2018

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

Зоран Мисајлески

Векторска и линеарна алгебра

- Броеви
- Детерминанти
- Матрици
- Векторска алгебра
- Аналитичка геометрија
- Специјални површини

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“,
Градежен факултет, Скопје

ВЕКТОРСКА И ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

(броеви, детерминанти, матрици, векторска алгебра,
аналитичка геометрија во простор, специјални површини)

Зоран Мисајлески

Скопје 2018

Издавач:
Универзитет „Св. Кирил и Методиј" во Скопје
Бул. Гоце Делчев бр. 9, 1000 Скопје
www.ukim@ukim.edu.mk

Уредник за издавачка дејност на УКИМ:
проф. д-р Никола Јанкуловски, ректор

Уредник на публикацијата:
доц. д-р Зоран Мисајлески,
Градежен факултет, УКИМ, Скопје

Рецензенти:
проф. д-р Никита Шекутковски
редовен професор на ПМФ, УКИМ, Скопје
проф. д-р Валентина Миовска
вонреден професор на ПМФ, УКИМ, Скопје

Техничка обработка:
Зоран Мисајлески

Лектура на македонски јазик:
Соња Попоска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

512.64(075.8)

МИСАЈЛЕСКИ, Зоран
Векторска и линеарна алгебра: броеви, детерминанти, матрици, векторска алгебра, аналитичка геометрија во простор, специјални површини / Зоран Мисајлески. - Скопје: Универзитет "Св. Кирил и Методиј", Градежен факултет, 2018. - 166 стр. : илустр. ; 30 см

Библиографија: стр. 165

ISBN 978-9989-43-421-1

а) Линеарна алгебра - Вектори - Високошколски учебници COBISS.MK-ID 109010954

ПРЕДГОВОР

Учебникот „Векторска и линеарна алгебра“ го опфаќа материјалот од векторската и линеарна алгебра што се изучува на Градежниот факултет со неделен фонд на часови 2+2 или вкупно 30 часа предавања и 30 часа вежби. Учебникот можат да го користат и студентите од останатите технички факултети кои изучуваат ист или сличен материјал.

Материјалот е распределен во 6 поглавја. Првото поглавје под наслов „Броеви“ ги проучува реалните броеви, со осврт на методот на математичка индукција и биномната формула, како и комплексните броеви каде покрај својствата на комплексните бореви се проучува и кубната равенка. Во второто поглавје со наслов „Детерминанти и системи линеарни равенки“, се обработуваат двете теми наведени во насловот на поглавјето. Третото поглавје со наслов „Матрици“ ги проучува својствата на матриците и нивната примена. Поделено е на темите: „Операции со матрици“, „Елементарни трансформации, ранг на матрица, инверзна матрица и елементарни матрици“, „Матрични равенки“, „Решавање на системи линеарни равенки со матрици“, „Теорема на Хамилтон-Кели“ и „Сопствени вредности и вектори“. Четвртото поглавје е со наслов „Векторска алгебра“ и ги содржи темите: „Вектори“, „Координати на вектор“, „Скаларен производ“, „Векторски производ“, „Мешан производ“ и „Линеарна зависност и независност“. Петтото поглавје има наслов „Аналитичка геометрија“. Поделено е на темите: „Рамнина“, „Права“, „Заемен однос“, „Агол“, „Растојание“ и „Проекции“. Шестото поглавје со наслов „Специјални површини“ се состои од темата „Цилиндрични, конусни и ротациони површини“, како и од темата „Површини од втор ред“, каде што најголемо внимание се посветува на сферата, но се разгледани и останатите површини од втор ред.

Теорискиот материјал и примерите се според предавањата што ги држи авторот на Градежниот факултет. Лекциите и доказите на теоремите кои го поврзуваат градивото, но не се докажуваат на предавањата и не се бараат на испитите се ставени во прилогот.

Поставени се и околу 500-тини задачи, од кои околу 100 се решени. Задачите во најголем дел се поставени на испитите зададени од страна на авторот. Тежински се класифицираат во три групи. Првата група се елементарни задачи, кои се сведуваат на директна примена на формула и се задаваат на завршниот дел на испитот заедно со теорискиот материјал. Втората група ја сочинуваат карактеристичните типови задачи кои се задаваат на првиот дел од испитите. Од секој тип е решена по една задача, а презентирани се и повеќе нерешени задачи. Третата група задачи е наменета за студентите кои длабински го изучуваат градивото. На испитот се задаваат во пакет со задачи од втората група, така што студентот избира да реши задача од третата група која носи повеќе поени или од втората. Со ѕвездичка се зададени десетина задачи кои бараат високо ниво на апстракција, а на испитите биле зададени како бонус задача за најдобрите студенти.

Авторот им се заблагодарува на рецезентите за прочитаниот текст и корисните забелешки. Ова е прво издание на учебникот и авторот ќе им биде благодарен на читателите кои со своите забелешки ќе придонесат во подобрувањето на квалитетот на учебникот во наредните изданија.

Зоран Мисајлески

Учебникот го посветувам на моите родители.

1.1 РЕАЛНИ БРОЕВИ

1.1.1 Реални броеви

***<u>Аксиоматика на реалните броеви</u>**.** Множеството реални броеви, ознака $\mathbb{R}$, е непразно множество. Во него е дефинирана операција **собирање**, ознака „+“. Ако a, b и c се произволни реални броеви тогаш важи:

1. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (асоцијативен закон за собирањето);
2. $a+0=0+a=a$ (0-та е неутрален елемент за собирањето);
3. $a+(-a)=(-a)+a=0$ (секој елемент има спротивен во однос на собирањето);
4. $a+b=b+a$ (комутативен закон на собирањето).

Во множеството реални броеви е дефинирана операција **множење**, ознака „$\cdot$“. Ако a, b и c се произволни реални броеви тогаш важи:

5. $(ab)c=a(bc)$ (асоцијативен закон на множењето);
6. $a\cdot 1=1\cdot a=a$ (1 е неутрален елемент за множењето);
7. Ако $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $a\frac{1}{a}=\frac{1}{a}a=1$ (елементот $\frac{1}{a}$ е инверзен елемент на a во однос на множењето);
8. $ab=ba$ (комутативен закон на множењето);
9. $(a+b)c=ac+bc$ и $c(a+b)=ca+cb$ (дистрибутивни закони на множењето во однос на собирањето).

Секое подмножество од декартовиот производ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ се нарекува **релација**. Во множеството реални броеви позната ни е релацијата „$\leq$“. Ако a, b и c се произволни реални броеви тогаш важи:

10. $a\leq a$ (релацијата е рефлексивна);
11. $a\leq b\wedge b\leq a\Rightarrow a=b$ (релацијата е антисиметрична);
12. $a\leq b\wedge b\leq c\Rightarrow a\leq c$ (релацијата е транзитивна);
13. $a\leq b\vee b\leq a$ (секои два елементи се споредливи);
14. $a\leq b\Rightarrow a+c\leq b+c$ (релацијата е согласна со собирањето);
15. $0\leq a\wedge 0\leq b\Rightarrow 0\leq ab$ (релацијата е согласна со множењето);

Следново својство е карактеристично само за множеството на реални броеви.

16. Ако X и Y се непразни подмножества од $\mathbb{R}$, такви што за секое $x\in X$ и секое $y\in Y$, $x\leq y$, тогаш постои елемент $z\in\mathbb{R}$ таков што за секој $x\in X$ и секој $y\in Y$, $x\leq z\leq y$ (својство на непрекинатост (комплетност) на $\mathbb{R}$).

Разлика на броевите a и b, ознака $a-b$, е збирот $a+(-b)$. **Количник** на броевите a и $b\neq 0$, ознака $\frac{a}{b}$, е производот $a\cdot\frac{1}{b}$.

Останатите својства што ни се познати за реалните броеви може да се изведат од својствата 1-16. Тоа дозволува теоријата на реалните броеви да се изгради аксиоматски. Тврдењата 1-16 се земаат за точни без доказ и се нарекуваат аксиоми на множеството реални броеви, а останатите тврдења се изведуваат од нив. Изведените тврдења се нарекуваат теореми. Исто така, некои од поимите се земаат за основни и со нивна помош се дефинираат други поими. Ние нема да навлегуваме во аксиоматскиот пристап на дефинирање на реалните броеви, само ќе напомeнеме дека секое друго множество броеви што ги поседува својствата 1-16 може да се поистовети со множеството реални броеви, така што да биде согласно со дефинираните операции и релацијата.

Ќе сметаме дека реалните броеви и нивните својства ни се познати. Единствено ќе ги повториме принципот на математичка индукција и биномната формула. Аксиомите 1-16 ги набројавме, за полесно да увидиме кои својства ги поседуваат множествата во кои се дефинирани операции наречени исто собирање и множење. Такви множества се комплексните броеви, матриците и векторите што ќе ги проучиме во овој предмет. Ако ги поседуваат истите својства во тој случај со нив може да оперираме на ист начин како што оперираме со реалните броеви.

Позначајни подмножества на множеството реални броеви се множеството **природни** броеви $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,...\}$, множеството **цели** броеви $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$, множеството **рационални** броеви $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}\right\}$ и множеството **ирационални** броеви $\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Аксиоматски природните броеви се дефинирани со помош на Пеановите аксиоми кои гласат:

1) 1 е природен број,
2) Секој природен број има следбеник (кој е природен број),
3) 1 не е следбеник на ниту еден природен број,
4) Ако следбениците на два броја се еднакви, тогаш и двата броја се еднакви,
5) Ако S е множество природни броеви такво што: $1\in S$ и за секој елемент во S и неговиот следбеник е елемент во S, тогаш $S=\mathbb{N}$ (аксиома на математичка индукција).

<u>Геометриска интерпретација на реалните броеви</u>. Реалните броеви може да се претстават како точки на права на која се фиксирани две точки O и E кои ги претставуваат броевите 0 и 1. Должината на отсечката OE е 1, $\overline{OE}=1$. Правата се нарекува бројна оска или x-оска. На секој реален број му одговара една точка од правата и обратно. Затоа наместо „точката A од бројната оска која е график на реалниот број a“, велиме „реалниот број a“, односно ги поистоветуваме поимите „реален број a“ и „точка a од x-оската“.

1.1.2 Математичка индукција

Принципот на математичка индукција важи во множеството на природни броеви: Ако X е подмножество од множеството на природни броеви $\mathbb{N}$, такво што $1\in X$ и за секој елемент $k\in X$ следува $k+1\in X$, тогаш $X=\mathbb{N}$.

Принципот се користи за докажување на разни формули $P(n)$ кои важат за сите природни броеви, почнувајќи од некој број, најчесто бројот 1. Истиот се состои од 2 дела. Прво се докажува точноста на формулата $P(n)$ за $n=n_0$. Потоа, под претпоставка дека формулата е точна за $n=n_0+1, n_0+2,...,k$, се покажува нејзината точност за $n=k+1$. При решавање на задачи претпоставката се смета за втор дел, додека доказот за трет дел на математичката индукција. Значи:

Со помош на **принципот на математичка индукција** (П.М.И.) може да се докаже точноста на еден математички исказ за секој $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$ ако:

1. Се покаже точноста на исказот за $n=n_0$;
2. Се претпостави дека исказот е точен за $n=k\geq n_0$;
3. Се покаже точноста на исказот за $n=k+1$.

Задача 1.1.2.1. Докажи го равенството $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $n\in\mathbb{N}$.

Решение. За $n=1$ левата страна од равенството има вредност 1, а десната $\dfrac{1(1+1)}{2}=1$, па тие се еднакви. Претпоставуваме дека равенството важи за $n=k$, односно

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Треба да ја покажеме точноста на равенството за $n=k+1$, односно дека $1+2+\ldots+k+1=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Навистина, тргнувајќи од левата страна и заменувајќи ги првите k собироци со изразот од десната страна на индуктивната претпоставка, добиваме дека

$$1+2+\ldots+k+k+1=\frac{k(k+1)}{2}+k+1=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Според принципот на математичка индукција равенството е точно за сите природни броеви.

***<u>Пример 1.1.2.2</u>*.** Првиот чекор од принципот на математичка индукција е битен. Да го рагледаме равенството $n=n+1$, $n\in\mathbb{N}$. При индуктивна претпоставка за $n=k$, $k=k+1$ со додавање на единица во равенството добиваме $k+1=(k+1)+1$, па равенството е точно за $n=k+1$. Меѓутоа не е исполнет првиот чекор, бидејќи $1\neq 1+1$. Уште повеќе равенството не е исполнето за ниту еден природен број.

1.1.3 Биномна формула

Дефиниција 1.1.3.1. Биномен коефициент $\dbinom{n}{k}$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\{0,1,2,...,n\}$; е бројот дефиниран со $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, каде за $n\in\mathbb{N}$, $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ и $0!=1$.

Својство 1.1.3.1. За природните броеви k и $n\geq k$ важат равенствата:

$$1)\ \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad 2)\ \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},\ k<n.$$

$$3)\ \binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\ \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n,\ \binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2},\ldots,\ \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

Доказ. Првото и третото тврдење следуваат директно од дефиницијата за биномен коефициент. Ќе го покажеме само второто тврдење.

