ **во точката** x_0, ако за секој* $\varepsilon > 0$, *постои* $\delta > 0$, *така што од*

$$|x - x_0| < \delta$$

и $x \in P \setminus \{x_0\}$ да следува

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon .$$

*Реалниот број y_0 го нарекуваме **лимес на функцијата** $f : P \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ во точката x_0 и означуваме*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 ,$$

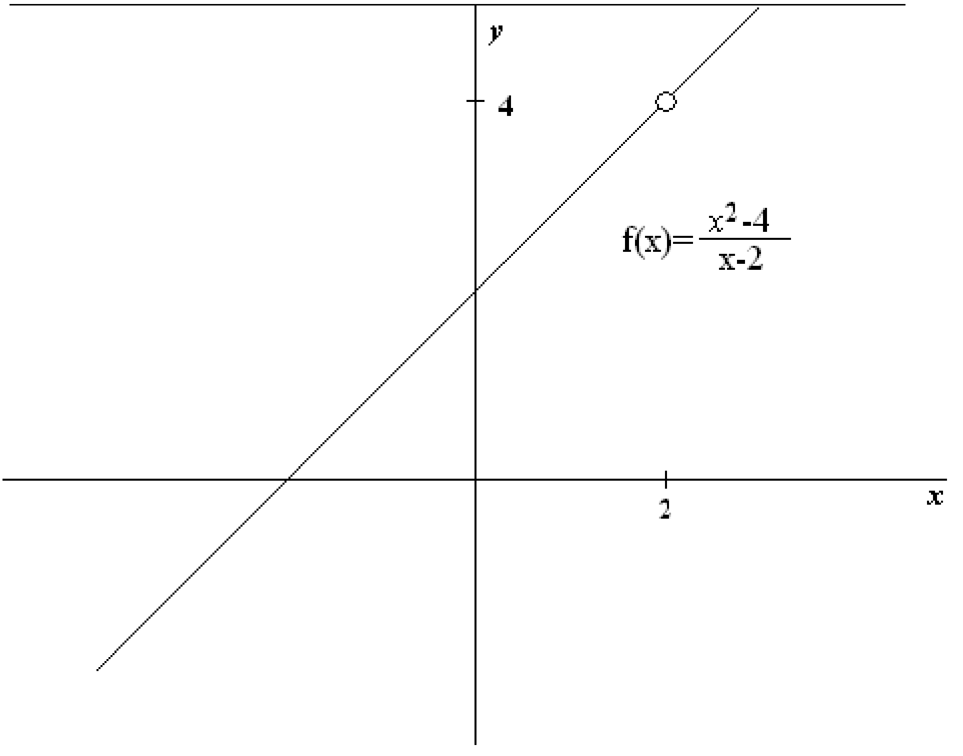
или $f(x) \to y_0$ кога $x \to x_0$ ($f(x)$ тежи кон y_0 кога x тежи кон x_0).

Нека функцијата f е определена на $P \setminus \{x_0\}$, и нека $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Можеме да кажеме дека лимесот y_0 е единствениот реален број таков што ако ставиме $f(x_0) = y_0$ тогаш функцијата ќе биде непрекината во x_0.

Пример. Нека $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Функцијата f е определена на $P \setminus \{2\}$, каде $P = (-\infty,\infty)$. Значи, вредноста на функцијата не е определена во точката 2.

Само ако дефинираме $f(2)=4$, функцијата f ќе биде непрекината во точката 2, т.е. нејзиниот график ќе биде сврзан (ќе изгледа како конец). Значи функцијата има лимес $y_0 = 4$ во точката $x_0 = 2$, односно

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 .$$



Забелешка: Нека P е интервал, $x_0 \in P$ и f е функција определена на P, тогаш може

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Пример . За функцијата $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x$ имаме $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}^2 x = 1$, додека $\operatorname{sgn}^2 0 = 0$

Од дефиницијата на непрекинатост и дефиницијата на лимес следува точноста на наредната теорема.

Теорема 1: *Нека P е интервал и f е функција определена на P. Тогаш f е непрекината во точката $x_0 \in P$ ако и само ако*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Дефиниција: *Нека f е реална функција определена на интервалот P. За $f(x)$ велиме дека има* ***прекин кој може да се отстрани во точката*** *$x_0 \in P$ ако постои лимес во x_0 и*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Пример . Функцијата $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена со

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

има прекин во точката $x_0 = 2$ кој може да се отстрани.

Со горната дефиниција на лимес на функција не се опфатени случаите вредноста на лимесот да е бесконечност, т.н. бесконечни лимеси или дефинирањето на лимес во ∞ т.н.лимеси во бесконечнот.

За да ги опфатиме и овие случаи ја даваме следнава поопшта дефиниција.

Дефиниција: *Нека P е интервал со крајни точки $a,b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, и нека $a \leq x_0 \leq b$. Реалната функција $f: P \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$* ***има лимес*** *$y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$* ***во*** *$x_0$, ако за секоја околина V на y_0 , постои околина U на x_0 таква што*

$$f(U \cap P \setminus \{x_0\}) \subseteq V .$$

Да забележиме дека ако x_0 и y_0 се реални броеви, тогаш оваа поопшта дефиниција се сведува на претходната дефиниција.

Теорема 1: Ако реалната функција $f: P \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ има лимес во x_0 тогаш тој е единствен.

Доказ: Ако претпоставиме спротивно , $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = z_0$ и $y_0 \neq z_0$, тогаш постојат околини V на y_0 и W на z_0 такви што $V \cap W = \emptyset$. Постои околина U_1 на x_0 таква што

$$f(U_1 \cap P \setminus \{x_0\}) \subseteq V$$

и постои околина U_2 на x_0 таква што

$$f(U_2 \cap P \setminus \{x_0\}) \subseteq W$$

Но, тогаш $U = U_1 \cap U_2$ е околина на x_0 за која

$$f(U \cap P \setminus \{x_0\}) \subseteq V$$

и

$$f(U \cap P \setminus \{x_0\}) \subseteq W$$

што е во контрадикција со $V \cap W = \emptyset$

Следната теорема е критериум за постоење на лимес на функција со помош на низи.

Теорема 2: *Нека P е интервал со крајни точки a и b, нека f е реална функција определена на* $P \setminus \{x_0\}$, *и нека* $a \le x_0 \le b$. *Тогаш следниве услови се еквивалентни*:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$;

2) *за секоја низа* (x_n) во $P \setminus \{x_0\}$ *за која* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, *да следува*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$$

Доказ: Нека е исполнет условот 1). Тогаш за дадена околина V на y_0 постои околина U на x_0 таква што

$$f(U \cap P \setminus \{x_0\}) \subseteq V$$

Ако (x_n) е низа во $P \setminus \{x_0\}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогаш постои природен број n_0 таков што за сите $n \ge n_0$, $x_n \in U$. Следува за сите $n \ge n_0$, $f(x_n) \in V$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

Нека е исполнет условот 2). Да претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата, дека условот 1) не е исполнет. Тогаш постои околина V на y_0, таква што за секоја околина U на x_0 постои реален број $x \in U \cap P \setminus \{x_0\}$ за кој $f(x) \notin V$.

Специјално, нека определиме низа од околини на x_0, $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq ...$ со: 1) $U_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ ако $x_0 \in \mathbb{R}$, 2) $U_n = (n, \infty)$ ако $x_0 = \infty$ и 3) $U_n = (-\infty, n)$ ако $x_0 = -\infty$..

Тогаш постои реален број $x_n \in U_n \cap P \setminus \{x_0\}$ за кој $f(x_n) \notin V$. На овој начин е формирана низа (x_n) во $P \setminus \{x_0\}$. Заради тоа што за дадена околина U на x_0 постои природен број n_0 таков што $U_{n_0} \subseteq U$, следува за сите $n \geq n_0$,

$$x_n \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq U$$

т.е. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Меѓутоа, заради $f(x_n) \notin V$ за сите n се добива дека y_0 не е лимес на низата $(f(x_n))$ т.е условот 2) не е исполнет, што е контрадикција.

Теорема 3: *Нека P е интервал со крајни точки a и b, и нека* $a \leq x_0 \leq b$. *Нека f и g се реални функции определени на* $P \setminus \{x_0\}$, *за кои постојат* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0} g(x)$. *Следните равенства се точни под услов на нивната десна страна да не се појави некој од неопределените изрази Следниве изрази ги сметаме за неопределени:* $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$, $\frac{\pm\infty}{\infty}, \frac{\pm\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{\pm\infty}, \frac{-\infty}{\pm\infty}$.

1) *за секој реален број c,* $\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x)$

2) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

4) *ако покрај условите на теоремата,* $g(x) \neq 0$ *за сите* $x \in P \setminus \{x_0\}$ *и* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, *тогаш*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Доказ: Нека (x_n) е низа во $P\setminus\{x_0\}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогаш, според теоремата за операции со низи добиваме

$$\lim_{n\to\infty} c\cdot f(x_n) = c\cdot \lim_{n\to\infty} f(x_n)\text{), за секој реален број } c\neq 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$
$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)\cdot g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)}$$

од што следува точноста на тврдењето на теоремата.

Теорема 5: *Нека P е интервал со крајни точки a и b, и нека* $a\le x_0\le b$. *Нека* $f: P\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ *е реална функција за која* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

1) ако $f(x)>0$ за секој $x\in P\setminus\{x_0\}$ тогаш $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

2) ако $f(x)<0$ за секој $x\in P\setminus\{x_0\}$ тогаш $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

Доказ: 1) Нека $f(x)>0$ за секој $x\in P\setminus\{x_0\}$. Ако (x_n) е низа во $P\setminus\{x_0\}$ таква што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$ и од соодветната теорема кај низи следува $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{f(x_n)}=\infty$. Заради произволноста на низата следува заклучокот на теоремата.

Пример: За функциите (полиноми)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

и

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0$$

каде $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ се реални броеви такви што $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$ имаме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}\cdot\infty, & n > m \\ 0, & n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m \end{cases}$$

Следната теорема покажува под кои услови може променливата на функцијата во лимесот да се замени.

Теорема 6: Нека P е интервал со крајни точки a и b, и $a \le x_0 \le b$,. и нека T е интервал со крајни точки c и d, и $c \le t_0 \le d$. Нека $f : P\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ и $h : T\setminus\{t_0\} \to P\setminus\{x_0\}$ се реални функции . Ако постојат

$$\lim_{t\to t_0} h(t) = x_0, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0,$$

тогаш постои и $\lim_{t\to t_0} f(h(t))$ и притоа

$$\lim_{t\to t_0} f(h(t)) = y_0$$

Доказ: За дадена околина V на y_0 постои околина U на x_0 таква што

$$f(U \cap P\setminus\{x_0\}) \subseteq V$$

Постои околина W на t_0 таква што

$$h(W \cap T\setminus\{t_0\}) \subseteq U$$

Следува

$$f(h(W \cap T\setminus\{t_0\})) \subseteq f(U \cap P\setminus\{x_0\}) \subseteq V$$

Пример*: Нека $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x$ и $h(t) = t\sin\frac{1}{t}$. Тогаш

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}^2 x = 1$$

$$\lim_{t\to 0} h(t) = \lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t} = 0 .$$

Но не можеме да ја примениме теоремата за смена на променлива. Со формална примена би го добиле равенството

$$1 = \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}^2(x) = \lim_{t\to 0} \operatorname{sgn}^2(t\sin\frac{1}{t}) ,$$

Ова равенство не е точно, заради тоа што за низата $t_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$ би добиле контрадикција

$$1 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}^2(t_n \sin\frac{1}{t_n}) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}^2(\frac{1}{n\pi}\sin n\pi) = 0$$

(* во примерот ја употребивме функцијата $\sin x$ која ќе биде воведена покасно).

6. ЛЕВ И ДЕСЕН ЛИМЕС НА ФУНКЦИЈА. ПРЕКИНИ ОД ПРВ РЕД

Нека P е интервал, $x_0 \in P$, и f е реална функција определена на $P \setminus \{x_0\}$.

Дефиниција: 1) *Функцијата* f ***има лев лимес*** y_0 ***во точката*** x_0, *ако за секоја околина* V *на* y_0, *постои* $\delta > 0$ *така што интервалот* $(x_0 - \delta, x_0) \subseteq P$ *и*

$$f(x_0 - \delta, x_0) \subseteq V \; .$$

2) *Функцијата* f ***има десен лимес*** y_0 ***во точката*** x_0, *ако за секоја околина* V *на* y_0, *постои* $\delta > 0$ *така што интервалот* $(x_0, x_0+\delta) \subseteq P$ *и*

$$f(x_0, x_0+\delta) \subseteq V \ .$$

Ако функцијата f има лев лимес y_0 во точката x_0 ,означуваме

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0$$

Ако функцијата f има десен лимес y_0 во точката x_0, означуваме

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \ .$$

Забелешка: Да забележиме дека ако интервалот $P=(a,x_0]$ т.е. $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ тогаш функцијата f има лев лимес y_0 во точката x_0, ако и само ако f има лимес y_0 во точката x_0

Исто така, ако $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ тогаш функцијата f има десен лимес y_0 во точката x_0, ако и само ако f има лимес y_0 во точката x_0.

Според ова левиот и десниот лимес може да се третираат како специјален случај на дефиницијата на лимес и од докажаните теореми за лимес ќе следува:

1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = y_0$ ако и само ако за секоја низа (x_n) т.ш. за секој $n\in\mathbb{N}$, $x_n > x_0$ од $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ да следува $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = y_0$ ако и само ако за секоја низа (x_n) т. ш. за секој $n\in\mathbb{N}$, $x_n < x_0$ од $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ да следува $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

3) Теоремите за операции со лимес на функција се точни ако во нив знакот за лимес се замени со знакот за лев или десен лимес

Теорема 1: *Нека реалната функција* $f(x)$ *е определена на* $P\setminus\{x_0\}$ *и нека постојат лев и десен лимес во точката* x_0. *Тогаш* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *постои ако и само ако* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

Доказ: Нека $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ и нека е дадена околина V на y_0. Постои $\delta_1 > 0$ така што интервалот $(x_0-\delta_1, x_0) \subseteq P$ и

$$f(x_0-\delta_1, x_0) \subseteq V$$

Постои $\delta_2 > 0$ така што интервалот $(x_0, x_0+\delta_2) \subseteq P$ и

$$f(x_0, x_0+\delta_2) \subseteq V$$

Тогаш за $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ за околината $U = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ имаме

$$f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V .$$

Очевидно е дека тврдењето во обратната насока е точно.

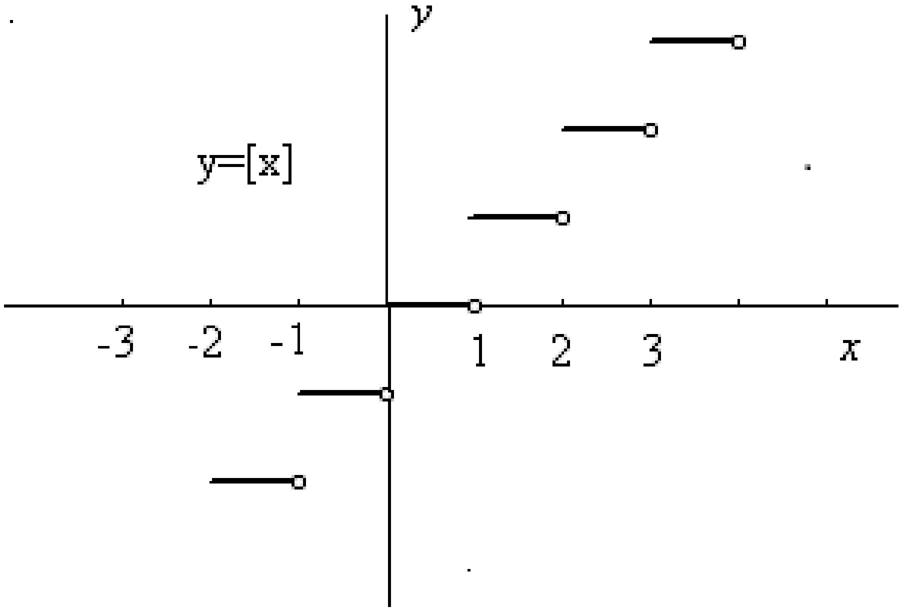
Последица: *Нека реалната функција* $f(x)$ *е определена на интервалот* P *и нека во точката* $x_0 \in P$ *постојат лев и десен лимес на* $f(x)$. *Тогаш функцијата* $f(x)$ *е непрекината во точката* x_0 *ако и само ако*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Дефиниција: *Нека* f *е реална функција определена на интервалот* P . *За* $f(x)$ *велиме дека има* ***прекин од прв ред*** *во точката* $x_0 \in P$ *ако постојат конечен лев и конечен десен лимес во* x_0 *и*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Пример: Функцијата $[x]$ (цел дел од x) определена со $[x]=n$, ако $n \le x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, има прекин од прв ред во секоја точка од множеството на цели броеви $\mathbb{Z}$.



7. МОНОТОНИ ФУНКЦИИ

Дефиниција: За реална функција f определена на множество X ќе речеме дека е:

- ***строго растечка*** ако од $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) < f(x_2)$;
- ***растечка*** ако од $x_1 \leq x_2$ следува $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- ***строго опаѓачка*** ако од $x_1 < x_2$ следува $f(x_1) > f(x_2)$;
- ***опаѓачка*** ако од $x_1 \leq x_2$ следува $f(x_1) \geq f(x_2)$;

за сите $x_1, x_2 \in X$.

За реалната функција ќе речеме дека е ***строго монотона*** ако е строго растечка или строго опаѓачка. За реалната функција ќе речеме дека е ***монотона*** ако е растечка или опаѓачка.

Ако реалната функција f определена на множество X е строго монотона, тогаш таа е инјективно пресликување и можеме да дефинираме инверзна функција f^{-1} определена на $f(X)$ т.е $f^{-1}: f(X) \to X$ За овие функции е точно:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{, за секој } x \in X$$

и

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ , за секој } y \in f(X).$$

Теорема 1: *Нека* $f(x)$ *е монотона функција определена на интервалот* (a,b) *каде* $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$. *Тогаш во секоја точка* $x_0 \in (a,b)$ *постојат лев и десен лимес кои се реални броеви при што*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

ако функцијата расте , а ако функцијата опаѓа

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \ge f(x_0) \ge \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Доказ: Нека претпоставиме дека f расте на интервалот (a,b). Тогаш постои реален број M таков што

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in (a,b), x < x_0\}.$$

Заради дефиницијата на супремум, за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што

$$M - \varepsilon < f(x_0 - \delta) \le M$$

Функцијата $f(x)$ е растечка ,заради што за сите x за кои

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

ќе следува

$$M - \varepsilon < f(x_0 - \delta) \le f(x) \le M$$

т.е.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = M \le f(x_0)$$

Слично се покажува дека

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \ge f(x_0)$$

Последица: *Монотона функција $f(x)$ на интервал (a,b), $a,b \in \overline{R}$, во произволна точка $x_0 \in (a,b)$ или е непрекината или има прекин од прв ред.*

Доказ: Според претходната теорема во точката x_0 функцијата $f(x)$ има лев и десен лимес. Тогаш ако тие се еднакви функцијата е непрекината во x_0, а ако се различни функцијата има прекин од прв ред во точката x_0.

Теорема 2: *Нека $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ и нека $f(x)$ е монотона функција определена на интервалот (a,b). Тогаш постојат $\lim_{x \to a} f(x)$ и $\lim_{x \to b} f(x)$.*

Доказ: Нека претпоставиме дека $f(x)$ е монотоно растечка функција и нека E е даден реален број.

Ако постои $x_0 \in (a,b)$ таков што

$$f(x_0) > E$$

тогаш заради монотоста на функцијата следува

$$f(x_0,b) \subseteq (E,\infty)$$

т.е.

$$\lim_{x \to b} f(x) = \infty \ .$$

Ако за сите $x \in (a,b)$, $f(x) \le E$ тогаш постои реален број

$$M = \sup\left\{f(x) \,\middle|\, x \in (a,b)\right\}.$$

Следува за дадено $\varepsilon > 0$ постои $x_0 \in (a,b)$ таков што

$$M-\varepsilon < f(x_0) \le M$$

и заради монотоното растење на $f(x)$ добиваме $f(x_0,b) \subseteq (M-\varepsilon, M] \subseteq (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ т.е.

$$\lim_{x\to b} f(x) = M$$

Теорема 3: *Нека* $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ *и нека* $f(x)$ *е непрекината строго монотона функција определена на* (a,b) *и нека*

$$c = \lim_{x\to a} f(x) \quad , \quad d = \lim_{x\to b} f(x)$$

Ако фукцијата е строго растечка тогаш $f(a,b) = (c,d)$ *, и инверзната функција* $f^{-1}:(c,d) \to (a,b)$ *е строго растечка .*

Ако функцијата е строго опаѓачка тогаш $f(a,b) = (d,c)$ *, и инверзната функција* $f^{-1}:(d,c) \to (a,b)$ *е строго опаѓачка.*

И во двата случаја

$$\lim_{y\to d} f^{-1}(y) = b \quad , \quad \lim_{y\to c} f^{-1}(y) = a \ .$$

Доказ: Нека избереме низи (a_n) и (b_n) , $a_n < b_n$ во (a,b) такви што $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Тогаш

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{n.}, b_n] = (a,b) \, .$$

Ако функцијата $f(x)$ е строго растечка тогаш

$$f[a_n, b_n] = [f(a_n), f(b_n)]$$

и заради $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$ и $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = d$ добиваме

$$f(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f(a_{n.}), f(b_n)] = (c,d) \, .$$

Нека $y_1, y_2 \in (c,d)$ и $y_1 < y_2$. Ако препоставиме спротивно на тврдењето на теоремата дека $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ тогаш ќе следува $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$ т.е. $y_1 > y_2$, што е контрадикција.

Следува функцијата f^{-1} е строго растечка.

Ако претпоставиме дека $\lim\limits_{y \to d} f^{-1}(y) = x_0 < b$, тогаш заради монотоното растење на функцијата f^{-1} би добиле дека за секој $y \in (c,d)$, би имале $f^{-1}(y) < x_0 < b$ што е контрадикција. Значи $\lim\limits_{y \to d} f^{-1}(y) = b$.

Слично, ја покажуваме точноста на овие тврдења во случајот кога $f(x)$ е строго опаѓачка .

Теорема 4: *Нека* $f: P \to Q$ *е непрекината строго монотона функција, каде* P *и* Q *се интервали и нека* $f^{-1}: Q \to P$ *е инверзната функција на* f *. Тогаш* f^{-1} *е непрекината .*

Доказ: *Нека* $f: P \to Q$ *е строго растечка.* Нека $x_0 \in P$, $f(x_0) = y_0$ и нека постои $(x_0 - \delta, x_0) \subseteq P$ Тогаш од претходната теорема добиваме

$$f(x_0 - \delta, x_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0),$$

и следува

$$f^{-1}(y_0 - \varepsilon, y_0) = (x_0 - \delta, x_0) \quad .$$

Со ова е покажано дека $\lim\limits_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = x_0$. Слично покажуваме дека $\lim\limits_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = x_0$. Следува дека во секој случај

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0 \quad .$$

7. АСИМПТОТИ НА ФУНКЦИЈА

Нека P е интервал , $a \in P$, и $f : P \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ е реална функција .

Дефиниција: *Правата* $x = a$ *, е* ***вертикална асимптота*** *на функцијата* $f(x)$ *ако барем еден од лимесите* $\lim_{x \to a^+} f(x)$*,* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *постои и е еднаков на* $+\infty$ *или на* $-\infty$.

Дефиниција: *Нека* f *е реална функција определена на интервал* P*. Ако постои интервал* $(a, \infty) \subseteq P$ *и* $\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$*, тогаш велиме дека правата* $y = b$ *е* ***хоризонтална асимптота на*** $f(x)$ *кога* $x \to \infty$.

Ако $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, но постојат реални броеви $k \neq 0$ и b такви што

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0,$$

тогаш правата $y = kx + b$ се нарекува ***коса асимптота*** на функцијата $f(x)$ кога x тежи кон бесконечност.

Слично ако постои интервал $(-\infty, a) \subseteq P$ и $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, тогаш велиме дека правата $y = b$ е хоризонтална асимптота на $f(x)$ кога x тежи кон $-\infty$.

Правата $y = kx + b$, $(k \neq 0)$ е коса асимптота за функцијата $f(x)$ кога x тежи кон $-\infty$ ако $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ и

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - b) = 0$$

Теорема 1: *За да правата* $y = kx + b$ *е коса асмптота на функцијата* $f(x)$ *кога* $x \to \infty$ *неопходно и доволно е да постојат следните лимеси во множеството реални броеви*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$$

Доказ: Ако постојат лимесите во теоремата тогаш од вториот лимес следува

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$$

т.е. правата $y = kx + b$ е коса асимптота .

Обратно, нека $y = kx + b$ е коса асимптота за $f(x)$. Тогаш

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x) - kx - b}{x} + k + \frac{b}{x}\right) = k$$

и

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}((f(x) - kx - b) + b) = b\,.$$

Заменувајќи го во претходната теорема симболот ∞ со $-\infty$ ја добиваме аналогната теорема и нејзиниот доказ за коса асимптота кога x тежи кон $-\infty$.

Пример: Дробно рационалната функција

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ , (каде } c \neq 0 \text{ , } bc \neq ad \text{),}$$

има дефинициона област $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, \infty)$, и е непрекината во секоја точка од областа. Заради

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a}{c} = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

добиваме дека правата $y = \frac{a}{c}$ е хоризонтална асимптота.

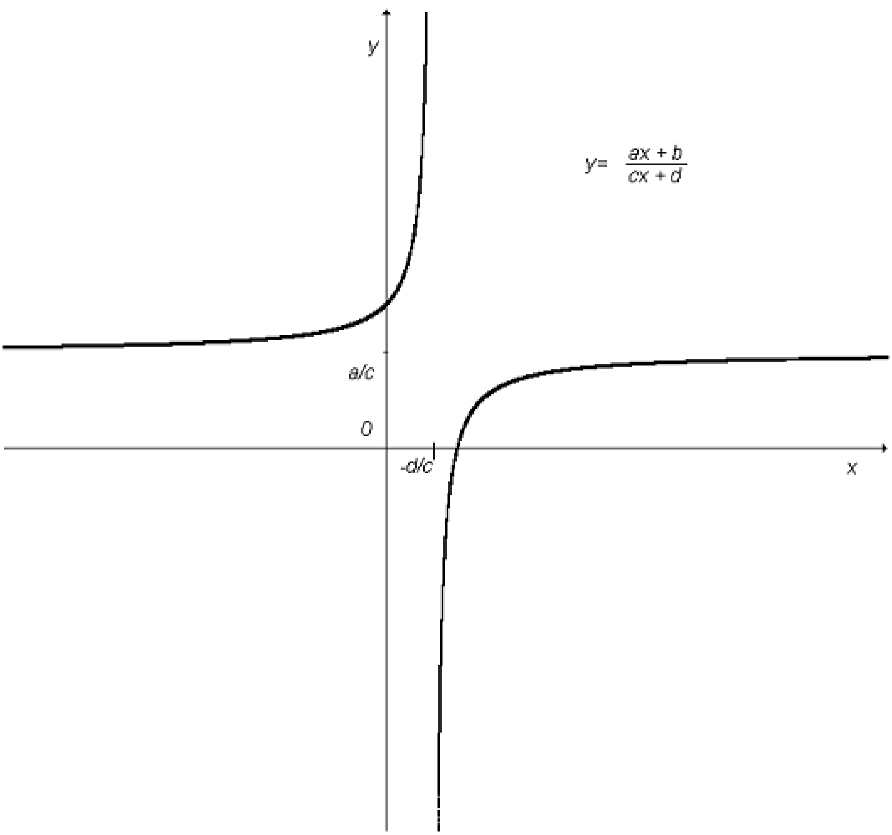
Нека $bc > ad$. Тогаш функцијата е монотоно опаѓачка на интервалите $(-\infty, -\frac{d}{c})$ и $(-\frac{d}{c}, \infty)$, и десниот и левиот лимес во $-\frac{d}{c}$ се:

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}^+} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \to -\frac{d}{c}^+} \frac{\frac{a}{c} \cdot x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \infty;$$

и

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}^-} \frac{ax+b}{cx+d} = -\infty$$

Значи функцијата има вертикална асимптота $x = -\frac{d}{c}$.



Ако $bc < ad$ тогаш функцијата е монотоно растечка на интервалите $(-\infty, -\frac{d}{c})$ и $(-\frac{d}{c}, \infty)$, и

$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}^{+}} \frac{ax+b}{cx+d} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\frac{d}{c}^{-}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty$$

На сликата е претставен случајот $bc < ad$

4. РАМНОМЕРНА НЕПРЕКИНАТОСТ

Ќе го воведеме поимот за рамномерна непрекинатост на реална функција $f : X \to \mathbb{R}$. За разлика од поимот непрекинатост кој беше дефиниран во точка $x_0 \in X$, рамномерна непрекинатост се дефинира на целото множество X.

Дефиниција: Реалната функција f определена на множеството од реални броеви X е ***рамномерно непрекината*** ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ таков што од

$$|x - y| < \delta$$

и $x, y \in X$, да следува

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Ако f не е рамномерно непрекината на X, тогаш постои $\varepsilon > 0$ таков што за секој $\delta > 0$ постојат точки $x, y \in X$, такви што

$$|x - y| < \delta ,$$

но

$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon .$$

Специјално, постојат точки x_n и y_n за кои

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad ,$$

но

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \,.$$

На овој начин ја добиваме следнава теорема:

Теорема 1: *Функцијата f не е рамномерно непрекината на X ако постои $\varepsilon > 0$ и постојат низи $(x_n), (y_n)$ во X за кои*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \,,$$

и

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \,.$$

Очевидно, ако функцијата е рамномерно непрекината на множество X , тогаш таа е непрекината (во секоја точка) на тоа множество. Обратното, не мора да е точно. Сепак, точна е следнава теорема

Теорема 2: *Непрекината функција f на затворен интервал $[a,b]$ е рамномерно непрекината на тој интервал.*

Доказ: Да претпоставиме спротивно дека f е непрекинато пресликување кое не е рамномерно непрекинато на $[a,b]$. Тогаш постои $\varepsilon > 0$, и постојат низи (x_n) и (y_n) такви што

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$

но

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \,.$$

Низата (x_n) содржи конвергентна подниза (x_{n_k}).Нека

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$

Тогаш $x_0 \in [a,b]$. Заради

$$\lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$$

следува

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$$

Поради непрекинатоста на f добиваме

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$$

Значи

$$\lim_{k\to\infty} | f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) | = 0,$$

што е во контрадикција со $| f(x_n) - f(y_n) | \geq \varepsilon$.

Значи, претпоставката не е добра. Следува f е рамномерно непрекината .

Теорема 3: *Нека f е рамномерно непрекината функција на X и (x_n) е фундаментална низа во X. Тогаш и низата $(f(x_n))$ е фундаментална.*

Доказ: За секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ таков што од

$$| x - y | < \delta$$

и $x, y \in X$, да следува

$$| f(x) - f(y) | < \varepsilon .$$

Нека (x_n) е фундаментална низа во X. Тогаш постои n_0 таков што за $n, m \geq n_0$, да е исполнето

$$| x_n - x_m | < \delta .$$

Следува

$$| f(x_n) - f(x_m) | < \varepsilon$$

т.е. низата $(f(x_n))$ е фундаментална

Теорема 4: *Нека f и g се рамномерно непрекинати функцијии на множеството X. Тогаш:*

1) *функцијата $f + g$ е рамномерно непрекината на X*

2) *функцијата $c \cdot f$, за фиксиран $c \in \mathbb{R}$ е рамномерно непрекината на X*

Доказ: Нека е даден $\varepsilon > 0$.

1) Постои $\delta_1 > 0$ таков што од

$$|x-y|<\delta_1$$

да следува

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

и постои $\delta_2>0$ таков што од

$$|x-y|<\delta_2$$

да следува

$$|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Нека $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогаш од

$$|x-y|<\delta$$

следува

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))| &\le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \ ,\end{aligned}$$

со што покажавме дека функцијата $f+g$ е рамномерно непрекината на X

2) Ако $c=0$ функцијата $c\cdot f$ е рамномерно непрекината. Нека $c\neq 0$. Постои $\delta>0$ таков што од

$$|x-y|<\delta$$

да следува

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{|c|} \ .$$

Тогаш

$$|c\cdot f(x)-c\cdot f(y)|\le |c|\cdot|f(x)-f(y)|< |c|\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon ,$$

со што покажавме дека функцијата $c\cdot f$, е рамномерно непрекината на X

Теорема 5: *Ако f е рамномерно непрекината функција на $(a,b]$ и на $[b,c)$, тогаш е рамномерно непрекината и на нивната унија.* (*теоремата е точна и ако наместо $(a,b]$ стои $[a,b]$, или ако наместо $[b,c)$ стои $[b,c]$*).

Доказ: Нека е даден $\varepsilon > 0$. Постои $\delta_1 > 0$ таков што за $x, y \in (a,b]$, од

$$|x-y| < \delta_1$$

да следува

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

и постои $\delta_2 > 0$ таков што за $x, y \in [b,c)$, од

$$|x-y| < \delta_2$$

да следува

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Нека $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогаш за $x \in (a,b]$ и $y \in [b,c)$ од

$$|x-y| < \delta$$

следува

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(b)| + |f(b)-f(y)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

со што теоремата е докажана.

Следните две теореми даваат карактеризација на рамномерната непрекинатост со помош на низи.

Теорема 6: *Нека f е функција определена на множеството X. Следните услови се еквивалентни*:

1) f *е рамномерно непрекината*

2) *за секои две низи (x_n), (y_n) од*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$

да следува

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$$

Доказ: 1) $\Rightarrow$2) Нека f е рамномерно непрекината. Тогаш, за дадено $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ таков што од

$$|x-y| < \delta$$

и $x, y \in X$, да следува

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon .$$

Нека се дадени две низи (x_n), (y_n) такви што

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0 .$$

Значи постои n_0 таков што за $n\geq n_0$

$$|x_n-y_n|<\delta .$$

Тогаш и

$$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon ,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=0 .$$

2) $\Rightarrow$1) Да претпоставиме спротивно, дека условот 2) е исполнет но f не е рамномерно непрекината функција. Тогаш од Теорема 1 постои $\varepsilon>0$ и постојат низи (x_n), (y_n) за кои е исполнето

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0 ,$$

но

$$|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon ,$$

што е во контрадикција со условот 2).

Следнава теорема покажува дека за утврдување на рамномерната непрекинатост на функција на интервал $[a,b)$, доволно е низите (x_n), (y_n), $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0$, од теоремата 1 да се избарат така што $x_n\to b$, $y_n\to b$ и да се провери дали $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=0$! Слична теорема е точна и за интервал $(a,b]$.

Теорема 7*: *Нека* f *е непрекината функција на* $[a,b)$. *Следните услови се еквивалентни:*

1) f *е рамномерно непрекината*

2) *за секои две низи* (x_n), (y_n) *такви што* $x_n \to b$, $y_n \to b$ *од*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$

да следува

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$$

Доказ: 1) $\Rightarrow$ 2) заради теорема 6.

Обратно , нека е исполнет условот 2) и да претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата дека функцијата f не е рамномерно непрекината. Тоа значи дека постои $\varepsilon > 0$, и две низи (x_n), (y_n) такви што

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$

но

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon .$$

.

Се поставува прашањето: дали може да постои број c, $c < b$ таков што $x_n \in [a,c]$, за секој $n \in \mathbb{N}$? Ако тоа е точно , ќе постои ковергентна подниза (x_{n_k}) на низата (x_n) таква што $x_{n_k} \to x_0 \in [a,c]$. Тогаш и $y_{n_k} \to x_0$. Значи за избран број $r > 0$, таков што $c + r < b$, постои k_0 таков што за $k \geq k_0$, $y_{n_k} \in [a, c+r]$.

Тогаш низите (x_{n_k}) и (y_{n_k}) се во $[a, c+r]$,

$$\lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0$$

но

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon ..$$

Ова би значело дека функцијата f не е рамномерно непрекината на $[a, c+r]$, што не е можно.

Значи одговорот на прашањето е негативен. Според тоа постои низа (c_i), таква што $c_i \to b$, и постојат x_{n_i}, така што $c_i < x_{n_i} < b$.

За поднизите (x_{n_i}) и (y_{n_i}) е исполнето: $x_{n_i} \to b$, $y_{n_i} \to b$ и

$$\lim_{i\to\infty} |x_{n_i} - y_{n_i}| = 0$$

но

$$|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon .$$

Добиваме контрадикција со условот 2) , што значи дека функцијата f мора да е рамномерно непрекината.

Пример: Со помош на претходната теорема ќе покажеме дека функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не е рамномерно непрекината на $(0,\infty)$, иако е непрекината.

Нека избереме низи $x_n = \dfrac{1}{n}$ и $y_n = \dfrac{1}{n+1}$. Тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 1$ што значи дека функцијата $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не е рамномерно непрекината.

IV. ОСНОВНИ ФУНКЦИИ

1. СТЕПЕНСКА ФУНКЦИЈА
СО РАЦИОНАЛЕН ПОКАЗАТЕЛ

За произволен природен број n степенската функција $f(x)=x^n$ е непрекината на целата реална права, како производ на n непрекинати функции, и $\lim\limits_{x\to\infty} x^n=\infty$.

За $n=2k+1$, степенската функција строго монотоно расте и $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ и според тоа $f(-\infty,\infty)=(-\infty,\infty)$. Постои инверзна функција $f^{-1}:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$ на функцијата $f(x)=x^n$ за $n=2k+1$. Оваа функција ја означуваме со $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{2k+1}}$ или $f^{-1}(x)=\sqrt[2k+1]{x}$.

За $n=2k$, функцијата $f(x)=x^{2k}$ не е инјекција заради $f(x)=f(-x)$. Оваа функција строго монотоно расте на $[0,\infty)$ и $f([0,\infty))=[0,\infty)$. За рестрикцијата $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ постои инверзна функција $f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$, која ја означуваме со $f^{-1}(x)=\sqrt[2k]{x}$ или со $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{2k}}$. Функцијата $f^{-1}(x)$ според теоремите за инверзна функција е непрекината и строго монотоно растечка.

Графиците на овие функции се симетрични во однос на правата $y=x$ Ова е точно и за произволни заемно инверзни функции $f:X\to Y$ и $f^{-1}:Y\to X$, затоа што ако (a,b) е точка од графикот на f тогаш $b=f(a)$ т.е. $a=f^{-1}(b)$ и следува (b,a) е точка од графикот на f^{-1}.

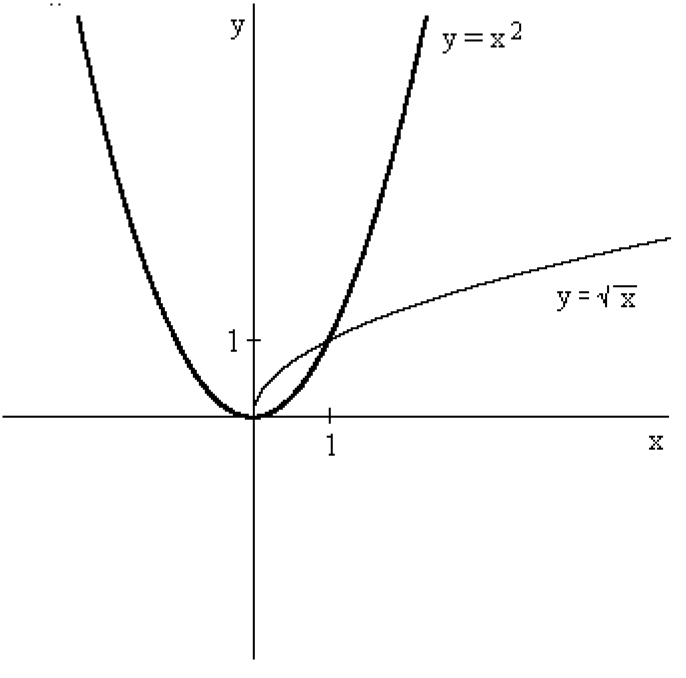
Нека сега $a \in \mathbb{R}$. Тогаш $a^{2k} \in [0,\infty)$ т.е. a^{2k} припаѓа на дефиниционата област на функцијата $\sqrt[2k]{x}$ и мора $\sqrt[2k]{a^{2k}} \in [0,\infty)$. Затоа

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

и специјално за

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Функцијата $f(x) = x^2$ и нејзината инверзна се претставени на сликата. .



По дефинција $x^0 = 1$ за секој $x \in \mathbb{R}$..

Ако $r = \dfrac{m}{n} > 0$ е позитивен рационален број тогаш по дефиниција

$$x^r = (\sqrt[n]{x})^m,$$

а за негативниот рационален број $-r$ по дефиниција

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$

За секој рационален број r интервалот $(0,\infty)$ се содржи во дефиниционата област на функцијата $f(x) = x^r$ и: ако $r > 0$ тогаш функцијата строго монотоно расте на $(0,\infty)$; ако $r < 0$ тогаш функцијата строго монотоно опаѓа на $(0,\infty)$.

2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

За реален број $a > 0$, ќе определиме експоненцијална функција $f(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Реалниот број $a > 0$ се нарекува основа, а x експонент или показател.

За рационалните броеви $q \in \mathbb{Q}$, $q = \frac{m}{n}$ каде $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ по дефиниција

$$a^q = (\sqrt[n]{a})^m$$

Точни се следниве својства

1) за $q, r \in \mathbb{Q}$, $a^{q+r} = a^q \cdot a^r$ и

2) Нека $a > 1$. Ако $q < r$ тогаш $a^q < a^r$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1$

4) Нека $N > 0$ е природен број. За секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ така што од $q, r \in [-N, N] \cap \mathbb{Q}$ и

$$|q - r| < \delta$$

да следува

$$|a^q - a^r| < \varepsilon$$

(т.е. функцијата $f(q) = a^q$ е рамномерно непрекината на множеството $[-N, N] \cap \mathbb{Q}$).

За да го покажеме 1) најпрво да забележиме дека за n,m природни броеви

$$a^{n+m} = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n} \cdot \overbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}^{m} = a^n \cdot a^m$$

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = (\frac{1}{a})^n \cdot (\frac{1}{a})^m = (\frac{1}{a})^{n+m} = a^{-n-m}$$

$$a^n \cdot a^{-m} = a^n \cdot (\frac{1}{a})^m = \begin{cases} a^{n-m}, & n > m \\ (\frac{1}{a})^{m-n}, & n < m \end{cases}$$

со што својството е покажано за q,r цели броеви. Во општиот случај кога q,r се рационални броеви т.е $q = \dfrac{m}{n}$ и $r = \dfrac{k}{n}$ каде $m,k \in Z$, $n \in N$

$$a^{q+r} = a^{(m+k)/n} = (\sqrt[n]{a})^{m+k} = (\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[n]{a})^k = a^q \cdot a^r$$

Ако $q > r$ тогаш $q - r > 0$ и следува $a^{q-r} > 1^{q-r} = 1$ т.е. $a^q > a^r$ со што е покажано својството 2).

За доказот на 3) нека $a_n = a^{1/n} - 1$.Тогаш $a_n >$ -1 и од

$$a = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n$$

следува

$$0 < a_n \leq \frac{a-1}{n} \; .$$

Заради последното неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ т.е $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$, од каде

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1$$

За го докажеме 4) најпрво да забележиме дека функцијата $f(q) = a^q$ е ограничена на $[-N, N] \cap \mathbb{Q}$ затоа што

$$| a^q | \leq a^N .$$

За даден реален број $\varepsilon > 0$, нека избереме $\delta = \dfrac{\varepsilon}{a^N}$. Заради 3), постојат n_1 , $n_2 \in \mathbb{N}$ такви што a^{-1/n_1} , $a^{1/n_2} \in (1-\delta, 1+\delta)$ и ако се избере $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, тогаш

$$1-\delta < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1+\delta$$

Сега за $q, r \in [-N, N] \cap \mathbb{Q}$ и такви што

$$-\frac{1}{n_0} < q - r < \frac{1}{n_0}$$

од каде

$$1-\delta < a^{-1/n_0} < a^{q-r} < a^{1/n_0} < 1+\delta$$

т.е.

$$|a^{q-r} - 1| < \delta$$

Следува

$$|a^q - a^r| = |a^r| \cdot |a^{q-r} - 1| < a^n \cdot \delta = \varepsilon,$$

со што е докажано својството 4) .

Нека x е реален број. Постои $N \in \mathbb{N}$ така што $x \in [-N, N]$ и постои низа рационални броеви (r_n) во $[-N, N]$ таква што

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x.$$

Низата е конвергентна што значи и фундаментална. Според 4) следува дека и низата (a^{r_n}) е фундаментална, значи и конвергентна. Дефинираме

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

Ако $x = \dfrac{m}{k} \in \mathbb{Q}$ тогаш низата (r_n) може да се избере така што $r_n = \dfrac{m}{k}$ за сите $n \in \mathbb{N}$. Заради тоа, во овој случај $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = (\sqrt[k]{a})^m$

Теорема 1. Функцијата $f(x) = a^x$ е добро дефинирана функција, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, и е непрекината во секоја точка.

Доказ. Во доказот повеќе пати ќе го користиме својството 4) во следнава форма:

4') Нека $N > 0$ е природен број. За секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ така што од $q, r \in [-N, N] \cap \mathbb{Q}$ и

$$|q - r| < \delta$$

да следува

$$|a^q - a^r| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Најпрво треба да провериме дека дефиницијата е добра. За тоа нека (r_n') е друга низа таква што $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} |r_n' - r_n| = 0$$

т. е. постои n_0 така што за $n \geq n_0$ да е исполнето

$$|r_n' - r_n| < \delta .$$

Според 4') следува

$$|a^{r_n'} - a^{r_n}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Ако побараме лимес кога $n \to \infty$ добиваме

$$|\lim_{n\to\infty} a^{r_n'} - a^x| \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

Заради произволноста на ε добиваме

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n'} = a^x$$

т. е. функцијата е добро дефинирана.