2) Имајќи предвид дека $\dbinom{n+1}{k+1}=\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$ добиваме:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=$$

$$\frac{(k+1)(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!}+\frac{(n+1)!(n-k)}{(n+1)(k+1)!(n-k)!}=\binom{n+1}{k+1}\frac{k+1+n-k}{n+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Теорема 1.1.3.2. (Биномна формула) Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогаш,

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n .$$

Доказ. Биномната формула ќе ја докажеме со помош на принципот на математичка индукција. За $n = 1$ биномната формула е точно равенство, бидејќи $(a+b)^1 = a+b$.

Нека тврдењето е точно за $n = k$, односно

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \ldots + \binom{k}{i} a^{k-i} b^i + \ldots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + b^k .$$

Тогаш, за $n = k+1$ имаме:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) =$$

$$\binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \ldots + \binom{k}{i} a^{k-i+1} b^i + \ldots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} a b^k +$$

$$+ \binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \ldots + \binom{k}{i} a^{k-i} b^{i+1} + \ldots + \binom{k}{k-1} a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1} =$$

$$a^{k+1} + \left(\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right) a^k b + \ldots + \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right) a^{k-i+1} b^i + \ldots + \left(\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right) a b^k + b^{k+1} \overset{Св\, 1.1.3.1}{=}$$

$$a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \ldots + \binom{k+1}{i} a^{(k+1)-i} b^i + \ldots + \binom{k+1}{k} a b^k + b^{k+1} . \blacksquare$$

Од биномната формула следува дека $k+1$-от член во развојот на биномот $(a+b)^n$ е

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Биномните коефициенти се наоѓаат и со таканаречениот **Паскалов триаголник**, во кој крајните елементи на секоја редица се единици, додека останатите елементи се збир од најблиските два елементи од редицата над нив.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\end{array}$$

....

Задача 1.1.3.1. Степенувај го биномот $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{y} \right)^3$.

Решение. Со помош на биномната формула добиваме:

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{y} \right)^3 = \binom{3}{0} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \binom{3}{1} \left(\frac{x}{2} \right)^2 \frac{3}{y} + \binom{3}{2} \frac{x}{2} \left(\frac{3}{y} \right)^2 + \binom{3}{3} \left(\frac{3}{y} \right)^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{9}{4} \frac{x^2}{y} + \frac{27}{2} \frac{x}{y^2} + \frac{27}{y^3} .$$

Задача 1.1.3.2. Најди го четвртиот член во развојот на биномот $\left(x-\sqrt{3}\right)^7$.

Решение. Според формулата за определување на $k+1$-от член во развојот на биномот, $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, за четвртиот член ($k=3$) добиваме:

$$T_4=\binom{7}{3}x^{7-3}\left(-\sqrt{3}\right)^3=-\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}x^4 3\sqrt{3}=-105\sqrt{3}x^4 .$$

1.2 КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1.2.1 КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Равенката $x^2+1=0$ нема решение во множеството на реални броеви. Намерата оваа равенка да има решение и да се задржат својствата што ги поседуваат операциите собирање и множење на реални броеви, доведува до проширување на множеството реални броеви до множество комплексни броеви.

Множеството комплексни броеви, ознака $\mathbb{C}$, ќе го поистоветиме со множеството $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, т.е. со множеството од сите подредени двојки (x,y) од реални броеви.

Два комплексни броја (x_1,y_1) и (x_2,y_2) се **еднакви**, ако се еднакви како подредени парови т.е $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

За произволни два комплексни броја $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ дефинираме операција **собирање**, $+$, и **множење**, $\cdot$, со

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2) \text{ и } z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1).$$

Со 0 ќе го означиме бројот $(0,0)$. Значи $0=(0,0)$. Ако $z_1=(x_1,y_1)$, $-z_1=(-x_1,-y_1)$. Множеството комплексни броеви чии елементи се подредените парови $(x,0)$, $x\in\mathbb{R}$ ќе го поистоветиме со реалните броеви. Означуваме $x=(x,0)$. Комплексниот број $(0,1)$ ќе го наречеме **имагинарна единица** и ќе го означиме со i. Значи $i=(0,1)$. Важи:

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1 .$$

Комплексниот број (x,y) може да го запишеме како

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y,0)(0,1)=x+yi ,$$

Заради $(y,0)(0,1)=(0,1)(y,0)$ се користи и записот $z=x+iy$. Значи, комплексните броеви $z=(x,y)$, може да ги запишеме во обликот

$$z=x+yi \text{ или } z=x+iy$$

кој се нарекува **алгебарски** облик на комплексен број.

Бројот x се нарекува **реален**, додека y **имагинарен** дел на комплексниот број $z=x+iy$. Означуваме $x=\operatorname{Re}z$ и $y=\operatorname{Im}z$.

Ако $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ се комплексни броеви запишани во алгебарски облик, тогаш збирот на комплексните броеви z_1 и z_2 е:

$$z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2),$$

разликата на z_1 со z_2 е:

$$z_1-z_2=x_1-x_2+i(y_1-y_2),$$

производот на z_1 и z_2 се добива според правилото за множење на бином, при што се користи равенството $i^2=-1$, односно

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

и ако $z_2 \neq 0$, тогаш количникот на z_1 со z_2 е:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Значи, во $\mathbb{C}$ операциите „+“ и „$\cdot$“ се затворени. Од друга страна, најмалото множество што го содржи $\mathbb{R}$ и i и е затворено во однос на операциите собирање и множење е $\mathbb{C}$.

Пример 1.2.1. Ако $z_1 = 3 - i$ и $z_2 = -1 + 2i$, тогаш:

$z_1 + z_2 = 2 + i$, $3z_1 - z_2 = 10 - 5i$, $z_1 z_2 = -3 + 6i + i + 2 = -1 + 7i$ и

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-3-6i+i-2}{1+4} = \frac{-5-5i}{5} = -1 - i.$$

Теорема 1.2.1. (Својства на операцијата собирање на комплексни броеви) Нека z_1, z_2 и z_3 се комплексни броеви. Тогаш:

1) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (асоцијативен закон на собирањето);

2) $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$, каде $0 = (0,0)$ (0 -та е неутрален елемент за собирањето);

3) $z_1 + (-z_1) = -z_1 + z_1 = 0$, за $z_1 = x_1 + iy_1$, $-z_1 = -x_1 + i(-y_1)$ ($-z_1$ е спротивен на z_1);

4) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (комутативен закон на собирањето).

Доказ. Својствата следуваат директно од правилата за собирање на комплексни броеви и својствата на реалните броеви.■

Теорема 1.2.2. (Својства на операцијата множење на комплексни броеви) Нека z_1, z_2 и z_3 се комплексни броеви. Тогаш:

1) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (асоцијативен закон на множењето);

2) $z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1$, каде $1 = (1,0)$ (1 е неутрален елемент за множењето);

3) Ако $z_1 = x_1 + iy_1 \neq 0$, тогаш за $\frac{1}{z_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_2^2} - i\frac{y_1}{x_1^2 + y_2^2} \neq 0$ важи $z_1 \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_1} z_1 = 1$ ($\frac{1}{z_1}$ е инверзен на $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ во однос на множењето);

4) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (комутативен закон на множењето);

5) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (дистрибутивен закон на множењето во однос на собирањето).

Доказ. Својствата се докажуваат со проверка на точноста на равенствата користејќи ги правилата за собирање и множење. Ќе го покажеме само 5).

Нека $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ и $z_3 = x_3 + iy_3$.

$$(z_1 + z_2) z_3 = (x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2))(x_3 + iy_3) = (x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3 + i((x_1 + x_2)y_3 + x_3(y_1 + y_2)) =$$

$$x_1 x_3 - y_1 y_3 + x_2 x_3 - y_2 y_3 + i(x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2) =$$

$$(x_1 x_3 - y_1 y_3 + i(x_1 y_3 + x_3 y_1)) + (x_2 x_3 - y_2 y_3 + i(x_2 y_3 + x_3 y_2)) =$$

$$(x_1 + iy_1)(x_3 + iy_3) + (x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3) = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Да забележиме дека заради комутативниот закон на множењето важи: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_3 z_3$.■

Својство 1.2.3. Ако производот на два комплексни броја е 0, тогаш еден од множителите е 0.

Доказ*. Нека производот на комплексните броеви $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ е 0. Следува:

$$z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (0,0) \Leftrightarrow$$
$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0 \text{ и } x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = y_1 y_2 \text{ и } x_1 y_2 = -x_2 y_1 .$$

Да го разгледаме последниот систем од две равенки.

● Ако $x_1 = 0$, тогаш $y_1 = 0$ или $y_2 = 0$. Ако $y_1 = 0$, тогаш $z_1 = 0$. Ако $y_1 \neq 0$, тогаш $y_2 = 0$, па од $-x_2 y_1 = 0$ следува дека $x_2 = 0$ и затоа $z_2 = 0$.

● Нека $x_1 \neq 0$. Тогаш, $x_2 = \dfrac{y_1 y_2}{x_1}$, од каде $x_1 y_2 = -\dfrac{y_1 y_2}{x_1} y_1$. Ако $y_2 \neq 0$, следува дека $x_1^2 = -y_1^2$, што не е можно. Значи, $y_2 = 0$, од каде $x_2 = 0$ т.е. $z_2 = 0$.■

Својство 1.2.4. За секој цел број k важи:

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i .$$

Доказ. Од $i^2 = -1$ добиваме $i^4 = 1$, па за секој цел број k,

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1,\ i^{4k+1} = i^{4k} i = i,\ i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = -1 \text{ и } i^{4k+3} = i^{4k+2} i = -i .$$■

Дефиниција 1.2.1. **Конјугиран** број на комплексниот број $z = x + iy$, ознака $\bar{z}$, е комплексниот број $\bar{z} = x - iy$.

Својство 1.2.5. Нека z е комплексен број. Тогаш,

1) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, 2) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

Доказ. Нека $z = x + iy$. Тогаш $\bar{z} = x - iy$. Следува:

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \text{ од каде } x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2},$$
$$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy \text{ од каде } y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$■

Својство 1.2.6. Нека z_1 и z_2 се комплексни броеви. Тогаш:

1) $\bar{\bar{z}}_1 = z_1$; 2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; 4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ за $z_2 \neq 0$.

Доказ. Нека $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогаш, $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$ и $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$, па:

1) $\bar{\bar{z}}_1 = \overline{x_1 - iy_1} = x_1 + iy_1 = z_1$;

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) =$
$x_1 x_2 - (-y_1)(-y_2) + i(x_1(-y_2) - x_2(-y_1)) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

4) Нека $z_2 \neq 0$. Тогаш,

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}-i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}=$$
$$\frac{x_1x_2+(-y_1)(-y_2)}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2(-y_1)-x_1(-y_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.\blacksquare$$

Својство 1.2.7. Нека z_1 и z_2 се комплексни броеви. Тогаш:

1) $|z|=|\bar{z}|$; 2) $|z|^2=z\bar{z}$;

3) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$; 4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$;

5) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$; 6) $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$.

Доказ. Првите 4 својства се јасни. Ќе ги докажеме 5) и 6).

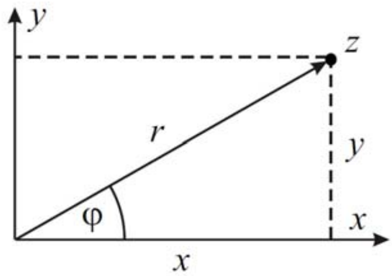
5) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=(z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2)=$
$|z_1|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2\le|z_1|^2+2|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2=|z_1|^2+2|z_1||\bar{z}_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2$.

Со коренување на неравенството $|z_1+z_2|^2\le(|z_1|+|z_2|)^2$ добиваме дека $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$;

6) Бидејќи $z_1=(z_1-z_2)+z_2$ од 5) следува: $|z_1|\le|z_1-z_2|+|z_2|$ т.е. $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$. Од $z_2=(z_2-z_1)+z_1$ и 5) следува: $|z_2|\le|z_1-z_2|+|z_1|$ т.е $|z_1-z_2|\ge|z_2|-|z_1|$.

Следува: $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$.$\blacksquare$

Тригонометриски облик на комплексен број. На комплексниот број $z=x+iy$ претставен со подредената двојка (x,y), може еднозначно да му се придружи точката $M(x,y)$ и обратно.



Да ја разгледаме точката $M(x,y)\neq O(0,0)$ во правоаголен декартов координатен систем. Нека $\rho=\overline{OM}$ е должината од координатниот почеток O до M, а φ е аголот што полуправата OM го зафаќа со позитивната насока на x-оската.

Бројот ρ се нарекува **модул**, а φ **аргумент** на комплексниот број $z=x+iy$ и се означува со $|z|$. Важи:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Бројот φ е **аргумент** на комплексниот број $z=x+iy$ и се означува со $Argz$. Важи:

$$x=\rho\cos\varphi \text{ и } y=\rho\sin\varphi.$$

Модулот на комплексниот број е еднозначно определен, додека аргументот има бесконечно многу вредности. Една од тие вредности се зема за главна вредност и се означува со φ или $\arg z$. Обично се зема $\arg z\in[0,2\pi)$ или $\arg z\in(-\pi,\pi]$. Важи $Argz=\arg z+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Понатаму главната вредност на аргументот најчесто ќе ја означуваме со φ.

За аргументот на ненулт комплексен број $\varphi\in[0,2\pi)$ што одговара на $M(x,y)$ добиваме: 1. Ако $x=0$, тогаш $\varphi=\frac{\pi}{2}$ кога $y>0$ и $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ кога $y<0$. 2. Ако $x\neq0$, тогаш

$$\varphi = \begin{cases} arctg\left(y/x\right) & x>0, y\geq 0 \;(1\ \textit{квадрант}) \\ arctg\left(y/x\right)+\pi & x<0 \;(2,3\ \textit{квадрант}) \\ arctg\left(y/x\right)+2\pi, & x>0, y<0 \;(4\ \textit{квадрант}) \end{cases}.$$

Комплексниот број е $z=0$ има радиус 0, додека аргументот му е неодреден.

Формулата за определување на аргументот е тешка за паметење, и во пракса при одредување на аргументот може да го скицираме комлексниот број во координатна рамнина, а потоа да го определиме неговиот аргумент како збир од аргументот φ_0 што се движи до квадрантот во кој се наоѓа комплексниот број и аргументот φ_1 што претставува аркустангенс од односот на соодветните апсолутни вредности на отсечоците на y и x-оските.

Ако во комплексниот број $z=x+iy$ ги елиминираме x и y со помош на формулите $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$ добиваме дека

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \quad (1).$$

Записот (1) се нарекува **тригонометриски вид** на комплексниот број z.

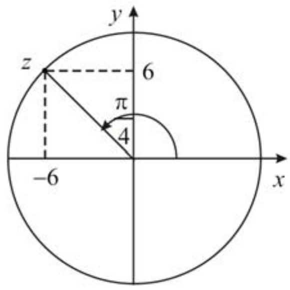
Задача 1.2.2-3. Запиши ги во тригонометриска форма следниве комплексни броеви

2) $z=-6+6i$ 3) $z=\sqrt{3}-i$.

Решение. 2) Радиусот и аргументот на комплексниот број се

$$\rho=\sqrt{36+36}=6\sqrt{2} \text{ и } \varphi=arctg\frac{6}{6}+\frac{\pi}{2}=arctg1+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

Следува $z=6\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

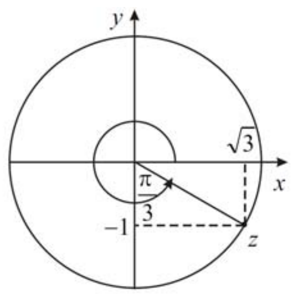


3) Радиусот и аргументот на комплексниот број се

$$\rho=\sqrt{1+3}=2 \text{ и}$$

$$\varphi=arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3\pi}{2}=arctg\frac{\sqrt{3}}{1}+\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}=\frac{11\pi}{6}.$$

Оттука $z=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.



Теорема 1.2.8. (Множење и делење на комплексни броеви во тригонометриски вид) Ако $z_1=\rho_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)$ и $z_2=\rho_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$ се комплексни броеви, тогаш:

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right),\ z_2\neq 0.$$

Доказ. Доволно е да покажеме дека важат идентитетите

1) $\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)=\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$. Имено,

$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

2) $\dfrac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)$. Имаме:

$$\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\,\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2).\blacksquare$$

Теорема 1.2.9. (Моаврови формули за степенување и коренување на комплексен број) Ако $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ тогаш: 1) $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$; и

$$2)\ \sqrt[n]{z} = \{w_k | k = 0,1,...,n-1\},\ w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Доказ. 1) Тврдењата ќе ги покажеме со помош на принципот на математичка индукција. Нека $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. За $n = 1$ тврдењето важи.

Нека тврдењето е точно за $n = k$, т.е.

$$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

Тогаш за $n = k+1$ имаме:

$$z^{k+1} = z^k z = \rho^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$\rho^{k+1}(\cos(k\varphi + \varphi) + i\sin(k\varphi + \varphi)) = \rho^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi).$$

Следува дека тврдењето е точно за секој природен број n.

2) Нека е даден комплексниот број $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Нека за $w = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ важи $w^n = z \Leftrightarrow (r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Следува $r^n = \rho$ и $n\alpha = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ и $\alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Постојат n различни вредности на аголот α, па добиваме n, n-ти корени.

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,...,n-1.\blacksquare$$

Задача 1.2.4. Најди $\sqrt[3]{1}$ во множеството на комплексни броеви.

Решение. Тригонометрискиот запис на бројот 1 е $1 = \cos 0 + i\sin 0$. Оттука, множеството од трети корени на единицата е $\sqrt[3]{1} = \left\{\cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3} \middle| k = 0,1,2\right\}$, односно:

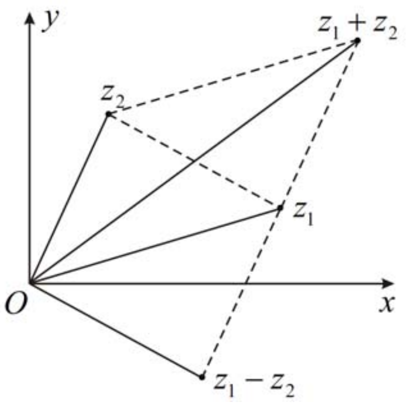
$$w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,\ w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 1.2.4. Пресметај ја вредноста на изразот $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{10}}$.

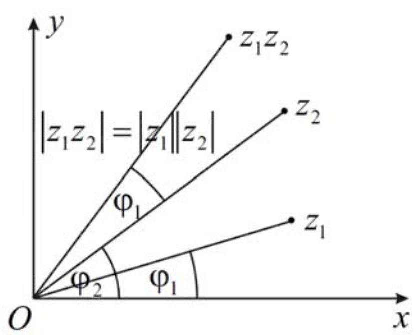
Решение. Биномите во броителот и именителот ќе ги претставиме во тригонометриски вид, а потоа соодветно ќе ги степенуваме.

$$\frac{(1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{10}} = \begin{pmatrix} \rho_1 = \sqrt{1+3} = 2 & \varphi_1 = arctg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} \\ \rho_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} & \varphi_2 = arctg 1 = \dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{2^{15}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{15}}{(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{10}} =$$

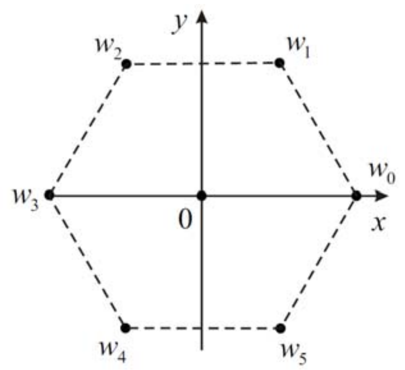
$$2^{10}\frac{\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)}{\cos\dfrac{5\pi}{2} + i\sin\dfrac{5\pi}{2}} = 2^{10}\frac{\cos\pi + i\sin\pi}{\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}} = 2^{10}\frac{-1}{i}\frac{i}{i} = 2^{10}i.$$



Геометриска интерпретација на комплексен број. Точките z_1+z_2 и z_1-z_2 коишто ги претставуваат збирот и разликата на комплексните броеви z_1 и z_2 такви што $\arg z_1 \neq \arg(z_2 \pm k\pi)$, $k=\{0,1\}$, се добиваат од условот, темињата O, z_1, z_1+z_2 и z_2 како и O, z_1-z_2, z_1 и z_2 се темиња на паралелограми. Ако $\arg z_1 = \arg z_2$ имаме: $\arg(z_1+z_2)=\arg z_1, |z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$. Ако $\arg z_1 = \arg(z_2 \pm k\pi)$ тогаш ги собираме $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ ($\arg z_1 = \arg(-z_2)$).



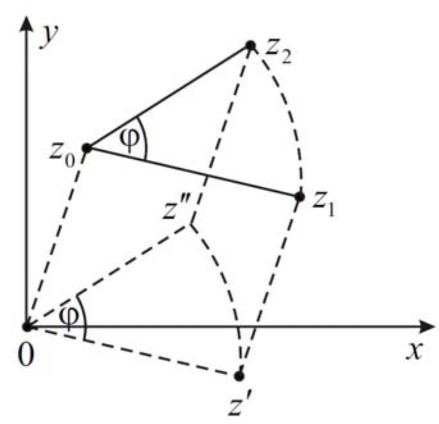
Производот на комплексните броеви z_1 и z_2 е комплексниот број z_1z_2, што се добива со ротирање на отсечката OM_1, каде M_1 одговара на z_1, во правец спротивен од движењето на стрелките на часовникот за агол што одговара на аргументот на z_2, и со издолжување за $|z_2|$ пати (радиусот на z_1 се множи со $|z_2|$). Количникот на комплексните броеви z_1 и z_2 е комплексниот број z_1/z_2 што се добива со ротирање на векторот z_1 во правец на движењето на стрелките на часовникот за агол што одговара на аргументот на z_2, и со стеснување за $|z_2|$ пати (радиусот на z_1 се дели со $|z_2|$).



Геометриски интерпретирано, n-тите корени w_k, $k=0,1,...,n-1$; се темиња на правилен n-аголник впишан во кружница со радиус $\sqrt[n]{\rho}$ и центар во координатниот почеток.

Теорема 1.2.10*. Комплексниот број z_2 е добиен со ротација на комплексниот број z_1 за агол φ спротивно од движењето на стрелките на часовникот околу бројот z_0, акко

$$z_2-z_0=(\cos\varphi+i\sin\varphi)(z_1-z_0).$$



Доказ. Нека 0 е координатниот почеток. Избираме броеви z' и z'' такви што четириаголниците $0z'z_1z_0$ и $0z''z_2z_0$ се паралелограми. Важи $z_1=z_0+z'$ и $z_2=z_0+z''$.

Комплексниот број z'' е добиен со ротација за агол φ околу координатниот почеток на бројот z' акко

$z''=(\cos\varphi+i\sin\varphi)z'$ акко $z_2-z_0=(\cos\varphi+i\sin\varphi)(z_1-z_0)$.■

1.2.2 КУБНА РАВЕНКА

Линеарната равенка $ax+b=0$, $a\neq 0$ лесно се решава во множеството комплексни броеви. Истото се однесува и на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ чие решение е дадено со формулата $x_{1,2}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Во наредниот дел ќе биде опишана постапка за решавање на кубна равенка со комплексни коефициенти, наречена **метод на Кардано**.

Постапката за решавање на кубна равенка е опишана во следниве чекори:

1. $x^3+p=0$;

Решение се корените $x\in\sqrt[3]{-p}$ во множеството на комплексни броеви.

2. $x^3+px+q=0$, $p\neq 0$;

Нека z_0 е едно решение на квадратната резолвента $z^2+qz-\dfrac{p^3}{27}=0$. Нека u_0 е еден трети корен на z_0, и $v_0=-\dfrac{p}{3u_0}$. Тогаш решенијата на кубната равенка се:

$$x_1=u_0+v_0,\ x_2=u_0\varepsilon+v_0\varepsilon^2 \text{ и } x_3=u_0\varepsilon^2+v_0\varepsilon,$$

каде $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ се трети корени на единицата.

3. $x^3+px^2+qx+r=0$, $p\neq 0$;

Со смената $x=y-\dfrac{p}{3}$, равенката ја сведуваме на еден од претходните случаи.

Доказ. Доказот е даден во прилогот на страна 146.

Задача 1.2.2.1. Реши ја кубната равенка $x^3+3x+2i=0$.

Решение. Ја решаваме квадратната резолвента.

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \Leftrightarrow z^2+2iz-\frac{3^3}{3^3}=0 \Leftrightarrow z^2+2iz-1=0 \Leftrightarrow z_{1/2}=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+4}}{2} \Leftrightarrow z_1=z_2=-i.$$

За $z_1=-i$ избираме еден трети корен $u=i$, од каде $v=-\dfrac{p}{3u}=-\dfrac{-3}{3i}=i$. Следува:

$$x_1=u+v=i+i=2i,$$

$$x_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2=i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-i,$$

$$x_3=u\varepsilon^2+v\varepsilon=i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-i.$$

Во продолжение ќе наведеме неколку тврдења. Основната теорема на алгебрата докажана од Галоа, тврди дека секој полоном од ред n, има решение во множеството комплексни броеви. Ако $P_n(x)$ е полином од ред n и x_1 е негово решение, тогаш $P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x)$. Но $P_{n-1}(x)$ е полином од ред $n-1$ кој исто така има решение x_2. Продолжувајќи ја постапката, добиваме дека

$$P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\ (5),$$

каде x_1, $x_2,...,x_n$ се корените на полиномот, при што некои од нив може да се совпаѓаат. Бројот на појавувања на коренот x_i во (5) се нарекува кратност на коренот. Следува дека секој полином од ред n има n корени, сметани со својата кратност.

Ако $z = x + iy$ е комплексен корен на полином со реални коефициенти од ред n, тогаш и $\bar{z} = x - iy$ е корен на полиномот. Значи дека ако $z = x + iy$ не е реален број, тогаш полиномот има барем два различни корени, односно комплексните корени се јавуваат во парови. Следува дека полином од трет степен со реални коефициенти има еден или три реални корени.