Ќе покажеме дека функцијата $f(x)=a^x$ е непрекината. За таа цел ќе покажеме дека е рамномерно непрекината на секој интервал $[-N,N]$, од каде ќе следува дека е и непрекината на $[-N,N]$, и непрекината на целата реална права.

. Нека $x,y\in[-N,N]$, такви што

$$|x-y|<\frac{\delta}{3}.$$

Постојат низи рационални броеви (r_n) и (q_n) во $[-N,N]$ такви што $r_n\to x$, $q_n\to y$. Тогаш постои n_1 таков што за $n\geq n_1$,

$$|r_n-x|<\frac{\delta}{3}$$

и

$$|q_n-y|<\frac{\delta}{3}.$$

Следува

$$|r_n-q_n|\leq|r_n-x|+|x-y|+|y-q_n|<\delta.$$

Од 4') добиваме

$$|a^{r_n}-a^{q_n}|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Од друга страна заради $a^{r_n}\to a^x$ и $a^{q_n}\to a^y$, постои n_2 таков што за $n\geq n_2$

$$|a^{r_n}-a^x|<\frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$|a^{q_n}-a^y|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Ако избереме n, таков што $n\geq\max\{n_1,n_2\}$ тогаш

$$|a^x-a^y|\leq|a^x-a^{r_n}|+|a^{r_n}-a^{q_n}|+|a^{q_n}-a^y|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

и според тоа функцијата $f(x)=a^x$ е рамномерно непрекината на $[-N,N]$

За да ја покажеме единственоста да претпоставиме дека $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината функција таква што за рационалните броеви $\frac{m}{n}$ каде $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, функцијата е определена со

$$g(\frac{m}{n})=(\sqrt[n]{a})^m .$$

Тогаш за произволен x и низа (r_n) таква што $r_n\to x$ заради непрекинатоста на g би имале

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g(r_n)=\lim_{n\to\infty}a^{r_n}=a^x .$$

Функцијата $f(x)=a^x$ ја нарекуваме експоненцијална. Експоненцијалната функција за $a>1$ ги поседува следниве својства

1^0 $a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$, за произволни реални броеви x_1,x_2;
2^0 $a^x>1$ за $x>0$, и $a^x>0$ за произволен реален број x;
3^0 функцијата $f(x)=a^x$ ($a>1$) строго расте,
4^0 $f(-\infty,\infty)=(0,\infty)$.

За доказот на 1^0 нека (q_n) и (r_n) се низи рационални броеви такви што $\lim_{n\to\infty}q_n=x_1$ и $\lim_{n\to\infty}r_n=x_2$. Тогаш

$$\begin{aligned}a^{x_1}\cdot a^{x_2}&=a^{\lim\limits_{n\to\infty}q_n}\cdot a^{\lim\limits_{n\to\infty}r_n}=\lim_{n\to\infty}a^{q_n}\cdot\lim_{n\to\infty}a^{r_n}\\&=\lim_{n\to\infty}(a^{q_n}\cdot a^{r_n})=\lim_{n\to\infty}a^{q_n+r_n}\\&=a^{\lim\limits_{n\to\infty}(q_n+r_n)}=a^{x_1+x_2}.\end{aligned}$$

За доказот на 2^0 најпрво да забележиме дека ако $x>0$ тогаш постои низа од рационални броеви (r_n), $r_n\geq 0$, таква што, $r_1\leq r_2\leq\ldots\leq r_n\ldots$ и $x=\lim\limits_{n\to\infty}r_n$.

Заради $r_n \geq 0$ следува $a^{r_n} > a^0 = 1$. Од

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

и заради тоа што

$$a^{r_1} \leq a^{r_2} \leq \ldots \leq a^{r_n} \leq \ldots$$

добиваме дека

$$a^x = \sup\{a^{r_n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

од каде следува $a^x > 1$. Заради $a^{-x} = 1/a^x$ добиваме дека функцијата е позитивна за секој x.

Ако $x_1 < x_2$ т.е $x_2 - x_1 > 0$ тогаш $a^{x_2 - x_1} > 1$ и следува

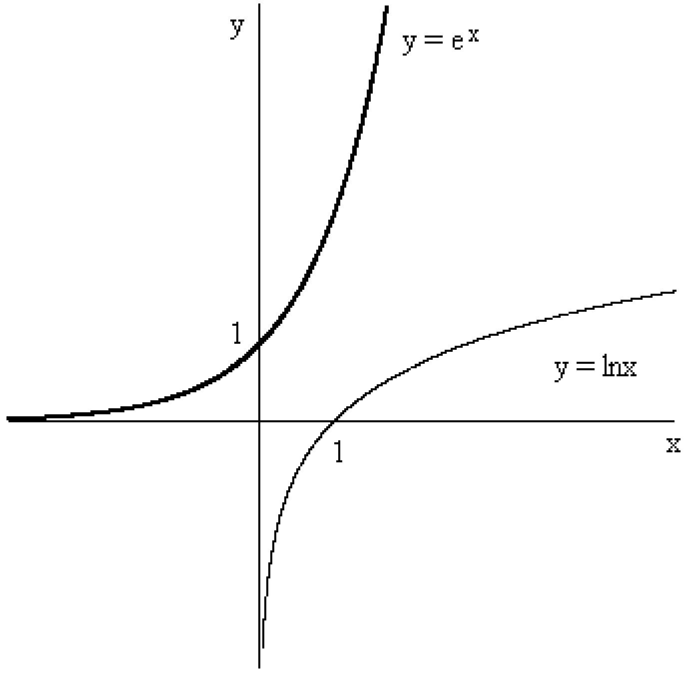
$$a^{x_2} \cdot a^{-x_1} > 1$$

од каде

$$a^{x_2} > a^{x_1}$$

Својството 4^0 следува од тоа што за $a > 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ и $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$. Според тоа

$$f(-\infty,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f[-n,n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a^{-n}, a^n] = (0,\infty)$$



Ако $0 < a < 1$ тогаш постои реален број $A = \dfrac{1}{a} > 1$. Во тој случај експоненцијалната функција ја определуваме со:

$$a^x = \frac{1}{A^x}$$

За на овој начин определената функција $f(x) = a^x$ за $0 < a < 1$ исполнети се својствата 1^0 ,2^0 и 4^0 и таа строго монотоно опаѓа. Уште во 2^0 $a^x < 1$ за $x > 0$.

Може да определиме инверзна функција $f^{-1} : (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ на експоненцијалната функција $f(x) = a^x$. Оваа функција ја нарекуваме логаритамска функција со основа a и ја означуваме со $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Според теоремите за инверзна функција логаритамската функција е непрекината , строго монотоно расте за $a>1$ и строго монотоно опаѓа за $a<1$.

Од својствата на експоненцијалната функција произлегуваат следниве својства на логаритамската функција

1^0 $y=a^{\log_a y}$, $x=\log_a a^x$;

2^0 $\log_a y+\log_a z=\log_a(y\cdot z)$;

3^0 $\log_a y^z = z\cdot\log_a y$.

Ако основата на логаритамот е бројот e, тогаш велиме дека логаритамот е со природна основа и наместо $\log_e x$ пишуваме $\ln x$.

Пример. Експоненцијалната функција $f(x)=e^x$ не е рамномерно непрекината на $(-\infty,\infty)$, иако е рамномерно непрекината на секој интервал $[-n,n]$, $n\in\mathbb{N}$. За да покажеме дека функција $f(x)=e^x$ не е рамномерно непрекината на $(-\infty,\infty)$, нека ги разгледаме низите $x_n=\ln n$, $y_n=\ln(n+1)$, за кои $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln n)=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\ln 1=0,$$

но

$$\lim_{n\to\infty}(f(y_n)-f(x_n))=\lim_{n\to\infty}(e^{\ln(n+1)}-e^{\ln n})=\lim_{n\to\infty}(n+1-n)=1.$$

што значи дека функцијата не е рамномерно непрекината.

Со помош на експоненцијалната функција се определуваат и таканаречените хиперболични функции

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ ,\quad chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ ,\quad thx=\frac{shx}{chx}.$$

Степенска функција со реален показател: Досега степенската функција $f(x)=x^r$ беше определена за рационален показател r.

Заради 3^0,

$$x^r = e^{r\ln x}.$$

За реален број b степенската функција $f(x)=x^b$ е определена на $(0,\propto)$ со

$$x^b = e^{b\ln x}.$$

Оваа функција е непрекината на $(0,\propto)$ како композиција на непрекинати функции и строго монотоно расте за $b>0$, а строго монотоно опаѓа за $b<0$.

Од како ги дефиниравме степенската, експоненцијалната и логаритамската функција, ќе определиме неколку карактеристични лимеси сврзани со овие функции. Најпрво ќе покажеме дека:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Ова ќе биде покажано ако за секоја низа (x_k) таква што $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \infty$ и $x_k > 0$ покажеме дека е исполнето:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

За секој k постои природен број n_k таков што

$$n_k - 1 \le x_k \le n_k$$

Следува:

$$1+\frac{1}{n_k} \le 1+\frac{1}{x_k} \le 1+\frac{1}{n_k-1}$$

и

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k-1} \le \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \le \left(1+\frac{1}{n_k-1}\right)^{n_k}.$$

За низата (n_k) имаме $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$, од каде

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e\,.$$

Следува и

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k-1} = e = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k-1}\right)^{n_k}$$

заради што и

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e\,.$$

Пример. 1) Ќе покажеме дека:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Ако ставиме $x = -t - 1$, тогаш од $x \to -\infty$ имаме $t \to \infty$ и:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = e\,.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to-\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}} = \frac{1}{e}\,.$$

3) Ќе покажеме дека:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,.$$

покажувајќи го ова равенство пооделно за десниот и левиот лимес во точката 0. За $x > 0$ десниот лимес во 0 е:

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e\,.$$

Според 1) за $x < 0$ левиот лимес во 0 е:

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e\,.$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1\,.$

5) За да покажеме дека:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

ја употребуваме смената $t = a^x - 1$, т.е. $x\cdot\ln a = \ln(t+1)$. Тогаш овој лимес се пресметува со помош на примерот 4) на следниот начин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\ln a = \ln a\,.$$

3. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Нека функцијата $f(x)$ е определена на множество X. Ако постои реален број $T \neq 0$ таков што за секој $x \in X$, бројот $x + T \in X$ и

$$f(x+T) = f(x),$$

тогаш функцијата $f(x)$ се нарекува периодична. Секој реален број T со ова својство се нарекува ***периода*** на функцијата .

Пример за периодични функции се тригонометриските функции:синус, ($\sin x$), косинус ($\cos x$), тангенс (tgx) и котангенс ($ctgx$). Овие функции ги определуваме со помош на таканаречен тригонометриски круг т.е. круг во реалната рамнина со центар во координатниот почеток и радиус 1 .

Половината од тригонометриската кружница која е над x-оската е точно графикот на функцијата $y = \sqrt{1-x^2}$. Ако должината на графикот на оваа функција го означиме со π, тогаш должината на кружницата на тригонометрискиот круг ќе изнесува 2π. Може да се покаже дека π не е рационален број и дека неговата приближна вредност изнесува 3,14.. Неговата вредност може да се пресмета со произволен број на децимали.

Нека A е точка од рамнината со координати (x, y). Векторот со почеток во координатниот почеток O и крај во A се нарекува радиус-вектор, а правата на која лежи носач на радиус-векторот. Радиус-векторот го означуваме со OA или со координатите (x, y).

За произволни два радиус-вектори OA и OB определуваме проекција на OA на OB, како реален број $p_{OB}(OA)$ кој се добива со проектирање на точката A на (носачот на) радиус векторот OB.

Притоа ако B и проекцијата $p(A)$ на точката A, се на иста страна од кординатниот почеток O, тогаш $p_{OB}(OA)$ е растојанието меѓу O и $p(A)$, а ако се на различни страни тогаш $p_{OB}(OA)$ е истото растојание со знак - .

Од самата дефиниција за два радиус-вектори OA_1 и OA_2 и произволен реален број t, следува точноста на својствата:

1^0 $\quad p_{OB}(t \cdot OA) = t \cdot p_{OB}(OA)$;

2^0 $\quad p_{OB}(OA_1 + OA_2) = p_{OB}(OA_1) + p_{OB}(OA_2)$;

Ако OB е векторот $(1,0)$, тогаш проекцијата ја означуваме со $p_x(OA)$ и велиме дека е проекција на OA на x-оската; ако OB е векторот $(0,1)$ тогаш проекцијата ја означуваме со $p_y(OA)$ и велиме дека е проекција на y - оската.

Нека A и B се две точки кои лежат на кружницата. Ако должината на лакот на кружницата добиен со движење на точката B по кружницата во позитивна насока (насока при која координатниот почеток останува од левата страна) се додека не се поклопи со точката A изнесува t, тогаш за аголот меѓу радиус- векторите OB и OA ќе речеме дека има t ***радиани***.

За аголот меѓу радиус векторите (1,0) и OA ќе речеме дека е агол меѓу x-оската и OA. На овој начин на секој реален број $a \in [0,2\pi)$, одговара единствена точка од кружницата таква што аголот меѓу OA и x-оската да изнесува a радиани. Тогаш дефинираме

$$\sin a = p_y(OA)$$

и

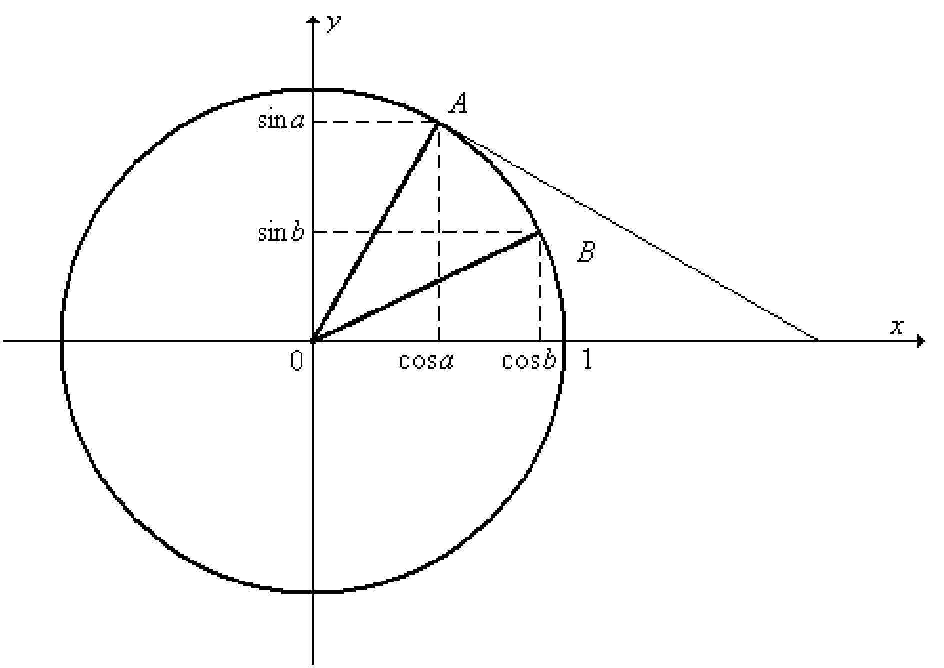
$$\cos a = p_x(OA).$$

Функциите синус и косинус дефинирани на овој начин на интервалот $[0,2\pi)$, може да ги прошириме на целата реална права како периодични функции со периода 2π т.е. со равенствата

$$\sin(a+2\pi) = \sin a$$

и

$$\cos(a+2\pi) = \cos a$$



Од дефиницијата непосредно следуваат својствата:

1^0 $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, $|\sin a| \leq 1$, $|\cos a| \leq 1$;

2^0 $\sin(-a) = -\sin a$, $\cos(-a) = \cos a$;

3^0 $\sin a = \cos(a - \dfrac{\pi}{2}) = \cos(\dfrac{\pi}{2} - a)$, $\cos a = \sin(\dfrac{\pi}{2} - a)$;

4^0 $\sin(a + \pi) = -\sin a$, $\cos(a + \pi) = -\cos a$.

Ќе ги покажеме следните својства:

5^0 $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$;

6^0 $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$;

7^0 $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$;

8^0 $\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$.

Ако A и B се точки од тригонометриската кружница тогаш $p_{OB}(OA) = p_{OA}(OB)$. Нека аголот помеѓу x-оската и OA изнесува a радиани, а аголот помеѓу x-оската и OB изнесува b радиани (на сликата) . Тогаш:

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= p_{OB}(OA) = p_{OB}((\cos a, 0) + (0, \sin a)) \\ &= \cos a \cdot p_{OB}(1,0) + \sin a \cdot p_{OB}(0,1) \\ &= \cos a \cdot p_x(OB) + \sin a \cdot p_y(OB) \\ &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b,\end{aligned}$$

со што е покажано равенството 5^0. .

Равенството 7^0 го добиваме ако во 5^0, a се замени со $\frac{\pi}{2}-a$, и се примени 3^0.

Равенствата 6^0 и 8^0, ги добиваме ако во 5^0 и 7^0, го замениме b со $-b$ и го примениме својството 2^0.

Од докажаните равенства следуваат и следните две равенства

$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cdot\cos a$$

и

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a\cdot\sin b\,.$$

Ако во овие равенства ставиме $a=\frac{x+y}{2}$, $b=\frac{x-y}{2}$, тогаш ги добиваме и следните својства на функциите синус и косинус

9^0 $\quad \sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$

10^0 $\quad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\sin\frac{x+y}{2}$

Уште од 6^0 и 7^0 добиваме и

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a\,,\qquad \sin 2a=2\sin a\cdot\cos a\,,$$

од каде со примена на 1^0 следува:

11^0 $\quad \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}\,,\qquad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}\,.$

На множеството $\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$ определуваме функција tgx со

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Заради 4^0, $tgx(x+\pi) = tgx$ добиваме дека tgx има периода π. Ќе ја разгледаме оваа функција на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. За $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ имаме $0 < \sin x_1 < \sin x_2$ и $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$, од каде

$$tgx_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = tgx_2$$

Значи функцијата монотоно расте на $(0, \frac{\pi}{2})$, а заради $tg(-x) = -tgx$ добиваме дека таа монотоно расте на целиот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Покрај тоа

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tgx = \infty, \quad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} tgx = -\infty,$$

што значи дека функцијата има вертикални асимптоти $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$.

Затоа што функцијата е периодична вертикални асимптоти ќе бидат сите прави $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Слично, ако определиме функција $ctgx$ на $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ со

$$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

тогаш таа има периода π, и строго монотоно опаѓа на $(0, \pi)$. Вертикални асимптоти на оваа функција се сите прави $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Должината на отсечката на тангентата на кругот (на сликата) од точката A до пресекот со x-оската изнесува tga и заради тоа за $0 < a < \frac{\pi}{2}$ добиваме

$$0 < \sin a < a < tga$$

Заради ова добиваме дека

$$0 > \sin(-a) > -a > tg(-a)$$

од каде следува дека за $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$,

$$0 < |\sin x| < |x| < |tgx|,$$

Ќе покажеме дека функциите $\sin x$ и $\cos x$ се непрекинати во произволна точка x_0. За дадено $\varepsilon > 0$ избираме $\delta = \min\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\}$. Тогаш непрекинатоста на двете функции следува од

$$|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin\frac{x - x_0}{2}| \cdot |\cos\frac{x + x_0}{2}| \leq 2|\frac{x - x_0}{2}| < \delta \leq \varepsilon,$$

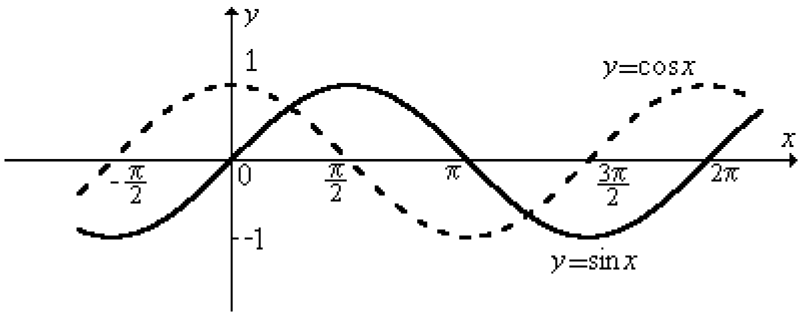
и

$$|\cos x - \cos x_0| = 2|\sin\frac{x - x_0}{2}| \cdot |\sin\frac{x + x_0}{2}| \leq 2|\frac{x - x_0}{2}| < \delta \leq \varepsilon,$$

Со ова е покажано дека и функциите tgx и $ctgx$ се непрекинати во својата дефинициона област.

На крајот, во таблиците кои следуваат се дадени неколку основни вредности на тригонометриските функции. Користејќи ги претходно изведените формули за тригонометриските функции таблиците може да се прошират со нови вредности.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1



Теорема 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Доказ: Заради

$$0<|\sin x|<|x|<|tgx|$$

за $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$, добиваме

$$|\cos x|<\ \left|\frac{\sin x}{x}\right|<\ 1.$$

За $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$, имаме $\cos x>0$ и $\sin x$ и x имаат ист знак, што значи може да се ослободиме од знакот за апсолутна вредност т.е.

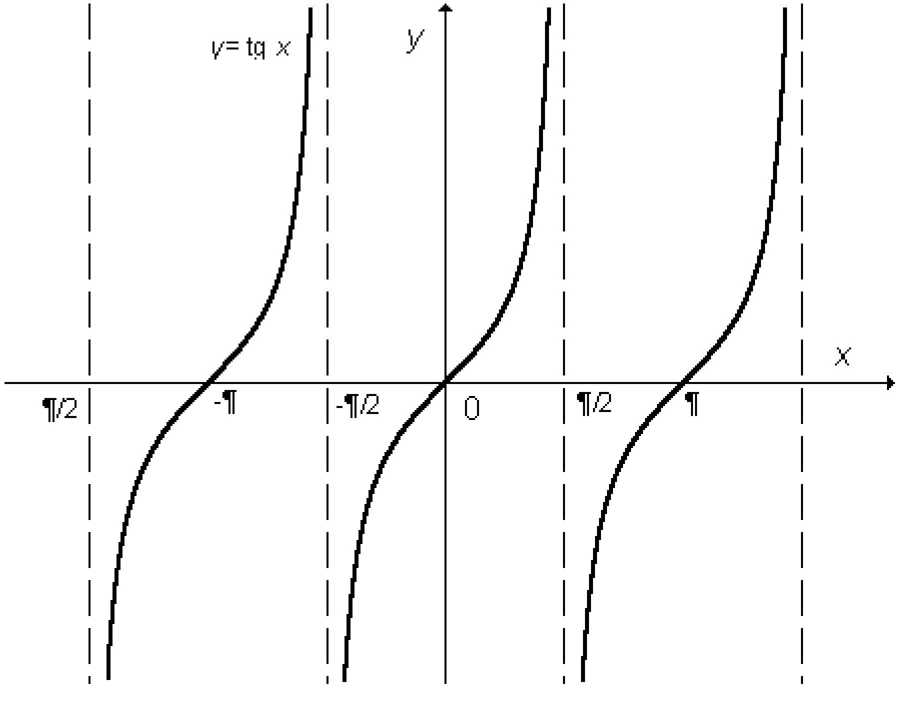
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Заради непрекинатоста на $\cos x$ во точката 0, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$ и следува

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 .$$

На крај се дадени неколку карактеристични вредности за функцијата tgx.

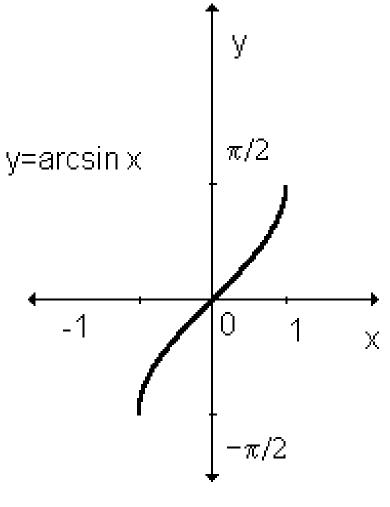
x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
tgx	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

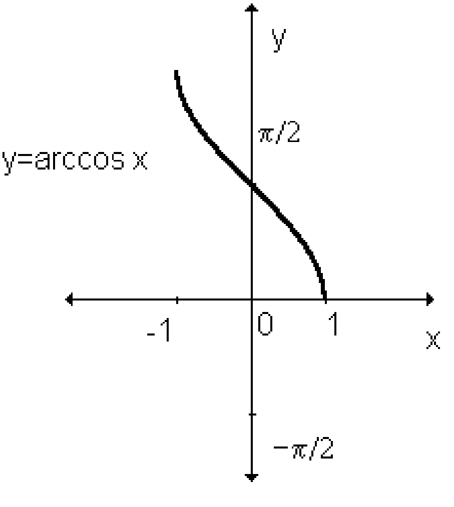


4. ИНВЕРЗНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ

Рестрикцијата на функцијата $f(x)=\sin x$ на интервалот $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ е строго растечка функција и $f[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]=[-1,1]$. Според тоа за оваа рестрикција на $\sin x$, постои инверзна функција $f^{-1}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ која ја означуваме со $f^{-1}(x)=\arcsin x$. Функцијата $\arcsin x$ е строго растечка и непрекината на $[-1,1]$.

Рестрикцијата на функцијата $f(x)=\cos x$ на интервалот $[0,\pi]$ е строго опаѓачка функција и $f[0,\pi]=[-1,1]$. Според тоа за оваа рестрикција $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ на $\cos x$, постои инверзна функција $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$ која ја означуваме со $f^{-1}(x)=\arccos x$. Функцијата $\arccos x$ е строго опаѓачка и непрекината на $[-1,1]$.

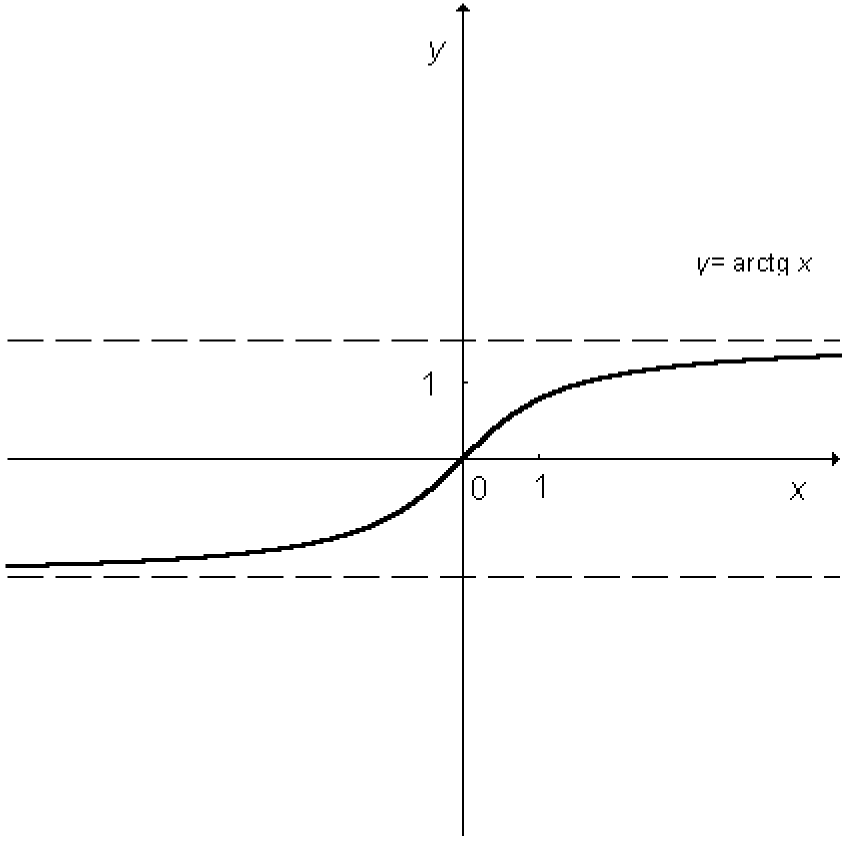




Рестрикцијата на функцијата $f(x) = tgx$ на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ е строго растечка функција и $f(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (-\infty, \infty)$. Според тоа за оваа рестрикција на tgx, постои инверзна функција $f^{-1} : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ која ја означуваме со $f^{-1}(x) = arctgx$. Функцијата $arctgx$ е строго растечка и непрекината на $(-\infty, \infty)$. Покрај ова, заради тоа што кога $x \to \frac{\pi}{2}^{-}$, $tgx \to \infty$ и кога $x \to -\frac{\pi}{2}^{+}$ $tgx \to -\infty$ добиваме

$$\lim_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2},$$

т.е правите $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ се хоризонтални асимптоти на функцијата $arctgx$.


y
y= arctg x
1
0
1
x

.V. ИЗВОД НА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ИЗВОД

Нека P е интервал и $f(x)$ е реална функција дефинирана на P.

Дефиниција: *Функцијата* $f(x)$ *е **диференцијабилна** (**има извод**) во точката* $x_0 \in P$ *ако постои конечен лимес*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Овој реален број се нарекува извод (или деривација) на функцијата f во точката x_0 и се обележува со $f'(x_0)$. Според тоа

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

За функцијата $f(x)$ велиме дека е диференцијабилна на интервалот P ако има извод во секоја точка x од интевалот P. Во тој случај функцијата $f'(x)$ се нарекува ***извод*** (или деривација) на функцијата $f(x)$, и таа е определена на интервалот P.

Ако функцијата $f'(x)$ има извод во точката x_0, тој се означува со $f''(x_0)$ и се нарекува втор извод на функцијата $f(x)$ во x_0. Ако $f'(x)$ има извод $f''(x)$ во произволна точка $x \in P$, тогаш функцијата $f''(x)$ која е определена на интервалот P се нарекува втор извод на функцијата $f(x)$. Со $f^{(n)}(x)$ го означуваме n-тиот извод на $f(x)$.

Теорема 1: *Ако функцијата* $f(x)$ *е диференцијабилна во точката* x_0 *тогаш таа е и непрекината во таа точка .*

Доказ: Заради

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=0\cdot f'(x_0)=0,$$

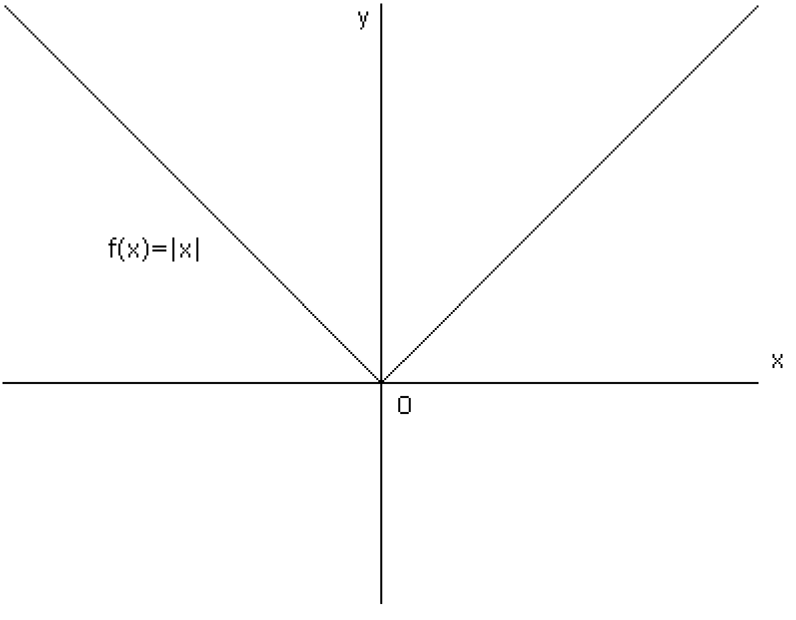
следува

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\ ,$$

т.е. функцијата $f(x)$ е непрекината во x_0.

Пример: 1) Идентичната функција $f(x)=x$ има извод во секоја точка од реалната права и $x'=1$

2) Функцијата $f(x)=|x|$ е непрекината во точката 0 но не е диференцијабилна во точката 0.



Изводот во точка x_0 на диференцијабилната функција $f(x)$ го интерпретираме како тангенс на аголот кој тангентата на графикот на функцијата $f(x)$ во точката $(x_0, f(x_0))$ го зафаќа со x-оската.

За аголот β кој го зафаќа правата која минува низ точката (x_0, y_0) и (x_1, y_1) каде $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, исполнето е

$$tg\beta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} .$$

И воопшто равенката на таа права за произволна нејзина точка е

$$y - y_0 = tg\beta \cdot (x - x_0)$$

Ако со α го означиме аголот кој тангентата на функцијата $f(x)$ во точката x_0 го зафаќа со x - оската , тогаш

$$tg\alpha = \lim_{x \to x_0} tg\beta$$

т.е.

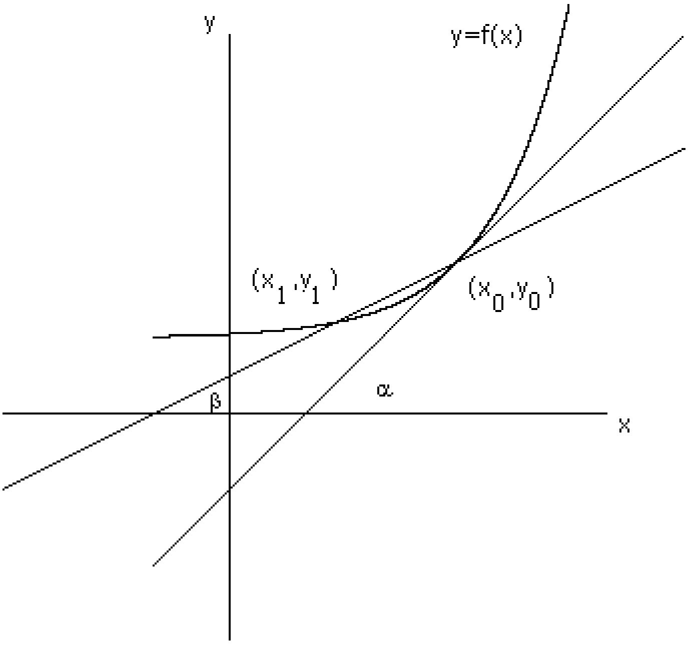
$$tg\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

и добиваме дека

$$tg\alpha = f'(x_0) .$$

Според ова, равенката на тангентата во точката x_0 е:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) .$$



Забелешка: Диференцијабилноста на функција во точка значи постоење на тангента во таа точка. На пример функцијата $f(x)=|x|$ нема тангента во точката 0, и како што видовме погоре таа и не е диференцијабилна во точката 0.

Ќе дадеме интерпретацијата на изводот како брзина. Нека едно тело се движи праволиниски при што за време t изминува пат $s(t)$. Не интересира брзината $v(t_0)$ во временскиот момент t_0. Нека t е временски момент блиску до t_0. Телото во моментот t_0 изминало пат $s(t_0)$, а во моментот t пат $s(t)$. Тогаш за времето $t-t_0$ телото изминало пат $s(t)-s(t_0)$. Средната брзина во временскиот интервал t_0 до t изнесува:

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Ако земеме временскиот интервал од t_0 до t да биде се помал т.е. t да биде се поблиску до t_0, („t да тежи кон t_0") тогаш $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ тежи кон $v(t_0)$ т.е.

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Значи брзината во t_0 е прв извод од функцијата на патот во точката t_0 т.е.

$$v(t_0)=s'(t_0)$$

2. ИЗВОД НА КОМПОЗИЦИЈА НА ФУНКЦИИ. ИЗВОД НА ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

Теорема 1: *Нека $f(x)$ е непрекината и строго монотона функција определена на интервал P и $g(x)$ е реална функција таква што композицијата $g(f(x))$ е определена на интервалот P. Ако функцијата $f(x)$ има извод во точката $x_0\in P$ и функцијата $g(x)$ има извод во точката $y_0=f(x_0)$ тогаш и композицијата $g(f(x))$ има извод во x_0 и притоа*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Доказ: Заради непрекинатоста на $f(x)$, сликата $f(P)$ на интервалот P е интервал и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$. Уште, заради строгата монотоност на функцијата $f(x)$, $f(P\setminus\{x_0\}) = f(P)\setminus\{y_0\}$ и според тоа исполнети се условите на теоремата за смена на променливата во лимесот. Од

$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = g'(y_0)$$

применувајќи ја теоремата за смена на променливата во лимесот добиваме:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = g'(f(x_0)).$$

Следува

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

Теорема 2: *Нека $f(x)$ е непрекината и строго монотона на некој интервал P. Ако функцијата f има извод во точката x и $f'(x)\neq 0$, тогаш и инверзната функција $f^{-1}: f(P)\to P$ има извод во точката $y = f(x)$ и притоа*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Доказ: Да забележиме дека условот функцијата да е строго монотона на некој интервал P обезбедува постоење на инверзна функиција f^{-1} определена на $f(P)$. Тогаш од $f^{-1}(f(x)) = x$ добиваме

$$(f^{-1}(f(x)))'(f(x))' = 1,$$

од каде заради

$$y = f(x)$$

добиваме

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \quad .$$

3. ОСНОВНИ ПРАВИЛА ЗА ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

Теорема 1: *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се определени на интервалот P. Ако тие имаат извод во точката $x_0 \in P$, тогаш:*

1) *За произволен реален број c функцијата $c \cdot f(x)$ е диференцијабилна во x_0 и*

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0) ;$$

2) *Функцијата $f + g$ има извод во x_0 и*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) ;$$

3) *Функцијата $f \cdot g$ има извод во x_0 и*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) ;$$

4) *Ако $g(x) \neq 0$, тогаш функцијата $\frac{f}{g}$ има извод во x_0 и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} ;$$

Доказ: 1) $(c \cdot f)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0}$

$$= c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= c \cdot f'(x_0)$$

2) $$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=f'(x_0)+g'(x_0).$$

3) $$(f\cdot g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)+f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}g(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}f(x)$$

$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

4) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\right]\cdot\frac{1}{g(x)g(x_0)}$$

$$=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Последица: *Нека функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *се диференцијабилни на интервалот* P. *Тогаш и функциите* $c\cdot f$ *(*c *е реален број),* $f+g$ *,* $f\cdot g$ *се диференцијабилни на* P *и:*

1) $(c\cdot f)'=c\cdot f'$;

2) $(f+g)'=f'+g'$;

3) $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$;

4) *Ако* $g(x)\neq 0$ *за секој* $x\in P$, *тогаш и функцијата* $\frac{f}{g}$ *е диференцијабилна на* $x\in P$ *и* $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$;

4. ИЗВОДИ НА ОСНОВНИТЕ ФУНКЦИИ

Изводите на основните функции се дадени во следнава таблица:

1°	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ и специјално $\left(e^x\right)'=e^x$
2°	$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$ и специјално $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
3°	$(x^p)'=p\cdot x^{p-1}$, каде p е реален број. Специјално за p = 0, 1' = 0, за p = 1, x' = 1 и за $p=\frac{1}{2}$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4°	$(\sin x)'=\cos x$
5°	$(\cos x)'=-\sin x$

6°	$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
7°	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
8°	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1).$
9°	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1).$
10°	$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}.$

Точноста на таблицата ја покажуваме користејќи ги правилата за диференцирање и некои претходно познати лимеси:

1° Нека $f(x)=a^x$, $(a>0)$ и нека x_0 е фиксиран реален број . Тогаш

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}=a^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0}=a^{x_0}\cdot\ln a$$

2° Нека $y=\log_a x$, т.е. $x=a^y$. Од теоремата за извод на инверзна функција,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{\left(a^y\right)'}=\frac{1}{a^y\cdot\ln a}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

3° $$(x^p)'=(e^{p\ln x})'=e^{p\ln x}\cdot p\cdot\frac{1}{x}=p\cdot x^{p-1}$$

4° $$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cdot\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0}=\cos x_0$$

5° $$\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cdot\sin(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0}=-\sin x_0$$

6° $$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

7° $$(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

8° Нека $y=\arcsin x$ т.е. $x=\sin y$. Ако $x\in(-1,\ 1)$ тогаш $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Следува $\cos y>0$ и $\cos y=\sqrt{1-x^2}$. Заради тоа:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

.

9° Нека $y=\arccos x$, т.е. $x=\cos y$. Ако $x\in(-1,\ 1)$ тогаш $y\in(0,\pi)$. Следува $\sin y>0$ и $\sin y=\sqrt{1-x^2}$. Заради тоа:

$$(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10° Нека $y=arctg\,x$, т.е. $x=tg\,y$. Од теоремата за извод на инверзна функција:

$$(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

5. ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМИ. ТЕОРЕМИ ЗА СРЕДНА ВРЕДНОСТ

Дефиниција. *Реалната функција* $f(x)$ *определена на интервалот* P *има* ***локален максимум*** *во точката* $x_0 \in P$ *ако постои околина* $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq P$ *таква што*:

$$f(x) \leq f(x_0),$$

за сите $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Реалната функција $f(x)$ *определена на интервалот* P *има* ***локален минимум*** *во точката* $x_0 \in P$ *ако постои околина* $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq P$ *таква што*

:

$$f(x) \geq f(x_0),$$

за сите $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Функцијата $f(x)$ има ***локален екстрем*** во x_0 ако има локален максимум или минимум во x_0.

Следната теорема е позната како теорема на Ферма (Fermat, Pierre, 1601 -1685, француски математичар)..

Теорема 1. *Нека функцијата* $f(x)$ *определена на интервалот* (a,b) *има во точката* $x_0 \in (a,b)$ *локален екстрем. Ако функцијата е диференцијабилна во таа точка, тогаш* $f'(x_0)=0$.

Доказ. Нека функцијата $f(x)$ во точката x_0 има локален максимум. Тогаш, за $x_0 < x < x_0+\delta$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

од каде

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 .$$

За $x_0 - \delta < x < x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

и

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Следува $f'(x_0) = 0$.

Ако $f(x)$ е реална функција диференцијабилна на $[a,b]$, тогаш постои точка $x \in [a,b]$ во која функцијата ја постигнува својата најголема вредност. Ако $x \in (a,b)$ според теоремата на Ферма $f'(x) = 0$. Според ова, функцијата $f(x)$ диференцијабилна на интервалот $[a,b]$ најголема вредност и најмала вредност постигнува или во точките $x = a$, $x = b$ или во точките во кои $f'(x) = 0$ (т.н. стационарни точки).

Теорема 2. *Нека фунцкијата f е непрекината на интервалот $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и $f(a) = 0 = f(b)$. Постои барем една точка $x \in (a,b)$ таква што $f'(x) = 0$.*

Доказ: Постојат

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\},$$

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Ако $m = M$, тогаш $f(x) = m = M$ за секој $x \in [a,b]$ и следува $f'(x) = 0$ за секој $x \in [a,b]$.

Ако $m < M$, тогаш или $M > 0$ или $m < 0$. Нека е исполнето $M > 0$. Постои точка x таква што $f(x) = M$. Притоа, $x \neq a, x \neq b$ затоа што $f(a) = 0 = f(b)$. Значи, $a < x < b$. Нека $\delta = \min\{x - a, b - x\}$. Тогаш $f(x)$ има локален максимум во x во околината $(x - \delta, x + \delta)$. Според претходната теорема $f'(x) = 0$.

Последица. *Теоремата е точна ако условот* $f(a)=0=f(b)$ *се замени со* $f(a)=f(b)$.

Доказ. За функцијата $g(x)=f(x)-f(a)$ исполенти се условите на теоремата, и според тоа постои точка x таква што $g'(x)=0$. Заради $g'(x)=(f(x)-f(a))'=f'(x)$, следува $f'(x)=0$.

Претходната теорема е позната како теорема на Рол (Rolle, Michel, 1652-1719, француски математичар), а наредната теорема како теорема на Лагранж (Lagrange, Joseph-Louis, 1736 – 1813, француски математичар)..Овие теореми се нарекуваат теореми за средна вредност.

Теорема 3. *Фунцкијата* f *е непрекината на интервалот* $[a,b]$ *и диференцијабилна на* (a,b). *Тогаш постои барем една точка* $u\in(a,b)$ *таква што:*

$$f(b)-f(a)=f'(u)(b-a)$$

Доказ. Ја формираме функцијата

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

Оваа функција е непрекината на интервалот $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и уште $g(a)=0$, $g(b)=0$. Според претходната теорема постои точка u таква што $g'(u)=0$. Следува:

$$f'(u)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

од каде се добива равенството во теоремата.

Последица. *Нека функцијата* $f(x)$ *е диференцијабилна на интервалот* P *и нека* $f'(x)=0$ *за секој* $x\in P$. *Тогаш* $f(x)$ *е константна функција на* P.

Доказ. Нека x_0 е фиксирана точка во P и x произволно избрана точка. Според теоремата постои точка помеѓу x_0 и x таква што

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(u)=0$$

од каде

$$f(x)-f(x_0)=0$$

Следува $f(x)=f(x_0)$, т.е. функцијата $f(x)$ е константна.

Последица. *Нека $f(x)$ е диференцијабилна на интервалот P. Ако $f'(x)>0$ за сите $x\in P$ тогаш $f(x)$ строго расте на P, ако $f'(x)<0$ за секој $x\in P$, тогаш $f(x)$ строго опаѓа на P.*

Доказ. Нека на пример $f'(x)>0$ за сите $x\in P$. Нека x_1 и x_2 се произволни точки од P и нека на пример $x_1<x_2$. Според теоремата за средна вредност постои точка u, $x_1<u<x_2$, таква што:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(u)>0$$

од каде следува $f(x_1)<f(x_2)$.