Теорема 1.2.2.3. (Теорема на Њутн) Ако равенката со целобројни коефициенти
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$
има рационален корен $\frac{p}{q}$, каде $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ се заемно прости броеви и $a_0, a_n \neq 0$, тогаш p е делител на a_n и q е делител на a_0.

Доказ*. Нека $\frac{p}{q}$, каде $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$ се заемно прости броеви, е решение на равенката со целобројни коефициенти $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$. Тогаш,
$$a_0\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0 \quad (6).$$
Ако равенката (6) ја помножиме со q^{n-1} добиваме:
$$a_0\frac{p^n}{q} + a_1p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + ... + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1} = 0.$$

Бидејќи $a_1p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + ... + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}$ е цел број, следува дека $a_0\frac{p^3}{q}$ е цел број што е можно само ако $q|a_0$.

Ако равенката (6) ја помножиме со $\frac{q^n}{p}$ добиваме:
$$a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + ... + a_{n-1}q^{n-1} + a_n\frac{q^n}{p} = 0.$$

Следува $a_n\frac{q^n}{p}$ е цел број, од каде имаме $p|a_n$.■

Ако полиномот е со целобројни коефициенти и реалниот корен е рационален, тогаш теоремата на Њутн дава критериум за негово наоѓање.

Кога ќе го најдеме коренот x_1 на полиномот од трет ред $P_3(x)$, тогаш при делење на $P_3(x)$ со $x - x_1$ добиваме количник $P_2(x)$ таков што $P_3(x) = (x - x_1)P_2(x)$. Останатите два корени на $P_3(x)$ се корени на квадратната равенка $P_2(x) = 0$.

Задача 1.2.2.2. Реши ја кубната равенка $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Решение. Според теоремата на Њутн, ако равенката има целобројно решение x, тогаш $x|9$ односно $x \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$. Проверуваме дали равенката има целобројно решение. За $x = 1$, имаме: $1 - 6 - 9 \neq 0$, за $x = -1$, $-1 + 6 - 9 \neq 0$, за $x = 3$, $27 - 18 - 9 = 0$.

Следува, $x = 3$ е решение на равенката. Го делиме полиномот $x^3 - 6x - 9$ со $x - 3$, $x^3 - 6x - 9 = (x-3)(x^2 + 3x + 3)$. Останатите две решенија на кубната равенка се решенија на квадратната равенка $x^2 + 3x + 3 = 0$,

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Значи решенијата на кубната равенка се 3, $-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.3 ЗАДАЧИ

1.1.1 Математичка индукција

Задача 1.1.1.3-20. Со помош на принципот на математичка индукција, докажи ја точноста на равенствата за секој $n \in \mathbb{N}$:

3) $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$;

4) $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

5) $1^2 + 2^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

7) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

8) $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$;

9) $1^2 + 4^2 + ... + (3n-2)^2 = \frac{n(6n^2 - 3n - 1)}{2}$;

10) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

11) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$;

12) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$;

13) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

14) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

15) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

16) $\frac{1}{1^2 3^2} + \frac{2}{3^2 5^2} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}$;

17) $1 + 11 + ... + \underbrace{11...1}_{n} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$;

18) $1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$;

19) $1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$, $x \neq 0$;

20) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{2^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$, $x \neq \pm 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Решение 5). За $n = 1$, равенството има облик $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$.

Нека равенството е точно за $n = k$, т.е. $1^2 + 2^2 + \ldots k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Треба да покажеме дека равенството важи за $n = k+1$, односно дека

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}. \text{ Имено,}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) =$$

$$\frac{k+1}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Според принципот на математичка индукција равенството е точно за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение 16). За $n = 1$ равенството има облик $\frac{1}{1^2 3^2} = \frac{1(1+1)}{2(2+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$.

За $n = k$ нека важи $\frac{1}{1^2 3^2} + \frac{2}{3^2 5^2} + \ldots + \frac{k}{(2k-1)^2 (2k+1)^2} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)^2}$.

Тогаш точноста на равенството за $n = k+1$, може да ја покажеме ако истото со еквивалентни трансформации го сведеме до друго равенство чијашто точност е очигледна. Имено,

$$\frac{1}{1^2 3^2} + \frac{2}{3^2 5^2} + \ldots + \frac{k}{(2k-1)^2 (2k+1)^2} + \frac{k+1}{(2k+1)^2 (2k+3)^2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)^2} + \frac{k+1}{(2k+1)^2 (2k+3)^2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)^2} \Leftrightarrow \frac{k(2k+3)^2 + 2}{2(2k+1)^2 (2k+3)^2} = \frac{(k+2)}{2(2k+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$k(2k+3)^2 + 2 = (k+2)(2k+1)^2 \Leftrightarrow k\left(4k^2 + 12k + 9\right) + 2 = (k+2)\left(4k^2 + 4k + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4k^3 + 12k^2 + 9k + 2 = 4k^3 + 12k^2 + 9k + 2 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Според принципот на математичка индукција равенството е точно за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение 20). За $n = 0$, имаме:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Следува дека тврдењето е точно за $n = 0$. Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k$

$$\text{т.е. } \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{2^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

Тогаш за $n = k+1$, добиваме дека

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{2^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} =$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1} + 2^{k+1}}{\left(1+x^{2^{k+1}}\right)\left(1-x^{2^{k+1}}\right)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

Следува дека тврдењето е точно и за $n = k+1$.

Задача 1.1.1.21-28. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$, бројот:

21) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ е делив со 11; 22) $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ е делив со 57;
23) $2^{2n+3} + 5^{3n+2}$ е делив со 11; 24) $10^n + 18n - 1$ е делив со 27;
25) $6^{2n} - 1$ е делив со 35; 26) $7^{2n} - 1$ е делив со 48;
27) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ е делив со 9; 28) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ е делив со 24.

Решение 21). За $n = 1$ тврдењето е точно. Имено $6^2 + 3^3 + 3 = 66$ е делив со 11.

Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k$, односно $6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k$ е делив со 11 или $6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k = 11a$ за некој цел број a. Оттука $6^{2k} = 11a - 3^k - 3^{k+2}$. Тогаш,

$$6^{2k+2}+3^{k+3}+3^{k+1}=36\cdot 6^{2k}+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k}=36\left(11a-3^{k}-3^{k+2}\right)+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k}=$$
$$36\cdot 11a-36\cdot 3^{k}-36\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k}=36\cdot 11a-33\cdot 3^{k}-33\cdot 3^{k+2}=11\left(36a-3^{k+3}-3^{k+1}\right)$$

со што е покажана точноста на тврдењето и за $n=k+1$.

Задача 1.1.1.29-35. Со помош на принципот на математичка индукција, докажи ја точноста, за секој $n\in\mathbb{N}$ (ако не е наведено поинаку), на неравенствата:

29) $2^n>n$; 30) $(n+2)!>3^n$; 31) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$, $n>1$; 32) $(1+x)^n\geq 1+nx$, $x>-1$;

33) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n}<2$; 34) $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{n}<3$; 35) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$.

Решение 30). За $n=1$ се добива неравенството $(1+2)!>3$ т.е. $6>3$, кое е точно.

Претпоставуваме дека неравенството е точно за $n=k$, т.е. $(k+2)!>3^k$.

Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$\left((k+1)+2\right)!=(k+3)!=(k+3)(k+2)!>(k+3)3^k=3^k k+3\cdot 3^k>3^{k+1}.$$

Решение 33). За $n=1$, тврдењето е $\sqrt{2}<2$ и очигледно е точно.

Нека тврдењето е точно за $n=k$, односно $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k}<2$.

Следува $2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{k}<2+2$. Од каде $\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{k}}}_{k+1}<\sqrt{2+2}=2$.

Последното неравенството е бараното неравенство за $n=k+1$.

Задача 1.1.1.36*. Пресметај: а) $1+2+...+n$, б) $1^2+2^2+...+n^2$, в) $1^3+2^3+...+n^3$.

Одговор. а) $\frac{n(n+1)}{2}$, б) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, в) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Задача 1.1.1.37*. (Предлог-задача за регионален натпревар за четврта година од средното гимназиско образование) Докажи дека за секој природен број $n\geq 2$, постојат различни природни броеви x_1, x_2, ..., x_n, такви што $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2013}$.

1.1.2 Биномна формула

Задача 1.1.2.6. Степенувај го биномот: 3) $(2x+5)^4$, 4) $(3x-2)^5$. **Одговор.** 3) $16x^4+160x^3+600x^2+1000x+625$; 4) $243x^4-810x^4+1080x^3-720x^2+240x-32$.

Задача 1.1.2.7. Најди го седмиот член во развојот на биномот $\left(x+\sqrt{2}\right)^{12}$.

Одговор. $7392x^6$.

Задача 1.1.2.8. Најди го осмиот член во развојот на биномот $\left(\sqrt[4]{x^3}+\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}\right)^{11}$.

Задача 1.1.2.9. Најди го средниот член во развојот на биномот $(x-2)^8$.

Одговор. $280x^4$.

Задача 1.1.2.10. Најди ги средните два члена во развојот на биномот $(2x+y)^9$.

Задача 1.1.2.11. Определи го членот во развојот на биномот $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ што не ја содржи променливата x. **Одговор.** Седмиот член, $T_{6+1}=84$.

Задача 1.1.2.12. Најди го средниот член во развојот на биномот $\left(a^{-2}\sqrt{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$ ако биномниот коефициентот на петтиот спрема биномниот коефициентот на третиот член се однесуваат како 14:3.

Решение. За полесно оперирање го средуваме биномот во рационален облик.

$$\left(a^{-2}\sqrt{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n=\left(a^{-2}a^{\frac{1}{2}}-\left(a^{-2}a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^n=\left(a^{-\frac{3}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^n.$$

Биномниот коефициентот на петтиот спрема биномниот коефициентот на третиот член се однесуваат како 14:3. Следува:

$$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n}{2}}=\frac{14}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{14}{3}\Leftrightarrow\frac{(n-2)(n-3)}{12}=\frac{14}{3}\Leftrightarrow(n-2)(n-3)=56.$$

Бидејќи $(n-2)(n-3)$ се последователни природни броеви и $56=8\cdot 7$, следува дека $n-2=8$ и $n-3=7$, од каде имаме дека $n=10$.

(Коментар. Квадратната равенка може да ја решиме и класично,

$$n^2-5n+6=56\Leftrightarrow n^2-5n-50=0\Leftrightarrow n_{1/2}=\frac{5\pm 15}{2}\Leftrightarrow n_1=10,\ n_2=-5,$$

каде, бидејќи степенот на биномот е позитивен број, следува дека $n=10$.)

Значи, биномот содржи единаесет члена, па среден член е шестиот член,

$$T_{5+1}=\binom{10}{5}\left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^5\left(-a^{-\frac{1}{2}}\right)^5=-\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a^{-\frac{15}{2}}a^{-\frac{5}{2}}=-252a^{-10}.$$

Задача 1.1.2.13. Определи го четвртиот член од развиениот бином $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\frac{x^{-2}}{7}}\right)^y$, ако x и y ги задоволуваат релациите $\binom{y}{x+1}:\binom{y}{x}:\binom{y}{x-1}=1:3:5$. **Одговор.** $T_4=1$.

Задача 1.1.2.14 Најди го членот во развојот на биномот $\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}\right)^{10}$ што го содржи x^7.

Задача 1.1.2.15. Биномниот коефициент на третиот член од развиениот бином $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\right)^n$ е 10. Најди го членот што го содржи $x^{-\frac{5}{3}}$. **Одговор.** $T_3=10x^{-\frac{5}{3}}$.

Задача 1.1.2.16. Разликата меѓу третиот и вториот биномен коефициент во биномот $(2^x+x)^n$ е 44. Најди го степенот на биномот n.

Решение. Од условот на задачата $\binom{n}{2}-\binom{n}{1}=44$ добиваме:

$$\frac{n(n-1)}{2}-n=44\Leftrightarrow n^2-n-2n=88\Leftrightarrow n^2-3n-88=0\Leftrightarrow n_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9+352}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{361}}{2}=\frac{3\pm 19}{2}$$

$$\Leftrightarrow n_1=11\vee n_2=-9.$$

Следува дека степенот на биномот е $n=11$.

Задача 1.1.2.17. Најди го деветтиот член во развојот на биномот $\left(4x+\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^n$, ако биномниот коефициент на третиот член е 55.

Задача 1.1.2.18. Збирот од биномните коефициенти на првиот и третиот член од биномот $\left(2^x+4^{-x}\right)^n$ е 29, а четвртиот член е 4 пати поголем од третиот. Најди го x.

Одговор. $x=-\frac{1}{3}$.

Задача 1.1.2.19. Биномните коефициенти на четвртиот и шестиот член од развојот на биномот $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$ се однесуваат како $5:18$. Определи го членот во развојот што не го содржи x. **Одговор.** $T_9=495$.

Задача 1.1.2.20. Збирот од вториот и третиот биномен коефициент од развиениот бином $\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{7x^2}}\right)^n$ е 28. Да се најде членот што го содржи x^{-1}.

Задача 1.1.2.21. Третиот член од развојот на биномот $\left(x+x^{\lg x}\right)^5$ е 10^6. Најди го x.

Одговор. $x=10^{-\frac{5}{2}}$.

Задача 1.1.2.22. Најди го членот со најголем коефициент во развојот на биномот $(5x+6)^{18}$.

Задача 1.1.2.23-24. Пресметај го бројот

$$23)\ \binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\ldots+\binom{7}{7},\qquad 24)\ \binom{7}{0}-\binom{7}{1}+\binom{7}{2}-\ldots-\binom{7}{7}.$$

Задача 1.1.2.25. Во развојот на биномот $\left(a\sqrt[5]{\frac{a}{8}}+\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^n$ најди го членот што содржи a^3, под услов збирот на сите биномни коефициенти во развојот на биномот е 4096.

Задача 1.1.2.26. Најди ги рационалните членови во развојот на биномот $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

1.2 Комплексни броеви

Задача 1.2.6-7. Претстави ги во алгебарски вид броевите:

$$6)\ \frac{7}{2+i},\ 7)\ \frac{4-7i}{3-2i}.$$ **Одговор.** $6)\ \frac{14}{5}-\frac{7}{5}i$, в) $2-i$.

Задача 1.2.8-9. Запиши ги во тригонометриска форма следниве комплексни броеви: 8) $z=-1$, 9) $z=-1-\sqrt{3}i$. **Одговор.** 8) $z=\cos\pi+i\sin\pi$, 9) $z=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

Задача 1.2.10-12. Пресметај ја вредноста на следниве изрази

$$10)\ \frac{\left(2+i\sqrt{12}\right)^5}{(1-i)^6},\ 11)\ \left(\frac{3}{1+i}+\frac{1+i}{2i}\right)^{16},\ 12)\ \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}.$$ **Одговор.**

$10)\,-2^6\left(\sqrt{3}+i\right)$, 11) 2^{24}, 12) $2, n=4k$; $2i, n=4k+1$; $-2, n=4k+2$; $-2i, n=4k+3$; $k\in\mathbb{Z}$.

Задача 1.2.13. Пресметај го изразот $A=\sqrt{\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^7}{(1+i)^{14}}}$.

Одговор. $\left\{\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12},\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right\}$.

Задача 1.2.14-15. Во множеството комплексни броеви најди ги корените: 14) $\sqrt[6]{1}$, 15) $\sqrt{-4+4i}$. Потоа скицирај ги решенијата. **Одговор.** 14) $2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$ и $2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$; 15) 1, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 1.2.16-20. Во множеството комплексни броеви реши ги равенките:

16) $z^2-1=0$; 17) $(1+i)z^3+(-1+i)=0$; 18) $z^4+16=0$;

19) $z^4+3z^2-4=0$; 20) $2z^3-\sqrt{3}-i=0$.

Одговор. 16) $w_0=1$ и $w_1=-1$; 17) $w_0=i$, $w_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ и $w_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$;

18) $\sqrt{2}(1+i)$, $\sqrt{2}(-1+i)$, $\sqrt{2}(-1-i)$ и $\sqrt{2}(1-i)$; 19) $\{1,-1,2i,-2i\}$;

20) $w_0=\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$, $w_1=\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}$ и $w_2=\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}$.

Задача 1.2.21-22. Определи ги множествата комплексни броеви: 21) $\{z\,|\,|z|=3\}$, 22) $\{z\,|\,1<|z-1|<2\}$. **Одговор.** 21) $x^2+y^2=9$ кружница; 22) $1<(x-1)^2+y^2<4$ т.е. прстен.

Задача 23. Најди $z\in\mathbb{C}$ таков што $\left|\frac{z}{z+1}\right|=1$, $\frac{z}{\bar{z}}=i$. **Одговор.** $z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

Задача 24. Определи го комплексниот број z, што ги исполнува условите:

$\mathrm{Re}\left(\frac{z+3i}{2+i}\right)=\frac{3}{5}$ и $\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{z}+3i}{3+i}\right)=\frac{7}{5}$. **Одговор.** $z=1-2i$.

Задача 25*. Докажи ги тригонометриските идентитети:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x \text{ и } \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Задача 26*. Пресметај ги сумите:

$$\cos x+\cos 2x+...+\cos nx \quad \text{и} \quad \sin x+\sin 2x+...+\sin nx.$$

Задача 27*. Во кружница со центар во точката $z_0=-3+4i$, впишан е правилен шестоаголник. Едно негово теме е во точката $z_1=-3+5i$. Определи ги останатите темиња.

Задача 28. Дадени се две спротивни темиња од квадратот $z_1z_2z_3z_4$, $z_2=2$ и $z_4=1+3i$. Најди ги преостанатите две темиња.

Задача 29*. (Државен натпревар за втора година, гимназиско образование, 2013) Од надворешноста на страните BC и AC во триаголникот ABC, конструирани се квадрати со центри D и E. Нека P е средина на страната AB. Докажи дека отсечките PD и PE се еднакви и заемно нормални.

Задача 30*. (Предлог за регионален натпревар за втора година, гимназиско образование) Нека z_1, z_2 и z_3 се комплексни броеви со радиуси $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2013$. Докажи дека $(z_1+\bar{z}_2)(z_2+\bar{z}_3)(z_3+\bar{z}_1)$ е реален број.

Задача 31. Во множеството комплексни броеви реши ја кубната равенка

$$x^3+6x^2+30x+25=0.$$

Решение. Прв начин. Воведуваме смена $x=y-\frac{a}{3}=y-\frac{6}{3}=y-2$ (1). Тогаш,

$$x^3+6x^2+30x+25=0 \Leftrightarrow (y-2)^3+6(y-2)^2+30(y-2)+25=0 \Leftrightarrow$$
$$y^3-6y^2+12y-8+6(y^2-4y+4)+30y-60+25=0 \Leftrightarrow$$
$$y^3-6y^2+12y-8+6y^2-24y+24+30y-60+25=0 \Leftrightarrow y^3+18y-19=0 \ (2).$$

Ја решаваме кубната равенка (2). Квадратната резолвента има решенија,

$$z^2-19z-\frac{18^3}{3^3}=0 \Leftrightarrow z^2-19z-216=0 \Leftrightarrow z_{1/2}=\frac{19\pm\sqrt{361+864}}{2} \Leftrightarrow$$
$$z_{1/2}=\frac{19\pm\sqrt{1225}}{2} \Leftrightarrow z_{1/2}=\frac{19\pm 35}{2} \Leftrightarrow z_1=-8,\ z_2=27.$$

Еден трети корен на $z_1=-8$ е $u=-2$. Тогаш $v=-\frac{p}{3u}=-\frac{18}{3(-2)}=3$.

Следува дека решенијата на кубната равенка (2) се:

$$y_1=u+v=-2+3=1,\ y_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2=-2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$1-\sqrt{3}i-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i \text{ и } y_3=-\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

Со враќање во смената (1), ги добиваме решенијата на равенката:

$$x_1=y_1-2=1-2=-1,$$
$$x_2=y_2-2=-\frac{1}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i-2=-\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i \text{ и}$$
$$x_3=y_3-2=-\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i-2=-\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

Втор начин. Ако $x^3+6x^2+30x+25=0$ има рационален корен, тогаш, бидејќи слободниот член е ±1, коренот p е цел број и $p|25$ т.е.

$$p\in\{-1,1,-5,5,-25,25\}.$$

Со проверка се добива дека $p=-1$ е решение на равенката. При делење на полиномот со $x+1$ го добиваме биномот $x^2+5x+25$. Решенијата на равенката $x^2+5x+25=0$ се:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-100}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{75}i}{2}=-\frac{5}{2}\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

$$\begin{array}{l}
x^3+6x^2+30x+25 : x+1 = x^2+5x+25\\
\underline{\pm x^3 \pm x^2}\\
\quad 5x^2+30x+25\\
\quad \underline{\pm 5x^2 \pm 5x}\\
\qquad 25x+25\\
\qquad \underline{\pm 25x \pm 25}\\
\qquad = \ =
\end{array}$$

Задача 32-37. Во множеството комплексни броеви реши ги кубните равенки:

32) $x^3+8=0$, 33) $x^3-27=0$, 34) $x^3-3x^2+3x-1=0$,
35) $x^3+24x-56=0$, 36) $x^3-6x-5=0$, 37) $x^3+3x-i=0$,
38) $x^3-2x-\sqrt{3}=0$, 39) $x^3-\frac{1}{3}x+\frac{2}{27}=0$, 40) $x^3+3x^2-3x-1=0$.

Одговор. 32) $-2, 1-i\sqrt{3}$, $1+i\sqrt{3}$; 33) 3, $\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 34) 1; 35) 2, $-1-3\sqrt{3}i$, $-1+3\sqrt{3}i$; 36) -1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}$ и $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}$; 37) $2i\sin\frac{\pi}{18}$, $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}-i\sin\frac{\pi}{18}$, $-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{18}-i\sin\frac{\pi}{18}$; 38) $\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 39) $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$; 40) 1, $-2-\sqrt{3}$, $-2+\sqrt{3}$.

2. 1 ДЕТЕРМИНАНТИ

2.1.1 Детерминанти од втор и трет ред

Детерминанта од втор ред. Нека a_{ij}, $i, j = 1,2$, се реални броеви.

Дефиниција 2.1.1.1. Детерминанта од втор ред е бројот $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ што соодветствува на квадратната шема $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Детерминантите ги означуваме со нивната квадратна шема или со големите латински букви. Броевите a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} се нарекуваат **елементи** на детерминантата од втор ред. Броевите a_{11} и a_{12} ја сочинуваат **првата редица**, a_{21} и a_{22} **втората редица**, a_{11} и a_{21} **првата колона** и a_{12} и a_{22} **втората колона**. Значи првиот индекс ја означува редицата, а вториот индекс колоната во која се наоѓа елементот a_{ij}, $i, j \in \{1,2\}$. Елементите a_{11} и a_{22} ја формираат **главната дијагонала** (дијагоналата), додека a_{12} и a_{21} **споредната дијагонала**.

Задача 2.1.1.1-2. Пресметај ги детерминантите:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - (-3)\cdot 5 = 17$; **2)** $\begin{vmatrix} ctgx & 1 \\ \sin^2 x & tgx \end{vmatrix} = ctgx \cdot tgx - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$.

Детерминанта од трет ред. Нека a_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$ се реални броеви.

Дефиниција 2.1.1.2 Детерминанта од трет ред е бројот $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ што соодветствува на квадратната шема $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Броевите a_{ij}, $i, j = 1,2,3$ се нарекуваат елементи на детерминантата од трет ред. Елементите a_{i1}, a_{i2} и a_{i3} ја сочинуваат i-тата редица, $i = 1,2,3$. Елементите a_{1j}, a_{2j} и a_{3j} ја формираат j- тата колона, $j = 1,2,3$. Следува дека елементот a_{ij} припаѓа на i- тата редица и j- тата колона. Елементите a_{11}, a_{22} и a_{33} ја формираат главната дијагонала (дијагоналата), додека a_{13}, a_{22} и a_{33} споредната дијагонала.

За практично пресметување на детерминанти од трет ред се користат **Сарусовото правило** и **правилото на триаголник**.

Според Сарусовото правило се допишуваат првата и втората колона, а потоа од збирот на производите на елементите што лежат на главната дијагонала и дијагоналите паралелни со главната дијагонала се одзема збирот на производите на елементите што лежат на споредната дијагонала и дијагоналите паралелни со споредната дијагонала.

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \end{array}$$
$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$
$$\begin{array}{ccccc} & & + & + & + \\ \end{array}$$

Според **правилото на триаголник**, од збирот на производите на елементите што лежат на главната дијагонала и на темињата на триаголниците што имаат страна паралелна со главната дијагонала, се одзема збирот од производите на елементите што лежат на споредната дијагонала и на темињата на триаголниците што имаат страна паралелна со споредната дијагонала.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \qquad \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|$$
$$+ \quad + \quad + \qquad\qquad - \quad - \quad -$$

Задача 2.1.1.3. Со примена на **Сарусово правило** пресметај ја детерминантата

$$\left|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{matrix} =$$

$$0+(-1)\cdot(-2)\cdot 2+2\cdot(-1)\cdot 3-0-1\cdot(-2)\cdot 3-(-1)\cdot(-1)\cdot(-2)=6\,.$$

Задача 2.1.1.4. Со примена на правило на триаголник пресметај ја детерминантата

$$\left|\begin{matrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{matrix}\right| = 1+acb-bac+b^2+c^2+a^2 = 1+a^2+b^2+c^2\,.$$

Задача 2.1.1.5. Реши ја равенката $\left|\begin{matrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix}\right| = 0$.

Решение. $\left|\begin{matrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix}\right| = 0 \Leftrightarrow -4x^2+2x-x^2-12x=0 \Leftrightarrow -5x^2-10x=0 \Leftrightarrow$

$$5x^2+10x=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0\,,\ x=-2\,.$$

***<u>Развивање на детерминанта по редици (колони)</u>*.** Нека $A=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|$ е детерминанта од трет ред. Детерминантата од втор ред M_{ij}, што се добива со изоставување на i-та редица и j-та колона се нарекува **минор** на елементот a_{ij}. Бројот $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ се нарекува **алгебарски комлемент** или кофактор на елементот a_{ij}.