Следната теорема позната како теорема на Коши и претставува обопштување на теоремите за средна вредност.

Теорема 4. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати на интервалот $[a,b]$, диференцијабилни на (a,b). Тогаш постои барем една точка $u\in(a,b)$ таква што*:

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(u)=(g(b)-g(a))\cdot f'(u)$$

Доказ. Функцијата

$$h(x)=(f(b)-f(a))\cdot g(x)-(g(b)-g(a))\cdot f(x),$$

е непрекината на интервалот $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и уште $h(a)=h(b)$. Според последицата на теоремата на Рол, постои точка $u\in(a,b)$ таква што $h'(u)=0$ т.е.

$$(f(b)-f(a))\cdot g'(u)=(g(b)-g(a))\cdot f'(u)$$

Следната теорема покажува дека секоја функција не е извод на некоја друга функција. Позната е како теорема на Дарбу (Darboux, Gaston, 1842-1917, француски математичар).

Теорема 5*: *Нека функцијата $f(x)$ е диференцијабилна на интервалот $[a,b]$ нека е даден реален број d таков што $f'(\mathrm{a})<d<f'(b)$ или $f'(a)>d>f'(b)$. Тогаш постои барем една точка $c\in(a,b)$ таква што $f'(c)=d$.*

Доказ: Нека $f'(a)<d<f'(b)$. Тогаш за функцијата $g(x)=f(x)-x\cdot d$ е исполнето $g'(a)<0$ и $g'(b)>0$.

Заради

$$g'(a)=\lim_{x\to\mathrm{a}}\frac{g(x)-g(a)}{x-a},$$

Функцијата

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}, & x\neq a\\ g'(a)\quad, & x=a\end{cases}$$

е непрекината во точката a. Заради $h(a)=g'(a)<0$, постои $\delta>0$ такво што при $a<x<a+\delta$, $h(x)<0$. Добиваме:

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0,$$

т.е. $g(x)<g(a)$ за $a<x<a+\delta$. Следува $g(x)$ не ја постигнува својата најмала вредност во a. Слично се покажува дека $g(x)$ не ја постигнува својата најмала вредност во токата b. Од ова заклучуваме дека $g(x)$ ја постигнува својата најмала вредност во точка $c\in(a,b)$. Според теоремата на Ферма, $g'(c)=0$ т.е. $f'(c)=d$.

Теорема 6*: *Нека* $F'(x) = f(x)$ *на интервалот* $P = (a,b)$. *Тогаш за произволна точка* $x_0 \in P$ *или* 1) *функцијата* $f(x)$ *е непрекината во* x_0 *или* 2) *барем еден од лимесите* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *не постои.*

Доказ: Да претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата дека функцијата $f(x)$ има прекин во x_0 и дека и левиот и десниот лимес во x_0 постојат .

Нека претпоставиме $f(x_0) > \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = y_0$. Тогаш постои точка d, $y_0 < d < f(x_0)$. Од дефиницијата на лев лимес постои δ > 0 така што за секој $x \in (x_0 - 2\delta, x_0)$, $f(x) < d$ и специјално $f(x_0 - \delta) < d$. Тогаш не постои точка $c \in [x_0 - \delta, x_0]$ таква што $f(c) = d$, што е во спротивност со претходно докажаната теорема. .Следува претпоставката $f(x_0) > \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ не е добра. На ист начин се покажува дека не може $f(x_0) < \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. Заклучуваме дека $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Слично можеме да покажеме и за десниот лимес, $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Добиваме дека функцијата $f(x)$ е непрекината во x_0 што е контрадикција .

6. ПРИВИДНО НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИЗРАЗИ

При испитувањето на лимес од количник на две реални функции

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

често пати се појавуваат неопределени изрази од вид $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. .При ова a може да биде реален број или еден од симболите ∞ или $-\infty$.

Следните теореми покажуваат дека лимесот под одредени услови може да се определи со помош на изводите на функциите.

Теорема 1: *Нека* $f(x)$ *и* $g(x)$ *се диференцијабилни функции на интервалот* (a,b), *и нека* $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ *на* (a,b) *и*

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=0=\lim_{x\to a^+} g(x)$$

Тогаш ако постои лимес (конечен или бесконечен)

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

тогаш постои и лимесот

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=K .$$

Теоремите од овој тип се познати како правило на Лопитал (Gulliaume de L’Hopital, француски математичар, 1661 – 1704)

Доказ: Нека $W\subseteq V$ се две различни околини на K. Тогаш постои реален број c таков што за $a<x<c$ е исполнето:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}\in W$$

Сега, ако $x,t \in (a,c)$, тогаш според теоремата за средна вредност постои точка u помеѓу x и t таква што:

$$\frac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} \in W.$$

Ако сега земеме лимес кога $t \to a^+$ добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in V.$$

Теорема 2: *Нека $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функции на интервалот (a,b), и нека $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ на (a,b) и*

$$\lim_{x \to a+} g(x) = \infty.$$

Ако постои лимес

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

тогаш постои и лимесот

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Доказ: За $x, x_0 \in (a,b)$. Според теоремата на Коши постои u, помеѓу x и x_0 такво што:

$$\left(f(x) - f(x_0)\right) \cdot g'(u) = f'(u) \cdot \left(g(x) - g(x_0)\right)$$

т.е.

$$f(x) \cdot g'(u) = f(x_0) g'(u) + f'(u) g(x) - f'(u) g(x_0).$$

Ако ова равенство го поделиме со $g(x) \cdot g'(u)$ добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(u)}{g'(u)}.$$

1) Најпрво ќе го разгледаме случајот кога K е реален број. Нека е зададено произволно ε > 0. Заради $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$, постои точка $x_0\in(a,b)$, така што за сите $x\in(a,x_0)$ да е исполнето:

$$|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K|<\frac{\varepsilon}{3}$$

и специјално

$$|\frac{f'(u)}{g'(u)}-K|<\frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Од условите на теоремата $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{g(x)}=0$. Според тоа постои реален број c (кој може да се избере $c\le x_0$) таков што за $x\in(a,c)$,

$$|\frac{f(x_0)}{g(x)}|<\frac{\varepsilon}{3}\ ,\qquad |\frac{g(x_0)}{g(x)}|<\frac{\varepsilon}{3\cdot|K|+\varepsilon}$$

Тогаш за $x\in(a,c)$ исполнето е:

$$|\frac{f(x)}{g(x)}-K|\le|\frac{f'(u)}{g'(u)}-K|+|\frac{f(x_0)}{g(x)}|+|\frac{g(x_0)}{g(x)}|\cdot|\frac{f'(u)}{g'(u)}|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3|K|+\varepsilon}(|K|+\frac{\varepsilon}{3})=\varepsilon$$

2) Сега ќе го разгледаме случајот $K=\infty$. За дадено $E>0$ постои x_0 такво што за сите $x<x_0$:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>3\cdot E\,.$$

Од теоремата на Коши за произволно $x<x_0$ постои u , $x<u<x_0$ така што:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(u)}{g'(u)}\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)}\,.$$

Заради $\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\infty$, постои c (кој може да се избере $c\le x_0$) така што за $x\in(a,c)$ да се исполнети неравенствата:

$$1-\frac{g(x_0)}{g(x)}>\frac{2}{3}$$

и

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|<E.$$

Следува:

$$\frac{f(x)}{g(x)}>3\cdot E\cdot\frac{2}{3}-E=E,$$

од каде

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

Слично се покажува дека теоремата е точна и во случајот $K=-\infty$.

Забелешка: Теоремите ги докажавме за $x\to \mathrm{a}^{+}$, каде a може да биде и $-\infty$. Тие се точни и кога $x\to b^{-}$, каде b може да биде и ∞. Следува дека е точна и следнава теорема:

Теорема 3: *Нека $f(x)$ и $g(x)$ се диференцијабилни функции на интервалот (c,a) и (a,b), и нека $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ и*

$$\lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$$

или

$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty.$$

Ако постои лимесот

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

тогаш постои и лимесот

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Пример: 1) За $p>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{px^p}=0$$

и

$$\lim_{x\to 0^+}x^p\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-p}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-px^{-p-1}}=\lim_{x\to 0^+}(-\frac{x^p}{p})=0.$$

2) За определување на лимесот $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ каде по дефиниција функцијата $f(x)=x^x$ е определена како $x^x=e^{x\ln x}$, најпрво од претходниот пример имаме:

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0\,.$$

Сега :

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^0=1$$

3) Понекогаш формалното применување на теоремите не дава резултат. Например следниов лимес не може да се реши и со повеќекратна употреба на Теоремата 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}=\ldots$$

Но со претставување на истиот лимес во нешто поинаква форма и со примена на теоремата 2 добиваме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(-2/x^3\right)\cdot e^{1/x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{1/x^2}}=0.$$

4) Во следниов пример каде $f(x)=x+\sin x$, $g(x)=x-\sin x$ не може да се применат теоремите од овој дел за определување на лимесот

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x},$$

заради тоа што не постои:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}.$$

Сепак лимесот едноставно се решава со:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=1.$$

7. ФОРМУЛА НА ТЕЈЛОР

Нека P е интервал и $f(x)$ е реална функција определена на P и $(n+1)$-пати диференцијабилна на тој интервал . Функцијата

$$T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

се нарекува ***полином на Тејлор*** во точката $a\in P$ (Taylor, 1695 – 1731, англиски математичар)..

Теорема 1: *Ако $f(x)$ е $(n+1)$-пати диференцијабилна функција на интервалот P тогаш за произволни точки $a,b\in P$, постои точка и помеѓу a и b така што*

$$f(b)-T_n(b)=\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Доказ: Нека претпоставиме $a<b$. Ја формираме функцијата

$$F(x)=(f(x)-T_n(x))\cdot(b-a)^{n+1}-(x-a)^{n+1}(f(b)-T_n(b))$$

Ако побараме извод на полиномот $T_n(x)$ добиваме

$$T_n'(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\cdot(x-a)^{n-1}$$

и за $1 \le i \le n$,

$$T_n^{(i)}(x) = f^{(i)}(a) + \frac{f^{(i+1)}(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-i)!}(x-a)^{n-i}$$

Специјално $T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$.

Изводите на функцијата $F(x)$ се еднакви на

$$F^{(i)}(x) = (f^{(i)}(x) - T_n^{(i)}(x))(b-a)^{n+1} - (n+1)\cdot n \cdot \dots \\ \dots \cdot (n+2-i)(x-a)^{n+1-i}(f(b) - T_n(b))$$

и специјално $(n+1)$-извод е еднаков на

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)\cdot(b-a)^{n+1} - (n+1)!\cdot(f(b) - T_n(b)).$$

Заради

$$T_n^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$$

за $i = 0,1,\dots,n$ добиваме

$$F(a) = F'(a) = F''(a) = \dots = F^{(n)}(a) = 0.$$

Нека претпоставиме $a < b$. Заради $F(b) = 0$ и $F(a) = 0$, на интервалот $[a,b]$ може да се примени теоремата на Рол т.е. постои точка $u_1 \in (a,b)$ така што $F'(u_1) = 0$. Ако ја примениме истата теорема за функцијата $F'(x)$ на интервалот $[a,u_1]$ тогаш добиваме точка $u_2 \in (a,u_1)$ таква што $F''(u_2) = 0$. Во $(n+1)$-иот чекор добиваме точка u_{n+1} така што $F^{(n+1)}(u_{n+1}) = 0$.

Следува

$$0 = f^{(n+1)}(u_{n+1}) \cdot (b-a)^{n+1} - (n+1)! \cdot (f(b) - T_n(b)),$$

од што следува тврдењето на теоремата.

Значи за произволна точка $x \in P$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x),$$

каде што

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Оваа формула се нарекува ***формула на Тејлор*** за функцијата $f(x)$ во точката a, а $R_n(x)$ се нарекува остаток (во форма на Лагранж).

Почесто остатокот се дава во вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + (x-a)t)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

каде што t е позитивен реален број , $0 < t < 1$.

Ако $a = 0$ тогаш формулата добива форма

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_n(x)$$

и се нарекува формула на Маклорен (MacLaurin, Collin, 1698-1748, шкотски математичар), а остатокот е еднаков на

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(tx)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

Ако x е фиксиран реален број тогаш $(T_n(x))$ е низа од реални броеви . Според теоремата $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} T_n(x) = f(x)$ ако и само ако

$$\lim_{n\leftarrow\infty} R_n(x) = 0 \ .$$

Пример: 1) За експоненцијалната функција $f(x) = e^x$, за секој $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$, и формулата на Меклорин има вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \ .$$

За фиксиран број x, остатокот го оценуваме со

$$| R_n(x) | = \frac{e^{tx}}{(n+1)!} \cdot | x |^{n+1}$$

Следува $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} R_n(x) = 0$. Значи

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}) \ .$$

За $x = 1$ добиваме

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}) \ .$$

2) за функцијата $f(x) = \sin x$ имаме: $f^{(4k)}(x) = \sin x$, $f^{(4k+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$, $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$, и развојот на функцијата во точката 0 е

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k} \ .$$

За фиксиран реален број x, остатокот го оценуваме со

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{| x |^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$

Следува $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} R_n(x) = 0$. Значи

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}) \ .$$

3) За функцијата $f(x)=\cos x$ заради: $f^{(4k)}(x)=\cos x$, $f^{(4k+1)}(x)=-\sin x$, $f^{(4k+2)}(x)=-\cos x$, $f^{(4k+3)}(x)=\sin x$, слично како во претходниот пример добиваме

$$\cos x=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right).$$

Со помош на формулата на Тејлор вредноста на функциите во одредена точка ја определуваме како лимес на низа и на тој начин вредноста на функциите e^x, $\sin x$ и $\cos x$ можеме да ја определиме на произволен број децимали.

На крајот во два примера ќе ја примениме формулата на Тејлор за определување лимес на функција и за да покажеме дека бројот e не е рационален

Пример 1: Со помош на преставувањето на бројот e како

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$$

може да покажеме дека бројот e не е рационален. Нека

$$S_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Најпрво ќе покажеме дека

$$S_{n+m}-S_n<\frac{1}{n!\cdot n}$$

Ова неравенство следува од

$$S_{n+m}-S_n<\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...+\frac{1}{(n+m)!}$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\cdot(1+\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(n+1)^{m-1}})$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1-\frac{1}{(n+1)^m}}{1-\frac{1}{n+1}}$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}$$

Ако во претходно докажаното неравенство побараме лимес кога $m\to\infty$ добиваме

$$e-S_q\le\frac{1}{q!q}$$

Специјално,за $q=2$

$$e-S_2\le\frac{1}{2!2},$$

т.е.

$$e\le\frac{11}{4}<3$$

Значи $2<e<3$ и e не е цел број.

Да претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата дека $e=\frac{p}{q}$, каде p и q се природни броеви, $q\ge 2$. Тогаш од

$$0<e-S_q\le\frac{1}{q!q}$$

добиваме

$$0<q!e-q!S_q\le\frac{1}{q}.$$

Бројот $q!S_q$ е природен,а од претпоставката следува дека и $q!e$ е природен број. Добиваме дека $q!e - q!S_q$ е природен број поголем од нула, а помал од 1, што е контрадикција.

Пример 2: Со помош на формулата на Тејлор може да се определат некои посложени лимеси, како

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$$

Според формулата на Тејлор

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^{tx}}{3!}\cdot x^3 \ ,$$

каде $0 < t < 1$. Следува

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{e^{-\frac{tx^2}{2}}}{6}\cdot\frac{x^6}{8}$$

Исто така

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\cos t_1 x}{720}x^6$$

и

$$\sin x = x - \frac{\cos t_2 x}{6}x^3$$

каде $0 < t_1 < 1$, $0 < t_2 < 1$.

Сега, заради $0 \le e^{-\frac{tx^2}{2}} \le 1$, и $-1 \le \cos t_i x \le 1$ за $i = 1,2$ добиваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{tx^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48}\cdot e^{-\frac{tx^2}{2}}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}\cos t_1 x}{x^3(x-\frac{x^3}{6}\cos t_2 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}+\frac{x^2}{48}\cdot e^{-\frac{tx^2}{2}}-\frac{1}{24}+\frac{x^2}{720}\cos t_1 x}{1-\frac{x^2}{6}\cos t_2 x}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$$

.

8. ИСПИТУВАЊЕ НА ТЕКОТ НА ФУНКЦИЈА СО ПОМОШ НА ИЗВОДИ

Теорема 1: *Нека функцијата* $f(x)$ *има на интервалот* (a,b) *непрекинати изводи заклучно со* n*-ти ред* $(n\geq 2)$ *Нека* $x_0\in(a,b)$ *.и*

$$f'(x_0)=0\,,\ f''(x_0)=0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x_0)=0,$$

но $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. *Тогаш:*

1) *за* $n=2m$, *ако* $f^{(n)}(x_0)<0$, *тогаш во* x_0 *функцијата* $f(x)$ *има локален максимум ; ако* $f^{(n)}(x_0)>0$, *тогаш во* x_0, *функцијата* $f(x)$ *има локален минимум.*

2) *за* $n=2m+1$, *во точката* x_0 *функцијата нема екстрем.*

Специјално, ако $n=2$ *и* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ *тогаш при* $f''(x_0)<0$, x_0 *е точка на локален максимум ; при* $f''(x_0)>0$, x_0 *е локален минимум.*

За $n=3$ *и* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, *и* $f'''(x_0)\neq 0$, *точката* x_0 *не е екстрем за* $f(x)$.

Доказ: Ако $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, ... , $f^{(n-1)}(x_0)=0$, и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, тогаш формулата на Тејлор во точката x_0 има вид:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-x_0)^n$$

т.е.

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Нека $f^{(n)}(x_0)>0$. Заради непрекинатоста на функцијата $f^{(n)}(x)$ во точката x_0, постои околина $U=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ така што за $u\in U$,

$$f^{(n)}(u)>0$$

Тогаш за $n=2m$,

$$f(x)-f(x_0)>0,$$

т.е. $f(x)>f(x_0)$, што значи $f(x)$ има локален минимум во x_0

За $n=2m+1$ и за $x-x_0<0$,

$$f(x)-f(x_0)<0$$

додека за $x-x_0>0$,

$$f(x)-f(x_0)>0,$$

што значи дека функцијата $f(x)$ нема локален екстрем во x_0 .

Слично постапуваме за $f^{(n)}(x_0)<0$. Заради непрекинатоста на функцијата $f^{(n)}(x)$ во точката x_0, постои околина $U=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ така што за $u\in U$,

$$f^{(n)}(u)<0$$

Тогаш за $n=2m$,

$$f(x)-f(x_0)<0,$$

т.е. $f(x) < f(x_0)$, што значи $f(x)$ има локален максимум во x_0 .

За $n = 2m+1$, како и погоре добиваме дека функцијата $f(x)$ нема локален екстрем во x_0 .

Теорема 2: *Нека* $f(x)$ *е непрекината на интервалот* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$*, и има извод на тој интервал , освен можеби во точката* x_0.

Ако $f'(x) < 0$ *за* $x \in (x_0-\delta, x_0)$ *и* $f'(x) > 0$ *за* $x \in (x_0, x_0+\delta)$*, тогаш функцијата* $f(x)$ *има локален минимум во* x_0 *; ако* $f'(x) > 0$ *за* $x \in (x_0-\delta, x_0)$ *и* $f'(x) < 0$ *за* $x \in (x_0, x_0+\delta)$ *тогаш функцијата има локален максимум во* x_0 .

Доказ: Нека $f'(x) < 0$ за $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалот $(x_0-\delta, x_0]$. Според теоремата за средна вредност за $x \in (x_0-\delta, x_0)$ постои u, $x < u < x_0$ така што

$$f(x) - f(x_0) = f'(u)(x - x_0).$$

Заради ова $f(x) > f(x_0)$ за сите $x \in (x_0-\delta, x_0)$. На ист начин се покажува дека $f(x) > f(x_0)$ за $x \in (x_0, x_0+\delta)$. Следува $f(x)$ има локален минимум во x_0 .

Пример: 1) Функциите

$$f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

и

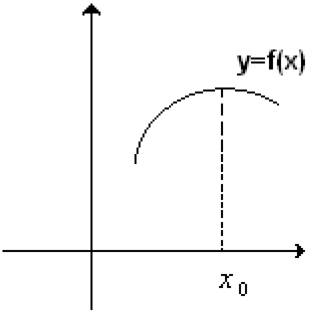
$$f_2(x) = x^{2/3}e^{-x}$$

имаат минимум во точката $x_0 = 0$ иако немаат извод во таа точка..

<u>**Конвексност.Конкавност.Превојни точки**</u> Нека $f(x)$ е диференцијабилна функција во некоја околина на точката x_0. Тогаш

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

е равенката на тангентата на функцијата $f(x)$ во точката x_0.



Дефиниција: *Функцијата* $f(x)$ ***е конкавна*** (***испакната***) *во точката* x_0, *ако постои* $\delta > 0$ *така што за* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

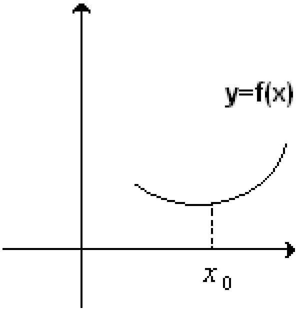
$$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

т.е. графикот на функцијата е под тангентата

Функцијата $f(x)$ *е* ***конвексна*** (***вдлабната***) *во точката* x_0, *ако постои* $\delta > 0$ *така што за* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

т.е. графикот на функцијата е над тангентата .



Дефиниција: *Функцијата* $f(x)$ *има* ***превојна точка во*** x_0, *ако постои* $\delta > 0$ *така што за* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$,

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

и за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$,

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

или : ако постои $\delta > 0$ *така што за* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$,

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

и за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$,

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Теорема 3: *Нека функцијата* $f(x)$ *има на интервалот* (a,b) *непрекинати изводи до* n*-ти ред заклучно* $(n \geq 2)$. *Нека* $x_0 \in (a,b)$.

Ако $f''(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *но* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ *тогаш :*

1) *за* $n = 2m$, *ако* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *тогаш* $f(x)$ *е конкавна во* x_0; *ако* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *тогаш функцијата* $f(x)$ *е конвексна во* x_0 .

2) *за* $n = 2m + 1$, *точката* x_0 *е превојна точка за* $f(x)$.

За $n = 3$ *и* $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, *точката* x_0 *е превојна точка за функцијата* $f(x)$.

Доказ: Ако $f''(x_0)=0$, ... , $f^{(n-1)}(x_0)=0$ и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ тогаш формулата на Тејлор во точката x_0 има вид

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-x_0)^n$$

Нека $f^{(n)}(x_0)>0$. Заради непрекинатоста на функцијата $f^{(n)}(x)$ во точката x_0, постои постои околина $U=(x_0-\delta, x_0+\delta)$ така што за $u\in U$,

$$f^{(n)}(u)>0$$

Тогаш: 1) за n = 2m, имаме $(x-x_0)^n>0$ и

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

т.е. $f(x)$ е конвексна во x_0.

2) за n = 2m+1, и $x\in(x_0-\delta, x_0)$, имаме $(x-x_0)^{2m+1}<0$, и заради тоа

$$f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0);$$

за $x\in(x_0, x_0+\delta)$, заради $(x-x_0)^{2m+1}>0$ добиваме

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

т.е. x_0 е превојна точка за функцијата $f(x)$.

Слично се покажува теоремата и кога $f^{(n)}(x_0)<0$.

Теорема 4: *Нека* $f(x)$ *има непрекинат прв извод на* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, *а вториот извод постои освен можеби во точката* x_0.

Ако $f''(x)$ *има знак* + *на* $(x_0-\delta, x_0)$ *и знак* - *на* $(x_0, x_0+\delta)$ *или обратно, тогаш* x_0 *е превојна точка за* $f(x)$.

Ако $f''(x_0)$ *постои тогаш* $f''(x_0)=0$.

Доказ: Заради соодветната теорема за екстреми, функцијата $f'(x)$ има локален екстрем во x_0. (ако притоа постои и $f''(x_0)$ тогаш според теоремата на Ферма $f''(x_0)=0$).

Да претпоставиме дека x_0 е точка на локален максимум за $f'(x)$. Тогаш

$$f'(x)-f'(x_0)<0$$

за $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, и $x \neq x_o$.

Ќе ја формираме функцијата

$$F(x)=f(x)-f'(x_0)\cdot x$$

Заради

$$F'(x)=f'(x)-f'(x_0)<0$$

добиваме дека $F(x)$ опаѓа на $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Следува за $x<x_0$,

$$F(x)-F(x_0)>0$$

т.е.

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)<0$$

Слично за $x>x_0$ добиваме:

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)>0.$$

Следува дека x_0 е превојна точка за функцијата $f(x)$.

Пример: Теоремите кои беа докажани ќе ги примениме за испитување на функцијата

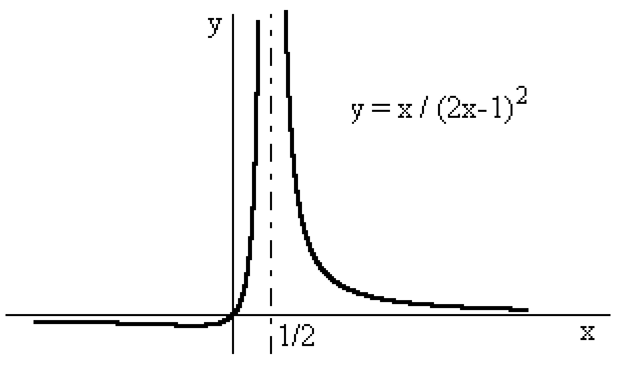
$$f(x)=\frac{x}{(2x-1)^2}$$

Дефиниционата област на оваа функција $(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\infty)$, е унија од два интервала и теоремите од овој дел ќе ги примениме на секој интервал пооделно.

Заради

$$f'(x)=-\frac{2x+1}{(2x-1)^3}\ ,\quad f''(x)=\frac{8x+8}{(2x-1)^4}$$

добиваме $f'(x_0)=0$ за x = -$\frac{1}{2}$ и заради $f''(-\frac{1}{2})>0$, функцијата има минимум во x= -$\frac{1}{2}$. Истотака $f''(x_0)=$ 0 за x = -1 , и функцијата $f''(x\ )$ го менува знакот во околина на -1, што значи дека x = -1 е превојна точка за функцијата.



Лимесите на оваа функција во краевите на дефиниционата област се

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(2x-1)^2}=0\ ,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(2x-1)^2}=0$$

и

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{x}{(2x-1)^2}=\infty\ ,\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{x}{(2x-1)^2}=\infty$$

Според тоа правата $y=0$ е хоризонтална асимптота, а правата $x=\frac{1}{2}$ е вертикална асимптота .

.

VI. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

1. ДЕФИНИЦИЈА НА НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Нека е дадена реална функција $f : P \to \mathbb{R}$ определена на некој интервал P. За функцијата f ќе речеме дека има ***примитивна функција*** на интервалот P ако постои реална функција $F : P \to \mathbb{R}$ таква што

$$F'(x) = f(x),$$

за секој $x \in P$.

Ќе покажеме дека ако $F_1 : P \to \mathbb{R}$ и $F_2 : P \to \mathbb{R}$ се две примитивни функции за функцијата $f : P \to \mathbb{R}$, тогаш постои реален број C таков што

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

Заради претпоставката имаме $F_2'(x) = f(x) = F_1'(x)$ од каде следува

$$(F_2(x) - F_1(x))' = 0.$$

Според последицата на теоремата за средна вредност добиваме

$$F_2(x) - F_1(x) = C$$

за некој реален број C, со што тврдењето е покажано.

Дефиниција: *Множеството од сите примитивни функции за функцијата $f : P \to \mathbb{R}$ се нарекува* ***неопределен интеграл за функцијата*** *f и се означува со*

$$\int f(x)$$

Значи $\int f(x)$ е еднакво со множеството $\{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}$ за некоја примитивна функција $F(x)$. Вообичаено е ова да се означува со

$$\int f(x)=F(x)+C$$

но, ова равенство треба да се сфати како равенство на множества.

Ќе ги наведеме следниве својства на неопределениот интеграл

1) $\int F'(x)=F(x)+C$

2) Ако функцијата $f(x)$ има примитивна, тогаш и функцијата $a\cdot f(x)$ има примитивна функција, и ако реалниот број $a\neq 0$ тогаш

$$\int a\cdot f(x)=a\cdot\int f(x)$$

3) Ако функциите $f_1:P\to\mathbb{R}$ и $f_2:P\to\mathbb{R}$ имаат примитивни функции тогаш и функцијата f_1+f_2 има примитивна функција на интервалот P и притоа

$$\int (f_1(x)+f_2(x))=\int f_1(x)\ +\int f_2(x)$$

За доказот на 2) нека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$. Тогаш $a\cdot F(x)$ е примитивна функција за $a\cdot f(x)$ затоа што $(a\cdot F(x))'=a\cdot f(x)$ и по дефиниција за $a\neq 0$

$$\begin{aligned}\int a\cdot f(x)&=\{a\cdot F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}\\ &=a\cdot\{F(x)+\frac{C}{a} \mid C\in\mathbb{R}\}\\ &=a\cdot\int f(x)\end{aligned}$$

За да го покажеме 3) нека F_1 и F_2 се примитивни функции за функциите f_1 и f_2 соодветно. Заради $(F_1+F_2)'=f_1+f_2$, функцијата F_1+F_2 е примитивна функција за f_1+f_2 . Според дефиницијата

$$\int f_1(x) + \int f_2(x) = \{F_1(x)+C_1 \mid C_1 \in \mathbb{R}\} + \{F_2(x)+C_2 \mid C_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{F_1(x)+F_2(x)+C_1+C_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \int (f_1(x)+f_2(x))$$

Теорема 1: *Нека* $u(x)$ *и* $v(x)$ *се диференцијабилни функции на интервалот* P *и нека функцијата* $v(x)u'(x)$ *има примитивна функција на* P. *Тогаш и функцијата* $u(x)v'(x)$ *има примитивна функција и*

$$\int u(x)v'(x) = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)$$

Последното равенство се нарекува ***формула за парцијална интеграција***..

Доказ: Нека примитивната функција на $v(x)u'(x)$ ја означиме со $W(x)$. Според правилото за диференцирање на производ

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x) .$$

Од условите на теоремата и својството 3) функцијата

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - v(x)u'(x)$$

има примитивна функција. Тогаш од својствата 1) и 2) следува

$$\int u(x)v'(x) = u(x)v(x) - W(x) + C$$

$$= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)$$

Теорема 2: *Нека функцијата* $f(u)$ *има примитивна функција* $F(u)$ *на интервалот* U, *и нека* $\phi : P \to U$ *е диференцијабилна функција на интервалот* P. *Тогаш*

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) = F(\phi(x)) + C$$

Ова равенство се нарекува ***формула за смена на променлива***.

Доказ: Според правилото за диференцирање на сложена функција добиваме

$$\begin{aligned}(F(\phi(x)))' &= F'(\phi(x))\phi'(x)\\ &= f(\phi(x))\phi'(x)\end{aligned}$$

т.е. $F(\phi(x))$ е примитивна функција за $f(\phi(x))\phi'(x)$.

Иако, за неопределениот интеграл на реалната функција $f : P \to \mathbb{R}$ ја користевме ознаката $\int f(x)$, повообичаена е ознаката

$$\int f(x) \cdot dx$$

Изразот "dx" се нарекува ***диференцијал на*** x .

Ако $f : P \to \mathbb{R}$ е диференцијабилна функција , зададена со правилото $y = f(x)$ тогаш по дефиниција

$$dy = y'dx$$

или

$$dy(x) = f'(x)dx$$

Изразена со помош на диференцијал формулата за парцијална интеграција добива вид,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Истотака, формулата за смена на променлива може да се запише како

$$\int f(\phi(x))d\phi(x) = F(\phi(x)) + C$$

2. ТАБЛИЦА НА ОСНОВНИ ИНТЕГРАЛИ

Од таблицата на изводи на елементарни функции се добива следнава таблица на основни интеграли

1°	$\int 1\cdot dx = x + C$
2°	$\int 0\cdot dx = C$
3°	$\int x^p\,dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C,\quad p \neq -1$
4°	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$
5°	$\int e^x\,dx = e^x + C$
6°	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
7°	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
8°	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
9°	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
10°	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
11°	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
12°	$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

Равенствата се точни на секој од интервалите содржани во дефиниционата област на подинтегралната функција поодделно.

На пример, за функцијата $f(x)=\dfrac{1}{x}$ чија дефинициона област е множеството $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ равенството 4^0 за целата дефинициона област би добило форма

$$\int\frac{dx}{x}=\begin{cases}\ln x+C_1 & , \quad x>0\\ \ln(-x)+C_2 & , \quad x<0\end{cases}$$

.

3. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ НА НЕКОИ КЛАСИ ФУНКЦИИ

Изразувањето на примитивната функција со помош на елементарни функции се нарекува решавање на неопределен интеграл или интегрирање на подинтегралната функција. Во овој дел ќе го најдеме неопределениот интеграл за некои класи функции.

Комплексен полином $P(x)$ со степен n е пресликување $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (со $\mathbb{C}$ го означува множеството комплексни броеви) зададено со правилото

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0$$

каде $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ се комплексни броеви и $a_n\neq 0$.

Природниот број n се нарекува степен на полиномот.

Корен a на полиномот $P(x)$ е број таков што $P(a)=0$. Ако $a\in\mathbb{R}$, тогаш a ќе го наречеме реален корен.

Коренот a на полиномот $P(x)$ има кратност k ако

$$P(x)=(x-a)^kP_1(x)$$

при што $P_1(x)$ е полином таков што $P_1(a)\neq 0$.

Ако коефициентите $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ се реални броеви, тогаш $P(x)$ се нарекува ***полином со реални коефициенти***, или само ***полином***.

Ако a е реален корен на полиномот $P(x)$ тогаш

$$P(x) = (x-a)P_1(x)$$

при што $P_1(x)$ е полином со реални коефициенти и степен $n-1$.

Нека $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми и нека D е подмножеството од реалните броеви определено со $D = \mathbb{R} \setminus \{a \mid a$ е реален корен на $Q(x)\}$. Реалната функција $f : D \to \mathbb{R}$ определена со правилото

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

се нарекува (дробно)-рационална функција.

Дробно-рационалната функција се нарекува правилна, ако степенот на $P(x)$ е помал од степенот на $Q(x)$.

Ако $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ не е правилна дробно рационална функција, тогаш таа може да се претстави како

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

каде што $R(x)$ е полином, а $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ е правилна рационална функција.

Теорема 1: *Нека* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *е правилна рационална функција и* a *е реален корен на полиномот* $Q(x)$ *со кратност* $r \geq 1$, *тогаш постои реален број* A *и полином* $P_1(x)$ *таков што*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^r} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{r-1}Q_1(x)},$$

и притоа рационалната функција $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{r-1}Q_1(x)}$ *е правилна.*

Доказ: Заради тоа што a е реален корен на полиномот $Q(x)$ со кратност r,

$$Q(x) = (x-a)^r Q_1(x)$$

при што $Q_1(a) \neq 0$. Следува за A реален број,

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A}{(x-a)^r} + \frac{P(x)}{(x-a)^r Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^r}\\ &= \frac{A}{(x-a)^r} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^r Q_1(x)}\end{aligned}$$

при што вториот член на изразот од десната страна е правилна рационална функција.

Реалниот број A го избираме така што a да е корен на полиномот $P(x) - AQ_1(x)$ (т.е. $P(a) - AQ_1(a) = 0$ од каде што $A = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$). Следува

$$P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x)$$

од каде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^r} + \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)^r Q_1(x)}$$

со што теоремата е докажана .

За да покажеме слична теорема како претходната за комплексни корени, најпрво да забележиме дека ако $P(x)$ е полином со реални коефициенти и $z \in \mathbb{C}$, е произволен комплексен број тогаш

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \overline{a_0}$$

$$= a_n \cdot \overline{z^n} + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \overline{z} + a_0$$
$$= P(\overline{z}).$$

Следува, ако z_1 е корен на $P(z)$, тогаш и $\overline{z_1}$ е корен на $P(z)$. Исто така, ако z_1 има кратност $s \geq 1$, тогаш и $\overline{z_1}$ има иста кратност.

Ако $z_1 = a + ib$ и $\overline{z_1} = a - ib$ каде што a и b се реални броеви тогаш заради

$$(x - a - ib)\cdot(x - a + ib) = (x - a)^2 + b^2$$

имаме::

$$(x - z_1)\cdot(x - \overline{z_1}) = x^2 + px + q,$$

каде што p и q се реални броеви така што $p^2 - 4q < 0$.

Следува ако комплексниот корен z_1 има кратност $s \geq 1$ тогаш

$$P(x) = (x^2 + px + q)^s \cdot Q(x),$$

каде што за реалниот полином $Q(x)$, е исполнето $Q(z_1) \neq 0$.

Теорема 2: *Нека* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *е правилна рационална функција ,* z_1 *комплексен корен на полиномот* $Q(x)$ *со кратност* s *и нека* $x^2 + px + q = (x - z_1)\cdot(x - \overline{z_1})$. *Тогаш постојат реални броеви* M , N *и полиноми со реални коефициенти* $P_1(x)$ *и* $Q_1(x)$ *такви што*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^s} + \frac{P_1(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^{s-1} Q_1(x)}$$

и притоа рационалната функција $\dfrac{P_1(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^{s-1} Q_1(x)}$ *е правилна.*

Доказ: Заради тоа што z_1 е комплексен корен на $Q(x)$ со кратност s

$$Q(x)=(x^2+px+q)^s Q_1(x),$$

при што за полиномот со реални коефициенти $Q_1(x)$, $Q_1(z_1)\neq 0$. Следува за реални броеви M и N,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{P(x)}{\left(x^2+px+q\right)^s Q_1(x)}-\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^s}$$

$$=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}+\frac{P(x)-(Mx+N)\cdot Q_1(x)}{(x^2+px+q)^s Q_1(x)}\ ,$$

при што вториот член на изразот од десната страна е правилна рационална функција.

Реалните броеви M и N ќе ги избереме така што z_1 да е корен на полиномот $P(x)-(Mx+N)\cdot Q_1(x)$ т.е. од условот

$$P(z_1)-(Mz_1+N)\cdot Q_1(z_1)=0$$

од каде

$$Mz_1+N=\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$$

(сега, ако $z_1=a+ib$, и $\dfrac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}=A+iB$ каде a,b,A,B се реални броеви тогаш од

$$A+iB=M(a+ib)+N$$

добиваме $Ma+N=A$ и $Mb=B$ од каде $M=\dfrac{B}{b}$ и $N=A-B\dfrac{a}{b}$)

. Со овие значења на M и N, комплексниот број $\overline{z}_1$ е исто така корен на полиномот $P(x)-(Mx+N)\cdot Q_1(x)$, од каде

$$P(x)-(Mx+N)\cdot Q_1(x)=(x^2+px+q)P_1(x).$$

Следува

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{\left(x^2+px+q\right)\cdot P_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^s\cdot Q_1(x)},$$

со што теоремата е докажана.

Како последица на двете претходни теореми ја добиваме следнава теорема.

Теорема 3: Нека $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ е правилна рационална функција и

$$Q(x)=(x-a_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{r_k}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}$$

каде што $\{a_i \mid i=1,2,\ldots,k\}$ се сите различни реални корени на полиномот $Q(x)$, и постојат различни комплексни корени $\{z_j \mid j = 1, 2, \ldots, l\}$ на $Q(x)$ такви што

$$(x-z_j)(x-\overline{z_j})=x^2+p_jx+q_j$$

за $j = 1, 2, \ldots, l$.

Тогаш

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{r_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{r_1}}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{A_1^{(k)}}{x-a_k}+\frac{A_2^{(k)}}{(x-a_k)^2}+\ldots+\frac{A_{r_k}^{(k)}}{(x-a_k)^{r_k}}+$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots+\frac{M_{s_1}^{(1)}x+N_{s_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{M_1^{(l)}x+N_1^{(l)}}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{M_2^{(l)}x+N_2^{(l)}}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^2}+\ldots+\frac{M_{s_1}^{(l)}x+N_{s_1}^{(l)}}{\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}}$$

при што сите коефициенти $A_s^{(i)}, M_s^{(j)}, N_s^{(j)}$ се реални броеви.

Доказ: Полиномот $Q(x)$ ќе го претставиме во вид

$$Q(x)=(x-a_1)^{r_1}Q_1(x),$$

каде што

$$Q_1(x)=(x-a_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{r_k}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}\quad .$$

Според претходната теорема за реални корени

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{r_1}^{(1)}}{(x-a)^{r_1}}+\frac{P_1(x)}{(x-a_1)^{r_1-1}Q_1(x)}$$

Со повеќекратна примена на истата теорема добиваме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{r_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{r_1}}+\ldots+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2}+\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{P_2(x)}{Q_1(x)}\,,$$

и понатаму

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{A_{r_i}^{(i)}}{(x-a_i)^{r_i}}+\ldots+\frac{A_2^{(i)}}{(x-a_i)^2}+\frac{A_1^{(i)}}{x-a_i}\right)\;+\;\frac{P_*(x)}{Q_*(x)}$$

каде што

$$Q_*(x)=\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{s_l}$$

и $\dfrac{P_*(x)}{Q_*(x)}$ е правилна рационална функција. Со неколкукратна примена на претходната теорема за комплексн корени, рационалната функција $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ се доведува во бараната форма во теоремата , со што теоремата е докажана.

Според оваа теорема ако се познати сите корени на полиномот $Q(x)$, тогаш секоја рационална функција $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, може да се претстави, како збир на полином и линеарна комбинација на прости рационални функции од тип

$$\frac{1}{(x-a)^r}\;,\quad (r\ge 1)$$

и

$$\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^s}\ ,\quad (s\geq 1)$$

каде M, N, p, q се реални броеви и x^2+px+q има конјугирано комплексни корени .

Интегрирањето на рационалите функции ќе го рагледуваме на секој од интервалите содржани во дефиниционата област, пооделно т.е. всушност ја разгледуваме рестрикцијата на функцијата на таков интервал.

Заради

$$\int\frac{dx}{(x-a)^r}=\begin{cases}\dfrac{1}{(-r+1)(x-a)^{r-1}}+C, & r>1\\ \ln|x-a|+C\ , & r=1\end{cases}$$

интегрирањето на рационални функции се сведува на интегрирање на прости рационални функции од вториот тип. Најпрво ќе го разгледаме следниот специјален случај

$$\int\frac{dt}{a^2+t^2}=\int\frac{a\,d\left(\frac{t}{a}\right)}{a^2\left(\left(\frac{t}{a}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{a}\cdot\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{a}\cdot arctg\frac{t}{a}+C$$

Во општиот случај неопределениот интеграл може да се претстави како

$$\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^s}dx=\int\frac{\frac{M}{2}\left(2x+2\cdot\frac{N}{M}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^s}dx=\frac{M}{2}\cdot\int\frac{2x+2\cdot\frac{N}{M}+p-p}{\left(x^2+px+q\right)^s}dx$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^s}+\frac{M}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{N}{M}-p\right)\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^s}.$$

Во случајот $s=1$ имаме

$$\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q}=\ln\left(x^2+px+q\right)+\mathrm{C}$$

Ако $s>1$ тогаш

$$\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^s}=\frac{1}{(-s+1)\left(x^2+px+q\right)^{s-1}}+\mathrm{C}$$

Од друга страна , заради $q-\frac{p^2}{4}>0$ ако ставиме $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ тогаш a е реален број. Имаме за $s=1$

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C$$

каде што $t=x+\frac{p}{2}$, и за $s>1$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^s}=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^s}$$

Останува да се реши неопределениот интеграл

$$J_s=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^s}\quad,\qquad (\,a>0,s>1\,)\ .$$

Заради

$$J_s=\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{a^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^s}=\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{t^2+a^2-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^s}dt$$

Следува дека

$$J_s=\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{s-1}}-\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^s}\ .$$

применувајќи ја формулата за парцијална интеграција на вториот член од десната страна со

$$u=t\ ,\qquad dv=\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^s}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^s},$$

$$du=dt,\qquad v=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(-s+1\right)\left(t^2+a^2\right)^{s-1}}\cdot,$$

се добива

$$J_s=\frac{1}{a^2}\cdot J_{s-1}-\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{\left(-s+1\right)\left(t^2+a^2\right)^{s-1}}+\frac{1}{2a^2\left(-s+1\right)}\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{s-1}}\ .$$

Следува, бараниот неопределен интеграл може да се пресмета по оваа рекурентна формула

$$J_s = \frac{3-2s}{2a^2(1-s)} \cdot J_{s-1} - \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{t}{(-s+1)(t^2+a^2)^{s-1}}$$

Интегрирање на некои тригонометриски функции Како што видовме,постои метод за решавање на неопределен интеграл на рационални функции - познат како метод на неопределени коефициенти. Заради ова, целта на повеќето методи за наоѓање на неопределен интеграл е со некоја смена интегралот да се сведе на интеграл од рационална функција.

Пример за ова е следнава класа тригонометриски функции. Полином со степен n со променливи x и y е изразот

$$P(x,y) = \sum_{i+j \le n} a_{ij} x^i y^j$$

каде што a_{ij} се реални броеви (за $n=2$ тоа е изразот $a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$).

Нека е даден количникот

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

каде $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ се полиноми од две променливи, и нека

$$R(\sin x, \cos x)$$

е зададена тригонометриска функција чија дефинициона област е множеството D. Најпрво преку равенствата

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

и

$$\cos x = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

кои се точни за секој $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ја трансформираме оваа функција во вид

$$R\,(\frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)})\,.$$

Неопределениот интеграл на оваа функција ќе го определиме пооделно, на секој од интервалите чија унија е множеството $D \cap \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Сега, со помош на смената $t = tg\,\dfrac{x}{2}$, имаме:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2\,dt}{1+t^2}\,,$$

т.е. интегралот е сведен на интеграл на рационална функција.