Својство 2.1.1.1 Важи:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \text{ за секое } i = 1,2,3;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \text{ за секое } j = 1,2,3;$$

каде $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, додека M_{ij}, $j = 1,2,3$, е минорот на елементот a_{ij}.

Пресметувањето на детерминантата на овој начин се нарекува **развивање на детерминантата** по i-та редица (j-та колона) $i = 1,2,3$ ($j = 1,2,3$).

Доказ. Ќе ја покажеме точноста при развивањето на детерминанта по првата редица.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Доказот е аналоген во случај кога детерминантата се развива i-та редица, $i = 2,3$ или j-тата колона, $j = 1,2,3$. ■

Задача 2.1.1.6. Пресметај ја следнава детерминанта со развивање по прва редица.
Решение. Имаме:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(1-8) - 3(0+4) - (0+2) = -14 - 12 - 2 = -28.$$

Задача 2.1.1.7. Пресметај ја следнава детерминанта со развивање по втора колона.
Решение. Имаме:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} -a & c \\ b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -b \\ b & 1 \end{vmatrix} - (-c)\begin{vmatrix} 1 & -b \\ -a & c \end{vmatrix} = -a(-a - bc) + 1 + b^2 + c(c - ab) =$$

$$= a^2 + abc + 1 + b^2 + c^2 - abc = 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$

2.1.2 Својства на детерминанти

Својствата на детерминанти ќе ги презентираме преку детерминантите од трет ред. Својствата важат и за детерминанти од втор ред, како и за детерминанти од n-ти ред, $n \in \mathbb{N}$, што ќе ги дефинираме подоцна.

Во повеќето од својствата ќе ја покажеме точноста на тврдењата за конкретни редици (колони). Постапката е идентична ако се работи за произволни редици (колони).

Својство 2.1.2.1. Вредноста на детерминантата не се менува ако редиците се заменат со соодветните колони.

Доказ. Имаме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Својство 2.1.2.2. Ако две редици (колони) си ги заменат местата, тогаш детерминантата го менува знакот.

Доказ. Нека D' е детерминантата што се добива од дадена детерминанта од трет ред D со замена на првата и втората редица. Тогаш:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \text{ и}$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} \underline{- a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33}} = -D.$$

Својство 2.1.2.3. Ако детерминантата има две еднакви редици (колони) тогаш нејзината вредност е нула.

Доказ. Нека е дадена детерминанта D. Поради претходното својство $D = -D$ од каде следува $D = 0$.

Својство 2.1.2.4. Детерминанта се множи со број така што ќе се помножат сите елементи од една редица (колона) со тој број.

Доказ. Нека елементите од првата редица се помножени со бројот λ. Со развивање детерминантата по првата редица, добиваме:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}A_{11} + \lambda a_{12}A_{12} + \lambda a_{13}A_{13} = \lambda\left(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\right) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Својство 2.1.2.5. Ако елементите од една редица (колона) се пропорционални со елементите од друга редица (колона), тогаш детерминантата е нула.

Доказ. Нека првата редица R_1 и втората редица R_2 на детерминантата се пропоционални со коефициент на пропорција $R_2 : R_1 = \lambda$. Тогаш,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{св.4}{=} \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{св.3}{=} 0.$$

Својство 2.1.2.6. Ако елементите од една редица (колона) се збир од два броја, тогаш детерминантата може да се запише како збир од две детерминанти, така што првата детерминанта ќе ги содржи првите собироци, а втората детерминанта вторите.

Доказ. Нека елементите од првата редица се збир на два броја. Тогаш, со развивање на детерминантата по првата редица добиваме:

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a'_{13}+a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a'_{11}+a''_{11}\right)A_{11}+\left(a'_{12}+a''_{12}\right)A_{12}+\left(a'_{13}+a''_{13}\right)A_{13} =$$

$$a'_{11}A_{11}+a'_{12}A_{12}+a'_{13}A_{13}+\left(a''_{11}A_{11}+a''_{12}A_{12}+a''_{13}A_{13}\right)=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Својство 2.1.2.7. Ако елементите од една редица (колона) помножени со даден број се додадат на елементите од друга редица (колона), тогаш детерминантата не се менува.

Доказ. Нека елементите од првата редица се помножат со бројот λ и се додадат на елементите од втората редица. Тогаш, со примена на претходното својство, добиваме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & a_{23}+\lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{св.6}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{св.4}{=}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{св.3}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Својство 2.1.2.8. Збирот од производите на елементите од една редица (колона) со алгебарските комплементи на друга редица (колона) е нула.

Доказ. Да го разгледаме збирот од производите на елементите од i-тата редица (колона) со алгебарските комплементи на j-та редица, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2,3\} \setminus \{i\}$. Бидејќи алгебарските комплементи се формираат без употреба на елементите од j-тата редица, бараниот збир е детерминанта од трет ред во која i-тата и j-тата редица се совпаѓаат. Според својство 2.1.2.3, следува дека збирот е 0.■

Од претходното својство и формулата за развивање на детерминанта, следува дека

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases} \text{ и } a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=\begin{cases} D, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases},\ i,j=1,2,3 .$$

Задача 2.1.2. Пресметај ја најбрзо детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 2010 \\ 1 & 16 & 2009 \\ 1 & 12 & 2011 \end{vmatrix}$.

Решение. Со одземање на првата и втората редица од третата, а потоа со развивање по прва колона добиваме:

$$\begin{vmatrix} 1 & 15 & 2010 \\ 1 & 16 & 2009 \\ 1 & 12 & 2011 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = R_1(-1)+R_2 = \\ R_1(-1)+R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 15 & 2010 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{раз.K_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1-3=-2 .$$

2.1.3 Детерминанти од n -ти ред

Дефиниција 2.1.3.1. Детерминанта од n ти ред е бројот дефиниран со равенството

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

каде A_{1j}, $j = 1,2,...,n$ се алгебарските комплементи или кофактори на елементите a_{1j}, односно $A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$ и M_{1j} се минорите или детерминантите $n-1$ ред, добиени со прецртување на i -тата редица и j -тата колона на првобитната детерминанта.

Броевите a_{ij}, $i, j = 1,2,...,n$ се нарекуваат елементи на детерминантата од трет ред. Елементите $a_{i1}, a_{i2},..., a_{in}$ ја сочинуваат i -тата редица, $i = 1,2,...,n$. Елементите $a_{1j}, a_{2j},..., a_{nj}$ ја формираат j -тата колона, $j = 1,2,...,n$. Значи елементот a_{ij} припаѓа на i -тата редица и j -тата колона. Елементите $a_{11}, a_{22},..., a_{nn}$ ја формираат главната дијагонала (дијагоналата), додека $a_{1n}, a_{2,n-1},..., a_{n1}$ споредната дијагонала.

Својство 2.1.3.1.* Ако $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ е детерминанта од ред n, тогаш:

1) $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ за сите $i = 1,2...n$ и
2) $D = a_{1j}A_{ij} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ за сите $j = 1,2...n$.

Доказ. 1) Нека е дадена детерминантата од n -ти ред $D = |a_{ij}|$. Нека детерминантата $B = |b_{ij}|$ се добива од детерминантата D, со замена на $i-1$ соседна редица, така што i -тата редица на D е прва редица на B. Тогаш,

$$b_{1j} = a_{ij} \text{ и } M_{1j}^B = M_{ij}^A, \ j = 1,2,...,n.$$

каде M_{1j}^B и M_{ij}^A се минорите што соодветно одговараат на елементите b_{1j} и a_{ij}. Следува:

$$D = (-1)^{i-1} \det B = (-1)^{i-1}\left((-1)^{1+1} b_{11}M_{11}^B + (-1)^{1+2} b_{12}M_{12}^B + \dots + (-1)^{1+n} b_{1n}M_{1n}^B\right) =$$
$$a_{i1}(-1)^{i+1} M_{11}^B + a_{i2}(-1)^{i+2} a_{i2}M_{12}^B + \dots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{1n}^B = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}.$$

2) Тврдењето се покажува аналогно, само што овојпат трансформациите ги извршуваме по колони.■

Својство 2.1.3.2. Ако елементите над главната дијагонала (елементите под главната дијагонала) на детерминантата се нули, тогаш вредноста на детерминантата е производ од елементите што лежат на главната дијагонала.

Доказ. Ако детерминантата D_n од ред n ја развиеме по првата редица добиваме: $D_n = a_{11}D_{n-1}$. Со развивање на детерминантата D_{n-1} по првата редица добиваме: $D_{n-1} = a_{22}D_{n-2}$, па $D_n = a_{11}a_{22}D_{n-2}$ Продолжувајќи ја постапката имаме:

$$D_n = a_{11}a_{22}...a_{n-1.n-1}D_1 = a_{11}a_{22}...a_{n-1.n-1}a_{nn}\,.\blacksquare$$

За детерминанти од n-ти ред важат аналогни својства како за детерминанти од втор и трет ред.

Задача 2.1.3.1. Пресметај ја детерминантата $D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$.

Решение. Втората редица ја множиме со -2 и ја додаваме на првата, понатаму ја множиме со -1 и ја додаваме на третата и четвртата редица. Симболично постапките ќе ги означуваме со $R_2(-2)+R_1$, $R_2(-1)+R_3$ и $R_2(-1)+R_4$, соодветно. Потоа детерминантата ја развиваме по првата колона. Означуваме $раз.\,K_1$. Имаме:

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}R_2(-2)+R_1\\ \\ R_2(-1)+R_3\\ R_2(-1)+R_4\end{matrix} = \begin{vmatrix}0&-3&-1&-1\\1&2&1&1\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\end{vmatrix} \overset{раз.\,K_1}{=} -\begin{vmatrix}-3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix} = -(-3-1-1)=5\,.$$

Задача 2.1.3.2. Пресметај ја детерминантата $D=\begin{vmatrix}1&1&4&7&1\\1&0&2&5&3\\0&0&0&-3&0\\2&3&2&-4&5\\1&2&3&2&1\end{vmatrix}$.

Решение. Детерминантата ја развиваме по трета редица, бидејќи редицата содржи најмногу нулти елементи. Понатаму, ги множиме елементите од првата редица со -1, -2 и -1 и ги додаваме соодветно на елементите од останатите редици. На крај, ја развиваме детерминатата по првата колона и ја пресметуваме детерминантата од трет ред. Имаме:

$$D \overset{раз.\,R_3}{=} -(-3)\begin{vmatrix}1&1&4&1\\1&0&2&3\\2&3&2&5\\1&2&3&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ R_1(-1)+R_2\\ R_1(-2)+R_3\\ R_1(-1)+R_4\end{matrix} = 3\begin{vmatrix}1&1&4&1\\0&-1&-2&2\\0&1&-6&3\\0&1&-1&0\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix}-1&-2&2\\1&-6&3\\1&-1&0\end{vmatrix} = 3(-6-2+12-3)=3\,.$$

2.2 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

2.2.2 Систем од две линеарни равенки со две непознати

Нека е даден системот од две линеарни равенки со две непознати

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}\ (1) \text{ и нека } D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix} \text{ и } D_y=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}.$$

1. Ако детерминантата $D\neq 0$, тогаш системот има единствено решение

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D}.$$

2. Ако детерминантата $D=0\wedge(D_x\neq 0\vee D_y\neq 0)$, тогаш системот нема решение.

3. Ако детерминантата $D = D_x = D_y = 0$, тогаш системот има бесконечно многу решенија или нема решение. Притоа решенијата се совпаѓаат со решенијата на една од равенките. Ако системот содржи противречна равенка, тогаш нема решение. Ако содржи нулта равенка истата се отфрла. Во спротивно се отфрла која било равенка.

Доказ. Ако првата равенка од системот (1) ја помножиме со a_{22}, втората со $-a_{12}$ и ги собереме, добиваме дека

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x + \underbrace{(a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22})}_{0}y = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \Leftrightarrow Dx = D_x.$$

Аналогно, ако првата равенка ја помножиме со $-a_{21}$, а втората со a_{11} и ги собереме, добиваме дека

$$\underbrace{(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21})}_{0}x + (a_{12}a_{21} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \Leftrightarrow Dy = D_y.$$

На овој начн го добиваме системот

$$Dx = D_x,\ Dy = D_y \ (2).$$

Од конструкцијата следува дека секое решение на системот (1) е решение на системот (2).

1) Нека $D \neq 0$ и (x_0, y_0) е решение на (2). Тогаш $x_0 = \frac{D_x}{D}$ и $y_0 = \frac{D_y}{D}$ (3). Ако замениме во (1) добиваме:

$$a_{11}\frac{D_x}{D} + a_{12}\frac{D_y}{D} = b_1 \Leftrightarrow a_{11}D_x + a_{12}D_y = b_1 D \Leftrightarrow$$

$$a_{11}(a_{22}b_1 - a_{12}b_2) + a_{12}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1) = b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \Leftrightarrow 0 = 0; \text{ и}$$

$$a_{21}\frac{D_x}{D} + a_{22}\frac{D_y}{D} = b_2 \Leftrightarrow a_{21}D_x + a_{22}D_y = b_2 D \Leftrightarrow$$

$$a_{21}(a_{22}b_1 - a_{12}b_2) + a_{22}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1) = b_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Следува дека (x_0, y_0) е решение на (1). Значи, кога $D \neq 0$ системите (1) и (2) се еквивалентни, па решението (3) на (2) е решение и на (1).