<u>Интеграли на ирационалните функции</u> Интегралите на ирационалните функции од вид

$$\int R(x, (\frac{ax+b}{cx+e})^{m/n}) \cdot dx\,,$$

каде што a, b, c, e се реални броеви такви што $ae - bc \neq 0$, $a \neq 0$ и $be \neq 0$ со помош на смената $t = (\dfrac{ax+b}{cx+d})^{1/n}$ од каде

$$x = \frac{et^n - b}{a - ct^n}$$

и

$$dx = \frac{at^{n-1}(ae-bc)}{(a-ct^n)^2}\,dt\,,$$

се сведуваат на интеграл на рационална функција

$$\int R(\frac{et^n - b}{a - ct^n}, t^m) \cdot \frac{at^{n-1}(ae-bc)}{(a-ct^n)^2}\,dt\,.$$

VII. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

.

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Нека функцијата $f(x)$ е ***ограничена*** на отсечката $[a,b]$.

Дефиниција: Разбивање на $[a,b]$ е конечното множество точки $T=\{x_0, x_1,..., x_n\}$, $a=x_0<x_1<...<x_n=b$.

Воведуваме ознаки:

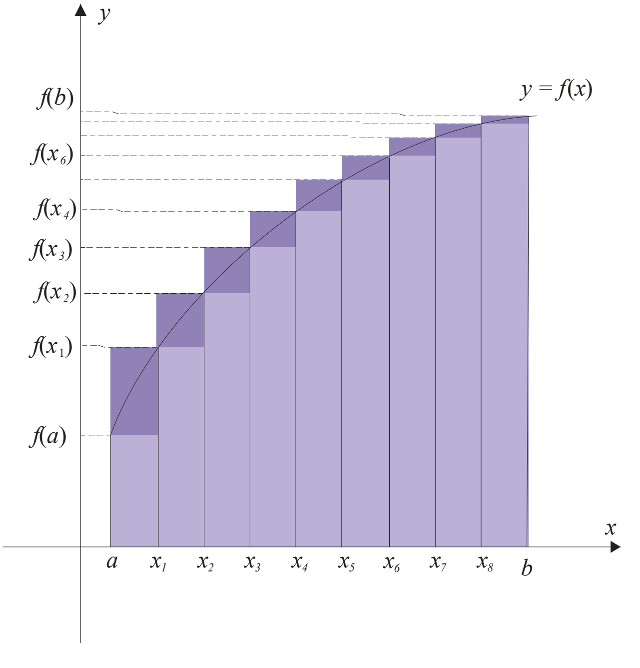
$$M_i=\sup\{f(x)\,|\,x\in[x_i,x_{i+1}]\},\ m_i=\inf\{f(x)\,|\,x\in[x_i,x_{i+1}]\}$$

и

$$S(T)=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i\ ,\ s(T)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i\ .$$

при што $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

Сумите $S(T)$ и $s(T)$ ги нарекуваме ***горна и долна сума на Дарбу.***



На сликата $f(x) \geq 0$ е непрекината функција на интервалот $[a, b]$, и $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ е разбивање на интервалот $[a, b]$. Горната интегрална сума $S(T)$ за разбивањето $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ е точно, површината на повисоката скалестата фигура претставена на цртежот, а долната интегрална сума $s(T)$ е површината на пониската скалестата фигура.

Ги воведуваме и ознаките:

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\},\ m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

и

$$h(T) = \max\{\Delta x_i \mid i = 0,1,...,n-1\}.$$

$h(T)$ се нарекува чекор на разбивањето T.

Од дефиницијата на сумите на Дарбу веднаш произлегува точноста на следново својство:

1° Ако T, T' се разбивања такви што $T \subseteq T'$ тогаш:

$$S(T) \geq S(T'), \quad s(T) \leq s(T')$$

и

$$S(T') - s(T') \leq S(T) - s(T)$$

Со помош на ова својство ќе го покажеме и следното својство:

2° За произволни две разбивања T_1, T_2 на интервалот $[a,b]$, исполнето е:

$$s(T_1) \leq S(T_2).$$

Од 1° заради $T_1 \subseteq T_1 \cup T_2$, $T_2 \subseteq T_1 \cup T_2$, добиваме:

$$s(T_1) \leq s(T_1 \cup T_2) \leq S(T_1 \cup T_2) \leq S(T_2).$$

Теорема 1: *Нека* (T_k) *е низа од разбивања на* $[a,b]$ *таква што*

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq ... \subseteq T_k \subseteq ...$$

тогаш постојат конечни $\lim\limits_{k\to\infty} s(T_k)$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} S(T_k)$.

Доказ: Тогаш $s(T_1) \le s(T_2) \le \ldots$ е растечка низа и заради $s(T_k) \le S(T_1)$ низата е и ограничена од горе. Значи постои конечен $\lim\limits_{k\to\infty} s(T_k)$.

Слично заради $S(T_1) \ge S(T_2) \ge \ldots$ постои конечен $\lim\limits_{k\to\infty} S(T_k)$.

Теорема 2. *Нека* $T \subseteq T'$, *при што* T' *е добиено од* T *со додавање на* p *нови точки. Тогаш:*

$$0 \le S(T) - S(T') \le p\cdot(M-m)\cdot h(T)$$

и

$$0 \le s(T') - s(T) \le p\cdot(M-m)\cdot h(T)$$

Доказ. Доволно е да ја покажеме теоремата за $p = 1$. Нека $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ е разбивање на интервалот $[a,b]$ и нека $T' = T \cup \{x'\}$, при што $x_k \le x' \le x_{k+1}$. Тогаш ако со M' и M'' означиме $M' = \sup\{f(x) \mid x \in [x_k, x']\}$ и $M'' = \sup\{f(x) \mid x \in [x', x_{k+1}]\}$ тогаш:

$$S(T') = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \Delta x_i + M'(x' - x_k) + M''(x_{k+1} - x) + \sum_{i=k+1}^{n-1} M_i \Delta x_i\,.$$

Следува:

$$\begin{aligned}
0 \le S(T) - S(T') &= M_k(x_{k+1} - x_k) - M'(x' - x_k) - M''(x_{k+1} - x') \\
&= (M_k - M')(x' - x_k) + (M_k - M'')(x_{k+1} - x') \\
&\le (M_k - m_k)(x' - x_k) + (M_k - m_k)(x_{k+1} - x') \\
&\le (M_k - m_k)\,(x_{k+1} - x_k) \\
&\le (M - m)\cdot h(T)
\end{aligned}$$

Слично се докажува и второто тврдење.

Дефиниција: *Функцијата е* ***интеграбилна*** *на интервалот* $[a,b]$ *ако за секој* $\varepsilon > 0$, *постои разбивање* T *такво што* $S(T) - s(T) < \varepsilon$

Теорема 3: *Ако функцијата е интеграбилна тогаш за секој* $\varepsilon > 0$ *постои* $\delta > 0$ *така што ако* $h(T) < \delta$ *тогаш* $S(T) - s(T) < \varepsilon$

Доказ: Нека избереме T' така што $S(T') - s(T') < \varepsilon / 3$ и нека T' има p точки во интервалот (a,b). Нека избереме

$$\delta < \frac{\varepsilon}{3(M-m)p}$$

и нека T е разбивање такво што $h(T) < \delta$. Тогаш

$$S(T) - S(T \cup T') < p(M-m)h(T) < p(M-m)\frac{\varepsilon}{3(M-m)p} = \frac{\varepsilon}{3}$$

т.е.

$$S(T) - S(T \cup T') < \frac{\varepsilon}{3}$$

и слично

$$s(T \cup T') - s(T) < \frac{\varepsilon}{3} \ ,$$

од каде со собирање на двете неравенства добиваме:

$$S(T) - s(T) < S(T \cup T') - s(T \cup T') + 2\frac{\varepsilon}{3} .$$

од друга страна

$$S(T \cup T') - s(T \cup T') < S(T') - s(T') < \frac{\varepsilon}{3}$$

Следува

$$S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ .$$

Последица: *Ако функцијата е интеграбилна тогаш од* $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ *следува* $\lim_{k\to\infty}(S(T_k) - s(T_k)) = 0$.

Доказ: Функцијата е интеграбилна, т.е. за секој $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ така што ако $h(T) < \delta$ тогаш $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Од $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ следува дека постои k_0 таков што за сите $k \ge k_0$

$$h(T_k) < \delta$$

Следува

$$S(T_k) - s(T_k) < \varepsilon .$$

т.е.

$$\lim_{k\to\infty}(S(T_k) - s(T_k)) = 0 .$$

Теорема 4: *Нека* (T_k) *е низа од разбивања на* $[a,b]$ *таква што* $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ *и*

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k \subseteq \ldots$$

Следните услови се еквивалентни:

1) *функцијата е интеграбилна на* $[a,b]$

2) $$\lim_{k\to\infty} S(T_k) = \lim_{k\to\infty} s(T_k)$$

Доказ: 1) $\Rightarrow$ 2) Заради Теорема 1 постојат конечни $\lim_{k\to\infty} S(T_k)$ и $\lim_{k\to\infty} s(T_k)$. Заради претходната последица

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k) - \lim_{k\to\infty} s(T_k) = 0$$

т.е. .

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k) = \lim_{k\to\infty} s(T_k)$$

2) $\Rightarrow$ 1) Во другата насока: нека $\lim_{k\to\infty} S(T_k) = \lim_{k\to\infty} s(T_k)$ т.е.

$$\lim_{k\to\infty}(S(T_k) - s(T_k)) = 0$$

Тогаш за даден $\varepsilon > 0$ постои k_0 таков што за $k \ge k_0$,

$$S(T_k) - s(T_k) < \varepsilon$$

т.е. функцијата е интеграбилна..

Претходните теореми овозможуваат да дефинираме определен интеграл $\int_a^b f(x)dx$ за интеграбилна функција $f(x)$ на $[a,b]$ како реален број определен на следниов начин:

Дефиниција: *За интеграбилна функција на* $[a,b]$, *дефинираме* ***определен интеграл*** *на функцијата на интервалот* $[a,b]$, *избирајќи низа* (T_k) *од разбивања на* $[a,b]$ *таква што* $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ *и*

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k \subseteq \ldots$$

По дефиниција определен интеграл е реалниот број

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} S(T_k) = \lim_{k\to\infty} s(T_k)\,.$$

Забелешка: Наместо низа (T_k) од разбивања на $[a,b]$ таква што $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ и $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k \subseteq \ldots$, можеме да бараме низата (T_k) само да го исполнува условот $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$, но во тој случај доказите на теоремите се посложени.

На сликата површината P на криволинискиот трапез во рамнината заграден со правите $x = a$, $x = b$, x-оската и графикот на непрекинатата функција $f(x) \geq 0$ т.е. множеството точки од рамнината определено со $\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ е реален број P таков што

$$s(T_k) \leq P \leq S(T_k).$$

Ако (T_k) е низа од од разбивања на $[a,b]$ таква што $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k \subseteq \ldots$ и $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$, горната сума $S(T_k)$ и долната сума $s(T_k)$ се приближуваат кон реалниот број P, плоштината на криволинискиот трапез. Според ова,

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k) = P = \lim_{k\to\infty} s(T_k)$$

т.е.

$$P = \int_a^b f(x)\,dx$$

Значи определениот интеграл на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b]$ како реален број е еднаква со површината на криволинискиот трапез.

Треба да покажеме дека дефиницијата е добра т.е. дека не зависи од изборот на низата. Затоа нека (T_k') е друга низа од разбивања на $[a,b]$ таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k') = 0$ и

$$T_1' \subseteq T_2' \subseteq \ldots \subseteq T_k' \subseteq \ldots\ .$$

Тогаш

$$\lim_{k\to\infty} s(T_k') \le \lim_{k\to\infty} S(T_k) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} s(T_k) \le \lim_{k\to\infty}\ S(T_k')$$

Заради $\lim\limits_{k\to\infty} s(T_k') = \lim\limits_{k\to\infty}\ S(T_k')$ добиваме дека дефиницијата не зависи од изборот на разбивањата.

Примери: 1) Нека C е реален број. Константната функција определена со $f(x) = C$ за секој реален број x, е интеграбилна на секој $[a,b]$, заради тоа што за низа (T_k) од разбивања на $[a,b]$ во која бројот на точки се зголемува, таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ имаме

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k) = C\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = C\cdot(b-a) = \lim_{k\to\infty} s(T_k)$$

Следува

$$\int_a^b C\cdot dx = C\cdot(b-a)$$

2) Постојат ограничени функции кои не се интеграбилни. Нека ја разгледаме функцијата на Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Тогаш на произволен интервал $[a,b]$, и разбивање Т на $[a,b]$ имаме

$$S(T)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b-a\ ,$$

и

$$s(T)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = 0$$

од каде

$$S(T)-s(T)=b-a\,,$$

за произволно разбивање на интервалот $\left[a,b\right]$.

За низа (T_k) од разбивања на $[a,b]$, во која бројот на точки се зголемува, и таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k)=0$ имаме

$$\lim_{k\to\infty}(S(T_k)-s(T_k)) = b-a \neq 0$$

што значи дека функцијата не е интеграбилна.

Дефиниција: $f(x)$ *е интеграбилна на интервалот* $\left[a,b\right]$*, тогаш по дефиниција*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Истотака

$$\int_a^a f(x)dx = 0:$$

Дефиниција: (*интегрални суми на Риман*) *Нека е дадено разбивање* $T=\{x_0, x_1, ..., x_n\}$. *Ако избереме по една точка* $u_i \in [x_i, x_{i+1}],\ i=0,1,...,n-1$, *тогаш сумата :*

$$R(T)=\sum_{i=0}^{n-1} f(u_i)\Delta x_i$$

се нарекува ***интегрална сума на Риман*** *за функцијта* $f(x)$ *на интервалот* $[a,b]$ (*и за избраните точки* $u_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,...,n-1$).

Секогаш е точно неравенството

$$s(T) \le R(T) \le S(T)$$

Теорема 4. *Нека функцијата* $f(x)$ *е интеграбилна на интервалот* $[a,b]$ *и нека* (T_k) *е низа од разбивања на* $[a,b]$ *таква што* $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ *и*

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_k \subseteq \dots$$

Тогаш

$$\lim_{k\to\infty} R(T_k) = \int_a^b f(x)dx$$

Доказ: Заради

$$s(T_k) \le R(T_k) \le S(T_k)$$

и заради интеграбилноста на функцијата $f(x)$ добиваме

$$\lim_{k\to\infty} R(T_k) = \int_a^b f(x)dx .$$

Теорема 5. *Нека функцијата* $f(x)$ *е интеграбилна на интервалот* $[a,b]$ *и нека* $f(x)$ *има примитивна функција* $F(x)$ *на* $[a,b]$. *Тогаш:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

Доказ. Нека $F(x)$ е примитивна функција на $f(x)$ на $[a,b]$ и $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ разбивање на $[a,b]$. Според теоремата за средна вредност постојат точки $v_i \in [x_i, x_{i+1}]$, за кои :

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(v_i)(x_{i+1} - x_i) = f(v_i)(x_{i+1} - x_i),$$

за $i = 0,1,...,n-1$. Следува

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(v_i)\Delta x_i$$

$$s(T) \leq F(b) - F(a) \leq S(T).$$

Нека (T_k) е низа од разбивања на $[a,b]$ таква што $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ и

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq ... \subseteq T_k \subseteq ...$$

Тогаш

$$s(T_k) \leq F(b) - F(a) \leq S(T_k)$$

и заради интеграбилноста на функцијата $f(x)$ добиваме

$$\lim_{k\to\infty} s(T_k) = F(b) - F(a) = \lim_{k\to\infty} S(T_k)$$

и

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Најчесто оваа формула ја запишуваме како

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

и е позната како ***формула на Њутн-Лајбниц*** (Newton, Isaac, 1642-1727, англиски математичар и физичар), (Leibnitz, Gottfried, 1646-1716, германски математичар и филозоф).

.

2. СВОЈСТВА НА ОПРЕДЕЛЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

Теорема 1. *Ако функцијата* $f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *тогаш таа е интеграбилна и на произволна отсечка* $[a_1,b_1] \subseteq [a,b]$.

Доказ. Нека избереме низа (T_k) од разбивања на интервалот $[a,b]$, во која бројот на точки се зголемува

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k \subseteq \ldots$$

и таква што $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$.

Нека

$$T_k' = T_k \cup \{a_1, b_1\}$$

Тогаш $\lim_{k\to\infty} h(T_k') = 0$ и следува

$$\lim_{k\to\infty}(S(T_k') - s(T_k')) = 0$$

Определуваме разбивање T_k'' на $[a_1,b_1]$ со :

$$T_k'' = T_k' \cap [a_1,b_1].$$

Тогаш:

$$\sum_{T_k''} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \sum_{T_k'} (M_i - m_i)\Delta x_i\,,$$

т.е.

$$S(T_k'') - s(T_k'') \leq S(T_k') - s(T_k'),$$

Следува

$$\lim_{k\to\infty}(S(T_k'') - s(T_k'')) = 0,$$

т.е. $f(x)$ е интеграбилна на $[a_1,b_1]$.

Теорема 2. *Нека* $a < c < b$. *Тогаш ако* $f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,c]$ *и* $[c,b]$ *тогаш таа е интеграбилна и на* $[a,b]$, *при што* :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказ. Нека избереме низа (T_k') од разбивања на интервалот $[a,c]$, во која бројот на точки се зголемува

$$T_1' \subseteq T_2' \subseteq T_3' \subseteq \ldots$$

и таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k') = 0$. Тогаш

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k') = \int_a^c f(x)dx = \lim_{k\to\infty} s(T_k')$$

Нека избереме низа (T_k'') од разбивања на интервалот $[c,b]$, во која бројот на точки се зголемува

$$T_1'' \subseteq T_2'' \subseteq T_3'' \subseteq \ldots$$

и таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k'') = 0$. Тогаш

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k'') = \int_c^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} s(T_k'')$$

Нека ставиме

$$T_k = T_k' \cup T_k''$$

Да забележиме дека

$$S(T_k) = S(T_k') + S(T_k'')$$

и

$$s(T_k) = s(T_k') + s(T_k'') .$$

Тогаш (T_k) е низа од разбивања на интервалот $[a,b]$, во која бројот на точки се зголемува, и таква што $\lim_{k\to\infty} h(T_k)=0$. Имаме

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} S(T_k) &= \lim_{k\to\infty} S(T_k') + \lim_{k\to\infty} S(T_k'') \\ &= \int_a^c f(x)dx \ + \ \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{k\to\infty} s(T_k') + \lim_{k\to\infty} s(T_k'') \\ &= \lim_{k\to\infty} s(T_k)\end{aligned}$$

Знаши постои $\int_a^b f(x)dx$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} S(T_k) = \int_a^c f(x)dx \ + \ \int_c^b f(x)dx$$

што и требаше да се докаже.

Теорема 3. *Ако функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *се интеграбилни на* $[a,b]$ *тогаш и функцијата* $f(x)+g(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *и*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

Доказ. Ако T е произволно разбивање на интервалот $[a,b]$, нека со $S_f(T)$, $S_g(T), S_{f+g}(T)$ и со $s_f(T), s_g(T), s_{f+g}(T)$ ги означиме горните и долните интегрални суми на функциите $f(x), g(x)$ и $f(x)+g(x)$ соодветно. Точни се равенствата

$$S_f(T) + S_g(T) = S_{f+g}(T)$$

и

$$s_f(T) + s_g(T) = s_{f+g}(T)$$

За низа (T_k) од разбивања на интервалот $[a,b]$, во која бројот на точки се зголемува,

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq T_k \subseteq \dots$$

и таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ следува :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} S_{f+g}(T_k) &= \lim_{k\to\infty} S_f(T_k) + \lim_{k\to\infty} S_g(T_k) \\ &= \int_a^b f(x)dx \ + \ \int_a^b g(x)dx \\ &= \lim_{k\to\infty} s_f(T_k) + \lim_{k\to\infty} s_g(T_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} s_{f+g}(T_k)\end{aligned}$$

Значи постои $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx$ и

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim_{k\to\infty} S_{f+g}(T_k) = \int_a^b f(x)dx \ + \ \int_a^b g(x)dx$$

што и требаше да се докаже.

Теорема 4. *Нека функцијата* $f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$. *Тогаш и функцијата* $-f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *и:*

$$\int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Доказ. Ако T е произволно разбивање на интервалот $[a,b]$, нека со $S_f(T)$, $S_{-f}(T)$ и со $s_f(T), s_{-f}(T)$ ги означиме горните и долните интегрални суми на функциите $f(x)$ и $-f(x)$ соодветно.. Тогаш од равенствата

$$S_{-f}(T) = -s_f(T),$$

$$s_{-f}(T) = -S_f(T)$$

За низа (T_k) од разбивања на интервалот $[a,b]$, во која бројот на точки се зголемува,

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k \subseteq \ldots$$

и таква што $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ добиваме

$$\lim_{k\to\infty} S_{-f}(T_k) = \lim_{k\to\infty}(-s_f(T_k)) = \lim_{k\to\infty}(-S_f(T_k)) = \lim_{k\to\infty} s_{-f}(T_k)$$

Значи постои $\int_a^b (-f(x))dx$ и

$$\int_a^b (-f(x))dx = \lim_{k\to\infty} S_{-f}(T_k) = -\lim_{k\to\infty} s_f(T_k) = -\int_a^b f(x)dx$$

што и требаше да се докаже.

Теорема 4. *Нека функцијата* $f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *и* c *е реален број. Тогаш и функцијата* $cf(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *и* :

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Доказ. За $c = 0$ **,** равенството е точно.

Нека $c > 0$. Ако T е произволно разбивање на интервалот $[a,b]$, нека со $S_f(T)$, $S_{c\cdot f}(T)$ и со $s_f(T), s_{c\cdot f}(T)$ ги означиме горните и долните интегрални суми на функциите $f(x)$ и $c \cdot f(x)$ соодветно. Тогаш

$$S_{c\cdot f}(T) = c \cdot S_f(T)$$

и

$$s_{c\cdot f}(T) = c \cdot s_f(T)$$

Нека (T_k) е низа од разбивања на интервалот $[a,b]$, во која бројот на точки се зголемува,

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_k \subseteq \ldots$$

и таква што $\lim_{k\to\infty} h(T_k) = 0$. Добиваме

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} S_{c\cdot f}(T_k) &= c\cdot \lim_{k\to\infty} S_f(T_k)\\ &= c\cdot \int_a^b f(x)dx\\ &= c\cdot \lim_{k\to\infty} s_f(T_k)\\ &= \lim_{k\to\infty} s_{c\cdot f}(T_k)\end{aligned}$$

Значи постои $\int_a^b cf(x)dx$ и

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{k\to\infty} S_{c\cdot f}(T_k) = c\cdot \int_a^b f(x)dx \ .$$

Тогаш според претходната теорема имаме дека постои и $\int_a^b (-cf(x))dx$ и

$$\begin{aligned}\int_a^b (-cf(x))dx &= -\int_a^b cf(x)dx\\ &= -c\cdot \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

.

Теорема 5. *Нека* $f(x)$ *и* $g(x)$ *се функции определени на* $[a,b]$ *кои се разликуваат само во конечен број точки. Ако* $f(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *тогаш и* $g(x)$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *и:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Доказ. Ја формираме функцијата $r(x) = g(x) - f(x)$. Тогаш $r(x) = 0$ освен во конечен број точки кои ќе ги означиме со $t_1, t_2, ..., t_p$. Нека

$$M = \max\left\{0, r(t_1), r(t_2), ..., r(t_p)\right\}.$$

Заради тоа што секоја од овие точки припаѓа на најмногу две отсечки $[x_i, x_{i+1}]$ едновремено, а во останатите точки $r(x) = 0$, за произволно разбивање на $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ на $[a,b]$ имаме

$$S(T) \leq 2p \cdot M \cdot h(T)$$

Заради тоа, за (T_k) низа од разбивања на интервалот $[a,b]$, во која бројот на точки се зголемува,

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq ... \subseteq T_k \subseteq ...$$

и таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ добиваме

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k) \leq 2p \cdot M \cdot h(T_k) = 0 .$$

Слично земајќи

$$m = \min\left\{0, r(t_1), r(t_2), ..., r(t_p)\right\},$$

добиваме

$$\lim_{k\to\infty} s(T_k) \geq 2p \cdot m \cdot h(T_k) = 0$$

Добиваме

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} s(T_k) \leq \lim_{k\to\infty} S(T_k) \leq 0$$

од каде

$$\int_a^b r(x)dx = 0 .$$

Следува:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b r(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Пример. Знаковната функција:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

има прекин од прв ред во точката $x = 0$. Според претходната теорема за $a \le 0 \le b$:

$$\int_a^0 \operatorname{sgn}(x)dx = \int_a^0 (-1)dx = a$$

и

$$\int_0^b \operatorname{sgn}(x)dx = \int_0^b 1 \cdot dx = b,$$

и според тоа функцијата $\operatorname{sgn}(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$ и

$$\int_a^b \operatorname{sgn}(x)dx = a + b.$$

Забелешка: Од претходната теорема следува дека постоењето и вредноста на интегралот на функција не зависи од вредноста на функцијата во конечен број на точки.

Пример. Претходната теорема не е точна за преброиво многу точки. Функцијата на Дирихле не е интеграбилна, иако се разликува од константа само во преброиво многу точки.

Теорема 6. *Ако* $f(x)$ *е интеграбилна функција на* $[a,b]$ *и* $f(x) \ge 0$ *за секој* $x \in [a,b]$ *тогаш*

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Доказ. Нека (T_k) низа од разбивања на интервалот $[a,b]$, во која бројот на точки се зголемува, и таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k)=0$. Тогаш $S(T_k)\geq 0$ и според тоа :

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{k\to\infty} S(T_k)\geq 0\,.$$

Последица 1. *Ако* $f(x)$ *и* $g(x)$ *се интеграбилни функции на* $[a,b]$ *и* $f(x)\geq g(x)$ *за секој* $x\in[a,b]$, *тогаш* :

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Доказ. Од претходната теорема :

$$\int_a^b (f(x)-g(x))dx\geq 0,$$

од каде следува бараното неравенство.

Последица 2. *Нека* $f(x)$ *е интеграбилна функција на отсечката* $[a,b]$ *и нека* $m\leq f(x)\leq M$ *за* $x\in[a,b]$. *Тогаш* :

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a).$$

Доказ. Заради $m\leq f(x)\leq M$ од последица 1, добиваме :

$$\int_a^b m\cdot dx\leq \int_a^b f(x)dx\leq \int_a^b M\cdot dx,$$

од каде следува неравенството во теоремата.

.

3. КЛАСИ НА ИНТЕГРАБИЛНИ ФУНКЦИИ

Теорема 1: *Нека* f *е монотона на* $[a,b]$. *Тогаш* f *е интеграбилна на* $[a,b]$.

Доказ: Ако функцијата е константа тогаш е интеграбилна на $[a,b]$. Нека функцијата е растечка на $[a,b]$. Тогаш за произволна разбивање $T=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ на интервалот $[a,b]$ имаме:

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x\in[x_i,x_{i+1}]\} = f(x_{i+1}),$$
$$m_i = \inf\{f(x) \mid x\in[x_i,x_{i+1}]\} = f(x_i)$$

Тогаш

$$\begin{aligned} S(T)-s(T) &= \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))\Delta x_i \\ &\le h(T)\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i)) \\ &= h(T)(f(b)-f(a)) \end{aligned}$$

Нека (T_k) е низа од разбивања на интервалот $[a,b]$,

$$T_1\subseteq T_2\subseteq ...\subseteq T_k\subseteq ...$$

таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k)=0$. Тогаш

$$\lim_{k\to\infty}(S(T_k)-s(T_k)) \le \lim_{k\to\infty} h(T_k)(f(b)-f(a))=0$$

што значи дека функцијата е интеграбилна на $[a,b]$.

Теорема 2: *Нека* f *е интеграбилна на* $[a,b]$, *нека* $c\le f(x)\le d$ *и нека* g *е непрекината на* $[c,d]$. *Тогаш композицијата* $g\circ f$ *е интеграбилна на* $[a,b]$.

Доказ: Нека е даден $\varepsilon>0$. Нека

$$\overline{M} > \sup\{|g\circ f(x)| \mid x\in[a,b]\}$$

Функцијата g е непрекината на $[c,d]$, и според тоа е и рамномерно непрекината на $[c,d]$. Следува постои $\delta>0$ такво што од

$$|y_1-y_2|<\delta$$

и $y_1,y_2\in[c,d]$ следува

$$|g(y_1)-g(y_2)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Постои разбивање $T=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ такво што

$$S(T)-s(T)<\frac{\delta\cdot\varepsilon}{2\overline{\overline{M}}}.$$

Нека $[x_i,x_{i+1}]$ е интервал за кој $M_i-m_i<\delta$. Тогаш за секој $x,t\in[x_i,x_{i+1}]$ имаме

$$|f(x)-f(t)|<\delta$$

од каде и

$$|g(f(x))-g(f(t))|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ .$$

Нека со $l(T)$ го означиме збирот на должините на интервалите $[x_i,x_{i+1}]$ за кои $M_i-m_i\geq\delta$. Тогаш од

$$\delta\cdot l(T)\leq S(T)-s(T)<\frac{\delta\cdot\varepsilon}{2\overline{\overline{M}}}$$

следува

$$l(T)<\frac{\varepsilon}{2\overline{\overline{M}}}.$$

Следува

$$S_{g\circ f}(T)-s_{g\circ f}(T)\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a-l(T))+l(T)\cdot\overline{\overline{M}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Последица 1. *Ако* f *е непрекината на* $[a,b]$, *тогаш* f *е интеграбилна на* $[a,b]$.

Доказ: Нека $h(x)=x$. Оваа функција е монотона и според теорема 1 е интеграбилна на $[a,b]$. Според претходната теорема функцијата $f(h(x))=f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$.

Последица 2. *Ако* f *и* g *се интеграбилни на* $[a,b]$, *тогаш и* $f^2(x)$ *и* $f(x)\cdot g(x)$ *се интеграбилни на* $[a,b]$.

Доказ: Нека $g(x)=x^2$. Тогаш според теоремата функцијата $g(f(x))=f^2(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$.

Заради

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{2}[(f(x)+g(x))^2-f^2(x)-g^2(x)]$$

Следува дека функцијата $f(x)\cdot g(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$.

Последица 3. *Ако* f *е интеграбилна на* $[a,b]$, *тогаш и* $|f|$ *е интеграбилна на* $[a,b]$ *и*

$$|\int_a^b f(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)|dx$$

Доказ: Нека $g(x)=|x|$. Тогаш $g(f(x))=|f(x)|$ и според претходнта теорема добиваме дека функцијата е интеграбилна на $[a,b]$.

Заради

$$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$$

добиваме

$$-\int_a^b|f(x)|dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b|f(x)|dx,$$

од каде

$$|\int_a^b f(x)dx|\leq\int_a^b|f(x)|dx\ .$$

Последица 4. *Ако* f *е интеграбилна на* $[a,b]$, *тогаш за секој две точки* $u,v\in[a,b]$,

$$|\int_u^v f(x)dx| \le |\int_u^v |f(x)|dx|$$

Доказ: Ако $u < v$ тогаш неравенството следува од последица 3. Нека $u > v$. Тогаш

$$|\int_u^v f(x)dx| = |-\int_v^u f(x)dx| = |\int_v^u f(x)dx|$$

$$\le |\int_v^u |f(x)|dx| = |-\int_u^v |f(x)|dx| = |\int_u^v |f(x)|dx|$$

Теорема 3. *Нека* f *е непрекината во сите точки од* $[a,b]$*, освен во конечно многу, и ограничена на* $[a,b]$*. Тогаш* f *е интеграбилна на* $[a,b]$.

Доказ: Најпрво да го разгледаме случајот кога f е непрекината во сите точки од $[a,b]$ освен можеби во точките a и b. Нека

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\},\ m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

Нека е даден $\varepsilon > 0$. Постојат точки a_1 и b_1 од интервалот $[a,b]$ такви што

$$a_1 - a < \frac{\varepsilon}{3(M-m)}$$

и

$$b - b_1 < \frac{\varepsilon}{3(M-m)} .$$

Функцијата f е непрекината на интервалот $[a_1,b_1]$. Значи постои разбивање $T_1 = \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ на $[a_1,b_1]$,

$$a_1 = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} = b_1 .$$

такво што

$$S(T_1)-s(T_1)<\frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Нека ставиме $T=T_1\cup\{a,b\}$. Тогаш T е разбивање на $[a,b]$ и

$$\begin{aligned} S(T)-s(T) &= (M_0-m_0)(a_1-a)+\sum_{i=1}^{n-2}(M_i-m_i)\Delta x_i+(M_{n-1}-m_{n-1})(b-b_1) \\ &< (M-m)\frac{\varepsilon}{3(M-m)}+S(T_1)-s(T_1)+(M-m)\frac{\varepsilon}{3(M-m)} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Според тоа функцијата е интеграбилна на $[a,b]$.

Во општ случај ако $t_1<...<t_p$ се точките на прекин во интервалот (a,b). Тогаш функцијата е интеграбилна на секој од интервалите $[a,t_1]$, $[t_1,t_2]$, ..., $[t_p,b]$ и според тоа и на нивната унија, интервалот $[a,b]$.

.

4. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ НА НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ. ПОСТОЕЊЕ НА ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА

Ќе го разгледаме прашањето на постоење на примитивна функција за дадена функција.

Теорема 1. *Нека P е интервал и $f(x)$ е функција која е интеграбилна на секој затворен интервал кој се содржи во P и $a\in P$ произволно избрана точка. Тогаш функцијата*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

е непрекината на P.

Ако $f(x)$ *е непрекината во точката* $x_0 \in P$*, тогаш* $F(x)$ *е диференцијабилна во* x_0 *и* :

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Доказ. Нека $x_0 \in P$. Нека u и v се крајните точки на интервалот P. Постои интервал $[b,c]$ таков што $x_0 \in [b,c]$ и: $u = x_0 = b$ или $v = x_0 = c$ или $x_0 \in (b,c)$.

Заради тоа што $f(x)$ е интеграбилна на $[b,c]$, постои реален број $M > 0$ така што:

$$|f(x)| \le M$$

за секој $x \in [b,c]$. Тогаш за разликата

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

ја имаме следнава оцена

$$|F(x) - F(x_0)| \le |\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt| \le M\,|x - x_0|.$$

Следува

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

што значи $F(x)$ е непрекината во x_0. Од произволноста на изборот на x_0 следува дека $F(x)$ е непрекината на P.

Нека x_0 е точка во која функцијата $f(x)$ е непрекината. Ако е даден $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ таков што од

$$|x - x_0| < \delta$$

да следува:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Заради

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{1}{x-x_0}\cdot\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt-f(x_0)(x-x_0)\right)$$

$$=\frac{1}{x-x_0}\cdot\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))dt,$$

следува дека за $|x-x_0|<\delta$,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|\leq\frac{1}{|x-x_0|}\cdot\left|\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,dt\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{|x-x_0|}\cdot\left|\int_{x_0}^{x}dt\right|=\varepsilon$$

Добиваме дека постои прв извод на функцијата $F(x)$ во точката x_0 и:

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

Последица 1. *Нека* $f(x)$ *е непрекината функција на интервалот* P*. Тогаш, за произволна точка* $a\in P$ *функцијата*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

е примитивна за $f(x)$ *на* P.

Теорема 2. *Нека функцијата* $f(x)$ *е непрекината функција на интервалот* P *и нека* $[a,b]\subseteq P$*. Тогаш постои точка* $u\in(a,b)$ *таква што*:

$$\int_a^b f(x)dx=f(u)(b-a)$$

Доказ. Нека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ т.е. $F'(x)=f(x)$ на $[a,b]$. Според теоремата за средна вредност, постои точка $u\in(a,b)$ така што:

$$F(b)-F(a)=F'(u)(b-a)$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = f(u)(b-a)$$

Забелешка. Теоремата е точна и за точки $a,b \in P$ такви што $a > b$ т.е. постои точка и помеѓу b и a, така што равенството е точно.

Теорема 3. *Ако функцијата* $f(x)$ *е непрекината на* $[a,b]$*, и* $f(x) \geq 0$ *за* $x \in [a,b]$*, тогаш:*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Ако постои точка $x_0 \in [a,b]$*, таква што* $f(x_0) > 0$*, тогаш:*

$$\int_a^b f(x)dx > 0 .$$

Доказ. Нека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$ на $[a,b]$. Заради $f(x) \geq 0$ следува функцијата $F(x)$ е монотоно растечка и:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \geq 0$$

Нека постои точка x_0 таква што $f(x_0) > 0$. Ако претпоставиме спротивно на тврдењето на теоремата т.е. дека $\int_a^b f(x)dx = 0$, тогаш $F(b) = F(a)$ и заради $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ следува $F(x) = F(a)$ за секој $x \in [a,b]$, т.е $F(x)$ е константна функција, и следува $f(x) = 0$ за секој $x \in [a,b]$ што е контрадикција.

Теорема 4. *Ако функциите* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имаат непрекинат извод на интервалот* $[a,b]$*, тогаш е точна формулата за интегрирање по делови* (парцијална интеграција)

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\,|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Доказ: Функциите $u(x)v'(x)$, $v(x)u'(x)$ и $(u(x)v(x))'$ се непрекинати, и според тоа интерграбилни на $[a,b]$. Заради

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x),$$

добиваме:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b (v(x)u(x))'dx - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

$$= u(x)v(x)\,|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

Теорема 5.: *Нека функцијата* $f : P \to \mathbb{R}$ *е непрекината на интервалот* P *и нека функцијата* $h : [a,b] \to P$ *има непрекинат извод на интервалот* $[a,b]$. *Тогаш е точна следнава формула за смена на променлива*:

$$\int_a^b f(h(t))h'(t)dt = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx$$

Доказ: Нека функцијата $F(x)$ е примитивна за $f(x)$ на интервалот $[a,b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Заради тоа што $F(h(x))$ е примитивна функција за функцијата $f(h(x))h'(x)$ добиваме:

$$\int_a^b f(h(t))h'(t)dt = F(h(t))\,|_a^b$$

$$= F(x)\,|_{h(a)}^{h(b)}$$

$$= \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx$$

.

5. НЕСВОЈСТВЕН ИНТЕГРАЛ

Нека функцијата $f:[a,\infty)\to R$ е интеграбилна на секој затворен интервал $[a,b]$. Тогаш, функцијата

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

е непрекината на $[a,\infty)$.

Дефиниција. *Ако постои конечен лимес,* $\lim_{x\to\infty}F(x)$*, велиме дека функцијата* $f(x)$ *е* ***несвојствено (неправо) интеграбилна на*** $[a,\infty)$*, а реалниот број* $\lim_{x\to\infty}F(x)$ *се нарекува* ***несвојствен (неправ) интеграл на*** $f(x)$ ***на*** $[a,\infty)$.

Значи по дефиниција:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{x\to\infty}F(x)$$

Ако $f(x)$ е интеграбилна на $[a,\infty)$ и $[a_1,\infty)\subseteq[a,\infty)$ тогаш е точно равенството

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^{a_1} f(t)dt+\int_{a_1}^x f(t)dt.$$

од каде следува дека функцијата $f(x)$ е интеграбилна на $[a,\infty)$ ако и само ако е интеграбилна на $[a_1,\infty)$.

Ако $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ е интеграбилна на секој интервал $[a,b]$ тогаш функцијата

$$F(x)=\int_x^b f(t)dt$$

е непрекината на $(-\infty,b]$. Ако постои конечен $\lim_{x\to-\infty}F(x)$, тогаш по дефиниција реалниот број

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

се нарекува несвојствен (неправ) интеграл на $f(x)$ на $(-\infty, b]$.

Ако функцијата $f(x)$ е определена на $(-\infty,\infty)$ и несвојствено интеграбилна на интервалите $(-\infty, a]$ и $[a,\infty)$ за некој реален број a тогаш по дефиниција

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

Пример: 1) Нека

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin x\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\sin x\, dx$$

Со двојна примена на формулата за парцијална интеграција добиваме

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\sin x\, dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x}\cos x\,|_0^b - \int_{0}^{b} e^{-x}\cos x\, dx) \\ &= 1 - \lim_{b\to\infty}(e^{-x}\sin x\,|_0^b + \int_{0}^{b} e^{-x}\sin x\, dx) \\ &= 1 - I \end{aligned}$$

од каде $I = \dfrac{1}{2}$.

2) Несвојствениот интеграл на $(-\infty,\infty)$ на функцијата $f(x)$ може да се разликува од таканаречената главна вредност $(V.P.)$ која ја определуваме како:

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx$$

На пример за функцијата $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ постои главната вредност

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln\,(1+x^2)\,|_{-b}^{b}=0\,,$$

но не постои несвојствениот интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$, затоа што не постои $\int_{0}^{\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$.

Во случај кога функцијата $f(x)$ е определена на полуотворен интервал $[a,b)$ и интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $[a,b)$ и постои конечен лимес $\lim\limits_{x\to b}F(x)$, тогаш овој реален број се нарекува несвојствен (неправ) интеграл на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a,b)$ и се означува со $\int_{a}^{b^-} f(t)dt$. Значи по дефиниција

$$\int_{a}^{b^-} f(t)dt = \lim_{x\to b}\int_{a}^{x} f(t)dt$$

Забелешка: Ако $f(x)$ е определена на $[a,b]$ и постои $\int_{a}^{b} f(x)dx$ тогаш заради непрекинатоста на $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ на $[a,b]$ имаме

$$\lim_{x\to b}\int_{a}^{x} f(t)dt = F(b)$$

т.е.

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

Меѓутоа, може да се случи несвојствениот интеграл $\int_a^{b^-} f(x)dx$ да постои , но $\int_a^b f(x)dx$ да не постои.

Пример: Функцијата

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

е непрекината на секој интервал $[-1, b]$, $b < 0$, што повлекува дека е и интеграбилна на тие интервали. Покрај тоа има и примитивна функција

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Заради ова постои несвојствениот интеграл

$$\int_{-1}^{0^-} f(x)dx = \lim_{x\to 0} \int_{-1}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to 0} F(t)\,|_{-1}^{x} = -\sin 1$$

меѓутоа не постои определениот интеграл $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ затоа што $f(x)$ не е ограничена на $[-1,0)$.

Слично, ако $f(x)$ е определена на полуотворениот интервал $(a,b]$, интеграбилна на секој затворен интервал содржан во $(a,b]$ и постои конечен лимес, $\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt$, тогаш по дефиниција

$$\int_{a^+}^{b} f(t)dt = \lim_{x\to a}\int_{x}^{b} f(t)dt$$

За функција $f(x)$ определена на (a,b) и интеграбилна на интервалите $(a,c]$ и $[c,b)$ по дефиниција

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)dt = \int_{a^+}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{b^-} f(t)dt$$

Теорема 1: *Нека функцијата* $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ *е интеграбилна на секој затворен интервал содржан во* $[a,\infty)$. *Тогаш следните тврдења се еквивалентни*

1) *постои* $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$

2) *за секој* $\varepsilon>0$ *постои* $b\geq a$ *така што за сите* b_1,b_2 , $b\leq b_1<b_2$ *да е исполнето*

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx|<\varepsilon$$

Доказ: Нека, како и претходно $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$. Нека постои

$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = I<\infty$ т.е.

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=I$$

Ова значи дека за произволен $\varepsilon>0$ постои $b\geq a$ така што за сите b_1,b_2 , $b\leq b_1<b_2$

$$|F(b_1)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|F(b_2)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Тогаш

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| &= |F(b_2)-F(b_1)| \\
&\leq |F(b_2)-I| + |I-F(b_1)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

Обратно нека е исполнето тврдењето 2). Тогаш за дадено $\varepsilon > 0$ постои $b \geq a$ така што за секој природен број n, таков што за $n > b$ и за секој $x > n$ да е исполнето

$$|F(x)-F(n)| < \varepsilon$$

Нека фиксираме еден природен број $n > b$. Тогаш за сите $x > n$

$$|F(x)| \leq |F(x)-F(n)| + |F(n)| < \varepsilon + |F(n)|.$$

Следува, функцијата $F(x)$ е ограничена на $[b,\infty)$.Заради непрекинатоста $F(x)$ е ограничена и на $[a,b]$, што значи дека е ограничена на $[a,\infty)$.

Следува низата $F(n), F(n+1), F(n+2), \ldots$ е ограничена, и според тоа содржи конвергентна подниза $(F(n_k))$. Ако ставиме

$$\lim_{k\to\infty} F(n_k) = I$$

тогаш постои n_k така што

$$|F(n_k)-I| < \varepsilon$$

Тогаш за $x > n_k$

$$|F(x)-I| < |F(x)-F(n_k)| + |F(n_k)-I| < 2\varepsilon$$

од каде заради произволноста на ε, следува дека

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = I .$$

Забелешка: Теоремата е точна и за несвојствениот интеграл на полуотворен интервал $[a,c)$. Доказот останува ист со тоа што треба да се замени ∞ со c и наместо низата од природни броеви треба да се употреби низата $c-\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$.

Теорема 2: *Нека функцијата $f(x)$ е определена на $[a,\infty)$ и интеграбилна на секој затворен интервал $[a,b]$ содржан во $[a,\infty)$ и нека $|f(x)|\le g(x)$ за секој $x\in[a,\infty)$. Тогаш ако постои $\int_a^\infty g(x)dx$, постои и $\int_a^\infty f(x)dx$.*

Доказ: Од претходната теорема, за дадено $\varepsilon>0$ постои $b\ge a$ така што за сите b_1,b_2 , $b\le b_1<b_2$ да е исполнето

$$\int_{b_1}^{b_2} g(x)dx<\varepsilon$$

Следува

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|\le\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|\,dx\le\int_{b_1}^{b_2} g(x)dx<\varepsilon$$

т.е. интегралот $\int_a^\infty f(x)dx$ постои. .

Последица: *Нека функцијата $f(x)$ е определена на $[a,\infty)$ и интеграбилна на секој затворен интервал $[a,b]$ содржан во $[a,\infty)$. Тогаш ако постои $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, постои и $\int_a^\infty f(x)dx$.*

Пример: Нека

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

и нека $h(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$. *За оваа функција постои* $\int_a^\infty |h(x)|\,dx$, ($a>0$),

$$\int_a^\infty |h(x)|\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a^2}$$

Меѓутоа, на било кој затворен интервал $[a,b]$ не постои $\int_a^b h(x)dx$ и заради тоа претходната последица не може да се примени на функцијата $h(x)$.

Теорема 3: *Нека* $f(x)\geq 0$ *за* $x\in[a,\infty)$. *Интегралот* $\int_a^\infty f(x)dx$ *постои , ако и само ако за некој реален број* $M\geq 0$ *е исполнето*

$$\int_a^b f(x)dx \leq M$$

за сите $b\geq a$.

Доказ: Нека $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Заради $f(x)\geq 0$

$$\sup\{F(x)\mid x\in[a,\infty)\}=\lim_{x\to\infty}F(x)$$

Ако за некој $M\geq 0$, $\int_a^x f(t)dt\leq M$, тогаш добиваме $\lim_{x\to\infty}F(x)<\infty$, т.е. $\int_a^\infty f(x)dx$ постои.

Обратно, ако $\int_a^\infty f(x)dx$ постои , тогаш реалниот број M можеме да го избереме како $M=\int_a^\infty f(x)dx$.

Теорема 4: Нека $f(x)$ и $g(x)$ се функции определени на $[a,\infty)$ такви што

1) $f(x)$ е непрекината функција на $[a,\infty)$ и постои реален број M таков што

$$|\int_a^b f(x)dx| \le M$$

за секој $b > a$.

2) функцијата $g(x) \ge 0$ за $x \in [a,\infty)$, монотоно опаѓа и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, и има непрекинат извод

Тогаш, постои

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \ .$$

Доказ: Според условот 1) на теоремата за $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е исполнето $|F(x)| \le M$ за $x \ge a$. Според формулата за интеграција по делови

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)dt \ .$$

Ќе покажеме дека постои конечен лимес на десната страна на равенството кога $x \to \infty$, од што ќе следува дека постои $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$.

Заради тоа што функцијата $g(x)$ монотоно опаѓа, $g'(x) \le 0$, и:

$$\int_a^x |F(t)g'(t)|dt \le M\int_a^x |g'(t)|dt = -M\int_a^x g'(t)dt$$
$$= M(g(a) - g(x)) \le M \cdot g(a)$$

Заради теорема 3 постои $\int_a^{\infty} |F(x)g'(x)|\,dx$, а според последицата на теорема 2 постои и интегралот $\int_a^{\infty} F(x)g'(x)dx$.

Заради $|F(x)| \le M$ и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ добиваме:

$$\lim_{x\to\infty} F(x)g(x) = 0.$$

Забелешка: Претходните теореми и нивните докази се точни и ако наместо несвојствен интеграл на $[a,\infty)$, стои несвојствен интеграл на $[a,b)$.

Пример: Според претходната теорема, интегралот

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \ ,$$

постои заради

$$\left|\int_1^b \sin x dx\right| \le |-\cos b + \cos 1| \le 2$$

и заради тоа што функцијата $g(x) = \dfrac{1}{x}$ е непрекинато диференцијабилна, монотоно опаѓачка и тежи кон 0 кога $x \to \infty$.

Теорема 5: (метод на замена**)** Нека $\phi : [a,b) \to U$ има непрекинат извод и нека $\lim_{x\to b^-} \phi(x) = \infty$. Нека функцијата f е непрекината на интервалот U и има примитивна функција $F(u)$ на интервалот U. Ако постои

$$\int_{\phi(a)}^{\infty} f(u)\ du$$

тогаш

$$\int_a^{b^-} f(\phi(x))\,\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\infty} f(u)\ du$$

: **Доказ:** Нека функцијата $F(u)$ е примитивна за f на интервалот U. Тогаш

$$\begin{aligned}\int_a^{b^-} f(\phi(x))\,\phi'(x)dx &= \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(\phi(x))\,\phi'(x)dx\\ &= \lim_{c\to b^-} F(\phi(x))\,|_a^c\\ &= \lim_{c\to b^-}(F(\phi(c))-F(\phi(a))\\ &= \lim_{c\to b^-}\int_{\phi(a)}^{\phi(c)} f(u)\;du\\ &= \lim_{\phi(c)\to\infty}\int_{\phi(a)}^{\phi(c)} f(u)\;du\\ &= \int_{\phi(a)}^{\infty} f(u)\;du\end{aligned}$$

Оваа формула ја нарекуваме ***метод на замена кај несвојствен интеграл***.

Следнава теорема е последица на теоремата за парцијална интеграција кај определен интеграл.

Теорема 6: (метод на парцијална интеграција) Нека $u(x)$ и $v(x)$ се определени на $[a,\infty)$, имаат непрекинат извод. Нека постои $\int_a^{\infty} v(x)u'(x)dx$ и нека постои конечен $\lim_{x\to\infty} u(x)v(x)$. Тогаш

$$\int_a^{\infty} u(x)\,v'(x)dx = \lim_{x\to\infty} u(x)v(x) - u(a)\,v(a) - \int_a^{\infty} v(x)u'(x)dx$$

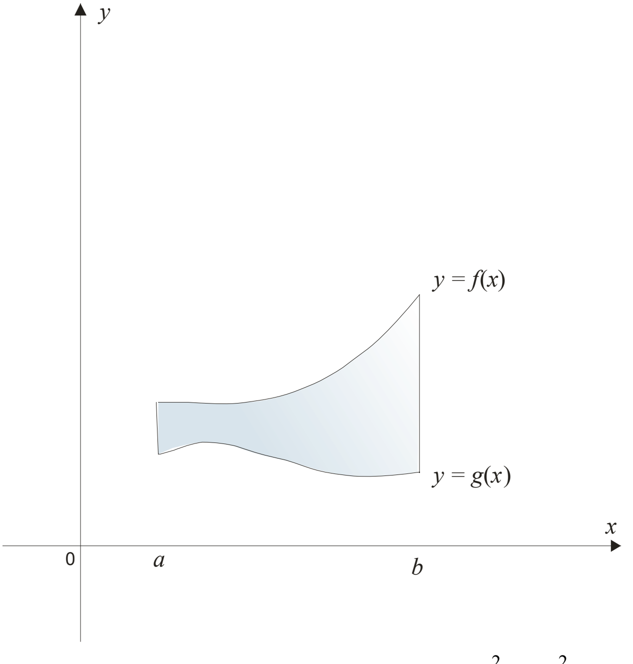
.

.

6. ПРИМЕНА НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ ЗА ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПОВРШИНИ, ВОЛУМЕН И ДОЛЖИНА НА ЛАК

Нека $f(x)$ и $g(x)$ се непрекинати функции на $[a,b]$ такви што $f(x)\geq g(x)$. Површината S на рамнинската фигура која се состои од точките во рамнината $\{(x,y)\,|\,a\leq x\leq b,\, g(x)\leq y\leq f(x)\}$ и е зафатена помеѓу правите $x=a$, $x=b$ и графиците на функциите $f(x)$ и $g(x)$ може да се пресмета како:

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))\cdot dx$$



Пример. Површината на елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ со оски $a>0$, $b>0$ е еднаква на:

$$S=2\cdot\int_{-a}^{a} b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot dx$$

Со смената $x = a\sin t$ добиваме:

$$S = 2ab \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt$$

На затворениот интервал $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ е точно равенството $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ и според тоа:

$$S = 2ab \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt = ab \cdot \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi$$

Ако $a = b$ тогаш елипсата е круг со радиус a и $S = a^2\pi$

<u>Должина на лак.</u> Нека реалната функција $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е непрекината функција на $[a,b]$.

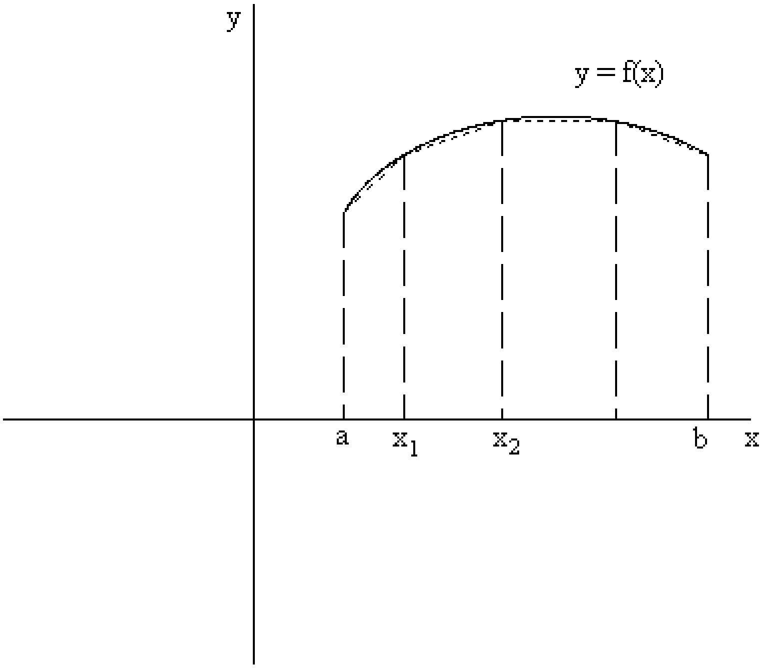
Разбивање на интервалот $[a,b]$ е множество $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ такво што

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

За секое разбивање Т на интервалот $[a,b]$ определуваме реален број

$$Q(T) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

бројната вредност на должината на искршената линија (на цртежот) која ги сврзува точките $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, .. , $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(b, f(b))$.



Должина на графикот L ***на функцијата*** од точката $(a, f(a))$ до $(b, f(b))$ го определуваме на следниов начин.

$$L = \sup\{\, Q(T) \mid T \in \mathcal{T} \,\}$$

каде што

$$\mathcal{T} = \{\, T \mid T \text{ разбивање на } [a,b] \,\}$$

Да забележиме дека може да се случи должината да биде ∞ , заради што и супремумот се бара во проширеното множество од реални броеви $\overline{R}$.

Од дефиницијата следува : ако $T \subseteq T'$ тогаш $Q(T) \le Q(T')$.

Теорема 1: *Нека* $f:[a,b] \to R$ *е непрекината функција на* $[a,b]$ *и нека* $a < c < b$.*Тогаш*

$$L_{[a,b]} = L_{[a,c]} + L_{[c,b]}$$

Доказ: Нека

$$\mathcal{T}_c = \{ T \mid T \in \mathcal{T}, c \in T \}$$

Ако T' е разбивање на $[a,c]$ и T'' е разбивање на $[c,b]$, тогаш $T' \cup T''$ е разбивање на $[a,b]$ кое ја содржи точката c. Заради

$$L_{[a,c]} = \sup\{ Q(T') \mid T' \text{ разбивање на } [a,c] \}$$

и

$$L_{[c,b]} = \sup\{ Q(T'') \mid T'' \text{ разбивање на } [c,b] \}$$

имаме:

$$\begin{aligned} L_{[a,c]} + L_{[c,b]} &= \sup\{ Q(T' \cup T'') \mid T' \text{ разб. на } [a,c], T'' \text{ разб. на } [c,b] \} \\ &= \sup\{ Q(T_c) \mid T_c \text{ разбивање на } [a,b],\ c \in \mathcal{T}_c \} \end{aligned}$$

Од $\mathcal{T}_c \subseteq \mathcal{T}$ следува

$$L_{[a,c]} + L_{[c,b]} \le L_{[a,b]} \ .$$

Од друга страна ако T е разбивање на $[a,b]$ тогаш $T \cup \{c\} \in \mathcal{T}_c$. Заради $T \subseteq T \cup \{c\}$ следува $Q(T) \le Q(T \cup \{c\})$ и добиваме

$$L_{[a,b]} \le L_{[a,c]} + L_{[c,b]}$$

Последица: Ако $f:[a,b] \to R$ е непрекината функција на $[a,b]$ и нека $a < c < b$.Тогаш

$$L_{[a,c]} < L_{[a,b]}$$

Теорема 2: а) *Постои низа разбивања во која бројот на точки се зголемува, таква што* $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} Q(T_k) = L$$

б) За секоја низа од рабивања (T_k') во која бројот на точки се зголемува, и таква што $T_k \subseteq T_k'$ за сите k, е исполнето $\lim\limits_{k\to\infty} Q(T_k') = L$

Доказ: а) Заради дефиницијата на должината на графикот L, ако должината е конечна постои низа од разбивања (T_k') на $[a,b]$,

$$\lim_{k\to\infty} Q(T_k') = L$$

Со додавање на точки во разбивањата T_k', може да направиме за низата (T_k') да биде исполнет и условот $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k') = 0$

И ако $L = \infty$, за секој $k > 0$ можеме да избереме разбивања T_k' такви што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k') = 0$ и $k < Q(T_k')$ т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} Q(T_k') = L$.

Ставајќи $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_1' \cup T_2'$, ... , $T_k = T_1' \cup T_2' \ldots \cup T_k'$, ... добиваме низа во која бројот на точки се зголемува, таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k) = 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} Q(T_k) = L .$$

б) Заради $T_k \subseteq T_k'$ за сите k, следува $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k') = 0$, и од

$$Q(T_k) \le Q(T_k') \le L$$

следува $\lim\limits_{k\to\infty} Q(T_k') = L$

Теорема 3. Нека реалната функција $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ има непрекинат извод на $[a,b]$. Тогаш должината L на графикот на функцијата од точката $(a, f(a))$ до $\left(b, f(b)\right)$ изнесува

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

Доказ: Нека $T = \{\, x_0, x_1, \ldots, x_n \}$ е едно разбивање на $[a,b]$ Според теоремата за средна вредност постои точка $v_i \in \left(x_i, x_{i+1}\right)$ така што:

$$f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)=f^{'}\left(v_i\right)\Delta x_i .$$

Следува, должината на отсечката помеѓу точките во рамнината, $\left(x_i, f\left(x_i\right)\right)$ и $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ изнесува:

$$\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(f^{'}\left(v_i\right)\Delta x_i)^2}$$
$$=\sqrt{1+f^{'}(v_i)^2}\cdot\Delta x_i$$

Сумата на овие должини за $i=0,1,...n-1$ изнесува

$$Q(T)=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+f^{'}(v_i)^2}\cdot\Delta x_i$$

Од друга страна ова е една интегрална сума на Риман за функцијата $\sqrt{1+f^{'}(x)^2}$ за разбивањето T, т.е.

$$R(T)=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1+f^{'}(v_i)^2}\cdot\Delta x_i$$

Нека е дадена низа од разбивања (T_k) на $[a,b]$ во која бројот на тоќки се зголемува, таква што $\lim\limits_{k\to\infty}h(T_k)=0$, и $\lim\limits_{k\to\infty}Q(T_k)=L$.

Тогаш

$$L=\lim_{k\to\infty}R(T_k)=\int_a^b\sqrt{1+f^{'}(x)^2}\cdot dx$$

Последица. Ако функцијата има непрекинат извод на $[a,b]$ тогаш нејзиниот график има конечна должина

Пример. Должината L на кружницата $x^2+y^2=a^2,\ a>0$ ќе ја пресметаме, пресметувајќи четвртина од нејзината должина која се наоѓа над $x-$оската и е определена со функцијата $f\left(x\right)=\sqrt{a^2-x^2}$ од $x=\dfrac{-a\sqrt{2}}{2}$ до $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$L = 4\int_{-a\sqrt{2}/2}^{a\sqrt{2}/2} \sqrt{1 + (\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}})^2} \cdot dx$$
$$= 4\int_{-a\sqrt{2}/2}^{a\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot dx$$
$$= 4a\int_{-a\sqrt{2}/2}^{a\sqrt{2}/2} \frac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}}$$
$$= 4a \cdot \arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a\sqrt{2}/2}^{a\sqrt{2}/2}$$
$$= 4a \cdot (\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{-\sqrt{2}}{2})$$
$$= 2a\pi$$

Забелешка: Во доказот на Теорема 3. не се појавува вредноста на изводот на функцијата $f^{'}(a)$ или $f^{'}(b)$. Заради тоа што вредноста на определениот интеграл не зависи од вредноста на функцијата во конечен број точки , ако интегралот $\int_a^b \sqrt{1 + f^{'}(x)^2} \cdot dx$ постои за некоја вредност на подинтегралната функција $\int_a^b \sqrt{1 + f^{'}(x)^2} \cdot dx$ во точките a и b ќе постои и за секоја друга вредност, и ќе има иста вредност (види Теорема 5 кај Својства на определен интеграл).

Затоа, должината L на кружницата $x^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$ може да ја пресметаме, пресметувајќи половина од нејзината должина која се наоѓа над $x-$оската и е определена со функцијата $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ со

$$L = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx,$$

иако функцијата нема извод во точките $x = -a$ и $x = a$.

$$L = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}})^2} \cdot dx$$
$$= 2a \cdot \arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}$$

$$= 2a\pi$$

<u>Волумен на ротационо тело.</u> Нека $f(x)$ е непрекината функција на $[a,b]$. Нека $T = \{x_0, x_1, ... x_n\}$ е разбивање на отсечката $[a,b]$, и $u_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,...n-1$.

Волуменот на цилиндарот кој се добива со вртење на правоаголникот $\{(x,y) | \, x_i \le x \le x_{i+1}, 0 \le u \le f(u_i)\}$околу $x-$оската изнесува:

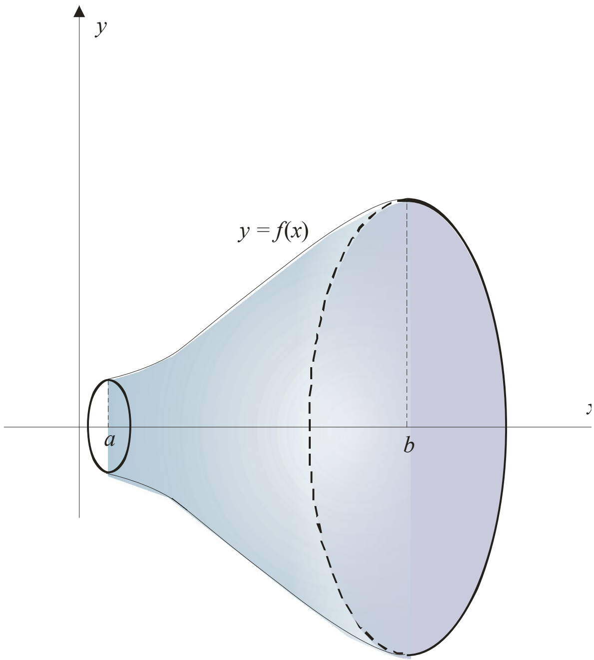
$$\pi \cdot f^2(u_i) \cdot \Delta x_i ,$$

а збирот на сите волумени за $i = 0,1,...n-1$ изнесува

$$V(T) = \pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f^2(u_i) \cdot \Delta x_i$$

и претставува една интегрална сума на Риман за функцијата $\pi f^2(x)$, т.е.

$$R(T) = \pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f^2(u_i) \cdot \Delta x_i .$$



Волуменот V на телото кое настанува со вртење на криволинискиот трапез $\{(x,y)|\ a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ околу апцисната оска можеме да го дефинираме на следниот начин:

Нека е дадена низа од разбивања (T_k) на $[a,b]$ во која бројот на точки се зголемува, и таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k) = 0$. По дефиниција

$$V = \lim_{k\to\infty} V(T_k) \ .$$

Заради тоа што функцијата $\pi f^2(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$, имаме

$$V = \lim_{k\to\infty} R(T_k) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

и добиваме дека V не зависи од изборот на низата (T_k), ниту од изборот на сумите $R(T_k)$.

Пример. Волуменот на елипсоидот кој настанува со вртење на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ со оски $a>0$, $b>0$ околу апцисната оска.

$$V=\pi\int_{-a}^{a}b^2(1-\frac{x^2}{a^2})\cdot dx=\frac{4}{3}\cdot ab^2\pi.$$

Ако $a=b$ тогаш ротационото тело е топка и $V=\frac{4}{3}\cdot a^3\pi.$.

<u>Површина на ротационо тело</u> Нека реалната функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ има непрекинат извод на $[a,b]$ и нека $f(x)\geq 0$ на $[a,b]$. Нека $T=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ е едно разбивање на $[a,b]$

Должината L_i на отсечката помеѓу точките во рамнината $(x_i,f(x_i))$ и $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ изнесува

$$L_i=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(f(x_{i+1})-f(x_i))^2}\ ,$$

а површината на обвивката на пресечениот конус кој настанува со вртење на отсечката околу x-оската е:

$$\pi(f(x_{i+1})+f(x_i))\cdot L_i$$

Сумата на површините на обвивките на пресечените конуси кои настануваат со вртење на сите отсечки околу x-оската е:

$$P(T)=\sum_{i=0}^{n-1}\pi(f(x_i)+f(x_{i+1}))\cdot L_i$$

Површината S на обвивката на ротационото тело, кое настанува со вртење на графикот на функцијата $f(x)$, од точката $(a,f(a))$ до $(b,f(b))$ ја дефинираме со:

$$S=\sup\{P(T)\,|\,T\text{ е разбивање на }[a,b]\}$$

Следнава теорема ја даваме без, доказ, затоа што доказот е ист како за соодветната теорема за должина на график на функција.

Теорема 2: а) *Постои низа од разбивања* (T_k) *на* $[a,b]$ *во која бројот на точки се зголемува, таква што* $\lim_{k\to\infty} h(T_k)=0$, *и*

$$S=\lim_{k\to\infty} P(T_k)$$

б) За секоја низа од рабивања (T_k') во која бројот на точки се зголемува, таква што $T_k \subseteq T_k'$ за сите k, е исполнето $\lim_{k\to\infty} P(T_k')=S$

Заради тоа што функцијата $f(x)$ е рамномерно непрекината на $[a,b]$, за дадено $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ такво што од

$$|x_1-x_2|<\delta$$

да следува

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2\pi M(b-a)} ,$$

каде што $M=\sup\{\sqrt{1+f'(x)^2} \mid x\in[a,b]\}$.

Нека $T=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ е едно разбивање на $[a,b]$. Според теоремата за средна вредност постои точка $v_i\in(x_i,x_{i+1})$ така што:

$$f(x_{i+1})-f(x_i)=f'(v_i)\Delta x_i.$$

Следува, должината на отсечката L_i помеѓу точките во рамнината, $(x_i,f(x_i))$ и $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ изнесува: $\sqrt{1+f'(v_i)^2}\cdot\Delta x_i$. Тогаш

$$R(T)=2\pi\sum_{i=0}^{n-1} f(v_i)\sqrt{1+f'(v_i)^2}\cdot\Delta x_i$$

претставува една интегрална сума на Риман за функцијата $2\pi f(x)\sqrt{1+f^{'}(x)^2}$.

Ако $h(T)<\delta$ тогаш

$$|R(T)-P(T)|=|2\pi\sum_{i=0}^{n-1} f(v_i)\cdot L_i-\sum_{i=0}^{n-1}\pi\cdot(f(x_i)+f(x_{i+1}))\cdot L_i|$$

$$=|\pi\sum_{i=0}^{n-1}(2f(v_i)\cdot L_i-(f(x_i)+f(x_{i+1}))\cdot L_i)|$$

$$\leq \pi\sum_{i=0}^{n-1}(|f(v_i)-f(x_i)|+|f(v_i)-f(x_{i+1})|)\cdot L_i$$

$$<\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2\varepsilon}{2\pi M(b-a)}\cdot M\Delta x_i=\varepsilon$$

Нека (T_k) е низа од разбивања на $[a,b]$ во која бројот на точки се зголемува, таква што $\lim\limits_{k\to\infty} h(T_k)=0$, и $\lim\limits_{k\to\infty} P(T_k)=S$ тогаш

$$\lim_{k\to\infty} R(T_k)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f^{'}(x)^2}\cdot dx$$

Постои k_0 таков што за $k\geq k_0$, $h(T_k)<\delta$. Тогаш

$$|P(T_k)-R(T_k)|<\varepsilon$$

Ако $k\to\infty$ тогаш

$$|S-2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f^{'}(x)^2}\cdot dx|\ \leq\ \varepsilon$$

Заради произволноста на $\varepsilon>0$ добиваме

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f^{'}(x)^2}\cdot dx$$

Забелешка: Во доказот не се појавува вредноста на изводот на функцијата $f^{'}(a)$ или $f^{'}(b)$. Заради тоа што вредноста на определениот интеграл не зависи од вредноста на функцијата во конечен број точки , ако интегралот $\int_a^b f(x)\sqrt{1+f^{'}(x)^2}\cdot dx$ постои за некоја вредност на подинтегралната функција $f(x)\sqrt{1+f^{'}(x)^2}$ во точките a и b ќе постои и за секоја друга вредност, и ќе има иста вредност (види Теорема 5 кај Својства на определен интеграл).

Пример. Со вртење на кружницата $x^2+y^2=a^2,\ \ a>0$, околу $x-$оската се добива сфера со радиус a. Нејзината површина ќе ја пресметаме со помош на функцијата $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$, чиј график е полукружницата над $x-$оската.

Подинтегралната функција е

$$f(x)\sqrt{1+f^{'}(x)^2}=\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}})^2}=a$$

така што според претходната Забелешка постои

$$\begin{aligned}S&=2\pi\int_{-a}^{a} f(x)\sqrt{1+f^{'}(x)^2}\cdot dx\\&=2\pi\int_{-a}^{a} a\cdot dx=2a\pi\Big|_{-a}^{a}=2a\pi(a+a)=4a^2\pi\end{aligned}$$

иако функцијата $f(x)$ нема извод во точките $-a, a$.

.

7. ПРИБЛИЖНО ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Ако функцијата $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$, тогаш секоја сума на Риман

$$R(T)=\sum_{i=0}^{n-1} f(u_i)(x_{i+1}-x_i)$$

претставува приближување на определениот интеграл

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$

Со избирање на доволен број на точки во разбивањето можеме да го пресметаме определениот интеграл со произволен број на децимали.

Нека $f(x)$ е функција која има непрекинат извод на $[a,b]$. За произволно разбивање $T=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ на $[a,b]$ и произволен избор на точки $u_i \in [x_i,x_{i+1}]$ ќе ја оцениме разликата:

$$\left|\int_a^b f(x)dx-R(T)\right|$$

За $x\in[x_i,x_{i+1}]$, според теоремата за средна вредност постои $v_i\in(x_i,x_{i+1})$ така што

$$f(x)-f(u_i)=f'(v_i)(x-u_i)$$

од каде, ако ставиме $M=\sup\{|f'(x)| \mid x\in[a,b]\}$, добиваме:

$$|f(x)-f(u_i)|\le M\cdot|x_{i+1}-x_i|$$

Следува:

$$|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(u_i)(x_{i+1}-x_i)| = |\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x)-f(u_i))dx)|$$

$$\le \int_{x_i}^{x_{i+1}} (M\cdot \Delta x_i)dx = M\cdot (\Delta x_i)^2$$

од каде за разликата ја добиваме следната оцена:

$$|\int_{a}^{b} f(x)dx - R(T)| \le \sum_{i=0}^{n-1} |\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - f(u_i)(x_{i+1}-x_i)|$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} M\cdot(\Delta x_i)^2$$

$$\le M\cdot h(T)\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = M\cdot h(T).\cdot(b-a)$$

Со избирање чекорот на разбивањето да биде доволно мал, разликата може да се направи произволно мала.

Пример. Ќе ја примениме последнава теорема за пресметување на определениот интеграл

$$\int_1^2 \sin\frac{1}{x}dx$$

Функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ е непрекината на интервалот $[1,2]$ како композиција на непрекинати функции. Значи $f(x)$ има примитивна функција $F(x)$ на интервалот $[1,2]$. Сепак при решавањето на определениот интеграл не можеме ефектно да ја примениме формулате на Њутн-Лајбниц затоа што примитивната функција $F(x)$ не може да се изрази преку основните функции !

Ова значи дека колку и да се обидуваме да го решиме неопределениот интеграл

$$\int \sin\frac{1}{x}dx\,,$$

нема да успееме иако функцијата $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ има примитивна функција !!

Сепак, овој интеграл без тешкотии може да се реши приближно. На пример, ќе го пресметаме со точност од $\frac{1}{10^3}$.

Една приближна вредност на интегралот ќе биде една поизволна интегрална сума

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(u_i)(x_{i+1}-x_i).$$

За точност од $\frac{1}{10^3}$ доволно е да определиме разбивање T такво што

$$M\cdot(b\text{-}a)\cdot h(T)<\frac{1}{10^3}\quad .$$

Најпрво $[a,b]=[1,2]$ и имаме $b-a=1$. Заради

$$(\sin\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

добиваме

$$|(\sin\frac{1}{x})'|=\frac{1}{|x|^2}|\cos\frac{1}{x}|<\frac{1}{|x|^2}\le 1$$

за $x\in[1,2]$. Значи $M=1$, па доволно е да избереме

$$h(T)=\frac{1}{10^3}.$$

Можеме да ја избереме поделбата со чекор $\frac{1}{10^3}$,

$$T=\{\,1+\frac{i}{10^3}\,|\,i=0,1,2,\ldots,1000\,\}=\{1\,;1{,}001\,;1{,}002\,;\ldots;1{,}999\,;2\,\}$$

Иако поделбата има 1001 точка интегралната сума

$$\sum_{i=0}^{1000} f(1+\frac{i}{10^3})\cdot\frac{1}{10^3}$$

многу лесно се пресметува со компјутер. Таа интегрална сума претставува вредност на определениот интеграл со точност од две децимали.

Еве го програмот направен во програмски јазик Visual Basic:

```
Function f(x)
f = Sin(1/ x)
End Function
Sub Form1_Activate
R_suma = 0
For x =0 to 1000
R_suma= R_suma +(1/10^3 )*f (1+ x/10^3)
Next x
Print ( "приближната вредност на интегралот е"); R_suma
End Sub
```

Програмот ќе испечати на екранот на компјутерот за помалку од една секунда: приближната вредност на интегалот е 0,663.

Како што гледаме познавајќи ја математичката суштина на проблемот за решавање на интегралот со многу едноставен програм можеме да ја добиеме приближната вредност на интегралот со точност која ни е потребна.

Во практиката иако сметаме дека функцијата $f(x)$ е определени на интервал $[a,b]$, најчесто не ја знаеме вредноста на функцијата во сите точки, туку само во одреден број на точки $x_0, x_1, ..., x_n$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

x	x_0	x_1	x_2	………..	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…………	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

За вака зададени функции ќе речеме дека се зададени емпириски. За функциите најчесто сметаме дека се непрекинати , и следува интеграбилни.

Тогаш една приближна вредност на определениот интеграл

$$\int_a^b f(x)dx .$$

е зададена со интегралната сума на Риман за разбивањето $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$,

$$R(T) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

или

$$R(T) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \cdot \Delta x_i$$

Се разбира приближувањето е со поголема точност ако бројот на точки е поголем.

Кога функцијата $f(x)$ е зададена емпириски и сметаме дека е диференцијабилна тогаш вредноста на изводот во одредена точка x_i може да се пресмета само приближно.

По дефиниција изводот во точката x_i е

$$f'(x_i) = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}$$

Еквивалентно, за секоја низа (u_k), таква што $u_k \to x_i$

$$f'(x_i) = \lim_{k \to \infty} \frac{f(u_k) - f(x_i)}{u_k - x_i} .$$

Приближна вредност на изводот $f'(x_i)$ е реалниот број

$$f'_+(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

или реалниот број

$$f'_{-}(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \ .$$

Вредноста $f_{+}(x_i)$ се нарекува приближен десен извод, а вредноста $f_{-}(x_i)$ се нарекува приближен лев извод во x_i. Приближен извод на функцијата во точката x_i е вредноста

$$f'(x_i) = \frac{f'_{+}(x_i) + f'_{-}(x_i)}{2}$$

VIII. **РЕДОВИ**

1. РЕДОВИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

Дефиниција. Нека (x_n) е низа од реални броеви. Броен ред со општ член x_n ќе ја нарекуваме низата (X_n) каде што

$$X_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ .$$

Вообичаена ознака за бројниот ред е

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

или

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

Конечната сума $X_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ се нарекува *$n-$та парцијална сума* на редот, а низата (X_n), *низа од парцијални суми*.

Дефиниција. За бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ќе речеме дека *конвергира* кон бројот X, ако низата од парцијални суми на редот (X_n) конвергира кон X. (Вообичаено е да се каже и бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ има сума X).

Ако редот не конвергира велиме дека *дивергира*.

Пример: За редот

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q^1 + q^2 + \dots$$

каде што $|q| < 1$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} (1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

т.е. редот конвергира и неговата сума е еднаква на $\frac{1}{1-q}$.

Теорема 1. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ конвергира тогаш $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

доказ. Нека редот конвергира кон бројот X. Тогаш за низата од парцијални суми (X_n) е исполнето

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

Заради

$$x_n = X_n - X_{n-1}$$

добиваме

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} X_n - \lim_{n\to\infty} X_{n-1} = 0.$$

Теорема 2: Нека $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ се конвергентни редови со суми X и Y соодветно. Тогаш

1) редот $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot x_n$ конвергира и има сума $c \cdot X$

2) редот $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ конвергира и има сума $X + Y$

доказ. Нека со $(X_n),(Y_n),(Z_n)$ и (W_n) ги означиме низите од парцијални суми на редовите $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$, соодветно. Тогаш 1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} Z_n &= \lim_{n\to\infty}(cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} c\cdot(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\\ &= c\cdot\lim_{n\to\infty} X_n = c\cdot X\end{aligned}$$

со што е покажано дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot x_n$ конвергира и има сума $c\cdot X$.

2)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} W_n &= \lim_{n\to\infty}[(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_n + y_n)]\\ &= \lim_{n\to\infty}(X_n + Y_n) = \lim_{n\to\infty} X_n + \lim_{n\to\infty} Y_n\\ &= X + Y\end{aligned}$$

со што е покажано дека редот $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ конвергира и има сума $X + Y$.

Следната теорема е аналогна на теоремата кај низи која тврди дека една низа е конвергентна ако и само ако е фундаментална (Кошиева). Понатаму ќе ја нарекуваме основен критериум за конвергенција на бројни редови на Коши.

Теорема 3. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е броен ред. Следните услови се еквивалентни:

1) редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ конвергира

2) за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 така што за сите $n \geq n_0$ и p произволен природен број да е исполнето

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i\right| < \varepsilon.$$

доказ. 1)$\Rightarrow$2) Од конвергенцијата на редот имаме дека низата од парцијални суми (X_n), конвергира. Тогаш таа е и фундаментална т.е. за секој позитивен број $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 така што за сите $n \geq n_0$ и p произволен природен број да е исполнето

$$|X_{n+p}-X_n|<\varepsilon.$$

Последното неравенство е еквивалентно со $|\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i|<\varepsilon$.

2)$\Rightarrow$1) Нека е даден $\varepsilon>0$. Според 2) постои природен број n_0 така што за сите $m>n\ge n_0$ да е исполнето

$$|\sum_{i=n+1}^{m} x_i|<\varepsilon.$$

Ова неравенство може да го запишеме и како

$$|X_m-X_n|<\varepsilon.$$

Следува низата (X_n) од парцијални суми на редот е фундаментална, значи и конвергентна.

Пример: 1) Обратното тврдење на теорема 1 не мора да е точно т.е. за општиот член на редот може да е исполнето $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, но редот да не е конвергентен. Пример на ваков ред е хармонискиот ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$$

Ако претпоставиме дека хармонискиот ред конвергира, тогаш за $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ ќе постои природен број n_0 така што за сите $n\ge n_0$ да е исполнето

$$\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}<\frac{1}{2}$$

т.е.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}$$

Заради

$$\frac{1}{n+k} > \frac{1}{2n}$$

за $k = 1,2,\ldots,n$ добиваме

$$n \cdot \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$$

што е контрадикција. Следува претоставката дека редот е конвергентен не е добра. Значи хармонискиот ред е дивергентен.

Дефиниција. За редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ќе речеме дека е *апсолутно конвергентен* ако редот од позитивни реални броеви $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ конвергира.

Теорема 4: Ако редот е апсолутно конвергентен тогаш е и конвергентен

доказ. Заради конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ постои природен број n_0 таков што за сите $n \geq n_0$, и p произволен природен број да е исполнето

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |x_i| < \varepsilon .$$

Следува

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |x_i| < \varepsilon$$

т.е. редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ конвергира.

Следната теорема е позната како мајорантен критериум.

Теорема 5: Нека $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е броен ред и нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред со позитивни членови $a_n \geq 0$. Нека постои природен број n_0 така што за сите $n \geq n_0$ да е исполнето

$$|x_n| \leq a_n.$$

Тогаш

1) ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ конвергира апсолутно
2) ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ дивергира тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

доказ. 1) Заради конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ постои природен број n_1 (кој може да се избере така што $n_1 \geq n_0$) таков што за сите $n \geq n_1$, и и p произволен природен број да е исполнето

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon.$$

Следува

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |x_i| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon$$

т.е. редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ конвергира апсолутно.

2) Нека редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ дивергира и да претпоставиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Тогаш според 1) и $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ конвергира што е контрадикција. Значи мора и редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ да дивергира.

Последните две теореми покажуваат дека од посебен интерес се редовите со позитивни членови. Следната теорема е едноставен критериум за конвергенција на вакви редови.

Теорема 6: Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред од позитивни реални броеви $a_n \geq 0$. Ако постои реален број M таков што за парцијалните суми на редот да е исполнето

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq M$$

за сите природни броеви n, тогаш редот конвергира.

доказ. Нека $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Тогаш низата од парцјални суми (A_n) е строго растечка и ограничена од горе. Следува (A_n) е конвергентна низа.

Последица. Ако за редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ постои реален број M таков што

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leq M$$

за сите природни броеви n, тогаш редот апсолутно конвергира.

Примери: 1) Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots$$

е конвергентен и има сума 1 затоа што

$$\lim_{n\to\infty} [\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}] = \lim_{n\to\infty} [(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]$$
$$= \lim_{n\to\infty} [1-\frac{1}{n+1}] = 1$$

2) Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$$

може да се претстави како

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

Затоа е доволно да се покаже конвергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$. Овој ред конвергира според 1) и според мајорантниот критериум заради

$$\frac{1}{(n+1)^2}\le\frac{1}{n(n+1)} .$$

2. РЕДОВИ СО ПОЗИТИВНИ ЧЛЕНОВИ

Во ова поглавје ќе бидат разгледувани само редови од позитивни реални броеви.

Теорема 1. (Критериум на Кумер) Нека $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, $x_n>0$ е ред со позитивни членови.

1) Ако постои низа (y_n), $y_n>0$, број $y>0$, и постои природен број n_0 таков што за $n\ge n_0$,

$$y_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - y_{n+1} \geq y$$

тогаш редот конвергира.

2) Ако постои низа (y_n), $y_n > 0$, таква што редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n}$ дивергира, и постои природен број n_0 таков што за $n \geq n_0$,

$$y_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - y_{n+1} \leq 0$$

тогаш редот дивергира.

доказ. 1) Заради условот

$$y_n x_n - y_{n+1} x_{n+1} \geq y x_{n+1}$$

за $n \geq n_0$ имаме

$$\sum_{i=n_0}^{n} x_{i+1} \leq \frac{1}{y} \sum_{i=n_0}^{n} (y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1}) \leq \frac{1}{y} (y_{n_0} x_{n_0} - y_{n+1} x_{n+1}) \leq \frac{1}{y} y_{n_0} x_{n_0}$$

Значи парцијалните суми се ограничени и следува редот конвергира.

2) Заради

$$y_n x_n \leq y_{n+1} x_{n+1}$$

за $n \geq n_0$ имаме

$$y_{n_0} x_{n_0} \leq y_n x_n$$

т.е.

$$x_n \geq y_{n_0} x_{n_0} \frac{1}{y_n}.$$

Од мајорантниот критериум, заради дивергенцијата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{y_n}$ добиваме дека и редот $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ дивергира.

Теорема 2: (Критериум на Рабе) Нека $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, $x_n > 0$ е ред со позитивни членови.

1) Ако постои број $a > 1$, и постои природен број n_0 таков што за $n \geq n_0$,

$$n(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1) \geq a$$

тогаш редот конвергира.

2) Ако постои природен број n_0 таков што за $n \geq n_0$,

$$n(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1) \leq 1$$

тогаш редот дивергира.

доказ. 1) Од условот на теоремата имаме

$$n\frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1) \geq a - 1$$

за $n \geq n_0$. Ако ставиме $y_n = n$ и $y = a - 1$, тогаш добиваме дека се исполнети условите на претходната теорема под 1), и според тоа редот конвергира.

2) Од условот на теоремата имаме

$$n\frac{x_n}{x_{n+1}} - (n+1) \leq 0$$

т.е. исполнети се условите на претходната теорема под 2) со $y_n = n$, и според тоа редот дивергира.

Теорема 3: (Интегрален критериум на Меклорен) Нека $f(x)$ е опаѓачка функција на интервалот $[n_0,\infty)$, и нека $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Тогаш редот

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

и несвојствениот интеграл

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$$

конвергираат или дивергираат истовремено.

доказ. Од условите на теоремата функцијата $f(x)$ е позитивна. За $x\in[n,n+1]$, заради

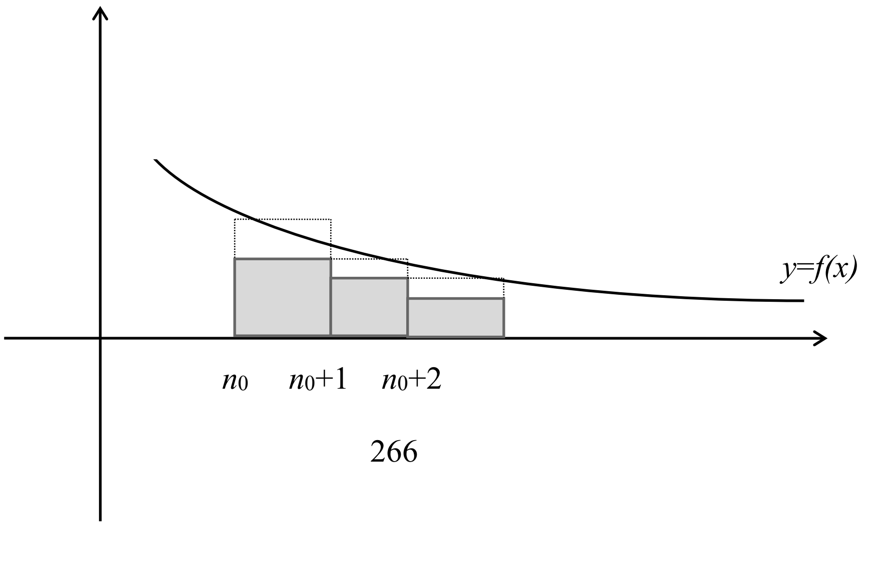
$$f(n)\ge f(x)\ge f(n+1)$$

следува

$$\int_n^{n+1} f(n)dx \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge \int_n^{n+1} f(n+1)dx$$

и добиваме

$$f(n)\ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge f(n+1).$$



Нека редот конвергира и нека $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) = S$. Тогаш за даден реален број b постои природен број n таков што $b \leq n+1$, и добиваме

$$\int_{n_0}^{b} f(x)dx \leq \int_{n_0}^{n+1} f(x)dx = \sum_{i=n_0}^{n} \int_{i}^{i+1} f(x)dx \leq \sum_{i=n_0}^{n} f(i) \leq S .$$

Следува несвојствениот интеграл постои.

Обратно, нека претпоставиме дека несвојствениот интеграл постои. Тогаш

$$\begin{aligned}\sum_{i=n_0}^{n} f(i) &= f(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i+1) \\ &\leq f(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n-1} \int_{i}^{i+1} f(x)dx \\ &\leq f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(x)dx \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx\end{aligned}$$

Значи парцијалните суми на редот се ограничени и следува редот конвергира.

Пример. Заради претходната теорема редот

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n} , \; p > 0$$

и несвојствениот интеграл

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^p x}$$

конвергираат или дивергираат истовремено. Заради

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^{p}x}=\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^{p}x}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\begin{cases}\ln(\ln x)\Big|_{2}^{b}, & p=1\\ \dfrac{1}{1-p}\cdot(\ln x)^{1-p}\Big|_{2}^{b}, & p\neq 1\end{cases}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\begin{cases}\ln(\ln b)-\ln(\ln 2), & p=1\\ \dfrac{1}{1-p}\cdot\left((\ln b)^{1-p}-(\ln 2)^{1-p}\right), & p\neq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\infty, & p\leq 1\\ \dfrac{1}{p-1}\cdot(\ln 2)^{1-p}, & p>1\end{cases}$$

Следува, редот $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{p}n}$ конвергира за $p>1$ и дивергира за $p\leq 1$.

3. КРИТЕРИУМИ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА СО КОРЕНУВАЊЕ И КОЛИЧНИК

Следните теореми се познати како критериум за конвергенција со коренување.

Теорема 1. Нека е даден броен ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

1) Ако постои реален број $q<1$ и постои природен број n_0 таков што за сите $n \geq n_0$,

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq q$$

тогаш редот апсолутно конвергира.

2) Ако за бесконечен број природни броеви

$$\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$$

тогаш редот дивергира.