2) Ако $D = 0$ и ($D_x \neq 0$ или $D_y \neq 0$), тогаш системот (2) нема решение. Следува дека системот (1) нема решение.

3) Нека $D = D_x = D_y = 0$, односно

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,\ b_1a_{22} - a_{12}b_2 = 0 \text{ и } a_{11}b_2 - b_1a_{21} = 0 \ (4).$$

Ако системот содржи противречна равенка, тогаш нема решение (решението му се совпаѓа со решението на противречната равенка). Велиме другата равенка се отфрла. Ако содржи нулта равенка, решенијата се совпаѓаат со решенијата на другата равенка. Велиме нултата равенка се отфрла (специјално ако системот содржи 2 нулти равенки, решението е $\mathbb{R}^2$). Во секој друг случај барем еден коефициент непознатите на секоја равенка е различен од 0. Нека $a_{11} \neq 0$. Тогаш $a_{21} = ka_{11}$, од каде заради $D = D_x = D_y = 0$ следува дека

$a_{21} = ka_{11}$, $a_{22} = ka_{12}$ и $b_2 = kb_1$ за некој $k \neq 0$ (за $k = 0$ би добиле нулта равенка),

т.е. системот се сведува на една равенка која има бесконечно решенија изразени преку еден параметар. Бидејќи и $a_{21} \neq 0$, се отфрла која било равенка.■

Задача 2.2.2.1. Реши го системот равенки $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$.

Решение. Детерминантите на системот се:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0\,,\ D_x=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-3 \text{ и } D_y=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3\,.$$

Следува дека системот има единствено решение кое се добива според Крамеровите формули

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-3}{-3}=1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-3}{-3}=1\,.$$

Втор начин. Задачата ќе ја решиме со методот на замена. Од првата равенка добиваме $y=3-2x$. Заменуваме во втората равенка

$$x-(3-2x)=0 \Leftrightarrow x-3+2x=0 \Leftrightarrow x=1$$

Оттука, $y=3-2\cdot 1=1$.

Задача 2.2.2.2. Реши го системот равенки $\begin{cases}2x+2y=3\\ 4x+4y=6\end{cases}$.

Решение. Бидејќи $\frac{4}{2}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$ равенките во системот се еквивалентни (види прилог), па решенијата се совпаѓаат со решенијата на една од равенките. Од $2x+2y=3$ добиваме дека

$$x=t\,,\ y=\frac{3-2t}{2}\,,\ t\in\mathbb{R}\,.$$

Коментар. Во овој случај сите детерминанти на системот се нули,

$$D=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=8-8=0\,,\ D_x=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=12\text{ - }12=0\,,\ D_y=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0\,.$$

Втор начин. Од првата равенка $x=\frac{3-2y}{2}$. Заменуваме во втората равенка

$$4\frac{3-2y}{2}+4y=6 \Leftrightarrow 6-4y+4y=6 \Leftrightarrow 6=6\,.$$

Последната равенка е исполнета за секоја вредност на променливата y, па истата ја отфрламе. Сега за $x=t$ добиваме $y=\frac{3-2t}{2}$.

Задача 2.2.2.3. Реши го системот равенки $\begin{cases}2x+2y=3\\ 4x+4y=5\end{cases}$.

Решение. Прв начин. За детерминантите на системот важи:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=8-8=0 \text{ и } D_x=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=12-10=2\neq 0\,.$$

Следува дека системот нема решение.

Втор начин. Бидејќи $\frac{4}{2}=\frac{2}{1}\neq\frac{5}{3}$, следува дека равенките се меѓусебно противречни, односно дека системот нема решение.

Трет начин. Од првата равенка имаме $x=\frac{3-2y}{2}$. Заменуваме во втората равенка

$$4\frac{3-2y}{2}+4y=5 \Leftrightarrow 6-4y+4y=5 \Leftrightarrow 6=5\,.$$

Следува дека системот равенки нема решение.

Задача 2.2.2.4. Реши го системот равенки $\begin{cases} 0x+0y=1 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$.

Решение. Системот нема решение, бидејќи првата равенка е противречна.
Коментар. Во овој случај $D=D_x=D_y=0$, но системот нема решение.

Задача 2.2.2.5. Реши го системот равенки $\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$.

Решение. Двете равенки се нулти. Следува множеството решенија е $\mathbb{R}^2$.

2.2.3 Систем од две линеарни равенки со три непознати

Нека $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \end{cases}$ (1) е систем од 2 линеарни равенки со 3 непознати. Нека

$D_{ij}=\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}$, каде $i,j\in\{1,2,3,4\}$ и $a_{14}=b_1$ и $a_{24}=b_2$. Тогаш:

1. Ако постои $D_{i_0j_0}\neq 0$ за некои $i_0,j_0\in\{1,2,3\}$, тогаш системот има бесконечно решенија. Решенијата се добиваат така што променливата што не се наоѓа во i-тата и j-тата колона се зема за параметар и се решава новодобиениот систем.

2. Ако $D_{ij}=0$ за секои $i,j\in\{1,2,3\}$, но $D_{i_04}\neq 0$ за некое $i_0\in\{1,2,3\}$, тогаш системот нема решение.

3. Ако $D_{ij}=0$ за секои $i,j\in\{1,2,3,4\}$, тогаш системот има бесконечно многу решенија или нема решение. Решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на една од равенките.

Доказ*. 1) Нека постои $D_{i_0j_0}\neq 0$ за некои $i_0,j_0\in\{1,2,3\}$. Нека $D_{12}\neq 0$. Тогаш, променливата $z=t$ ја земеме за параметар и го добиваме системот $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1-a_{13}t \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2-a_{23}t \end{cases}$.

Бидејќи $D_{12}\neq 0$ последниот систем има единствено решение по x и y,

$$x=\begin{vmatrix} b_1-a_{13}t & a_{12} \\ b_2-a_{23}t & a_{22} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ и } y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1-a_{13}t \\ a_{21} & b_2-a_{23}t \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Следува дека $\left(x(t),y(t),t\right)$, $t\in\mathbb{R}$, се решенијата на системот (1).

Аналогно добиваме, ако некоја од другите детерминанати е различна од 0.

2) Нека $D_{ij}=0$ за секои $i,j\in\{1,2,3\}$, но $D_{i_04}\neq 0$ за некое $i_0\in\{1,2,3\}$. Во овој случај системот не може да содржи нулта равенка. Нека $D_{14}\neq 0$. Следува дека $a_{11}b_2\neq 0$ или $a_{21}b_1\neq 0$. Нека $a_{11}b_2\neq 0$ т.е. $a_{11},b_2\neq 0$. Тогаш, $a_{21}=ka_{11}$ за некое $k\in\mathbb{R}$ и заради $D_{ij}=0$ и $D_{14}\neq 0$ следува:

$$a_{21}=ka_{11},\ a_{22}=ka_{12},\ a_{23}=ka_{13} \text{ и } b_2\neq kb_1.$$

Ако втората равенка е противречна, системот нема решение. Во спротивно $k\neq 0$.

Следува дека ако првата равенка се помножи со $k\neq 0$ и се додаде на втората равенка, се добива $0=b_2-kb_1\neq 0$. Значи, равенките се меѓусебно противречни, односно системот нема решение. Доказот е аналоген во другите случаи.

3) Нека $D_{ij} = 0$ за секои $i, j \in \{1,2,3,4\}$. Ако системот има противречна равенка, тогаш нема решение (решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на противречната равенка). Ако има нулта равенка истата се отфрла, па решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на втората равенка. Во спротивно, $a_{1i_0} \neq 0$ за некое $i_0 \in \{1,2,3\}$ и заради $D_{ij} = 0$ и фактот што равенките се регуларни, важи:

$$a_{21} = ka_{11},\ a_{22} = ka_{12},\ a_{23} = ka_{13} \text{ и } b_2 = kb_1 \text{ за некој } k \neq 0.$$

Следува равенките се еквивалентни, па решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата било која од равенките.

Коментар. Сингуларните равенки може да се увидат уште пред решавањето на системите. Ако системот содржи противречна равенка, тогаш нема решение. Ако содржи нулта, се сведува на решенијата на другата равенка.

Системот (1) кога $b_1 = b_2 = 0$ (2), се нарекува хомоген систем од две линеарни равенки со три непознати. Ако равенките не се еквивалентни, тогаш една од дворедните детерминанти е различна од 0. Нека $D_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Ако променливата $z = z_0$ ја земеме за параметар го добиваме системот $a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z_0$, $a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z_0$ чие решение е:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z_0 & a_{12} \\ -a_{23}z_0 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z_0 \text{ и } y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z_0 \\ a_{21} & -a_{23}z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} z_0 \quad (3).$$

Ако за произволна вредност на z, ставиме $t = z/D_{12}$, тогаш решенијата на (2) се:

$$x = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} t,\ y = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} t \text{ и } z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} t.$$

Следува дека системот (1) има бесконечно решенија коишто се добиваат за секоја вредност на $t \in \mathbb{R}$. Значи, важи следново тврдење:

Нека е даден системот $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases}$ кој не содржи нулта равенка.

1. Ако постои $D_{i_0 j_0} \neq 0$ за некои $i_0, j_0 \in \{1,2,3\}$, тогаш решенијата се:

$$\left(t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, t\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}, t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right),\ t \in \mathbb{R}$$

2. Ако $D_{ij} = 0$ за секои $i, j \in \{1,2,3,4\}$, тогаш решенијата се совпаѓаат со решенијата на една од равенките и се изразени преку 2 параметри.

Задача 2.2.3.1. Реши го системот равенки $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 9z = 5 \end{cases}$.

Решение. Прв начин. Равенките не се противречни или еквивалентни. Ако ставиме $z = t$, добиваме систем од две линеарни равенки со две непознати $\begin{cases} 3x + 2y = 1 + t \\ x - 4y = 5 - 9t \end{cases}$ чии детерминанти се: $D=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-12-2=-14$, $D_x=\begin{vmatrix}1+t & 2\\ 5-9t & -4\end{vmatrix}=-4-4t-10+18t=-14(1-t)$ и $D_y=\begin{vmatrix}3 & 1+t\\ 1 & 5-9t\end{vmatrix}=15-27t-1-t=14-28t=-14(2t-1)$ од каде неговите решенија се:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-14(1-t)}{-14}=1-t,\ \ y=\frac{D_y}{D}=\frac{-14(2t-1)}{-14}=2t-1,\ t\in\mathbb{R}.$$

Оттука, решението на првобитниот систем е:

$$x=1-t,\ \ y=2t-1,\ \ z=t,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

Втор начин. Од првата равенка имаме $z=3x+2y-1$. Заменуваме во втората равенка

$$x-4y+9(3x+2y-1)=5 \Leftrightarrow x-4y+27x+18y-9=5 \Leftrightarrow 28x+14y=14 \Leftrightarrow 2x+y=1.$$

Земаме $x=t$, $t\in\mathbb{R}$. Тогаш, $y=1-2t$ и $z=3t+2(1-2t)-1=1-t$.

Задача 2.2.3.2. Реши го системот равенки $\begin{cases} x-y+z=3\\ 2x-2y+2z=7\end{cases}$.

Решение. Прв начин. Бидејќи $\frac{-1}{-2}=\frac{-2}{-1}=\frac{2}{1}\neq\frac{7}{3}$, равенките се меѓусебно противречни. Следува системот нема решение.

Втор начин. Од првата равенка имаме: $z=3-x+y$. Заменуваме во втората равенка

$$2x-2y+2(3-x+y)=7 \Leftrightarrow 2x-2y+6-2x+2y=7 \Leftrightarrow 6=7.$$

Следува системот нема решение.

Задача 2.2.3.3. Реши го системот равенки $\begin{cases} -x+2y+3z=6\\ -2x+4y+6z=12\end{cases}$.

Решение. Прв начин. Бидејќи $\frac{-2}{-2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$, равенките во системот се еквивалентни, па системот има бесконечно решенија изразени преку два параметри, кои се совпаѓаат со решенијата на една од равенките, на пример: $-x+2y+3z=6$. Тие се

$$y=t,\ z=k,\ x=3t+2k-6,\ t,k\in\mathbb{R}.$$

Втор начин. Од првата равенка имаме: $x=2y+3z-6$. Заменуваме во втората равенка

$$-2(2y+3z-6)+4y+6z=12 \Leftrightarrow -4y-6z-12+4y+6z=12 \Leftrightarrow 12=12.$$

Следува решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на равенката $x=2y+3z-6$. Земаме: $y=t$ и $z=k$, $t,k\in\mathbb{R}$. Тогаш, $x=2t+3k-6$.

Задача 2.2.3.4. Реши го системот равенки $\begin{cases} x-2y-3z=6\\ 0x+0y+0z=0\end{cases}$.

Решение. Системот содржи нулта равенка која се отфрла. За $y=t$ и $z=k$, $t,k\in\mathbb{R}$,

$$x=6+2t+3k.$$

Задача 2.2.3.5. Реши го системот равенки $\begin{cases} 0x+0y+0z=3\\ 2x-2y+2z=7\end{cases}$.