доказ: 1) Заради

$$|x_n| \leq q^n$$

за $n \geq n_0$, т.е. за произволен природен број k имаме

$$|x_{n_0+k}| \leq q^{n_0+k} \ .$$

Следува

$$\sum_{i=n_0}^{n_0+k} |x_i| = |x_{n_0}| + |x_{n_0+1}| + \ldots + |x_{n_0+k}|$$
$$\leq q^{n_0} + q^{n_0+1} + \ldots + q^{n_0+k}$$
$$\leq q^{n_0} \frac{1}{1-q}$$

Значи парцијалните суми на редот од апсолутни вредности на членовите се ограничени т.е. редот апсолутно конвергира.

2) Постои подниза (x_{n_k}) таква што $|x_{n_k}| \geq 1$. Следува општиот член на редот не тежи кон нула и редот дивергира.

Теорема 2. Нека е даден броен ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и нека

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = q \ .$$

1) Ако $q < 1$ тогаш редот апсолутно конвергира
2) Ако $q > 1$ тогаш редот дивергира

доказ: Нека ставиме

$$y_n = \sqrt[n]{|x_n|}$$

Тогаш

$$\limsup_{n\to\infty} y_n = q \ .$$

1) Заради $q < 1$, постои q', таков што $q < q' < 1$. Од дефиницијата на лимес супериор, постои природен број n_0 таков што за сите $n \geq n_0$,

$$y_n \leq q'$$

(во спротивно, ќе постојат бесконечно многу y_n такви што $y_n > q'$, и ќе постои подниза (y_{n_k}) таква што $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \geq q' > q$ т.е. $\limsup_{n\to\infty} y_n > q$ што е контрадикција).

Заради претходната теорема под 1), следува редот апсолутно конвергира.

2) Постои подниза (y_{n_i}) таква што

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_i} = q.$$

Заради $q > 1$, постои i_0 таков што за $i \geq i_0$, $y_{n_i} > 1$. Според претходната теорема под 2) следува редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е дивергентен.

Последица. Нека е даден броен ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ за кој постои

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = q .$$

1) Ако $q < 1$ тогаш редот апсолутно конвергира
2) Ако $q > 1$ тогаш редот дивергира

доказ: Заради

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$$

тврдењето е директна последица на претходната теорема.

Последната последица е позната како критериум на Коши за конвергенција на редови. Следните теореми се познати како критериум за конвергенција со количник (делење).

Теорема 3. Нека е даден броен ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, со $x_n \neq 0$ за сите природни броеви.

1) Ако постои реален број $q<1$ и постои природен број n_0 таков што за сите $n \geq n_0$,

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq q$$

тогаш редот апсолутно конвергира.

2) Ако постои природен број n_0 таков што за сите $n \geq n_0$,

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$$

тогаш редот дивергира.

доказ: 1) Заради

$$|x_{n+1}| \leq q \cdot |x_n|$$

за $n \geq n_0$, за произволен природен број k имаме

$$|x_{n_0+k}| \leq q \cdot |x_{n_0+k-1}| \leq \dots q^k |x_{n_0}| \ .$$

Следува

$$\sum_{i=n_0}^{n_0+k} |x_i| \leq |x_{n_0}| + q|x_{n_0}| + \dots + q^k |x_{n_0}|$$

$$\leq |x_{n_0}| \frac{1}{1-q}$$

Значи парцијалните суми на редот од апсолутни вредности на членовите се ограничени т.е. редот апсолутно конвергира.

2) Заради

$$|x_{n+1}| \geq |x_n|$$

за сите $n \geq n_0$, имаме

$$|x_n| \geq |x_{n-1}| \geq \ldots \geq |x_{n_0}|.$$

Значи општиот член на редот не тежи кон нула и следува редот дивергира.

Теорема 4. Нека е даден броен ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и нека

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = q \ .$$

Ако $q < 1$ тогаш редот апсолутно конвергира.

доказ: Ставаме

$$y_n = \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

и понатаму доказот е ист како доказот на Теоремата 2 под 1).

Следнава последица е позната како критериум на Даламбер за конвергенција на редови.

Последица. Нека е даден броен ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ со $x_n \neq 0$ за сите природни броеви. Нека постои

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = q \ .$$

1) Ако $q < 1$ тогаш редот апсолутно конвергира
2) Ако $q > 1$ тогаш редот дивергира

доказ: Заради

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$$

тврдењето под 1) е директна последица на претходната теорема.

2) Заради $q>1$ постои природен број n_0 таков што за сите $n\geq n_0$,

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}>1\ .$$

Според Теоремата 3 под 2) редот дивергира.

Примери. 1) Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$$

е конвергентен според критериумот на Далембер затоа што

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{3^n n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\dfrac{n+1}{n})^n}{3}=\frac{e}{3}<1\ .$$

2) Редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ дивергира, а редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира. Но нивната конвергенција не може да се утврди со помош на коренување или количник затоа што:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^2=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}=1$$

3) Редот

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots$$

има општ член

$$x_{2k-1}=\frac{1}{2^k},\qquad x_{2k}=\frac{1}{3^k}$$

Со помош на критериумот на Даламбер не може да се утврди конвергенцијата заради: Од

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{2k}|}{|x_{2k-1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{2^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^k}{3^k}=0,$$

следува дека не е исполнет условот под 2) на Теорема 3. Истотака од

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{2k+1}|}{|x_{2k}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{3}{2})^k=\infty$$

следува дека не се исполнети ни условите од 1).

Сепак конвергенцијата може да се утврди со коренување. Заради

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{|x_{2k}|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k-1]{|x_{2k-1}|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k/2k-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

следува

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \ .$$

Следната теорема покажува дека критериумот со коренување навистина ја определува конвергенцијата на редот во повеќе случаи, отколку критериумот на Даламбер.

Теорема 5. Нека (a_n) е низа од реални броеви, $a_n > 0$. Тогаш

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

и

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ .$$

доказ: Ќе го покажеме првото неравенство. Второто се покажува аналогно. Нека ставиме

$$a = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ .$$

Ако $a = \infty$ тогаш тврдењето на теоремата е точно. Нека $a < \infty$. Тогаш нека b е реален број, $a < b$.

Заради дефиницијата на лимес супериор постои природен број n_0 таков што за сите $n \ge n_0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < b \ .$$

Следува

$$a_{n_0+1} < b \cdot a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} < b^2 \cdot a_{n_0}$$

$$a_n < b^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$$

и

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_{n_0} b^{-n_0}} \cdot b$$

Последното неравенство е точно за сите $n \geq n_0$, и следува за произволна подниза (a_{n_i})

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[n_i]{a_{n_i}} < \lim_{i\to\infty} \sqrt[n_i]{a_{n_0} b^{-n_0}} \cdot b = b \ .$$

Значи

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq b \ .$$

Заради произволноста на бројот b, $a < b$ добиваме

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a \ .$$

4. РЕДОВИ СО ПРОМЕНЛИВ ЗНАК

Нека е дадена низа од позитивни реални броеви (a_n). Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

се нарекува *алтернативен ред* (*ред со променлив знак*).

Следната теорема е позната како критериум на Лајбниц.

Теорема 1. Ако низата од позитивни броеви (a_n) опаѓа и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ тогаш алтернативниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ конвергира.

доказ: Нека (A_n) е низата од парцијални суми на алтернативниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Ќе ги разгледаме поднизите (A_{2k-1}) и (A_{2k}). Заради

$$A_{2k+1} = A_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1}$$

и заради $a_{2k} \geq a_{2k+1}$ добиваме $A_{2k+1} \leq A_{2k-1}$ т.е. низата (A_{2k-1}) опаѓа. Од друга страна заради

$$A_{2k+2} = A_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2}$$

следува низата (A_{2k}) расте. Покрај тоа

$$A_{2k} \leq A_{2k+1} \leq A_{2k-1} \leq \ldots \leq A_3 \leq a_1,$$

што значи дека низата (A_{2k}) е ограничена од горе. Следува оваа низа е конвергентна. Нека

$$\lim_{k\to\infty} A_{2k} = A.$$

Ќе покажеме дека и $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Нека е даден $\varepsilon > 0$. Постои k_0 таков што за $k \geq k_0$

$$|A_{2k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и таков што

$$|a_{2k+1}| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Тогаш

$$|A_{2k+1} - A| \leq |A_{2k} - A| + |a_{2k+1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Следува за $n \geq 2k_0$

$$|A_n - A| < \varepsilon ,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A .$$

Пример. Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

е конвергентен според претходниот критериум. Меѓутоа, овој ред не е апсолутно конвергентен затоа што редот од апсолутни вредности

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

дивергира.

5. РАЗМЕСТУВАЊЕ НА ЧЛЕНОВИТЕ НА БРОЕН РЕД

Нека е даден броен ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Дефиниција. Нека $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ е низа од природни броеви во која секој природен број се јавува еднаш и само еднаш. Нека ставиме

$$y_k = x_{n_k} \ ,$$

за $k = 1,2, \dots$. За редот

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

велиме дека е *разместување* на редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Се поставува природното прашање: дали ако првобитниот ред конвергира, дали и редот добиен со разместување конвергира и дали имаат иста сума.

Теорема 1. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е апсолутно конвергентен ред. Тогаш секое разместување на овој ред конвергира и има иста сума.

доказ: Нека $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ е разместување на редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, при што $y_k = x_{n_k}$, за $k = 1,2, \dots$. Дефинираме број $M(k)$ со

$$M(k) = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \ .$$

Бројот $m(k)$ е определен со $1,2,\dots,m(k)\in\{n_1,n_2,\dots,n_k\}$, но $m(k)+1\notin\{n_1,n_2,\dots,n_k\}$ (во случај кога $1\notin\{n_1,n_2,\dots,n_k\}$, ставаме $m(k)=0$).

Од дефиницијата на разместување имаме дека $m(k)\to\infty$ и $M(k)\to\infty$ кога $k\to\infty$.

Заради

$$\sum_{i=1}^{k}|y_i|\le\sum_{i=1}^{M(k)}|x_i|\le\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$$

добиваме дека редот $\sum_{k=1}^{\infty}y_k$ апсолутно конвергира, затоа што парцијалните суми на редот од апсолутните вредности се ограничени. Значи тој ред и конвергира. Нека неговата сума ја означиме со Y, а низата од парцијални суми нека ја означиме со (Y_k).

Нека сумата на редот $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ ја означиме со X, а низата од парцијални суми нека ја означиме со (X_n).

Останува уште да се покаже дека разместувањето и првобитниот ред имаат иста сума т.е. дека $Y=X$.

Нека е даден $\varepsilon>0$. Заради тоа што редот апсолутно конвергира, постои природен број n_0 таков што за $n\ge n_0$, и произволен природен број p,

$$\sum_{i=n+1}^{n+p}|x_i|<\varepsilon\ .$$

Нека избереме k таков што $m(k)\ge n_0$. Тогаш

$$|Y_k-X_{m(k)}|=|x_{n_1}+x_{n_2}+\dots x_{n_k}-(x_1+x_2+\dots x_{m(k)})|\le\sum_{i=m(k)+1}^{M(k)}|x_i|<\varepsilon$$

Ако $k\to\infty$, добиваме

$$|Y-X|\le\varepsilon\ .$$

Заради произволноста на бројот $\varepsilon > 0$, следува $Y = X$.

Лема: Нека (x_n) и (y_m) се две низи од реални броеви и нека постои $\lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

1) ако постои низа од природни броеви m_k таква што

$$x_k \le y_{m_k}$$

за секој k и $m_k \to \infty$ кога $k \to \infty$, тогаш

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \le \lim_{m\to\infty} y_m$$

2) ако постои низа од природни броеви m_k таква што

$$x_k \ge y_{m_k}$$

за секој k и $m_k \to \infty$ кога $k \to \infty$, тогаш

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \ge \lim_{m\to\infty} y_m$$

доказ: 1) нека (x_{n_k}) е подниза од низата (x_n). За секој k постои m_k така што

$$x_{n_k} \le y_{m_k}$$

и $m_k \to \infty$ кога $k \to \infty$. Следува

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \le \lim_{k\to\infty} y_{m_k} = \lim_{m\to\infty} y_m$$

од каде и

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \le \lim_{m\to\infty} y_m \ .$$

Со помош на докажаната лема, ќе ја покажеме теоремата (за кондензација на ред од реални броеви.

Нека е даден броен ред

$$
\begin{aligned}
&p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{l_1} + \\
&+ p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \ldots + p_{k_2} - q_{l_1+1} - q_{l_1+2} - \ldots - q_{l_2} + \ldots \\
&- \\
&+ p_{k_{i-1}+1} + p_{k_{i-1}+2} + \ldots + p_{k_i} - q_{l_{i-1}+1} - q_{l_{i-1}+2} - \ldots - q_{l_i} + \ldots .
\end{aligned}
$$

каде што $p_i > 0$, $q_j > 0$. Ставајќи

$$
\begin{aligned}
&a_1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}, \qquad a_2 = q_1 + q_2 + \ldots + q_{l_1}, \\
&a_3 = p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \ldots + p_{k_2}, \qquad a_4 = q_{l_1+1} + q_{l_1+2} + \ldots + q_{l_2} \\
&-- \\
&a_{2i-1} = p_{k_{i-1}+1} + p_{k_{i-1}+2} + \ldots + p_{k_i}, \qquad a_{2i} = q_{l_{i-1}+1} + q_{l_{i-1}+2} + \ldots + q_{l_i}
\end{aligned}
$$

добиваме алтернативен ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

кој се нарекува *кондензација* на првобитниот ред.

Теорема 2 (за кондензација). Првобитниот ред конвергира ако и само ако конвергира неговата кондензација и имаат иста сума.

доказ: Нека претпоставиме дека првобитниот ред конвергира и нека со (R_n) ја означиме неговата низа од парцијални суми , а со (A_i) низата од парцијални суми на неговата кондензација. Тогаш (A_i) е подниза од (R_n), и според тоа конвергира кон ист број како и низата (R_n).

Обратно, нека (A_i) конвергира и нека $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = A$. За секој n постои i_n таков што

$$R_n \le A_{2i_n - 1} .$$

Според претходната лема имаме

$$\limsup_{n\to\infty} R_n \le \lim_{i\to\infty} A_{2i-1} = A\,.$$

Истотака, за секој n постои i_n таков што

$$A_{2i_n} \le R_n\ .$$

и добиваме

$$A = \lim_{i\to\infty} A_{2i} \le \liminf_{n\to\infty} R_n.$$

Добивме

$$\limsup_{n\to\infty} R_n \le A \le \liminf_{n\to\infty} R_n$$

и следува

$$\lim_{n\to\infty} R_n = A\,.$$

Следната теорема е позната како теорема на Риман.

Теорема 3. Нека $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е ред од реални броеви кој конвергира, но не конвергира апсолутно. Нека Y е произволен реален број. Тогаш постои разместување $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ чија сума е Y.

доказ: Нека

$$p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$$

се позитивните членови ($p_k \ge 0$) на редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ во редоследот во кој се појавуваат во редот, и нека

$$P_k = p_1 + p_2 + \ldots + p_k\,.$$

Нека

$$q_1, q_2, \ldots, q_l, \ldots$$

се апсолутните вредности на негативните членови во редоследот во кој се појавуваат и нека

$$Q_l = q_1 + q_2 + \ldots + q_l \ .$$

Нека $k(n)$ и $l(n)$ е бројот на позитивни односно негативни членови во парцијалната сума

$$X_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ .$$

Од условот редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ да конвергира, имаме дека постои конечен лимес

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \ .$$

Од условот редот да не конвергира апсолутно за

$$S_n = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

имаме

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \ .$$

Заради

$$X_n = P_{k(n)} - Q_{l(n)}$$

и

$$S_n = P_{k(n)} + Q_{l(n)} \ ,$$

добиваме

$$\lim_{n\to\infty} P_{k(n)} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}(S_n + X_n) = \infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty} Q_{l(n)} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}(S_n - X_n) = \infty \ .$$

Заради $P_{k(n)} \leq P_n$ и $Q_{l(n)} \leq Q_n$ добиваме

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$$

и

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty \ .$$

Сега нека $Y > 0$. Ќе формираме разместување

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{l_1} +$$
$$+ p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \ldots + p_{k_2} - q_{l_1+1} - q_{l_1+2} - \ldots - q_{l_2} + \ldots$$

- -

$$+ p_{k_i+1} + p_{k_i+2} + \ldots + p_{k_{i+1}} - q_{l_i+1} - q_{l_i+2} - \ldots - q_{l_{i+1}} + \ldots.$$

- -

на почетниот ред конструирајќи ги низите од природни броеви (k_i) и (l_i) на следниот начин. Нека како погоре со

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

ја означиме неговата кондензација, а со (A_i) ја означиме сооддветната низа од парцијални суми. Постои k_1 таков што

$$A_1 - p_{k_1} < Y \leq A_1$$

и постои l_1 таков што

$$A_2 \leq Y < A_2 - q_{l_1} .$$

На овој начин добиваме строго растечки низи од природни броеви (k_i) и (l_i) такви што

$$A_{2i-1} - p_{k_i} < Y \leq A_{2i-1}$$

и

$$A_{2i} \leq Y < A_{2i} - q_{l_i} \ .$$

Следува

$$\lim_{i\to\infty} A_{2i-1} = Y = \lim_{i\to\infty} A_{2i}$$

што значи дека кондензацијата конвергира.

Значи разместувањето конвергира и има сума еднаква на Y.

Забелешка. Со разместување на членовите на редот од претходната теорема можеме да постигнеме и низата од парцијални суми на разместениот ред да тежи кон $\propto$ или -$\propto$. На пример за $\propto$, разместувањето

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}) - q_1 + (p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \ldots + p_{k_2}) - q_2 + \ldots.$$

на првобитниот ред се добива со конструкција на низа од природни броеви (k_i) на следниот начин: Постои k_1 таков што

$$1 < P_{k_1} \ .$$

Постои k_2, $k_2 > k_1$ таков што

$$2 < P_{k_2} - q_1 .$$

На овој начин добиваме строго растечки низи од природни броеви (k_i) таква што

$$i < A_{2i-1}$$

$$\lim_{i\to\infty} A_{2i-1} = \infty \ .$$

Тогаш и

$$\lim_{i\to\infty} A_{2i} = \lim_{i\to\infty} A_{2i-1} - q_i = \infty$$

и следува

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \infty$$

Пример. Нека со S ја означиме сумата на редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Ќе го разгледаме и следниов ред добиен со разместување на членовите на првобитниот ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

Истиот ред може да го трансформираме и како

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$
$$= \frac{1}{2}[(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots = \frac{1}{2}S$$

Следува редот добиен со разместување има сума еднаква на половина од сумата на првобитниот ред.

6. ПРОИЗВОД НА РЕДОВИ

Дефиниција. Производ на редовите $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ се нарекува редот $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ каде општиот член е определен со

$$z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0 .$$

Следната теорема ни ја дава релацијата помеѓу сумите на двата реда и сумата на нивниот производ, под услов едниот од редовите да е апсолутно конвергентен.

Теорема 1. Нека редот $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ апсолутно конвергира и има сума X, и нека редот $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ има сума Y. Тогаш нивниот производ конвергира и има сума XY.

доказ: Нека производот на редовите $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ е редот $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, и нека со (X_n), (Y_n) и (Z_n), соодветно, се означени низите од парцијалните суми на овие редови. Од

$$\begin{aligned}
Z_n &= x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0) + \ldots + (x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0) \\
&= x_0 Y_n + x_1 Y_{n-1} + \ldots + x_{n-1} Y_1 + x_n Y_0 \\
&= x_0 (Y_n - Y + Y) + x_1 (Y_{n-1} - Y + Y) + \ldots + x_{n-1}(Y_1 - Y + Y) + x_n (Y_0 - Y + Y) \\
&= X_n Y + x_0 (Y_n - Y) + x_1 (Y_{n-1} - Y) + \ldots + x_{n-1}(Y_1 - Y) + x_n (Y_0 - Y)
\end{aligned}$$

добиваме

$$Z_n - X_n Y = x_0 (Y_n - Y) + x_1 (Y_{n-1} - Y) + \ldots + x_{n-1}(Y_1 - Y) + x_n (Y_0 - Y) .$$

Редот $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ конвергира. Според тоа постои реален број $M > 0$ таков што

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \leq M \ .$$

Нека е дадено $\varepsilon > 0$. Постои природен број n_0 таков што за $n \geq n_0$

$$|Y_n - Y| < \frac{\varepsilon}{4M} \ .$$

Следува

$|Z_n - X_n Y| \ \leq$

$$(|x_0||Y_n - Y| + ... + |x_{n-n_0}||Y_{n_0} - Y|) + (|x_{n-n_0+1}||Y_{n_0-1} - Y|) + ... + |x_n||Y_0 - Y|)$$

Заради $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, при фиксиран n_0 постои n_1 таков што $n_1 > n_0$, и таков што за $n \geq n_1 - n_0 + 1$ за конечната сума (која содржи точно n_0 членови) да е исполнето

$$|x_{n-n_0+1}||Y_{n_0-1} - Y|) + \ldots + |x_n||Y_0 - Y| < \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

Според тоа за $n > n_1$ добиваме

$$|Z_n - X_n Y| \leq \frac{\varepsilon}{4M}(|x_0| + ... + |x_{n-n_0}|) \ + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{4M} \cdot M \ + \frac{\varepsilon}{4} . = \frac{\varepsilon}{2}$$

Постои n_2 $(n_2 \geq n_1)$, таков што за $n > n_2$,

$$|X_n - X| \leq \frac{\varepsilon}{2(|Y| + 1)} \ .$$

Следува

$$|Z_n - XY| \leq |Z_n - X_n Y + X_n Y - XY| \leq |Z_n - X_n Y| + |X_n - X||Y|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon |Y|}{2(|Y| + 1)} \quad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

од каде

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = XY$$

т.е. сумата на производот на дватта реда е еднаква на XY .

7. КРИТЕРИУМИ НА ДИРИХЛЕ И АБЕЛ

Теорема 1. (критериум на Дирихле) Нека се дадени низите од реални броеви (x_n) и (y_n) за кои

1) низата (x_n) монотоно опаѓа и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$
2) парцијалните суми на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ се ограничени

Тогаш редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ конвергира.

доказ: Нека е даден $\varepsilon > 0$. Постои $M > 0$ така што

$$|\sum_{i=1}^{n} y_i| \le M .$$

Тогаш

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} y_i| = |\sum_{i=1}^{n+p} y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i|$$

$$\le |\sum_{i=1}^{n+p} y_i| + |\sum_{i=1}^{n} y_i| \le 2M$$

Избираме n_0 така што за $n \ge n_0$

$$|x_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{2M} .$$

Тогаш, заради

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i y_i = (x_{n+1} - x_{n+2})\ y_{n+1} + (x_{n+2} - x_{n+3})(y_{n+1} + y_{n+2}) + \ldots$$

$$\ldots + (x_{n+p-1} - x_{n+p})(y_{n+1} + \ldots + y_{n+p-1}) + x_{n+p}(y_{n+1} + \ldots + y_{n+p})$$

$$= \sum_{i=n+1}^{n+p-1}((x_i - x_{i+1})\sum_{j=n+1}^{i} y_j) + x_{n+p}\sum_{j=n+1}^{n+p} y_j$$

следува

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i y_i| \le \sum_{i=n+1}^{n+p-1}((x_i - x_{i+1})\cdot|\sum_{j=n+1}^{i} y_j|) + x_{n+p}\cdot|\sum_{j=n+1}^{n+p} y_j|$$

$$\le 2M\cdot[\sum_{i=n+1}^{n+p-1}(x_i - x_{i+1}) + x_{n+p}]$$

$$= 2M\cdot x_{n+1} < \varepsilon$$

Теорема 2. (Критериум на Абел) Нека се дадени низите од реални броеви (x_n) и (y_n) за кои

1) низата (x_n) е монотона и ограничена
2) редот $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ конвергира

Тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ конвергира.

доказ: Ќе разгледаме три случаи.

а) Ако низата монотоно опаѓа и $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, тогаш тврдењето следува од претходната теорема.

б) Ако низата (x_n) монотоно опаѓа и $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, тогаш за низата (z_n), $z_n = x_n - b$ се исполнети условите под а). Следува редот $\sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n$ конвергира. Заради

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n - b\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

добиваме дека и редот $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ конвергира.

в) Ако низата (x_n) монотоно расте и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогаш за низата (w_n), $w_n = -x_n$ се исполнети условите под б). Следува редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n y_n$ конвергира. Заради

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n y_n = -\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

добиваме дека и редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ конвергира.

8. БЕСКОНЕЧНИ ПРОИЗВОДИ

Нека (x_n) е низа од реални броеви, $x_n \neq 0$. Низата (P_n) каде

$$P_1 = x_1,\ P_2 = x_1 x_2\ ,\ P_n = x_1 x_2 \ldots x_n\ , \ldots$$

се нарекува *бесконечен производ*. Обично, бесконечниот производ се запишува во вид

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \quad ,$$

и P_n се нарекува n-ти парцијален производ.

Дефиниција: Бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ се нарекува конвергентен ако низата од неговите парцијални производи (P_n) конвергира кон реален број $P \neq 0$. Во спротивно велиме дека бесконечниот производ е дивергентен.

Теорема 1: Ако бесконечниот производ конвергира тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

доказ. Од конвергенцијата на производ имаме

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P = \lim_{n\to\infty} P_{n-1}\ ,$$

каде што $P \neq 0$. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}} = 1 \ .$$

Пример. Може да се случи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, но бесконечниот производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ да дивергира. На пример за бесконечниот производ

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n}) \ ,$$

n-тиот парцијален производ

$$\prod_{i=1}^{n} (1+\frac{1}{i}) = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\frac{n+1}{n} = n+1$$

тежи кон бесконечност и бесконечниот производ дивергира.

Забелешка. Заради претходната теорема за конвергентен производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ постои природен број n_0 таков што за сите $n \geq n_0$, $x_n > 0$.

Проблемот на конвергенција на бесконечен производ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ со позитивни членови $x_n > 0$, се сведува на конвергенција на редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ каде што $y_n = \ln x_n$, заради тоа што за парцијалната сума Y_n е исполнето

$$e^{Y_n} = e^{y_1+\ldots+y_n} = e^{\ln x_1 + \ldots \ln x_n} = e^{\ln x_1}\ldots e^{\ln x_n} = x_1\ldots x_n = P_n \ .$$

Заради непрекинатоста на експоненцијалната функција

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} Y_n} \ .$$

Следува ако низата (Y_n) конвергира, тогаш и низата (P_n) конвергира.

Обратно, заради

$$Y_n = \ln P_n$$

и непрекинатоста на логаритамската функција

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \ln \lim_{n\to\infty} P_n,$$

добиваме: ако низата (P_n) конвергира, тогаш и низата (Y_n) конвергира.

Според тоа низата (P_n) конвергира, ако и само ако низата (Y_n) конвергира.

Пример. Бесконечниот производ $\prod_{n=2}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2-1})$, конвергира заради тоа што:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=2}^{n}(1+\frac{1}{i^2-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot \quad ... \quad \cdot \quad \frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2$$

IX. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ

1. ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ - ДЕФИНИЦИЈА

Ако X е подмножество од реалните броеви, со $F(X)$ ќе го означиме множеството од сите реални функции определени на X.

Дефиниција. Секое пресликување $N \to F(X)$ од множеството на природни броеви N во множеството $F(X)$ се нарекува *функционална низа*.

Функционалната низа определена со пресликувањето $1 \to f_1, 2 \to f_2, \ldots$ ја означуваме со $(f_n | n \in N)$, а најчесто ја користиме скратената ознака (f_n).

Дефиниција. За функционалната низа (f_n) велиме дека *конвергира рамномерно* кон функцијата f на множеството X, ако за секој позитивен број $\varepsilon>0$ постои природен број n_0 така што за $n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

за сите $x \in X$.

Дефиниција. За функционалната низа (f_n) велиме дека *конвергира по точки* кон функцијата f на множеството X, ако за секој $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Од двете претходни дефиниции следува точноста на следнава теорема.

Теорема 1. Ако функционалната низа конвергира рамномерно, тогаш таа конвергира и по точки.

Пример. Дадена е функционалната низа (f_n), $f_n(x) = x^n$ определена на интервалот $[0,1]$. Тогаш оваа функционална низа конвергира по точки кон функцијата

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Меѓутоа конвергенцијата не е рамномерна. Ако претпоставиме спротивно т.е. дека конвергенцијата е рамномерна тогаш за $\varepsilon = \frac{1}{2}$ би постоел природен број n_0 така што

$$|x^{n_0} - f(x)| < \frac{1}{2}$$

за сите $x \in [0,1]$. Но, тогаш за $x = \sqrt[n_0]{1/2}$ би добиле

$$|x^{n_0} - f(x)| = |(\sqrt[n_0]{1/2})^{n_0}| = \frac{1}{2}$$

што е контрадикција.

Дефиниција: Нека (f_n) е функционална низа на множеството X. Изразот

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

се нарекува функционален ред на множеството X.

Функцијата F_n определена на множеството X со

$$F_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

се нарекува n*-та парцијална сума* на функционалниот ред, а низата (F_n), *функционална низа од парцијални суми*.

Дефиниција: Велиме дека функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *конвергира рамномерно* кон функцијата F на множеството X, ако функционалната низа од парцијални суми на редот *конвергира рамномерно* кон функцијата F на множеството X.

Дефиниција: Велиме дека функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *конвергира по точки* кон функцијата F на множеството X, ако функционалната низа од парцијални суми на редот *конвергира по точки* кон функцијата F на множеството X.

Пример: Функционалниот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

конвергира за $|x| < 1$. Нека парцијалните суми на овој ред ги означиме со

$$F_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \; .$$

Тогаш

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} \; ,$$

т.е. функционалниот ред конвергира по точки кон функцијата $F(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Меѓутоа, конвергенцијата не е рамномерна. Ако претпоставиме спротивно т.е. дека конвергенцијата е рамномерна тогаш за $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ би постоел природен број n_0 така што

$$|F_n(x) - F(x)| < \frac{1}{2}$$

т.е.

$$\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| < \frac{1}{2}$$

за сите $|x| < 1$. Но, тогаш за $x = \sqrt[n_0+1]{1/2}$ би добиле

$$\left|\frac{x^{n_0+1}}{1-x}\right| > x^{n_0+1} = \left(\sqrt[n_0+1]{1/2}\right)^{n_0+1} = \frac{1}{2}$$

што е контрадикција.

Следната теорема ќе ја нарекуваме основен критериум за рамномерна конвергенција на функционални низи и редови . Теоремата ќе биде формулирана под а) за низи и под б) за редови. Понатаму, бидејќи дефиницијата на конвергенција на ред е определена со конвергенцијата на низи теоремите од ваков тип ќе бидат докажувани само за низи.

Теорема 2: а) Нека (f_n) е функционална низа на множеството X. Следните услови се еквивалентни:

1) низата (f_n) рамномерно конвергира на множеството X.

2) за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 така што за $m,n \geq n_0$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

за сите $x \in X$.

б) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ е функционален ред на множеството X. Следните услови се еквивалентни:

1) редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ рамномерно конвергира на множеството X.

2) за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 така што за $n \geq n_0$, и p произволен природен број да е исполнето

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)| < \varepsilon,$$

за сите $x \in X$.

доказ: а) 1)$\Rightarrow$2) Од рамномерната конвергенција на функционалната низа (f_n) на множеството X, постои функција f на множеството X, така што за секој позитивен број ε>0 постои природен број n_0 така што за $m,n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{и} \qquad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

за сите $x \in X$.Тогаш

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

2)$\Rightarrow$1) Од претпоставката за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 така што за $m,n \geq n_0$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

за сите $x \in X$.

Следува за фиксиран број $x \in X$, бројната низа $(f_n(x))$ е фундаментална. Значи бројната низа $(f_n(x))$ е и конвергентна и постои $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Определуваме реална функција на множеството X со

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Сега, ако во претходното неравенство пуштиме $n \to \infty$, за $m \geq n_0$ добиваме

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

за сите $x \in X$ т.е. низата (f_n) рамномерно конвергира на множеството X.

б) Од условот 1) конвергенцијата на редот значи дека функционалната низа (F_n) од парцијални суми рамномерно конвергира на множеството X. Тогаш според 1) за секој позитивен број ε>0 постои природен број n_0 така што за сите $m > n \geq n_0$,

$$|F_m(x) - F_n(x)| < \varepsilon,$$

за сите $x \in X$.

Последното неравенство е еквивалентно со

$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| < \varepsilon,$$

за сите $x \in X$, што е условот 2) со $m = n + p$.

Покажавме дека условот 1) е еквивалентен со условот 2).

Дефиниција: За функционалниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ велиме дека *конвергира рамномерно апсолутно* на множеството X ако редот $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ конвергира рамномерно на множеството X.

Теорема 3: Ако функционалниот ред конвергира рамномерно апсолутно на множеството X тогаш конвергира и рамномерно на множеството X.

доказ: Заради конвергенцијата на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ постои природен број n_0 таков што за $n \geq n_0$, и p природен број да е исполнето

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| < \varepsilon$$

за сите $x \in X$.

Следува

$$|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| < \varepsilon,$$

за сите $x \in X$, т.е. редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ конвергира рамномерно.

Следната теорема е позната како мајорантен критериум.

Теорема 4 : Нека $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ е функционален ред на множеството X, и нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред од позитивни реални броеви, $a_n \geq 0$. Нека постои природен број n_0 така што за сите $n \geq n_0$ да е исполнето

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

за сите $x \in X$.

Ако бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тогаш функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ конвергира рамномерно и апсолутно.

доказ: Заради конвергенцијата на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ постои природен број n_1 (кој може да се избере така што $n_1 \geq n_0$) таков што за сите $n \geq n_1$, и p произволен природен број да е исполнето

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon.$$

Следува

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon,$$

за сите $x \in X$ т.е. редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ конвергира рамномерно и апсолутно.

2. ПРОМЕНА НА РЕДОСЛЕДОТ НА ЛИМЕСИТЕ

За точката x_0 велиме дека е *точка на акумулација* за множеството X, ако секоја околина на x_0 содржи точка од X различна од x_0.

Пример. Нека P е интервал од реалната права и $x_0 \in P$. Тогаш секоја точка $x \in P$ е точка на акумулација за множеството $P \setminus \{x_0\}$.

Забелешка: Ако $x_0 \in X$ и x_0 не е точка на акумулација за X, тогаш x_0 се нарекува изолирана точка. Ако $f : X \to R$ е функција, тогаш таа е непрекината во секоја изолирана точка.

Теорема 1. а) Нека (f_n) е функционална низа која рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството X, и нека x_0 е точка на акумулација за X. Нека за секој природен број постојат

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$$

во множеството реални броеви. Тогаш

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n .$$

б) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ е функционален ред кој рамномерно конвергира кон функцијата F на множеството X, и нека x_0 е точка на акумулација за X. Нека за секој природен број постојат

$$\lim_{x \to x_0} f_n(x) = b_n$$

во множеството реални броеви. Тогаш

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

доказ. а) Нека е даден $\varepsilon > 0$. Постои природен број n_0 таков што за $n, m \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

за сите $x \in X$. Акоземеме лимес кога $x \to x_0$ во ова неравенство, добиваме

$$|a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

т.е. низата (a_n) е фундаментална. Следува таа е и конвергентна и нека

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Тогаш од претходното неравенство, земајќи $m \to \infty$ добиваме

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3} .$$

Во првото неравенство во доказот, избирајќи $m = n_0$ добиваме: за $n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

за сите $x \in X$. Ако земеме лимес кога $n \to \infty$ во ова неравенство, добиваме

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} ,$$

за сите $x \in X$. Заради

$$\lim_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0},$$

постои $\delta > 0$, такво што од

$$|x - x_0| < \delta$$

и $x \in X$ да следува

$$|f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

од каде:

$$\begin{aligned}|f(x) - A| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Следува

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Последица. Под исти услови како во теоремата
а)

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

б)

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Теорема 2. а) Нека (f_n) е функционална низа од непрекинати функции која рамномерно конвергира кон функцијата f на множеството X. Тогаш функцијата f е непрекината на множеството X

б) Нека $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ е функционален ред од непрекинати функции кој рамномерно конвергира кон функцијата F на множеството X. Тогаш и функцијата F е непрекината на множеството X.

доказ. а) Доволно е да се покаже дека за секоја точка на акумулација $x_0 \in X$ е исполнето:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Заради непрекинатоста на функциите f_n,

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$$

и исполнети се условите на претходната теорема и нејзината последица. Според тоа

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Пример. Нека е дадена функционалната низа од непрекинати функции (f_n), $f_n(x) = x^n$ на интервалот $[0,1]$. Оваа функционална низа конвергира кон функцијата

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

која има прекин во точката 1.

3. ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ И ИНТЕГРИРАЊЕ НА ФУНКЦИОНАЛНИ НИЗИ И РЕДОВИ

Теорема 1: а) Нека е дадена функционална низа (f_n) од диференцијабилни функциии на интервалот $[a,b]$ такви што:

- функционалната низа $(f_n^{'})$ рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$

- постои точка x_0 од $[a,b]$ таква што низата од реални броеви $(f_n(x_0))$ конвергира.

Тогаш функционалната низа (f_n) рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$ кон функција f и притоа

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x) = f^{'}(x)$$

б) Нека е даден функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ од диференцијабилни функциии на интервалот $[a,b]$ така што:

- функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}$ рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$

- постои точка x_0 од $[a,b]$ таква што бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ конвергира.

Тогаш функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$ и притоа

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}$$

доказ. а) Најпрво ќе покажеме дека функционалната низа (f_n) рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$.

Нека е даден $\varepsilon > 0$. Заради условите на теоремата, постои n_0 таков што за $m,n \geq n_0$

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и постои n_1 таков што за $m,n\geq n_1$ е исполнето

$$|f_n^{'}(x)-f_m^{'}(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

за сите $x\in[a,b]$.

Нека $x\in[a,b]$. Применувајќи ја теоремата за средна вредност на функцијата (f_n-f_m), заклучуваме дека постои u меѓу x_0 и x така што

$$(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x_0)-f_m(x_0))=(f_n^{'}(u)-f_m^{'}(u))(x-x_0)$$

Тогаш за $n_2=\max\{n_0,n_1\}$ и за $m,n\geq n_2$ имаме

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_m(x)|&\leq|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(x_0)-f_m(x_0))|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\\&\leq|f_n^{'}(u)-f_m^{'}(u)||x-x_0|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

Следува низата (f_n) рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$. Нека конвергира кон функција f т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}f_{и}(x)=f(x)$.

Сега нека x_1 е фиксирана точка од интервалот $[a,b]$. Дефинираме функции h_n определени на $[a,b]\setminus\{x_1\}$ со:

$$h_n(x)=\frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1}$$

На овој начин е определена функционална низа (h_n) на $[a,b]\setminus\{x_1\}$.

Слично како погоре, применувајќи ја теоремата за средна вредност добиваме

$$(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x_1)-f_m(x_1))=(f_n^{'}(v)-f_m^{'}(v))(x-x_1)$$

каде што v е меѓу x_1 и x. Тогаш за $m,n\geq n_1$ имаме

$$|h_n(x)-h_m(x)|=\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_1)+f_m(x)-f_m(x_1)}{x-x_1}\right|=\left|\frac{(f_n'(v)-f_m'(v))(x-x_1)}{x-x_1}\right|$$
$$=|f_n'(v)-f_m'(v)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ .$$

Со ова покажавме дека функционалната низа (h_n) рамномерно конвергира на $[a,b]\setminus\{x_1\}$.

Заради

$$\lim_{x\to x_1} h_n(x)=\lim_{x\to x_1}\frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1}=f_n'(x_1)$$

за функционалната низа (h_n) се исполнети условите на теоремата за промена на редоследот на лимесите. Значи

$$\lim_{x\to x_1}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1}=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_1}\frac{f_n(x)-f_n(x_1)}{x-x_1}$$

т.е.

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{n\to\infty}f_n'(x_1).$$

од каде

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x_1)=f'(x_1)\ .$$

Теорема 2: а) Нека е дадена функционална низа (g_n) од непрекинати функции која рамномерно конвергира кон функција g на интервалот$[a,b]$, и нека $x_0\in[a,b]$. Тогаш функционалната низа $(\int_{x_0}^{x} g_n(t)dt)$ на интервалот $[a,b]$ рамномерно конвергира кон функцијата $\int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

б) Нека е даден функционален ред $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ од непрекинати функции кој рамномерно конвергира кон функција G на интервалот $[a,b]$, и нека

$x_0 \in [a,b]$. Тогаш функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}(\int_{x_0}^{x} g_n(t)dt)$ на интервалот $[a,b]$ рамномерно конвергира кон функцијата $\int_{x_0}^{x} G(t)dt$.

доказ. a) Нека (f_n) е функционалната низа на интервалот $[a,b]$ определена со

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} g_n(t)dt \ .$$

Заради тоа што $f_n^{'} = g_n$ и $f_n(x_0) = 0$ за сите природни броеви, исполнети се условите на претходната теорема. Според таа теорема функционалната низа (f_n) рамномерно конвергира на интервалот $[a,b]$, да речеме кон функција f и притоа

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{'}(x) = f^{'}(x)$$

од каде

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f^{'}(x).$$

Значи

$$g(x) = f^{'}(x)$$

од каде

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + C.$$

Заради $f_n(x_0) = 0$ за сите природни броеви, мора и $f(x_0) = 0$. Следува $C = 0$, и

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

Значи функционалната низа $(\int_{x_0}^{x} g_n(t)dt)$ на интервалот $[a,b]$ рамномерно конвергира кон функцијата $\int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

4. СТЕПЕНСКИ РЕДОВИ

Нека е зададен функционален ред од облик

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

каде што $c_n, n = 0,1,2,\ldots$ и x_0 се фиксирани реални броеви се нарекува степенски ред. При ова во реалните броеви x во кои степенскиот ред конвергира добиваме реална функција $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

Степенскиот ред секогаш конвергира во точката $x = x_0$. Множеството од сите x во кои степенскиот ред апсолутно конвергира се нарекува *област на апсолутна конвергенција*.

Според критериумот на Коши редот ќе *конвергира апсолутно* во точките

$$\{x \mid \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0| < 1\}$$

При ова ако $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ тогаш редот конвергира само во точката $x = x_0$, а ако $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ тогаш областа на апсолутна конвергенција е целата реална права.

Ако $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \neq \infty, 0$ тогаш областа на апсолутна конвергенција е

$$\{x \mid |x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}\}.$$

Ако ставиме

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

тогаш областа на апсолутна ковергенција е $\{x \mid |x-x_0|<R\}$. Значи во реалните броеви областа на конвергенција е точно интервалот (x_0-R, x_0+R).

Ако $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\infty$ тогаш сметаме $R=0$, а кога $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0$ тогаш сметаме дека $R=\infty$.

Како последица од критериумот на Коши добиваме дека редот дивергира во точките $\{x \mid |x-x_0|>R\}$.

Во точките во кои $|x-x_0|=R$, т.е. за точките $x=x_0+R$ и $x=x_0-R$ конвергенцијата на редот треба посебно да се испита, како што покажува следниот пример.

Пример: Степенскиот ред од реални броеви $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ конвергира во интервалот $(-1,1)$. Во едниот крај на овој интервал, за $x=1$ се добива дивергентниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Во другиот крај од интервалот во $x=-1$, се добива конвергентниот ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. Да забележиме дека овој ред не конвергира апсолутно. Значи редот конвергира на интервалот $[-1,1)$.

Теорема 1. Степенскиот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ кој има радиус на конвергенција R, конвергира рамномерно и апсолутно на секоја отсечка $[x_0-r, x_0+r]$, каде што $0<r<R$.

доказ. Заради $x_0+r\in(x_0-R, x_0+R)$ редот апсолутно конвергира во точката x_0+r , т.е. редот од позитивни броеви

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot r^n$$

конвергира. Според мајорантниот критериум, функционалниот ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ ќе конвергира рамномерно и апсолутно на отсечката $[x_0-r, x_0+r]$.

Последица. Степенскиот ред може почлено да се диференцира и интегрира произволен број пати во областа на апсолутна конвергенција

доказ. Нека степенскиот ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ има радиус на конвергенција R. Ако степенскиот ред го диференцираме член по член ќе добиеме нов степенски ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$$

Ќе покажеме дека новиот степенски ред има радиус на конвергенција R, покажувајќи дека

$$|\limsup_{n\to\infty} 1/\sqrt[n-1]{n\,|\,c_n\,|} = R$$

Ова равенство е точно затоа што за секоја подниза од природни броеви (n_k) е исполнето

$$|\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n_k-1]{n_k\,|\,c_{n_k}\,|}} = |\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(n_k\,|\,c_{n_k}\,|)^{1/(n_k-1)}} = |\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{(n_k\,|\,c_{n_k}\,|)^{1/n_k}}\right)^{n_k/(n_k-1)} = R$$

Според претходната теорема редот истотака конвергира рамномерно и апсолутно на секоја отсечка $[x_0-r, x_0+r]$ каде што $0<r<R$.

Значи исполнети се условите на теоремата за почлено диференцирање на почетниот степенски ред. Според тоа функцијата определена на отсечката $[x_0-r, x_0+r]$ со

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

може почлено да се дифернцира на секоја отсечка $[x_0-r, x_0+r]$, $0<r<R$.

Заради тоа што за секој $x \in (x_0-R, x_0+R)$ постои r така што $0<r<R$ и $x \in [x_0-r, x_0+r]$ степенскиот ред може почлено да се дифернцира на целиот интервал на конвергенција (x_0-R, x_0+R),

По диференцирањето повторно се добива степенски ред, кој повторно може да го диференцираме член по член. Значи степенскиот ред може почлено да се диференцира произволен број пати во интервалот на конвергенција.

Слично се покажува дека степенскиот ред може почлено да се интегрира произволен број пати во интервалот на конвергенција.

Како што знаеме, ако редот е од непрекинати функции и рамномерно конвергира, тогаш тој конвергира кон непрекината функција.

Заради тоа што степенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

рамномерно конвергира на секоја отсечка $[x_0 - r, x_0 + r]$ содржана во интервалот на конвергенција $(x_0 - R, x_0 + R)$, кон функција

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

следува функцијата $f(x)$ е непрекината за секој $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ і според тоа ќе биде непрекината и за секој $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, од интервалот на конвергенција.

Прашање е дали ако редот конвергира и во една од точките $x = x_0 + R$ и $x = x_0 - R$, дали ќе биде непрекината во тие точки ?

Одговорот е потврден. Заради поедноставен доказ, ова тврдење ќе го покажеме само во специјалниот случај кога $x_0 = 0$ и $R = 1$.

Теоремата е позната како теорема на Абел.

Теорема 2. Да претпоставиме дека степенскиот ред од реални броеви $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ има радиус на конвергенција 1. Нека степенскиот ред конвергира и во точката $x = 1$.

Нека

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$x \in (-1,1]$ Тогаш $f(x)$ е непрекината на $(-1,1]$

доказ. Степенскиот ред конвергира и во точката $x = 1$, значи бројниот редт

$$f(1)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Конвергира. Нека

$$S_n=\sum_{i=0}^{n} c_i \,.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} c_i x^i &= S_0+\sum_{i=1}^{n}(S_i-S_{i-1})x^i = S_0+\sum_{i=1}^{n} S_i x^i-\sum_{i=1}^{n} S_{i-1}x^i\\ &= S_n x^n+\sum_{i=0}^{n-1} S_i x^i-\sum_{i=0}^{n-1} S_i x^{i+1}\\ &= S_n x^n+(1-x)\sum_{i=0}^{n-1} S_i x^i\end{aligned}$$

Следува

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i=(1-x)\sum_{i=0}^{\infty} S_i x^i .$$

Нека е даден $\varepsilon>0$. Ако

$$S=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

тогаш постои n_0 таков што

$$|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad .$$

Нека δ, $1>\delta>0$, е избран така што

$$\delta\cdot\sum_{n=0}^{n_0}|S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Тогаш за $|1-x|<\delta$ заради

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n=1$$

имаме:

$$|f(x)-S|=|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_n x^n-(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}Sx^n|$$

$$\leq|1-x|\sum_{n=0}^{n_0}|S_n-S||x|^n+|1-x|\sum_{n=n_0}^{\infty}|S_n-S||x|^n$$

$$\leq\delta\sum_{n=0}^{n_0}|S_n-S|+\frac{\varepsilon}{2}|1-x|\sum_{n=n_0}^{\infty}|x|^n$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\frac{1}{1-|x|}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Следува $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$.

Од претходната теорема следува

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

т.е.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$$

Теореамата конкретно ќе ја примениме во следниов пример.

Пример. 1) Од степенскиот ред од реални броеви

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\dots$$

кој конвергира на интервалот (-1,1) со почлено интегрирање добиваме

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

Овој ред истотака конвергира на интервалот (-1,1), и конвергира и во точката $x=1$. Според претходната теорема

$$\lim_{x\to 1}\ln(1+x)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

т.е.

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

2) Како и претходно од **с**тепенскиот ред од реални броеви

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\dots$$

кој конвергира на (-1,1) со почлено интегрирање добиваме

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

Овој ред конвергира и во точката $x=1$. Според претходната теорема

$$\lim_{x\to 1}\operatorname{arctg} x=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

т.е.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

5. РЕД НА ТЕЈЛОР. АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ

Нека f е бесконечно диференцијабилна реална функција на интервалот од реални броеви P, и нека $x_0 \in P$.

Дефиниција: Степенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

се нарекува ред на Тејлор за функцијата f во точката $x_0 \in P$.

Од равенството

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

со смената $z=x-t$ и $dz=-dt$ добиваме

$$f(x)=f(x_0)+\int_{0}^{x-x_0} f'(x-z)dz\,,$$

со парцијална интеграција добиваме

$$f(x)=f(x_0)+f'(x-z)z\,\Big|_0^{x-x_0} + \int_0^{x-x_0} f''(x-z)zdz$$

односно

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_0^{x-x_0} f''(x-z)zdz$$

Ако претпоставиме дека

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{x-x_0} f^{(n)}(x-z)z^{n-1}dz$$

тогаш со парцијална интеграција добиваме

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n} + \frac{1}{n!}\int_0^{x-x_0} f^{(n+1)}(x-z)z^{n}dz$$

или

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

каде што

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^{x-x_0} f^{(n+1)}(x-z)z^n dz$$

или

$$R_n = \frac{1}{n!}\cdot\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n dt,$$

се нарекува *остаток во интегрална форма*.

Ако со $T_n(x)$ го означиме полиномот на Тејлор

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

тогаш

$$f(x) = T_n(x) + R_n$$

и Тејлоровиот ред конвергира по точки кон функцијата f ако функционалната низа (T_n) конвергира по точки кон функцијата f, односно ако за секоја точка x,

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$$

Ова е исполнето ако

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

т.е. ако функционалната низа (R_n) конвергира по точки кон 0.

Ако функционалната низа (R_n) конвергира рамномерно кон 0, тогаш и функционалната низа (T_n) конвергира рамномерно кон функцијата f. Следува, и Тејлоровиот ред конвергира рамномерно кон функцијата f.

Теорема 1: Нека f е бесконечно диференцијабилна реална функција на интервалот од реални броеви P, и постои M и природен, број n_0 таков што

$$|f^{(n)}(x)| \le M^n$$

за сите $n \ge n_0$ и сите $x \in P$. Тогаш редот на Тејлор за функцијата f конвергира на интервалот P кон функцијата f.

Ако интервалот P е конечен тогаш конвергенцијата е рамномерна.

доказ. Нека е даден $x \in P$. Нека $K = \max\{|x|, |x_0|\}$. Тогаш за t точка меѓу x и x_0, имаме

$$|x-t| \le |x-x_0| \le |x| + |x_0| \le 2K$$

и следува

$$|R_n| \le \frac{1}{n!}\cdot\left|\int_{x_0}^{x} |f^{(n+1)}(t)|\cdot|x-t|^n\,dt\right| \le \frac{M^{n+1}2^n K^n}{n!}\cdot\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \le \frac{M^{n+1}2^n K^n}{n!}\cdot|x-x_0|$$

за сите $n \ge n_0$.Следува за дадена точка $x \in P$, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ т.е степенскиот ред конвергира во таа точка.

Ако интервалот P е конечен тогаш. постојат реални броеви a и bтакви што за секој избор на x_0 и x, $a \le x_0, x \le b$. Тогаш $|x-x_0| \le b-a$, и следува конвергенцијата е рамномерна.

Последица: Нека f е бесконечно диференцијабилна реална функција на интервалот од реални броеви P, и постои M и природен број n_0 таков што

$$|f^{(n)}(x)| \le M$$

за сите $n \geq n_0$ и сите $x \in P$. Тогаш редот на Тејлор за функцијата f конвергира на интервалот P кон функцијата f.

Сепак редот на Тејлор за функцијата f на интервалот P може да конвергира, но да не конвергира кон функцијата f !

Ова е покажано во примерот кој следува.

Пример. Функцијата

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

е бесконечно диференцијабилна во секоја точка. За $x \neq 0$, ставајќи $t = \dfrac{1}{x}$ добиваме

$$\left(e^{-(1/x)^2}\right)' = e^{-(1/x)^2}(-\frac{2}{x})(-\frac{1}{x^2}) = 2t^3 e^{-t^2} .$$

И во општиот случај

$$f^{(n)}(x) = P(t) \cdot e^{-t^2} ,$$

каде што $P(t)$ е полином. Заради

$$\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^k}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{kt^{k-1}}{2te^{t^2}} = \frac{k}{2} \lim_{t\to\infty} \frac{t^{k-2}}{e^{t^2}} ,$$

по неколкукратно повторување, конечно добиваме

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}}, \quad \text{или} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{t^2}}$$

што е еднакво на 0 и во двата случаи.

Нека претпоставиме дека функцијата f има изводи до n-ти ред во точката 0 и дека $f^{(n)}(0) = 0$ за сите n. Тогаш за (n+1)-иот извод во 0 имаме

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x - 0} = \lim_{t\to\infty} Q(t) \cdot e^{-t^2} = 0$$

Слично и за левиот извод имаме дека

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f^{(n)}(x)-0}{x-0} = 0,$$

од каде добиваме дека $f^{(n+1)}(0)$ постои и $f^{(n+1)}(0)=0$.

Значи изводот од произволен ред на функцијата во точката 0 постои и е еднаков на нула.

Заради ова Тејлоровиот ред на оваа функција со центар во точката $x_0 = 0$ е идентично еднаков на нула на целата права. Значи тој не конвергира кон функцијата f во ниедна друга точка освен во точката 0.

Теорема 2. Нека е даден степенски ред од реални броеви $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ и нека во интервалот на конвергенција дефинираме реална функција со:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n.$$

Тогаш Тејлоровиот ред за функцијата f е еднаков на $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$.

доказ. Степенскиот ред можеме да го диференцираме член по член произволен број пати во интервалот на конвергенција. Од

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots$$

добиваме

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)\cdot n\cdot (n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot (x-x_0) + \ldots$$

Ако во последното равенство ставиме $x = x_0$, добиваме

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ е ред на Тејлор за функцијата f.

Дефиниција. За функцијата f определена на интервалот P, велиме дека е *аналитичка во точката* $x_0 \in P$, ако постои околина U на x_0 така што

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

за секој $x \in P \cap U$.

Од претходните теореми следува дека аналитичка функција f во x_0 е бесконечно диференцијабилна во x_0 и дека степенскиот ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ е точно редот на Тејлор со центар во x_0 за функцијата f.

За функцијата f велиме дека е *аналитичка* на интервалот P, ако таа е аналитичка во секоја точка $x_0 \in P$.

Нека воведеме ознаки :

$C^0(P) = \{f | f$ е непрекината функција на $P\}$

$C^{(n)}(P) = \{f | f$ е n-пати непрекинато диференцијабилна функција на $P\}$

$C^{(\infty)}(P) = \{f | f$ има изводи од произволен ред на $P\}$

$H(P) = \{f | f$ е аналитичка функција на $P\}$

Тогаш

$$C^0(P) \supseteq C^{(1)}(P) \supseteq C^{(2)}(P) \supseteq \ldots \supseteq C^{(\infty)}(P) \supseteq H(P),$$

и притоа секоја од овие инклузии е вистинска. Например дека $H(P)$ е вистинско подмножество од $C^{(\infty)}(P)$ е покажано со претходниот пример.

6. ТЕЈЛОРОВ РЕД НА НЕКОИ ФУНКЦИИ

Како што епокажано, за секој реален број точна е формулата

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!})$$

т.е. Тејлоровиот ред на експоненцијалната функција е

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots \quad .$$

Истотака, за секој реален број, Тејлоровите редови на тригонометриските функции се

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

и

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \quad .$$

За да го пресметаме Тејлоровиот ред на степенската функција ќе го воведеме поимот биномен коефициент за произволен реален број p.

Ако p е реален број тогаш биномен коефициент дефинираме со

$$\binom{p}{0} = 1 \qquad , \qquad \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}$$

за $k = 1,2,\ldots$.

На пример

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2k-1)}{k!}$$

Ќе го формираме степенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \ldots + \binom{p}{n} x^n + \ldots$$

За $p \in \{0,1,2,\ldots\}$ почнувајќи од p-тиот член сите членови се нула и редот конвергира за сите реални броеви. Нека $p \notin \{0,1,2,\ldots\}$. Заради

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{p}{n-1}}{\binom{p}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)(p-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{p(p-1)\ldots(p-n+1)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{p-n}{n+1} \right| = 1$$

Степенскиот ред конвергира за $|x| < 1$ и дивергира за $|x| > 1$. Нека дефинираме функција $f\colon(-1,1) \to \mathbb{R}$ со

$$f(x) = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \ldots + \binom{p}{n} x^n + \ldots$$

Тогаш

$$f'(x) = \binom{p}{1} + 2 \cdot \binom{p}{2} x + \ldots + n \cdot \binom{p}{n} x^{n-1} + \ldots$$

и

$$x \cdot f'(x) = \binom{p}{1} \cdot x + 2 \cdot \binom{p}{2} x^2 + \ldots + n \cdot \binom{p}{n} x^n + \ldots$$

Со собирање на двете равенства се добива

$$(1+x)\, f'(x) = \binom{p}{1} + \left[2 \cdot \binom{p}{2} + \binom{p}{1}\right] x + \ldots + \left[(n+1)\binom{p}{n+1} + n \cdot \binom{p}{n}\right] x^n + \ldots$$

Заради

$$(n+1)\binom{p}{n+1} + n \cdot \binom{p}{n} = (n+1)\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)(p-n)}{(n+1)!} + n \cdot \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} \cdot [(p-n)+n]$$

$$= p \cdot \binom{p}{n}$$

Следува

$$(1+x)\,f'(x)=p\cdot[1+\tbinom{p}{1}\cdot x+\tbinom{p}{2}\cdot x^2+\ldots+\tbinom{p}{n}\cdot x^n+\ldots]$$

т.е.

$$(1+x)\,f'(x)=p\cdot\,f(x)$$

или

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{p}{1+x}$$

Значи

$$(\ln\,f(x))'=\frac{p}{1+x}$$

т.е.

$$\ln\,f(x)=p\cdot\ln(1+x)+C.$$

Заради $f(0)=1$ мора $C=0$, и добиваме

$$f(x)=(1+x)^p.$$

Значи за секој $x\in(-1,1)$,

$$(1+x)^p=1+\tbinom{p}{1}x+\tbinom{p}{2}x^2+\ldots+\tbinom{p}{n}x^n+\ldots$$

Формулата е точна и за $p\in\{0,1,2,\ldots\}$. Тогаш почнувајќи од p-тиот член сите членови се нула. Формулата се сведува на познатата биномна формула и е точна за сите $x\in\mathbb{R}$.

Примери. 1) За $p=\frac{1}{2}$ се добива

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\ldots(2n)}x^n+\ldots$$

за секој $x\in(-1,1)$. Редот конвергира за $x=1$ и за $x=-1$.

2) За $p=-\frac{1}{2}$ се добива

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}x^n+\ldots$$

за секој $x\in(-1,1)$. Редот конвергира за $x=1$ и дивергира за $x=-1$.

3) Ако во 2), x се замени со $-x^2$ се добива

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}x^{2n}+\ldots$$

Со интегрирање се добива

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

За $x=\frac{1}{2}$ се добива

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{2^5\cdot 5}+\ldots$$

Оваа формула е многу погодна за пресметување на бројот π на произволен број децимали заради брзата ковергенција на редот.

4) Од

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

со интегрирање добиваме

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

за секој $x\in(-1,1)$.

7. АПРОКСИМАЦИЈА СО ПОЛИНОМИ

За секоја аналитичка функција можеме да определиме низа од полиноми која конвергира кон таа функција, имено една таква низа е низата од парцијални суми на степенскиот ред.

За непрекинатите функции на затворен конечен интервал исто така може да се определи низа од полиноми која конвергира кон таа функција. Поточно точна е следнава теорема.

Теорема 1. Ако f е непрекината функција определена на интервалот $[a,b]$, тогаш постои низа од полиноми P_n, $n=1,2,\ldots$ која рамномерно конвергира кон f.

доказ: 1) Најпрво ќе претпоставиме дека $[a,b]=[0,1]$, и дека $f(0)=f(1)=0$. Дефиниционата област на функцијата f ја прошируваме на целата реална права ставајќи $f(x)=0, x\notin[0,1]$. Тогаш f е рамномерно непрекината функција на целата реална права.

Дефинираме полиноми Q_n за $n=1,2,\ldots$ со

$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n$$

каде што реалните броеви c_n се избрани така што

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx=1 \ .$$

Најпрво ќе ги оцениме реалните броеви c_n, $n=1,2,\ldots$. Заради

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_n}&=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx\\ &=2\int_0^1(1-x^2)^n dx\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-x^2)^n dx\\ &\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)dx=2(x-\frac{nx^3}{3})\Big|_0^{1/\sqrt{n}}\\ &=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

добиваме

$$c_n < \sqrt{n}.$$

Сега ги дефинираме полиномите P_n, $n = 1,2,\ldots$ со

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt$$

Само за да покажеме дека со претходното равенство е дефиниран полином со променлива x ќе ја извршиме следната трансформација: заради $f(x+t) = 0$ надвор од $[0,1]$, од интерес се само оние вредности на t за кои $0 \le t + x \le 1$ т.е. $-x \le t \le 1 - x$. Затоа

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt.$$

Сега со смената $s = t + x$ добиваме

$$P_n(x) = \int_{0}^{1} f(s)Q_n(s-x)ds$$

т.е.

$$P_n(x) = c_n \cdot \int_0^1 f(s)[1-(s-x)^2]^n ds = c_n \cdot \int_0^1 f(s)[(1-s^2)+2sx-x^2]^n ds .$$

Сега дека е полином едноставно може да се покаже со развивање на изразот $[1-(s-x)^2]^n$ по степените на променливата x.

Сега ќе покажеме дека низата од полиноми P_n, $n = 1,2,\ldots$ рамномерно конвергира кон f .

Од рамномерната непрекинатост на функцијата f, за даден $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ така што од

$$|y - x| < 2\delta$$

да следува

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ставајќи $1-\delta^2 = \dfrac{1}{1+d}$, $d \geq 0$, заради

$$\sqrt{n}\cdot(1-\delta^2)^n = \frac{\sqrt{n}}{(1+d)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1+nd} \leq \frac{\sqrt{n}}{nd}$$

добиваме дека $\sqrt{n}\cdot(1-\delta^2)^n \to 0$ кога $n\to\infty$. Според тоа за

$$M = \sup\{|f(x)| \mid x\in[a,b]\},$$

постои n_0 таков што за $n \geq n_0$

$$\sqrt{n}\cdot(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{8M} .$$

Конечно за $n \geq n_0$ добиваме

$$|P_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt - f(x)\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1} [f(x+t)-f(x)]Q_n(t)dt\right|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt$$

$$\leq 2M\cdot\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt + 2M\sqrt{n}\cdot(1-\delta^2)^n\int_{\delta}^{1} dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 4M\sqrt{n}\cdot(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Значи низата од полиноми P_n, $n = 1,2,\ldots$ рамномерно конвергира кон f.

2) Сега нека g е произволна непрекината функција определена на интервалот $[0,1]$. Тогаш за функцијата

$$f(x) = g(x) - g(0) - [g(1)-g(0)]x$$

е исполнето $f(0) = f(1) = 0$ и постои низа полиноми P_n, $n = 1,2,\ldots$ која рамномерно конвергира кон f. Тогаш низата од полиноми

$$T_n(x) = P_n(x) + [g(1) - g(0)]x + g(0)$$

рамномерно конвергира кон функцијата g.

3) Нека h е непрекината функција определена на произволен интервал $[a,b]$. Ја разгледуваме функцијата

$$g(t) = h(a + t(b - a))$$

определена на $[0,1]$. Според 2) постои низа од полиноми T_n, $n = 1,2,\ldots$ определена на интервалот $[0,1]$ која конвергира рамномерно кон функцијата g. Тогаш низата од полиноми

$$S_n(x) = T_n\left(\frac{x - a}{b - a}\right)$$

е определена на интервалот $[a,b]$ и рамномерно конвергира кон функцијата $h(x)$.

X. АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ

1. ТРИГОНОМЕТРИСКА ФОРМА НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

За комплексниот број $z = x + iy$ дефинираме комплексен број $\bar{z} = x - iy$, и реални броеви $\operatorname{Re} z = x$ и $\operatorname{Im} z = y$.

Истотака определуваме позитивен број

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Овој број се нарекува модул, апсолутна вредност или норма на комплексниот број $z = x + iy$. Претставува растојание на комплексниот број од координатниот почеток 0. Слично позитивниот реален број $|z_1 - z_2|$ го претставува растојанието меѓу комплексните броеви z_1 и z_2.

Својство 1. 1) $|z| \geq 0$ и $|z| = 0$ ако и само ако $z = 0$.

2) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, $|\bar{z}| = |z|$

3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

4) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

6) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Доказ: Првите четири својства се скоро очигледни. Ќе го покажеме 5). Својството 6) следува од 5) идентично како во [MA1]. Заради

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2$$

$$\leq |z_1|^2 + 2 \cdot |z_1||z_2| + |z_2|^2$$

Добиваме

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

од каде следува $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

Примери: 1) Ако z_0 е фиксиран реален број и $r>0$, множеството во комплексната рамнина

$$\{z \mid |z-z_0|=r, z\in\mathbb{C}\}$$

претставува кружница со центар во z_0 и радиус $r>0$.

2) Множеството

$$B_r(z_0)=\{z \mid |z-z_0|=r, z\in\mathbb{C}\}$$

претставува внатрешност на круг со центар во z_0 и радиус $r>0$. Ова множество го нарекуваме *отворен круг со центар во* z_0 *и радиус* $r>0$ или r-околина на точката z_0.

За множеството U велиме дека е *отворено* ако за секоја точка $z\in U$ постои отворен круг $B_r(z)$, така што $B_r(z)\subseteq U$.

Околина на точката z е секое отворено множество кое ја содржи точката z.

За точката z велиме дека е *точка на акумулација* за X ако секоја r-околина $B_r(z)$ на z содржи точка од X различна од z.

Својство 2. Ако множеството U е отворено, тогаш секоја негова точка е точка на акумулација за U.

Нека со ϕ го означиме аголот кој го зафаќа радиус векторот (насочената отсечка која го сврзува координатниот почеток 0 со комплексниот број z) со позитивната насока на x-оската . Ако $z=x+iy$ тогаш

$$\phi=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x>0 \\ \pi+arctg\dfrac{y}{x}, & x<0 \end{cases}$$

Заради

$$x=|z|\cdot\cos\phi\ ,\ y=|z|\cdot\sin\phi$$

комплексниот број $z=x+iy$ може да се претстави како

$$z = |z| \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi).$$

Овој облик го нарекуваме тригонометриска форма на комплексниот број.

Ако $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\phi_1 + i \cdot \sin\phi_1)$ и $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\phi_2 + i \cdot \sin\phi_2)$ се два комплексни броја во тригонометриска форма тогаш користејќи ги познатите тригонометриски формули добиваме:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cdot (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

Следува

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos 2\phi + i \cdot \sin 2\phi)$$

и

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\phi + i \cdot \sin n\phi).$$

за секој природен број n.

Заради ова следува дека за фиксиран број $z = |z| \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$ постојат точно n комплексни броеви w такви што

$$w^n = z.$$

Тоа се комплексните броеви од множеството

$$\left\{ |z| \cdot (\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\phi + 2k\pi}{n} \;\middle|\; k = 0,1,2,\ldots,n-1 \right\}.$$

Секој комплексен број од ова множество го нарекуваме n-ти корен на z.

2. КОМПЛЕКСНИ ФУНКЦИИ

Нека X и Y се подмножество од $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$.

Дефиниција: Функцијата $f: X \to Y$ е непрекината во точката $z_0 \in X$ ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ таков што од

$$|z - z_0| < \delta$$

и $z \in X$ да следува

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \ .$$

Функцијата $f: X \to Y$ е непрекината на множеството X ако е непрекината во секоја точка од X.

Нека е дадена функција $f: X \to Y$ и нека z_0 е точка на акумулација за X.

Дефиниција: Функцијата $f: X \to Y$ има лимес w_0 во точката z_0 ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ таков што од

$$|z - z_0| < \delta$$

и $z \in X \setminus \{w_0\}$ да следува

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \ .$$

Ако функцијата $f: X \to Y$ има лимес w_0 во точката z_0 означуваме

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

Од дефиницијата на непрекинатост и лимес следува точноста на следнава теорема:

Теорема 1: Нека z_0 е точка на акумулација за X. Функцијата $f: X \to Y$ е непрекината во точката z_0 ако и само ако $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Дефиниција: Функцијата $f: X \to Y$ има *извод* (*е диференцијабилна*) во точката z_0 ако постои

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \; .$$

Овој број се нарекува извод на функцијата f во точката z_0.

Теорема 2: Нека X е подмножество од $\mathbb{C}$ или од $\mathbb{R}$. Нека е дадена комплексната функција $f: X \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$, каде што $u, v: X \to \mathbb{R}$ се реални функции од комплексна променлива и нека $z_0 \in X$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Следните услови се еквивалентни:

1) функцијата $f: X \to \mathbb{C}$ е непрекината во z_0

2) функциите $u: X \to \mathbb{R}$ и $v: X \to \mathbb{R}$ се непрекинати во z_0

Доказ: 1) $\Rightarrow$ 2) Нека функцијата $f: X \to \mathbb{C}$ е непрекината во z_0. Тогаш, за дадено $\varepsilon > 0$, постои $\delta > 0$ таков што од

$$|z - z_0| < \delta$$

и $z \in X$ да следува

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \; .$$

т.е.

$$\sqrt{(u(z) - u(z_0))^2 + (v(z) - v(z_0))^2} < \varepsilon$$

Следува

$$\sqrt{(u(z)-u(z_0))^2} < \varepsilon$$

т.е.

$$|u(z)-u(z_0)| < \varepsilon$$

што значи дека функцијата $u\colon X \to \mathbb{R}$ е непрекината во z_0.

Слично и

$$|v(z)-v(z_0)| < \varepsilon$$

што значи дека и функцијата $v\colon X \to \mathbb{R}$ е непрекината во z_0.

2) $\Rightarrow$ 1) Нека функциите $u\colon X \to \mathbb{R}$ и $v\colon X \to \mathbb{R}$ се непрекинати во z_0.
Тогаш за дадено $\varepsilon > 0$, постои $\delta_1 > 0$ таков што од

$$|z-z_0| < \delta_1$$

и $z \in X$ да следува

$$|u(z)-u(z_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

и постои $\delta_2 > 0$ таков што од

$$|z-z_0| < \delta_2$$

и $z \in X$ да следува

$$|v(z)-v(z_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Следува

$$|f(z)-f(z_0)| = \sqrt{(u(z)-u(z_0))^2 + (v(z)-v(z_0))^2}$$

$$< \sqrt{(\varepsilon/2)^2 + (\varepsilon/2)^2} = \varepsilon$$

т.е. функцијата $f: X \to \mathbb{C}$ е непрекината во z_0.

Од претходните две теореми следува точноста на следната теорема:

Теорема: Нека X е подмножество од $\mathbb{C}$ или од $\mathbb{R}$. Нека е дадена комплексната функција $f: X \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$, каде што $u, v: X \to \mathbb{R}$ се реални функции од комплексна променлива и нека $z_0 \in X$, $z_0 = x_0 + iy_0$ е точка на акумулација за множеството X.

Следните услови се еквивалентни:

1) постои $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$

2) постојат $\lim\limits_{z \to z_0} u(z) = u_0$ и $\lim\limits_{z \to z_0} v(z) = v_0$.

Нека X е подмножество од $\mathbb{R}$ и нека е дадена функција $f: X \to Y$. Тогаш за секој реален број $t \in X$, $f(t) = x(t) + iy(t)$, каде што $x, y: X \to \mathbb{R}$ се реални функции.

Теорема: Нека t_0 е точка на акумулација за X. Функцијата $f: X \to Y$ има извод во t_0 ако и само ако функциите $x, y: X \to \mathbb{R}$ имаат извод во t_0 и притоа

$$f'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

.

Доказ: Тврдењето на теоремата следува од претходната теорема заради

$$\begin{aligned} f'(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + i \cdot \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}. \\ &= x(t_0) + i \cdot y(t_0) \end{aligned}$$

3. УСЛОВИ НА КОШИ-РИМАН

Нека функцијата $f(z)=u(z)+iv(z)$ е определена на отвореното множество U. За реалните функции $u\colon U\to\mathbb{C}$ и $v\colon U\to\mathbb{C}$ може да дефинираме парцијални изводи во точката $z_0=x_0+iy_0$ од отвореното множество U со:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x+iy_0)-u(x_0+iy_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0+iy)-u(x_0+iy_0)}{y-y_0}\quad .$$

Дефиниција. Нека комплексната функција $f(z)=u(z)+iv(z)$ е определена на отвореното множество $U\subseteq\mathbb{C}$. Нека реалните функции $u\colon U\to\mathbb{R}$ и $v\colon U\to\mathbb{R}$ имаат парцијални изводи во точката $z_0=x_0+iy_0$ од U. Следните услови се познати како *услови на Коши-Риман* (во точката z_0):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Можеме да го воведеме и поимот на парцијален извод на комплексната функција $f(z)=u(z)+iv(z)$ со:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0+iy)-f(x_0+iy_0)}{y-y_0}$$

Тогаш:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\,.$$

Својство 1. Нека комплексната функција $f(z)=u(z)+iv(z)$ е определена на отвореното множество $U\subseteq\mathbb{C}$. Нека реалните функции $u{:}U\to\mathbb{R}$ и $v{:}U\to\mathbb{R}$ имаат парцијални изводи во точката $z_0=x_0+iy_0$ од U.

За функцијата f се исполнети условите на Коши-Риман во точката z_0, ако и само ако

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,.$$

доказ. Нека се исполнети условите на Коши-Риман. Тогаш

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)$$

$$=i[\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)]=i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Обратно од $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, добиваме

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)$$

од што следува дека се исполнети условите на Коши- Риман.

Теорема 1. Нека функцијата $f(z)=u(z)+iv(z)$ е определена на отвореното множество U. Ако f има извод во точката $z_0=x_0+iy_0$ од U тогаш

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

доказ. Нека избереме $z\to z_0$ во правец на $x-$ оската т.е. $z=x+iy_0$ и $x\to x_0$. Тогаш

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x+iy_0)-u(x_0+iy_0)}{x-x_0}+i\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{v(x+iy_0)-v(x_0+iy_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Теорема 2. Нека функцијата $f(z)=u(z)+iv(z)$ е определена на отвореното множество U. Нека реалните функции $u(z)$ и $v(z)$ имаат парцијални изводи на отвореното множество U кои се непрекинати во точката $z_0=x_0+iy_0$.

Следните услови се еквивалентни:

1) функцијата f има извод во точката z_0

2) за функцијата f се исполнети условите на Коши-Риман во точката z_0.

доказ. 1)$\Rightarrow$2) Според претходната теорема

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Од друга страна, ако избереме $z\to z_0$ во правец на $y-$оската т.е. $z=x_0+iy$ и $y\to y_0$, тогаш

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0 + iy) - u(x_0 + iy_0)}{i(y - y_0)} + i \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{v(x_0 + iy) - v(x_0 + iy_0)}{i(y - y_0)}$$
$$= -i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

Следува $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

2)$\Rightarrow$1) Условите од 2) може да се запишат како

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \ .$$

Од дефиницијата на парцијалниот извод $\frac{\partial f}{\partial y}$ во точката z_0,

$$\lim_{y \to y_0}\left(\frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{y - y_0} - \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) = 0.$$

Ова значи дека

$$\frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{y - y_0} - \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = C(y)$$

т.е.

$$f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \cdot (y - y_0) + C(y) \cdot (y - y_0)$$

каде што $C(y) \to 0$ кога $y \to y_0$.

На ист начин од дефиницијата на парцијалниот извод $\frac{\partial f}{\partial x}$ во точката $x_0 + iy$, добиваме

$$f(x + iy) - f(x_0 + iy) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy) \cdot (x - x_0) + c_y(x) \cdot (x - x_0)$$

каде што $c_y(x) \to 0$ кога $x \to x_0$ (при ова за различни y добиваме различни функции $c_y(x)$, но во секогаш $c_y(x) \to 0$ кога $x \to x_0$).

Сега од Коши-Римановите услови добиваме:

$$f(z) - f(z_0) = f(z) - f(x_0 + iy) + f(x_0 + iy) - f(z_0)$$

$$= (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy)) \cdot (x - x_0) + c_y(x) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \cdot (y - y_0) + C(y) \cdot (y - y_0)$$

$$= [(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy)) - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)] \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot (x - x_0) + i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \cdot (y - y_0) +$$

$$+ c_y(x) \cdot (x - x_0) + C(y) \cdot (y - y_0)$$

Заради непрекинатоста на парцијалните изводи имаме дека

$$\lim_{y \to y_0} (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy)) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Покрај тоа

$$|\frac{x - x_0}{z - z_0}| = \frac{|x - x_0|}{|z - z_0|} = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leq 1$$

и истотака

$$|\frac{y - y_0}{z - z_0}| \leq 1.$$

Заради ова

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \{[(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy)) - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)] \frac{x - x_0}{z - z_0} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \frac{(x - x_0) + i(y - y_0)}{z - z_0} + + c_y(x) \frac{x - x_0}{z - z_0} + C(y) \frac{y - y_0}{z - z_0}\}$$

$$= (\frac{\partial f}{\partial x})_{(x_0, y_0)}$$

Последица 1. Нека комплексната функција $f(z)=u(z)+iv(z)$ е определена на отвореното множество U. Нека реалните функции $u(z)$ и $v(z)$ имаат непрекинати парцијални изводи на отвореното множество U. Следните услови се еквивалентни:

1) функцијата f има извод во секоја точка од U

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (услови на Коши-Риман).

Дефиниција: За комплексната функција $f(z)=u(z)+iv(z)$ определена на отвореното множество U велиме дека е *аналитичка на* U ако има извод во секоја точка од U.

Пример 1. Дефинираме експоненцијална функција $f(z)=e^z$ за секој $z=x+iy$ од множеството комплексни броеви C со

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

(да забележиме дека $e^z\neq 0$ за $z\neq 0$). При ова ако ставиме $f(z)=u(z)+iv(z)$, тогаш $u(z)=e^x\cos y$ и $v(z)=e^x\sin y$. За експоненцијалната функција се исполнети условите на Коши-Риман и

$$(e^z)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z\ .$$

4. КОМПЛЕКСЕН ИНТЕГРАЛ

Дефиниција. *Пат* во комплексната рамнина $\mathbb{C}$ е непрекинато пресликување $k:[a,b]\to\mathbb{C}$.

Пример. За две точки $z_0, z_1 \in\mathbb{C}$ дефинираме пат $k:[0,1]\to\mathbb{C}$ со

$$k(t) = (1-t)z_0 + tz_1 .$$

Овој пат се нарекува *отсечка од* z_0 *до* z_1 и го означуваме со $[z_0, z_1]$.

Носач на патот $k:[a,b]\to\mathbb{C}$ е множеството $\{k(t)|t\in[a,b]\}$. Ако $U\subseteq\mathbb{C}$ и носачот на патот се содржи во U велиме дека k е *пат во* U.

Ако $k:[a,b]\to\mathbb{C}$ е пат во комплексната рамнина, тогаш $k(t) = x(t)+iy(t)$ каде што $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ се реални функции.

Дефинираме

$$\int_a^b k(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i\cdot\int_a^b y(t)dt$$

Својства. 1) $\int_a^b c\cdot k(t)dt = c\cdot\int_a^b k(t)dt$, $c\in\mathbb{C}$

2) $\int_a^b (k_1(t)+k_2(t))dt = \int_a^b k_1(t)dt + \int_a^b k_2(t)dt$

3) $\mathrm{Re}(\int_a^b k(t)dt) = \int_a^b \mathrm{Re}\, k(t)dt$, $\mathrm{Im}(\int_a^b k(t)dt) = \int_a^b \mathrm{Im}\, k(t)dt$

4) $|\int_a^b k(t)dt| \le \int_a^b |k(t)|dt$

доказ. 4) Нека $J=\int_a^b k(t)dt$. Тогаш $J=|J|(\cos\phi+i\sin\phi)=|J|e^{i\phi}$. Тогаш

$$|J|=Je^{-i\phi}=\mathrm{Re}(Je^{-i\phi})$$

$$=\mathrm{Re}\int_a^b e^{-i\phi}k(t)dt=\int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\phi}k(t))dt$$

$$\le\int_a^b |e^{-i\phi}||k(t)|dt=\int_a^b |k(t)|dt$$

Ако $k:[a,b]\to\mathbb{C}$ е пат кој има (непрекинат) извод во секоја точка патот се нарекува (непрекинато) диференцијабилен.

Ако $k:[a,b]\to\mathbb{C}$ е непрекинато диференцијабилен пат тогаш и $k':[a,b]\to\mathbb{C}$ е пат.

Својство. Ако $k:[a,b]\to\mathbb{C}$ е непрекинато диференцијабилен пат тогаш

$$\int_a^b k'(t)dt=k(b)-k(a).$$

доказ.

$$\int_a^b k'(t)dt=\int_a^b x'(t)dt+i\cdot\int_a^b y'(t)dt$$
$$=x(b)-x(a)+i(y(b)-y(a))$$
$$=k(b)-k(a)$$

5. КОМПЛЕКСЕН ИНТЕГРАЛ ПО ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛЕН ПАТ

Нека $k:[a,b]\to\mathbb{C}$ е непрекинато диференцијабилен пат во комплексната рамнина $\mathbb{C}$.

Нека f е комплексна функција која е непрекината на носачот на патот k.

Дефинираме *интеграл на комплексната функција* f *по патот* k со:

$$\oint_k f(z)dz = \int_a^b f(k(t))k'(t)dt .$$

Ако ги воведеме ознаките

$$\oint_k f(z)dx = \int_a^b f(k(t))x'(t)dt$$

и

$$\oint_k f(z)dy = \int_a^b f(k(t))y'(t)dt ,$$

тогаш

$$\oint_k f(z)dz = \oint_k f(k(t))dx + i\oint_k f(k(t))dy .$$

Пример. 1) Нека $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_1$, со $x_1 < x_2$. Нека $k:[x_1, x_2]\to\mathbb{C}$ е патот од $z_1 = x_1 + iy_1$ до $z_2 = x_2 + iy_1$ определен со

$$k(t) = t + iy_1 .$$

Овој пат ќе го означуваме со $z_1\_z_2$. Тогаш

$$\oint_{z_1\_z_2} f(z)dz = \oint_{z_1\_z_2} f(t+iy_1)dx + i\oint_{z_1\_z_2} f(t+iy_1)dy = \int_{x_1}^{x_2} f(t+iy_1)dt$$

2) Слично, ако $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_1 + iy_2$, $y_1 < y_2$, нека Нека $l:[y_1, y_2] \to \mathbb{C}$ е патот од $z_1 = x_1 + iy_1$ до $z_2 = x_1 + iy_2$, определен со:

$$l(t) = x_1 + it\ .$$

Овој пат ќе го означуваме со $z_1|z_2$. Тогаш

$$\oint_{z_1|z_2} f(z)dz = \oint_{z_1|z_2} f(x_1+it)dx + i\oint_{z_1|z_2} f(x_1+it)dy = i\int_{y_1}^{y_2} f(x_1+it)dt$$

Својства.

1) Ако $f(z) = u(z) + iv(z)$ тогаш

$$\oint_k f(z)dz = \oint_k (udx - vdy) + i\oint_k (udy + vdx)\,.$$

2) $$\oint_k c\cdot f(z)dz = c\cdot\oint_k f(z)dz\,,\quad c\in\mathbb{C}$$

3) $$\oint_k (f_1(z) + f_2(z))dz = \oint_k f_1(z)dz + \oint_k f_2(z)dz$$

4) $$|\oint_k f(z)dz| \le M\cdot L\,,$$

каде $M = \sup\{|f(k(t))||t\in[a,b]\}$ и $L = \int_a^b |k'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$ (L е должината на патот k).

5) Нека p е точка меѓу a и b, и нека $k:[a,b]\to\mathbb{C}$ е непрекинато диференцијабилен пат.Тогаш и рестрикциите $k|_{[a,p]}:[a,p]\to\mathbb{C}$ и $k|_{[p,b]}:[p,b]\to\mathbb{C}$ се непрекинато диференцијабилни и

$$\oint_{k|_{[a,p]}} f(z)dz+\oint_{k|_{[p,b]}} f(z)dz=\oint_k f(z)dz$$

доказ. 1)

$$\begin{aligned}\oint_k f(z)dz &= \int_a^b f(k(t))k'(t)dt\\ &= \int_a^b [u(k(t))+iv(k(t))][x'(t)+iy'(t)]dt\\ &= \int_a^b [u(k(t))x'(t)-v(k(t))y'(t)]dt\\ &\quad + i\int_a^b [u(k(t))y'(t)+v(k(t))x'(t)]dt\\ &= \oint_k (udx-vdy)+i\oint_k (udy+vdx)\end{aligned}$$

2) Нека $c=a+ib$ каде што a,b се реални броеви и $f(z)=u(z)+iv(z)$. Тогаш

$$
\begin{aligned}
c\cdot\oint_k f(z)dz &= (a+ib)\left[\oint_k (udx-vdy)+i\oint_k (udy+vdx)\right]\\
&= a\oint_k (udx-vdy)-b\oint_k (udy+vdx)\\
&\qquad +i\left[a\oint_k (udy+vdx)+b\oint_k (udx-vdy)\right]\\
&= \oint_k [(au-bv)dx-(av+bu)dy]+i\oint_k [(au-bv)dy+(av+bu)dx]\\
&= \oint_k [(au-bv)+i(av+bu)]dz\\
&= \oint_k (a+ib)(u+iv)dz
\end{aligned}
$$

3) Нека $f_1(z)=u_1(z)+iv_1(z)$ и $f_2(z)=u_2(z)+iv_2(z)$. Тогаш $f_1(z)+f_2(z)=(u_1(z)+u_2(z))+i(v_1(z)+v_2(z))$. Следува

$$
\begin{aligned}
\oint_k (f_1(z)+f_2(z))dz &= \oint_k ((u_1+u_2)dx-(v_1+v_2)dy)+i\oint_k ((u_1+u_2)dy+(v_1+v_2)dx)\\
&= \left[\oint_k (u_1dx-v_1dy)+i\oint_k (u_1dy+v_1dx)\right]\\
&\qquad +\left[\oint_k (u_2dx-v_2dy)+i\oint_k (u_2dy+v_2dx)\right]\\
&= \oint_k f_1(z)dz+\oint_k f_2(z)dz
\end{aligned}
$$

4)

$$
\begin{aligned}
\left|\oint_k f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(k(t))k'(t)dt\right|\\
&\le \int_a^b |f(k(t))||k'(t)|dt\\
&\le M\int_a^b |k'(t)|dt \le M\cdot L
\end{aligned}
$$

5)

$$\oint_{k|_{[a,p]}} f(z)dz + \oint_{k|_{[p,b]}} f(z)dz = \int_a^p f(k(t))k'(t)dt + \int_p^b f(k(t))k'(t)dt$$

$$= \int_a^b f(k(t))k'(t)dt = \oint_k f(z)dz$$

Дефиниција. Нека $k:[a,b] \to \mathbb{C}$ и $l:[c,d] \to \mathbb{C}$ се два непрекинато диференцијабилни пата. Велиме дека $\boldsymbol{l}$ *е друга параметризација на* k ($\boldsymbol{l}$ и k се еквивалентни), ако постои строго растечка непрекинато диференцијабилна функција $\phi:[a,b] \to [c,d]$ таква што $\phi(a) = c, \phi(b) = d$ (т.е ϕ е биекција) и

$$k(t) = l(\phi(t)),$$

за сите $t \in [a,b]$.

Од дефиницијата следува дека $\boldsymbol{l}$ и k имаат ист носач.

Воведената релација на друга параметризација е релација на еквиваленција. Следнава теорема го оправдува воведувањето на оваа релација.

Теорема. Ако $l:[c,d] \to \mathbb{C}$ е друга параметризација на патот $k:[a,b] \to \mathbb{C}$ тогаш

$$\oint_k f(z)dz = \oint_l f(z)dz.$$

доказ. Од

$$\oint_k f(z)dz = \int_a^b f(k(t))k'(t)dt = \int_a^b f(l(\phi(t)))l'(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

со смената $s = \phi(t)$ добиваме

$$\oint_k f(z)dz = \int_c^d f(l(s))l'(s)ds = \oint_l f(z)dz.$$

Забелешка. Ако е даден пат $k:[a,b]\to\mathbb{C}$, секогаш можеме да определиме друга параметризација k, $l:[0,1]\to\mathbb{C}$ со:

$$l(s)=k(a+(b-a)s),$$

за $s\in[0,1]$. Патот $l:[0,1]\to\mathbb{C}$ е друга параметризација на $k:[a,b]\to\mathbb{C}$ затоа што за функцијата $\phi:[a,b]\to[0,1]$, $\phi(t)=\dfrac{t-a}{b-a}$ е исполнето $k(t)=l(\phi(t))$ за сите $t\in[a,b]$.

Според претходната теорема, за потребите на интеграцијата по пат, доволно е да разгледуваме патишта $l:[0,1]\to\mathbb{C}$.

Дефиниција. Нека е даден патот $k:[0,1]\to\mathbb{C}$. *Инверзен пат на* k, е патот $k^{-1}:[0,1]\to\mathbb{C}$ определен со

$$k^{-1}(t)=k(1-t),$$

за $t\in[0,1]$.

Својство. $\oint_{k^{-1}} f(z)dz=-\oint_k f(z)dz$

доказ. Од

$$\oint_{k^{-1}} f(z)dz=\int_0^1 f(k^{-1}(t))(k^{-1}(t))'dt=-\int_0^1 f(k(1-t))k'(1-t)dt$$

со смената $s=1-t$ добиваме:

$$\oint_{k^{-1}} f(z)dz=\int_1^0 f(k(s))k'(s)ds=-\int_0^1 f(k(s))k'(s)ds=-\oint_k f(z)dz.$$

Дефиниција. Нека е дадена поделба на интервалот $[a,b]$ со точките

$$a=a_0<a_1<\ldots<a_{n-1}<a_n=b,$$

и нека се дадени патишта $k_i{:}[a_{i-1},a_i]\to\mathbb{C}$, $i=1,2,\dots,n$ такви што $k_i(a_i)=k_{i+1}(a_i)$ за $i=1,2,\dots,n-1$. Тогаш со

$$k(t)=\begin{cases} k_1(t), a\le t\le a_1\\ k_2(t), a_1\le t\le a_2\\ \quad\dots\\ k_n(t), a_{n-1}\le t\le b\end{cases}$$

е определен пат $k{:}[a,b]\to\mathbb{C}$ кој се означува со

$$k=k_1*k_2*\dots*k_n\ .$$

Ако патиштата $k_i{:}[a_{i-1},a_i]\to\mathbb{C}$, $i=1,2,\dots,n$ се непрекинато диференцијабилни, тогаш патот $k=k_1*k_2*\dots*k_n$ е непрекинато диференцијабилен во сите точки од интервалот $[a,b]$, освен можеби во точките $a_1,a_2,\dots,a_{n-1}$. Патот $k{:}[a,b]\to\mathbb{C}$ го *нарекуваме по делови непрекинато диференцијабилен*. По дефиниција

$$\oint_k f(z)dz=\oint_{k_1} f(z)dz+\oint_{k_2} f(z)dz+\dots+\oint_{k_n} f(z)dz\,.$$

Нека $l_i{:}[c_i,d_i]\to\mathbb{C}$, $i=1,2,\dots,n$ се непрекинато диференцијабилни патишта такви што $l_{i+1}(a_{i+1})=l_i(b_i)$, $i=1,2,\dots,n-1$. Тогаш можеме да дефинираме состав на патиштата $l_i{:}[c_i,d_i]\to\mathbb{C}$, $i=1,2,\dots,n$ на следниот начин: Нека патот l_i е еквивалентен (е друга параметризација на) со патот k_i, $i=1,2,\dots,n$. Тогаш по дефиниција состав $l_1*l_2*\dots*l_n$ е патот $k_1*k_2*\dots*k_n{:}[a,b]\to\mathbb{C}$.

Тогаш од дефиницијата на интегралот по $k_1*k_2*\dots*k_n$ и од теоремата за еквивалентни патишта имаме:

$$\oint_{l_1*l_2*\ldots*l_n} f(z)dz = \oint_{k_1*k_2*\ldots*k_n} f(z)dz$$
$$= \oint_{k_1} f(z)dz + \oint_{k_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{k_n} f(z)dz$$
$$= \oint_{l_1} f(z)dz + \oint_{l_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{l_n} f(z)dz$$

што ја оправдува дефиницијата на составот $l_1 * l_2 * \ldots * l_n$ на патиштата $l_i:[c_i, d_i] \to \mathbb{C}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Пример. Нека се дадени два пата $l_1, l_2:[0,1] \to \mathbb{C}$ такви што $l_1(1) = l_2(0)$. Патот $k_1:[0,\frac{1}{2}] \to \mathbb{C}$ определен со $k_1(t) = l(2t), t \in [0,\frac{1}{2}]$ е еквивалентен со патот $l_1:[0,1] \to \mathbb{C}$, а патот $k_2:[\frac{1}{2},1] \to \mathbb{C}$ определен со $k_2(t) = l(2t-1), t \in [\frac{1}{2},1]$ е еквивалентен со патот $l_2:[0,1] \to \mathbb{C}$. Според дефиницијата составот $l_1 * l_2$ е определен како пат $k_1 * k_2:[0,1] \to \mathbb{C}$ т.е.

$$l_1 * l_2(t) = \begin{cases} k_1(t), 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ k_2(t), \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} l_1(2t), \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ l_2(2t-1), \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

6. НЕЗАВИСНОСТ НА ИНТЕГРАЛОТ ОД ПАТОТ

За множеството U велиме дека е *линиски сврзано* ако за секои две точки $z_0, z_1 \in U$ постои пат во U со почетна точка z_0 и крајна точка z_1. *Област* е отворено и линиски сврзано множество.

Теорема 1. Нека U е област во и нека $p, q: U \to \mathbb{C}$ се непрекинати комплексни функции. Следните услови се еквивалентни:

1) За секој пат k во областа U, интегралот $\oint_k pdx + qdy$ зависи само од крајните точки на патот k.

2) Постои диференцијабилна комплексна функција $w: U \to \mathbb{C}$ таква што

$$\frac{\partial w}{\partial x} = p \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = q$$

доказ. 2)⇒1) Од условите на Коши-Риман $\dfrac{\partial w}{\partial y} = i\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Заради тоа

$$\oint_k pdx + qdy = \int_a^b (p(k(t)) \cdot x'(t) + ip(k(t)) \cdot y'(t))dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial w}{\partial x}(k(t)) \cdot x'(t) + i\frac{\partial w}{\partial x}(k(t)) \cdot y'(t))dt$$

$$= \int_a^b w'(k(t))(x'(t) + iy'(t))dt = \int_a^b (w(k(t)))'dt$$

$$= \int_a^b u'(k(t))dt + i\int_a^b v'(k(t))dt$$

$$= u(k(b)) - u(k(a)) + i[v(k(b)) - v(k(a))] = w(k(b)) - w(k(a))$$

1)$\Rightarrow$2) Обратно, нека $z_0 = x_0 + iy_0$ е фиксирана точка од областа U. Ако $z = x + iy$ е точка од U, тогаш постои по делови непрекинато диференцијабилен пат од z_0 до z_1 во U (например еден таков пат е искршена линија чии делови се отсечки паралелни со координатните оски).

Дефинираме комплексна функција $w\colon U \to \mathbb{C}$, со

$$w(z) = \oint_k pdx + qdy\,.$$

Функцијата е добро дефинирана затоа што интегралот зависи само од крајните точки на патот.

Нека $z_1 = x_1 + iy_1$ е фиксирана точка од U и нека k е пат од z_0 до z_1. Заради што U е отворено постои $r > 0$ така што $B_r(z_1) \subseteq U$. Тогаш точките $z = x + iy_1$, $x - x_1 < r$, се содржат во U. Нека $l\colon[x_1, x] \to \mathbb{C}$ е патот определен со

$$l(t) = t + iy_1.$$

Тогаш

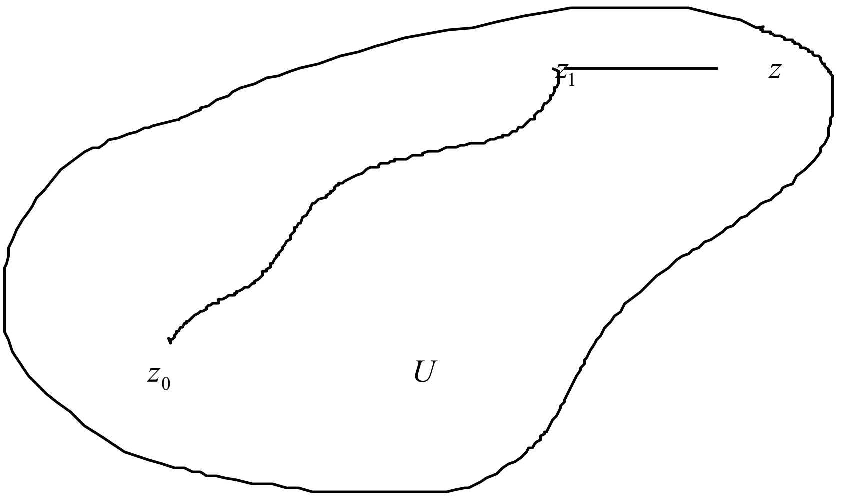
$$w(z) = \oint_{k*l} pdx + qdy = \oint_k pdx + qdy + \oint_l pdx + qdy = w(z_1) + \int_{x_1}^{x} p(t + iy_1)dt$$

Следува за секоја точка $z_2 = x_2 + iy_1$, $x_2 - x_1 < r$ имаме

$$\frac{\partial w}{\partial x}(z_2) = p(z_2)\,,$$

и специјално

$$\frac{\partial w}{\partial x}(z_1) = p(z_1)\,.$$



Слично, се покажува дека и

$$\frac{\partial w}{\partial y}(z_1) = p(z_1) .$$

Теорема 2. Нека U е област во и нека $f : U \to \mathbb{C}$ е непрекината комплексна функција. Следните услови се еквивалентни:

1) За секој пат k во областа U, интегралот $\oint_k f(z)dz$ зависи само од крајните точки на патот k.

2) Постои комплексна функција $F : U \to \mathbb{C}$ таква што $F' = f$.

доказ. Да забележиме дека

$$\oint_k f(z)dz = \int_a^b f(k(t))k'(t)dt = \int_a^b [f(k(t))(x'(t) + iy'(t))]dt = \oint_k (f(z)dx + if(z)dy)$$

Доказот на теоремата ќе биде даден со неколку еквивалентни тврдења од кои првото е условот 1), а последното условот 2).

Според претходната теорема интегралот $\oint_k f(z)dz$ зависи само од крајните точки на патот k, ако и само ако постои комплексна функција $F : U \to \mathbb{C}$ таква што

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = if$$

т.е. за комплексната функција $F: U \to \mathbb{C}$ да се исполнети условите на Коши-Риман:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y} .$$

Условите на Коши-Риман се еквивалентни со тврдењето: комплексната функција $F: U \to \mathbb{C}$ има извод во секоја точка од областа U и

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x} = f .$$

Дефиниција. Патот $k:[a,b] \to \mathbb{C}$ се нарекува затворен ако $k(a) = k(b)$.

Последица. Нека $k:[a,b] \to \mathbb{C}$ е затворен пат во областа U. Ако постои комплексна функција $F: U \to \mathbb{C}$ таква што $F' = f$, тогаш

$$\oint_k f(z)dz = 0 .$$

Пример. Ако $k:[a,b] \to \mathbb{C}$ е затворен пат, и $c \in \mathbb{C}$ е фиксиран комплексен број тогаш

$$\oint_k (z-c)^n\, dz = 0 ,$$

за секој природен број $n \in \mathbb{N}$ и за $n = 0$. Истотака, за секоја крива k во $\mathbb{C} \setminus \{c\}$,

$$\oint_k \frac{1}{(z-c)^n} dz = 0,$$

за $n \geq 2$.

7. ТЕОРЕМА НА КОШИ

Теорема 1. (Теорема на Коши за правоаголник) Нека Π е правоаголникот со темиња $z_0 = a + ic$, $z_1 = b + ic$, $z_2 = a + id$, $z_3 = b + id$, ($a < b, c < d$). Нека комплексната функција f има извод на Π освен во една точка, во која е непрекината. Нека $k_1 = (z_0 \_ z_1) * (z_1 | z_3)$ и $k_2 = (z_0 | z_3) * (z_2 \_ z_3)$ и нека $k(\Pi)$ е затворениот пат $k(\Pi) = k_1 * k_2^{-1}$ (патот $k(\Pi)$ го обиколува правоаголникот и негова почетна и крајна точка е $a + ic$).

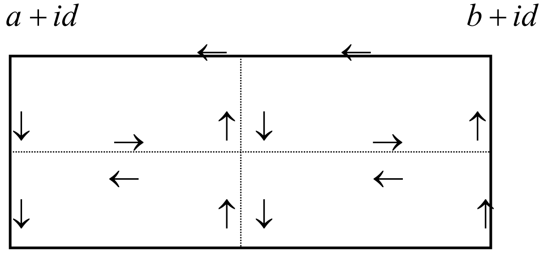
Тогаш

$$\int_{k(\Pi)} f(z)dz = 0 .$$

доказ. Случај 1. f има извод на целиот правоаголник Π. Нека

$$J(k(\Pi)) = \int_{k(\Pi)} f(z)dz .$$

Нека правоаголникот е поделен на четири помали правоаголници со врзување на средините на две спротивни страни со отсечки паралелнисо страните на правоаголникот.



Нека ги означиме овие правоаголници со Π', Π'', Π''' и Π'^{v}. Тогаш, заради

$$J(k(\Pi)) = J(k(\Pi')) + J(k(\Pi'')) + J(k(\Pi''')) + J(k(\Pi'^{v}))$$

добиваме

$$|J(k(\Pi))| = |J(k(\Pi'))| + |J(k(\Pi''))| + |J(k(\Pi'''))| + |J(k(\Pi'^{v}))|.$$

Следува постои барем еден правоаголник од Π', Π'', Π''' и Π'^{v}, кој ќе го означиме со Π_1, за кој е исполнето:

$$|J(k(\Pi_1))| \geq \frac{1}{4}|J(k(\Pi))|.$$

Понатаму со делење на правоаголникот Π_1, на четири еднакви помали правоаголници и така натаму добиваме низа од вложени правоаголници

$$\Pi \supseteq \Pi_1 \supseteq \Pi_2 \supseteq \ldots$$

со својството

$$|J(k(\Pi_n))| \geq \frac{1}{4}|J(k(\Pi_{n-1}))|.$$

Следува

$$|J(k(\Pi_n))| \geq 4^{-n}|J(k(\Pi))|.$$

Притоа, ако со d_n и d ги означиме должините на дијагоналите на правоаголниците Π_n и Π, соодветно, а со L_n и L ги означиме должините на нивните обеми. Тогаш

$$d_n = 2^{-n} d$$

и

$$L_n = 2^{-n} L .$$

Постои точка $z_0 \in \Pi$ која се содржи во пресекот на низата од вложени правоаголници.

За даден $\varepsilon > 0$ нека избереме број $\delta > 0$ со својството:

1) f има непрекинат извод на $B_\delta(z_0)$

2) за $z \in B_\delta(z_0)$ да следува

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

т.е.

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| < \varepsilon|z-z_0| .$$

Постои n_0 таков што за $n \ge n_0$,

$$\Pi_n \subseteq B_\delta(z_0) .$$

Тогаш за $z \in \Pi_n$,

$$\max_{z\in\Pi_n}|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| \le \max_{z\in\Pi_n}\varepsilon\cdot|z-z_0| \le \varepsilon d_n$$

Заради

$$\oint_{k(\Pi_n)} dz = 0, \qquad \oint_{k(\Pi_n)} z\,dz = 0$$

и од својствата на комплексниот интеграл, добиваме

$$\begin{aligned} |J(k(\Pi_n))| &= \left|\oint_{k(\Pi_n)} f(z)\,dz\right| \\ &= \left|\oint_{k(\Pi_n)} [f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0)]\,dz\right| . \\ &\le \varepsilon d_n L_n \end{aligned}$$

Следува
$$|J(k(\Pi_n))| \le 4^{-n} dL\varepsilon .$$

и конечно

$$|J(k(\Pi))| \ge 4^n |J(k(\Pi_n))| \le dL\varepsilon .$$

Од произволноста на бројот $\varepsilon > 0$ следува дека $|J(k(\Pi))| = 0$ т.е.

$$\int_{k(\Pi)} f(z)dz = 0 .$$

Случај 2. Комплексната функција f нема извод во едно од темињата на правоаголникот, во кое е само непрекината. Нека тоа е например темето $z_0 = a + ic$.

Нека избереме реални броеви b_1 и d_1 такви што $a < b_1 < b$ и $c < d_1 < d$.

Нека Π' е правоаголникот со темиња во $a+ic$, $b_1 + ic$, $a + id_1$ и $b_1 + id_1$. Тогаш од случајот 1. имаме

$$\int_{k(\Pi)} f(z)dz = \int_{k(\Pi')} f(z)dz .$$

Ако со L' го означиме обемот на правоаголникот Π' тогаш

$$\int_{k(\Pi)} f(z)dz \le L' \cdot \max\{f(z) \mid z \in \Pi\} .$$

Бројот L' можеме да го направиме произволно мал избирајќи ги броевите b_1 и d_1 доволно блиску до b, односно до d. Следува $\int_{k(\Pi)} f(z)dz = 0$.

Случај 3. Нека $P \in \Pi$ е точка во која функцијата е непрекината но нема извод. Делејќи го правоаголникот на помали правоаголници (два или четири) со повлекување на паралелни линии со страните на правоаголникот низ точката P, случајот 3 се сведува на случајот 2.

Теорема 2. (Теорема на Коши за диск) Нека комплексната функција f има извод на отворениот диск B, освен во една точка во која е непрекината. Тогаш

$$\int_k f(z)dz = 0,$$

по секоја затворен пат k во B.

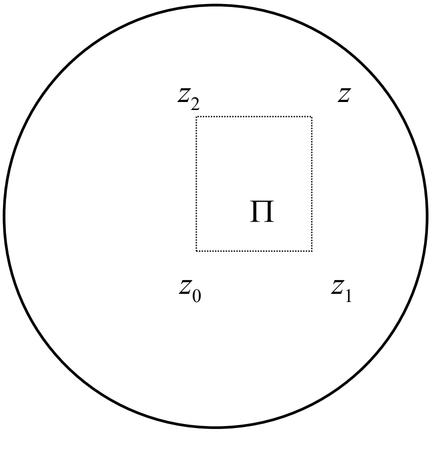
доказ. Нека B е отворен диск со центар во $z_0 = x_0 + iy_0$ и нека $z = x + iy$ е произволна точка од B. Нека ставиме $z_1 = x_0 + iy$ и $z_2 = x + iy_0$. Со

$$k_1 = (z_0 \_ z_1) * (z_1 | z)$$

и

$$k_2 = (z_0 | z_2) * (z_2 \_ z)$$

се определени патишта со почетна точка $z_0 = x_0 + iy_0$ и крајна точка $z = x + iy$.



Тогаш од претходната теорема

$$\oint_{k_1} f(z)dz + \oint_{k_2^{-1}} f(z)dz = \oint_{k(\Pi)} f(z)dz = 0\,.$$

Следува

$$\oint_{k_1} f(z)dz = \oint_{k_2} f(z)dz\,.$$

Дефинираме функција $F: B \to \mathbb{C}$ со

$$F(z) = \oint_{k_1} f(z)dz\,.$$

Тогаш

$$F(z) = \oint_{k_1} f(z)dz = \oint_{k_1} f(z)dx + i\oint_{k_1} f(z)dy$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)dt + i\int_{y_0}^{y} f(x+is)ds$$

и следува

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = if(z)\,.$$

Слично од

$$F(z) = \oint_{k_2} f(z)dz = \oint_{k_2} f(z)dx + i\oint_{k_2} f(z)dy$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t+iy)dt + i\int_{y_0}^{y} f(x_0+is)ds$$

следува

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z).$$

Значи за функциијата $F: B \to \mathbb{C}$ се исполнети условите на Коши-Риман т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y}.$$

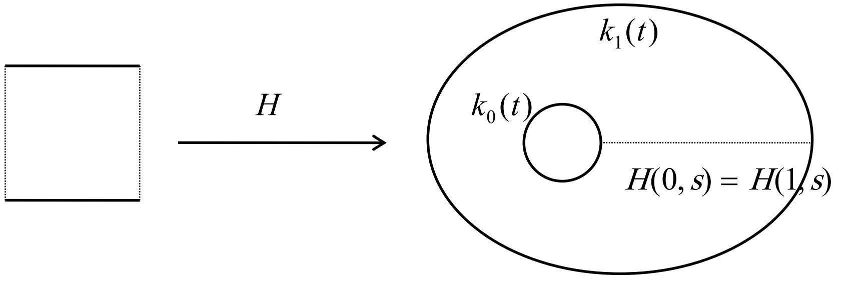
Следува $F' = f$ и според тоа

$$\int_k f(z)dz = 0,$$

по секоја затворен пат k во B.

Дефиниција. Нека $k_0, k_1: [0,1] \to U$ се два затворени пата во областа U. Велиме дека k_0 и k_1 се хомотопни во U ако постои непрекината функција $H: [0,1] \times [0,1] \to U$ таква што

$$H(t,0) = k_0(t),$$
$$H(t,1) = k_1(t),$$
$$H(0,s) = H(1,s)$$



Пример. Нека K е конвексно подмножество од комплексните броеви. Кои било два пата k_0, k_1 во K се хомотопни со (линеарната) хомотопија $H:[0,1]\times[0,1]\to K$ е дадена со:

$$H(t,s)=(1-s)k_0(t)+sk_1(t).$$

Дефиниција. За две точки $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ дефинираме пат $k:[0,1]\to\mathbb{C}$ со

$$k(t)=(1-t)z_0+tz_1.$$

Овој пат се нарекува *пат по отсечка од* z_0 *до* z_1 и го означуваме со $[z_0, z_1]$.

Теорема 3. (Теорема на Коши) Нека $k_0, k_1:[0,1]\to\mathbb{C}$ се два пата во областа U кои се хомотопни и нека $f:U\to\mathbb{C}$ е диференцијабилна функција на U. Тогаш

$$\oint_{k_0} f(z)dz = \oint_{k_1} f(z)dz.$$

доказ. Нека ставиме $I=[0,1]$. Нека r е растојанието меѓу $H(I^2)$ и $\mathbb{C}\setminus U$ т.е.

$$r=\inf\{|z-w| \mid z\in H(I^2), w\in\mathbb{C}\setminus U\}$$

Заради компактноста на $H(I^2)$, $r>0$.

Заради рамномерната непрекинатост на функцијата H, постои природен број n таков што од

$$|(t_1,s_1)-(t_2,s_2)|<\frac{2}{n}$$

тогаш

$$|H(t_1,s_1)-H(t_2,s_2)|<r.$$

Нека

$$z_{mj} = H(\frac{m}{n}, \frac{j}{n}),$$

за $0 \le m, j \le n$. Нека

$$I_{mj} = [\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$$

за $0 \le m, j \le n-1$. Дијагоналата на квадратот I_{mj} има должина $\frac{\sqrt{2}}{n}$, и следува

$$H(I_{mj}) \subseteq B_r(z_{mj}).$$

Нека

$$p_{mj} = [z_{mj}, z_{m+1,j}]*[z_{m+1,j}, z_{m+1,j+1}]*[z_{m+1,j+1}, z_{m,j+1}]*[z_{m,j+1}, z_{mj}].$$

Заради тоа што носачот на p_{mj} се содржи во $B_r(z_{mj})$, од теоремата за диск имаме

$$\oint_{p_{mj}} f(z)dz = 0.$$

Нека q_j е затворениот пат определен со

$$q_j = [z_{0j}, z_{1j}]*[z_{1j}, z_{2j}]*\ldots*[z_{n-1,j}, z_{nj}] .$$

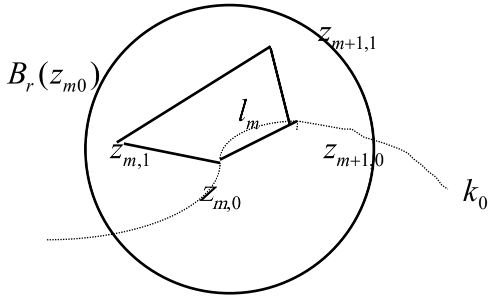
Ќе покажеме дека

$$\oint_{k_0} f(z)dz = \oint_{q_0} f(z)dz = \oint_{q_1} f(z)dz = \ldots = \oint_{q_n} f(z)dz = \oint_{k_1} f(z)dz.$$

Најпрво за да покажеме дека

$$\oint_{k_0} f(z)dz = \oint_{q_0} f(z)dz.$$

Нека $l_m:[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}]\to\mathbb{C}$ е патот опртеделен со $l_m(t)=k_0(t)$



за $\frac{m}{n}\le t\le\frac{m+1}{n}$ (l_m е рестрикција на патот k_0 на интервалот $[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}]$) . Тогаш $l_m*[z_{m+1,0},z_{m,0}]$ е затворен пат во $B_r(z_{m0})\subseteq U$ и следува

$$\oint_{l_m*[z_{m+1,0},z_{m,0}]} f(z)dz=0,$$

т.е.

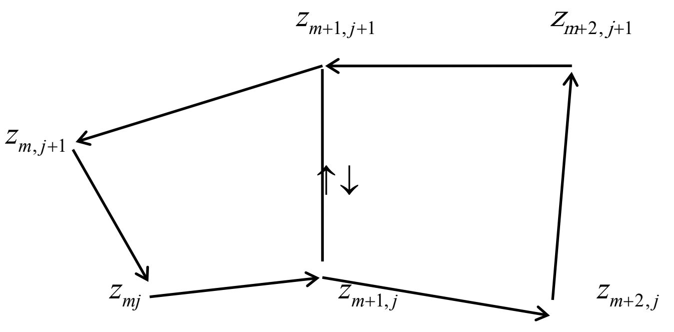
$$\oint_{l_m} f(z)dz=-\oint_{[z_{m+1,0},z_{m,0}]} f(z)dz=\oint_{[z_{m,0},z_{m+1,0}]} f(z)dz.$$

Следува

$$\oint_{k_0} f(z)dz=\sum_{m=0}^{n-1}\oint_{l_j} f(z)dz=\sum_{m=0}^{n-1}\oint_{[z_{m,0},z_{m+1,0}]} f(z)dz=\oint_{q_0} f(z)dz.$$

Слично се покажува дека

$$\oint_{k_1} f(z)dz = \oint_{q_n} f(z)dz \ .$$



Уште треба да се покаже дека

$$\oint_{q_j} f(z)dz = \oint_{q_{j+1}} f(z)dz$$

за $1 \le j \le n-1$. Ова е точно, заради тоа што од

$$0 = \sum_{m=0}^{n-1} \oint_{p_{mj}} f(z)dz$$

добиваме

$$0 = \oint_{q_j} f(z)dz - \oint_{q_{j+1}} f(z)dz$$

Последица 1. Нека U е област и нека патот $k:[0,1] \to \mathbb{C}$ е хомотопен со константниот пат $c_{z_0}:[0,1] \to \mathbb{C}$ во точката $z_0 \in U$, $c_{z_0}(t) = z_0, t \in [0,1]$. Тогаш

$$\oint_{k} f(z)dz = 0 \ .$$

доказ. Точноста на оваа последица следува од тоа што интегралот по константниот пат е еднаков на 0, т.е. од

$$\oint_{c_{z_0}} f(z)dz = 0.$$

Пример. Затворениот пат $k:[0,1] \to \mathbb{C}$ определен со

$$k(t) = c + re^{2\pi it},$$

$t \in [0,1]$, се нарекува кружен пат со центар во c и радиус r.

Нека k_1 и k_2 се две концентрични кружни пата со радиуси r_1 и r_2, соодветно, и центар во c. Тогаш k_1 и k_2 се хомотопни со хомотопија H е дадена со:

$$H(t,s) = (1-s)k_0(t) + sk_1(t).$$

Затоа, ако f е диференцијабилна функција на прстенот помеѓу кружниците k_1 и k_2, тогаш

$$\oint_{k_1} f(z)dz = \oint_{k_2} f(z)dz.$$

8. ИНТЕГРАЛНА ФОРМУЛА НА КОШИ

Теорема 1. Нека е даден затворен по делови диференцијабилен пат $k:[a,b] \to \mathbb{C}$, кој не минува низ точката c. Тогаш постои цел број $n \in \mathbb{Z}$, таков што

$$\oint_k \frac{dz}{z-c} = n \cdot 2\pi i .$$

доказ. Функцијата $h:[a,b] \to \mathbb{C}$ определена со

$$h(t) = \int_a^t \frac{k'(s)}{k(s)-c} \cdot ds$$

е непрекината на $[a,b]$ и е диференцијабилна во сите точки освен во конечно многу и во точките во кои е диференцијабилна

$$h'(t) = \frac{k'(t)}{k(t)-c} .$$

Заради ова, ако ставиме

$$g(t) = e^{-h(t)}(k(t)-c)$$

тогаш во точките во кои $h'(t)$ постои

$$g'(t) = e^{-h(t)}[k'(t) + \frac{k'(t)}{k(t)-c}(k(t)-c)]$$

$$= 0$$

Заради тоа што функцијата $g(t)$ е непрекината на интервалот $[a,b]$, мора $g(t)$ да е константа т.е.

$$g(t) = g(a) = e^{-h(a)}(k(a)-c) = k(a)-c.$$

за сите $t \in [a,b]$. Следува

$$e^{h(t)} = \frac{k(t)-c}{k(a)-c} \ .$$

Патот $k\colon[a,b] \to \mathbb{C}$ е затворен т.е. $k(a) = k(b)$, и следува

$$e^{h(b)} = 1,$$

т.е.

$$h(b) = n \cdot 2\pi i,$$

за некој цел број $n \in \mathbb{Z}$, или

$$\oint_k \frac{dz}{z-c} = \int_a^b \frac{k'(s)}{k(s)-c} ds = h(b) = n \cdot 2\pi i$$

што и требаше да се докаже.

Пример. Нека е даден кружниот пат $k\colon[0,1] \to \mathbb{C}$, $k(t) = c + re^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$. Тогаш

$$\oint_k \frac{dz}{z-c} = \int_0^1 \frac{re^{2\pi it} e^{2\pi it} 2\pi i}{re^{2\pi it}} dt = 2\pi i.$$

Слично ако $k:[0,n]\to\mathbb{C}$, $k(t)=c+re^{2\pi it}$, $t\in[0,n]$, за $n\in\mathbb{N}$ фиксиран природен број тогаш

$$\oint_k \frac{dz}{z-c}=n\cdot 2\pi i\,.$$

(бројот n е бројот на завртувања на патот $k:[0,n]\to\mathbb{C}$ околу кружницата).

Дефинираме *индекс на точката* c *во однос на кривата* $k:[a,b]\to\mathbb{C}$, како цел број $n(k,c)$ определен со:

$$n(k,c)=\frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{dz}{z-c}\,.$$

Теорема 2. Нека B е отворен круг, $c\in B$ и нека k е пат во $B\setminus\{c\}$. Ако комплексната функција f има извод на B тогаш

$$n(k,c)\cdot 2\pi i\cdot f(c)=\oint_k \frac{f(z)dz}{z-c}\,.$$

доказ. Нека ја формираме функцијата

.

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(c)}{z-c}, & z\in B\setminus\{c\}\\ f'(c), & z=c\end{cases}.$$

Од теоремата на Коши за функцијата $h(z)$ добиваме

$$\oint_k \frac{f(z)-f(c)}{z-c}dz=0$$

т.е.

$$\oint_k \frac{f(z)}{z-c}dz=n(k,c)\cdot 2\pi i\cdot f(c).$$

Во случај кога патот по кој се врши интеграцијата е кружен пат теоремата може да ја покажеме со нешто ослабени услови - наместо уловот f да има извод во c, доволно е да се бара f да е непрекината во c.

Теорема 3. Нека U е област, и нека k е пат во U по кружница со центар во c. Ако комплексната функција f има извод на $U \setminus \{c\}$ и е непрекината во c тогаш

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(z)dz}{z-c} .$$

доказ. Од непрекинатоста на f во точката c за дадено $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$ такво што од

$$|z - z_0| < \delta$$

и $x \in U$ да следува

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} .$$

Нека избереме r, така што $0 < r < \delta$ и нека $k{:}[0,1] \to \mathbb{C}$ е кружниот пат

$$k(t) = c + re^{2\pi i t},$$

$t \in [0,1]$. Тогаш

$$\sup\{|\frac{f(z) - f(c)}{z-c}| \mid z = k(t), t \in [0,1]\} \le \frac{\varepsilon}{2\pi r} .$$

Следува

$$|\oint_k \frac{f(z)dz}{z-c} - 2\pi i \cdot f(c)| = |\oint_k \frac{f(z)dz}{z-c} - \oint_k \frac{f(c)dz}{z-c}|$$
$$= |\oint_k \frac{f(z) - f(c)}{z-c} dz| \le \frac{\varepsilon}{2\pi r} 2\pi r = \varepsilon$$

Заради произволноста на $\varepsilon > 0$, добиваме

$$\oint_k \frac{f(z)dz}{z-c} = 2\pi i \cdot f(c) .$$

Заради последниот пример од претходното поглавје следува дека интегралот е нула и по секоја друга кружница во U која е концентрична со k.

9. НИЗИ И РЕДОВИ ОД КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Дефиниција: Низа од комплексни броеви е секое пресликување $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ од множеството природни броеви во множеството на комплексни броеви се нарекува *низа од комплексни броеви*.

Ако со ова пресликување $1 \to z_1, 2 \to z_2, ..., n \to z_n, ...$ низата ја означуваме со $(z_n | n \in \mathbb{N})$ или скратено со (z_n).

Дефиниција: Низата од комплексни броеви (z_n) *конвергира кон комплексниот број* z_0 ако за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што

$$|z_n - z_0| < \varepsilon$$

за сите $n \geq n_0$.

Комплексниот број z_0 се нарекува лимес на низата (z_n) и се означува со

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n .$$

Низата (z_n) е *ограничена* ако постои реален број M таков што $|z_n| < M$ за сите природни броеви.

Заради тоа што дефинициите и својствата на апсолутна вредност кај комплексните броеви се исти со дефинициите и својствата на апсолутна вредност кај реалните броеви, доказот на следната теорема е идентичен со доказот на соодветната теорема за низи од реални броеви.

Теорема 1: Нека (z_n) и (w_n) се конвергентни низи од комплексни броеви. Тогаш и низите:

1) $(c \cdot z_n)$ за фиксиран комплексен број c, конвергира и $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot z_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} z_n$

2) $(z_n + w_n)$ конвергира и $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n + \lim\limits_{n\to\infty} w_n$

3) $(z_n \cdot w_n)$ конвергира и $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} w_n$

4) ако $w_n \neq 0$ за секој природен број и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \neq 0$ тогаш и низата $(\frac{z_n}{w_n})$ конвергира и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}$

Дефиниција: Нека е дадена низа од комплексни броеви (z_n) и растечка низа од природни броеви

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

Низата $(z_{n_k} | k \in \mathbb{N})$ или скратено (z_{n_k}) се нарекува подниза на низата (z_n).

Теорема 2: Ограничена низа содржи конвергентна подниза.

доказ: Нека (z_n), $z_n = x_n + i \cdot y_n$ е ограничена низа од комплексни броеви. Тогаш и низите (x_n) и (y_n) се ограничени. Според соодветната теорема за реални низи, низата (x_n) содржи конвергентна подниза (x_{n_k}). Од ограниченоста на низата (y_{n_k}) таа содржи конвергентна подниза (y_{n_j}).

Добиваме поднизите (x_{n_j}) и (y_{n_j}) се конвергентни, од каде следува дека и поднизата (z_{n_j}), $z_{n_j} = x_{n_j} + iy_{n_j}$ е конвергентна.

Дефиниција: Низата од комплексни броеви (z_n) се нарекува фундаментална ако за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што

$$|z_m - z_n| < \varepsilon$$

за сите $m, n \geq n_0$.

Доказот на следната теорема е идентичен со доказот на соодветната теорема за низи од реални броеви.

Теорема 3: Низа од комплексни броеви е фундаментална ако и само ако е конвергентна.

Дефиниција: Нека (z_n) е низа од комплексни броеви. Изразот

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

се нарекува *ред од комплексни броеви*. Во овој случај општиот член на низата z_n се нарекува општ член на редот.

Сите теореми за реални редови од VI.1, VI.3 и VI.6, и Теоремата 1 од VI.5 се точни и за редовите од комплексни броеви. Иако теоремата за почлено диференцирање на ред од комплексни функции не може да се покаже за комплексните функции, сепак таа теорема е точна во специјалниот случај на комплексни степенски редови т.е. функционални редови од облик

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

каде што $c_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ и z_0 се фиксирани комплексни броеви. При ова за комплексните броеви z во кои степенскиот ред конвергира добиваме комплексна функција

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Теорема 4. Степенскиот ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ може почлено да се диференцира и интегрира произволен број пати во областа на конвергенција.

доказ. Со диференцирање член по член на стетенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

се добива степенскиот ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} nc_n (z-z_0)^{n-1}$$

Од

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

следува дека овие два степенски редови имаат ист радиус на конвергенција R.

Тогаш за дадена точка z од областа на конвергенција т.е. таква што $|z-z_0|< R$, постои r таков што $0<r<R$ и $|z-z_0|\leq r$.

Нека заради поедноставно означување земеме $z_0 = 0$ и нека за точките од областа на конвергенција ставиме:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$$

За дадена точка w од областа на конвергенција постои r таков што $0<r<R$ и $|w|\leq r$. Треба да покажеме дека

$$f'(w) = g(w),$$

т.е. дека

$$\lim_{z\to w}\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| = 0.$$

Нека за $z \neq w$ ја формираме разликата

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left|\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1}\right|$$

За $n \geq 2$ ќе ја трансформираме следната разлика во вид:

$$\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1} = z^{n-1} - w^{n-1} + z^{n-2} - w^{n-1} + \ldots + zw^{n-2} - w^{n-1}$$

$$= (z-w)(z^{n-2} + z^{n-3}w + \ldots + zw^{n-3} - w^{n-2}) + (z-w)(z^{n-3}$$

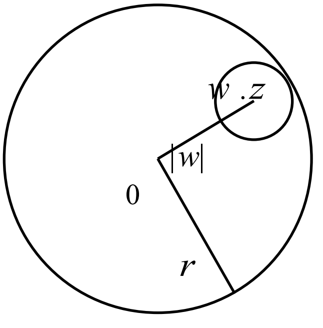
$$+ z^{n-4}w + \ldots + zw^{n-3} - w^{n-2}) + \ldots + (z-w)w^{n-2}$$

$$= (z-w)\sum_{k=1}^{n-1} kw^{k-1}z^{n-k-1},$$

(да забележиме дека за $n = 1$ оваа разлика е еднаква на 0).

Ако избереме z да биде доволно блиску до w т.е. така што $|z-w| < r - |z|$ добиваме дека и

$$|z| \leq |z-w| + |w| < r - |w| + |w| = r.$$



Според тоа

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n||z-w| \sum_{k=1}^{n-1} k|w|^{k-1}|z|^{n-k-1}$$

$$\leq |z-w| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n||r|^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= |z-w| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} \quad .$$

Функционалниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}$ има радиус на конвергенција R заради тоа што

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n-2]{\frac{n(n-1)}{2}|c_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

и заради $0<r<R$ добиваме дека бројниот ред $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2}$ конвергира. Според тоа

$$\lim_{z\to w}\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right|\le\lim_{z\to w}|z-w|\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2}=0$$

т.е. $f'(w)=g(w)$.

10. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНИ ФУНКЦИИ СО СТЕПЕНСКИ РЕД

Теорема1 : а) Нека (f_n) е низа од непрекинати комплексни функции на носачот на патот k која рамномерно конвергира кон функцијата f. Тогаш

$$\lim_{n\to\infty}\oint_k f_n(z)dz=\oint_k(\lim_{n\to\infty}f_n(z))dz.$$

б) Нека $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$ е ред од непрекинати комплексни функции на носачот на патот k.кој рамномерно конвергира кон функцијата F. Тогаш

$$\oint_k(\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z))dz=\sum_{n=0}^{\infty}\oint_k f_n(z)dz.$$

доказ. Нека L е должината на патот k. За дадено $\varepsilon > 0$ постои природен број n_0 таков што $n \geq n_0$

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{L} .$$

Тогаш

$$|\oint_k f_n(z)dz - \oint_k f(z)dz| = |\oint_k (f_n(z) - f(z))dz| < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon$$

Теорема 2: Нека f е диференцијабилна функција на затворениот диск $\overline{B}_r(c)$ освен во точката c каде што е непрекината. Нека k е кружниот пат со радиус r и центар во c. Тогаш за сите $z \in B_r(c)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-c)^n$$

каде што

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_k \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} \cdot dw.$$

доказ. Нека $z \in B$ е фиксирана точка. Тогаш за произволна точка w од кружницата

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-c} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-c}{w-c}}$$

$$= \frac{1}{w-c}\left[1 + \frac{z-c}{w-c} + \left(\frac{z-c}{w-c}\right)^2 + \ldots\right]$$

Заради

$$\frac{|z-c|}{|w-c|} < 1$$

функционалниот ред (со променлива w) рамномерно конвергира на кружницата со радиус r и центар во c. Следува

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_k \frac{f(w)}{w-c}dw + \frac{(z-a)}{2\pi i}\oint_k \frac{f(w)}{(w-c)^2}dw + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_k \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}dw + \ldots$$

или

$$f(z) = c_0 + c_1(z-c) + \ldots + c_n(z-c)^n + \ldots$$

каде што $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_k \dfrac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} \cdot dw.$

11. СИНГУЛАРИТЕТИ

Дефиниција: Нека U е област и нека $c \in U$. Ако комплексната функција f е определена и диференцијабилна на $U \setminus \{c\}$ велиме дека c е *изолиран сингуларитет* за f.

Ако постои $\lim\limits_{z\to c} f(z)$ како комплексен број велиме дека сингуларитетот е *привиден*.

Ако постои природен број m таков што

$$\lim_{z\to c}(z-c)^m f(z) = C \neq 0,$$

велиме дека $c \in U$ е *пол од* m*-ти ред* за f. Тогаш функцијата

$$h(z)=\begin{cases}(z-c)^m f(z), & z\in U\setminus\{c\}\\ C, & z=c\end{cases}$$

е непрекината во точката $z=c$, и следува

$$(z-c)^m f(z)=b_0+b_1(z-c)+\ldots+b_n(z-c)^n+\ldots$$

за секој $z\in B_r(c)$ од некој диск содржан во U.

Ставајќи $c_{n-m}=b_n$ добиваме

.
$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-c)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-c}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-c)^n.$$

Овој степенски ред конвергира за $z\in B_r(c)$. Според тоа ако интегрираме по кружниот пат k со радиус r и центар во c добиваме:

$$\oint_k f(z)dz=c_{-1}\oint_k\frac{dz}{z-c}=2\pi i\cdot c_{-1}.$$

Членот c_{-1} се нарекува остаток или резидиум во c и обично се означува со $\mathrm{Re}s\,c$. Според тоа

$$\oint_k f(z)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Re}s\,c.$$

Теорема 1. Нека f има пол од m-ти ред во точката c од областа U. Тогаш

$$\mathrm{Re}s\,c=\lim_{z\to c}\frac{1}{(m-1)!}[(z-c)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

доказ. Ако f има пол од m-ти ред во точката c, тогаш

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-c)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-c}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-c)^n.$$

или

$$(z-c)^m f(z)=c_{-m}+\ldots+c_{-1}(z-c)^{m-1}+c_0(z-c)^m+c_1(z-c)^{m+1}+\ldots$$

Диференцирајќи m-1 пати добиваме

$$[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}=(m-1)!c_{-1}+m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot a_0(z-c)+\ldots$$

од каде

$$\lim_{z\to c}[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}=(m-1)!\cdot c_{-1}$$

ИНДЕКС НА ПОИМИ

ОЗНАКИ

$\cup$ унија на множества

$\cap$ пресек

$\setminus$ разлика

$\times$ производ

$x \in X$ x елемент на множеството X

$\mathbb{Z}$ цели броеви

$\mathbb{Q}$ рационални броеви

$\mathbb{R}$ реални броеви

$\overline{\mathbb{R}}$ проширено множество на реалните броеви

$[a,b]$ затворен интервал

(a,b) отворен интервал

$(a,b], [a,b)$ полуотворени интервали

$\inf X$ инфимум на множеството X

$\sup X$ супремум на множеството X

$(x_n \mid n \in \mathbb{N})$, (x_n) низа од реални броеви

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ лимес на низата (x_n)

$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ лимес супериор на низата (x_n)

$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ лимес супериор на низата (x_n)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ лимес на функцијата $f(x)$ во x_0

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ збир на $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ броен ред

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ функционален ред

e основа на природниот логаритам,

π односот меѓу должината на кружницата и нејзиниот дијаметар

$f'(x)$ извод на функцијата $f(x)$

$\int f(x)dx$ неопределен интеграл на функцијата $f(x)$

$\int_a^b f(x)dx$ определен интеграл на функцијата $f(x)$ на $[a,b]$

$\oint_k f(z)dx$ криволиниски интервал по диференцијабилен пат k

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А.П.Карташев, Б.Л.Рождественский, Математический анализ, Наука, Москва, 1984

2. Н.Ивановски, Математичка анализа 1 (функции од една независно променлива), второ издание, Универзитет “Кирил и Методиј”, Скопје, 1991

3. Н.Ивановски, Н.Речковски, Математика 3, второ издание, Скопје, 1991

4. П.Р.Лазов, Ѓ.И.Ивановски, Елементи на математичката анализа со некои примени, Универзитет “Кирил и Методиј”, Скопје, 1981

5. Б.С.Попов, Елементарна математичка анализа, Просветно дело, Скопје, 1977

6. Л.Д.Кудрявцев, Курс математического анализа, Том 1, Высшая школа, Москва, 1988

7. Н. Шекутковски, Математичка анализа 1, Просветно дело, 2002, прво издание 1995

8. Н. Шекутковски, Редови и аналитички функции, Универзитет Св. Кирил и Методиј, 2002

9. Н. Шекутковски, Топологија, Универзитет Св. Кирил и Методиј, Природно-математички факултет, 2002

10. L.Ahlfors, Complex analysis, Mc Graw Book Co. Inc. 1953

11. Convay, Functions of One Complex Variable, Springer-Verlag , 1985

12. S.Kurepa, Matematicka analiza 1,2, Tehnicka knjiga, Zagreb

13. S.Mardesic, Matematicka analiza u n-dimenzionalnom prostoru, Skolska knjiga, Zagreb, 1974

14. M.Marjanovic, Matematicka analiza 1, Naucna knjiga, Beograd, 1979

15. W.Rudin, Principles of mathematical analysis, Third edition, Mc Graw-Hill Kogagusha, Ltd.

16. W. Rudin, Real and Complex analysis, Mc Graw Hill Book Co. New York, 1966

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Бул. „Гоце Делчев“ бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
Проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
Проф. д-р Никита Шекутковски – Скопје

Рецензенти
1. Проф. д-р Весна Манова Ераковиќ
2. Проф. д-р Љупчо Настовски

Илустратор
Проф. д-р Никита Шекутковски

Лектура на македонски јазик:
Савета Димитрова

Е-издание:
http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41