Решение. Првата равенка е противречна, следува дека системот нема решение.

Задача 2.2.3.6. Реши го системот равенки $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$.

Решение. Прв начин. Равенките не се противречни или еквивалентни $(1:1 \neq 2:-1)$. Следува дека системот има бесконечно решенија,

$$t\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = (5t,-t,-3t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Втор начин. Од првата равенка имаме: $x=-2y-z$. Заменуваме во втората равенка

$$-2y-z-y+2z=0 \Leftrightarrow z-3y=0.$$

Избираме $y=t$. Тогаш $z=3t$ и $x=-2t-3t=-5t$.

Коментар. Ако системот има бесконечно решенија истите параметарски можат да се запишат на различни начини.

Задача 2.2.3.7. Реши го системот равенки $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+4y+2z=0 \end{cases}$.

Решение. Прв начин. Равенките се еквивалентни $(1:2=2:4=1:2)$. Нека $z=t, y=k$. Тогаш $x=-z-2y=-t-2k$. Следува дека решенијата се $z=t$, $y=k$, $x=-t-2k$, $k \in \mathbb{R}$.

Втор начин. Од првата равенка $x=-2y-z$. Заменуваме во втората равенка

$$2(-2y-z)+4y+2z=0 \Leftrightarrow -4y-2z+4y+2z=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Ако $z=t, y=k$, тогаш $x=-2k-t$.

2.2.4 Систем од три линеарни равенки со три непознати

Теорема 2.2.4. Нека $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$ (4) е систем од три линеарни равенки со три непознати. Ги формираме детерминантите

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и } D_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1. Ако детерминаната $D \neq 0$, тогаш системот има единствено решение

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D},\ z=\frac{D_z}{D}.$$

2. Ако детерминаната $D=0 \wedge (D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0 \vee D_z \neq 0)$, тогаш системот нема решение.

3. Ако детерминаната $D=D_x=D_y=D_z=0$, тогаш решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на системот добиен со отфрлање на барем една од равенките и системот нема решение или има бесконечно многу.

-Ако системот содржи две равенки во општа положба, тогаш се отфрла преостанатата равенка и се решава новодобиениот систем 2×3 кој има бесконечно решенија изразени преку 1 параметар.

-Ако системот содржи противречна или две меѓусебно противречни равенки, тогаш системот нема решение.

-Ако системот се состои од три нулти равенки, множеството решенија е $\mathbb{R}^3$, односно е изразено преку 3 параметри.

-Во спротивно се отфрлаат нултите равенки и се отфрлаат сите еквивалентни равенки, освен една, и системот се седува на 1×3, од една регуларна равенка која има бесконечно решенија изразени преку 2 параметар.

Доказ*. 1) и 2) се докажуваат аналогно како за систем од 2×2. Општиот доказ за квадратен систем од ред n е даден во прилог.

3) Нека $D = D_x = D_y = D_z = 0$ и постојат две равенки во општа положба. Нека тоа се првата и втората равенка и нека минорот $A_{i_0 j_0}^{12} \neq 0$. Тогаш, системот

$$a_{3i_0} = \alpha a_{1i_0} + \beta a_{2i_0}\,,\ a_{3j_0} = \alpha a_{1j_0} + \beta a_{2j_0}$$

има единствено решение по α и β. Имено, $\alpha = \dfrac{a_{3i_0}a_{2j_0} - a_{3j_0}a_{2i_0}}{a_{1i_0}a_{2j_0} - a_{1j_0}a_{2i_0}}$ и $\beta = \dfrac{a_{1i_0}a_{3j_0} - a_{1j_0}a_{3i_0}}{a_{1i_0}a_{2j_0} - a_{1j_0}a_{2i_0}}$.

Нека $a_{3k} = \alpha a_{1k} + \beta a_{2k} + \gamma_k$ и $a_{14} = b_1$, $a_{24} = b_2$ и $a_{34} = b_3$. Тогаш,

$$D_{i_0 j_0 k} \equiv \begin{vmatrix} a_{1i_0} & a_{1j_0} & a_{1k} \\ a_{2i_0} & a_{2j_0} & a_{2k} \\ \alpha a_{1i_0} + \beta a_{2i_0} & \alpha a_{1j_0} + \beta a_{2j_0} & \alpha a_{1k} + \beta a_{2k} + \gamma_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1i_0} & a_{1j_0} & a_{1k} \\ a_{2i_0} & a_{2j_0} & a_{2k} \\ 0 & 0 & \gamma_k \end{vmatrix} = \gamma_k A_{i_0 j_0}^{12}.$$

Заради $D = D_x = D_y = D_z = 0$ следува: $\gamma_k = 0$ т.е. $a_{3k} = \alpha a_{1k} + \beta a_{2k}$ за секое $k \in \{1,2,3,4\}$. Значи третата равенка е линеарна комбинација на првите две, па може да се отфрли.

Аналогно се заклучува, ако е ненулт некој од минорите на првата и третата, односно втората и третата равенка.

Нека системот не содржи две равенки во општа положба и:

-Нека барем еден од коефициентите пред непознатите е различен од нула. На пример, нека е ненулт коефициентот a_{1i_0} за некое $i_0 \in \{1,2,3\}$, на првата равенка (во спротивно ќе ги ротираме равенките така што првата равенка да биде регуларна). Тогаш $a_{2i_0} = \alpha a_{1i_0}$ и $a_{3i_0} = \beta a_{1i_0}$ за некои реални броеви α и β, од каде, бидејќи сите дворедни детерминанти од коефициентите пред непознатите се нули, важи:

$$a_{2i} = \alpha a_{1i} \text{ и } a_{3i} = \beta a_{1i}\text{, за секое } i \in \{1,2,3\}.$$

Ако $\alpha = 0$ ($\beta = 0$), тогаш втората (третата) равенка е сингуларна, односно е нулта или противречна. Ако една од равенките е противречна системот нема решение, а нултите равенки не влијаат на решенијата на системот и можат да се отфрлат.

Ако $\alpha \neq 0$ ($\beta \neq 0$), тогаш во зависност од слободните членови, втората (третата) равенка е еквивалентна или меѓусебно противречна со првата. Ако постојат меѓусебно противречни равенки, тогаш системот нема решение. Ако постои еквивалентна равенка на првата, тогаш решенијата на системот не се менуваат ако се отфрли една од нив.

На тој начин, ако системот не содржи противречна или меѓусебно противречни равенки, тогаш решенијата му се совпаѓаат со решенијата на првата равенка и се изразени преку $n-2$ параметри.

Нека сите коефициенти пред непознатите се нули. Ако системот содржи противречна равенка, тогаш нема решение. Во спротивно, равенките се нулти и множеството решенија е $\mathbb{R}^3$.

Добиените заклучоци се совпаѓаат со заклучоците од теоремата, па таа е докажана.■

Коментар. Бидејќи постоењето на нулта или противречна равенка е очигледно, алгоритмот може да го модифицираме така што прво ќе го утврдиме нивното постоење.

Понатаму, со малку рутина, нема да биде тешко директно да се увиди постоење на меѓусебно противречни или еквивалентни равенки.

Системот (4) кога $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ е хомоген. Тогаш системот секогаш има решение, односно важи следново тврдење:

Нека $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$ е хомоген систем од 3 линарни равенки со 3 непознати.

1. Ако детерминанатa $D \neq 0$, тогаш системот има единствено решение $(0,0,0)$;
3. Ако детерминанатa $D = 0$, тогаш системот има бесконечно решенија.

Задача 2.2.4.1. Реши го системот равенки $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$.

Решение. Прв начин. Детерминантите на системот се:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 18 + 3 + 3 - 16 = 2\,,\ D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 12 + 9 + 18 + 15 - 8 = 2\,,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 5 + 36 - 3 + 6 - 40 = -2 \text{ и } D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 30 + 5 - 3 - 24 = 4\,.$$

Главната детерминанта е различна од нула, па системот има единствено решение

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{2} = 1,\ \ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{2} = -1,\ \ z = \frac{D_z}{D} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Втор начин. Вредноста на променливата $\underline{x = 5 - 2y - 3z}$ ја заменуваме во другите равенки

$$2(5 - 2y - 3z) - y - z = 1 \Leftrightarrow \underline{-5y - 7z = -9}\ (1)$$

$$5 - 2y - 3z + 3y + 4z = 6 \Leftrightarrow \underline{y + z = 1}\ (2).$$

Од (2), $z = 1 - y$. Со замена во (1) добиваме

$$-5y - 7(1 - y) = -9 \Leftrightarrow 2y = -2 \Leftrightarrow y = -1.$$

Оттука $z = 2$ и $x = 5 + 2 - 6 = 1$.

Задача 2.2.4.2. Реши го системот равенки $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ 3x - 2y + 5z = 5 \end{cases}$.

Решение. Прв начин. Ги пресметуваме детерминантите на системот.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 12 - 4 + 9 + 8 - 10 = 0 \text{ и}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 20 - 12 + 15 + 8 - 30 = -14 .$$

Бидејќи $D = 0$ и $D_x \neq 0$, системот нема решение.

Втор начин. Ја изразуваме една од променливите, на пример $\underline{x = 1 - y - z}$ од првата равенка и ја заменуваме во останатите равенки

$$2(1 - y - z) - 3y + 4z = 6 \Leftrightarrow 2 - 2y - 2z - 3y + 4z = 6 \Leftrightarrow \underline{-5y + 2z = 4},$$

$$3(1 - y - z) - 2y + 5z = 5 \Leftrightarrow 3 - 3y - 3z - 2y + 5z = 5 \Leftrightarrow \underline{-5y + 2z = 2}.$$

Равенките $-5y + 2z = 4$, $-5y + 2z = 2$ се противречни, па системот нема решение.

Задача 2.2.4.3. Реши го системот равенки $\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ 6x - 3y - 3z = 2 \end{cases}$.

Решение. Прв начин. Системот нема решение бидејќи првата и втората равенка се меѓусебно противречни.

Втор начин. Од втората равенка $y = 2x - z - 1$. Ако замениме во првата имаме

$$4x - 2(2x - z - 1) - 2z = 3 \; 4x - 4x + 2z + 2 - 2z = 3 \Leftrightarrow 2 = 3 .$$

Следува дека системот нема решение.

Задача 2.2.4.4. Реши го системот равенки $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - 4z = 4 \\ 2x - 3y - 5z = 2 \end{cases}$ (1).

Решение. Прв начин. Детерминантите на системот се $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Бидејќи првата и третата равенка се во општа положба, ја отфрламе втората равенка и го добиваме еквивалентниот систем $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y - 5z = 2 \end{cases}$. За $z = t$ системот $\begin{cases} x + y = 2 - t \\ 2x - 3y = 2 + 5t \end{cases}$ во кој

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5, \; D_x = \begin{vmatrix} 2 - t & 1 \\ 2 + 5t & -3 \end{vmatrix} = -8 - 2t \text{ и } D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 - t \\ 2 & 2 + 5t \end{vmatrix} = 7t - 2 ,$$

има решенија $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-8 - 2t}{-5} = \dfrac{8 + 2t}{5}$, $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{7t - 2}{-5} = \dfrac{2 - 7t}{5}$, $t \in \mathbb{R}$.

Следува решенијата на системот (1) се: $x = \dfrac{8 + 2t}{5}$, $y = \dfrac{2 - 7t}{5}$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Втор начин. Од првата равенка $x = 2 - y - z$ (2). Заменуваме во останатите равенки

$$3(2 - y - z) - 2y - 4z = 4 \Leftrightarrow -5y - 7z = -2 \Leftrightarrow \underline{5y + 7z = 2} \; (3)$$

$$2(2 - y - z) - 3y - 5z = 2 \Leftrightarrow -5y - 7z = -2 \Leftrightarrow 5y + 7z = 2$$

Избираме $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. Тогаш од (3), $y = \dfrac{2 - 7t}{5}$, а од (2),

$$x = 2 - \frac{2 - 7t}{5} - t = \frac{10 - 2 + 7t - 5t}{5} = \frac{8 + 2t}{5} .$$

Задача 2.2.4.5. Реши го системот равенки $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ 2x+4y+6z=16 \\ 3x+6y+9z=24 \end{cases}$.

Решение. Прв начин. Сите три равенки се меѓусебно еквивалентни. Следува дека решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на равенката $x+2y+3z=8$ и тие се

$$y=t, z=k\ ,\ x=8-2t-3k\ ,\ \ t,k\in\mathbb{R}\ .$$

Втор начин. Ако променливата $x=8-2y-3z$ од првата равенка ја замениме во останатите две добиваме $16=16$ и $24=24$. Земаме $y=t$ и $z=k$. Тогаш, $x=8-2t-3k$.

Задача 2.2.4.6. Реши го системот равенки $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ x+y-4z=0 \end{cases}$.

Решение. Прв начин. Детерминантата на системот е $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=0$.

Дадениот систем е еквивалентен на системот $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$ чии решенија се:

$$x=t\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7t,\ y=t\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11t,\ z=t\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-t,\quad t\in\mathbb{R}\ .$$

Втор начин. Од првата равенка имаме $\underline{z=3x+2y}$. Заменуваме во останатите

$$2x+y+3(3x+2y)=0 \Leftrightarrow 2x+y+9x+6y=0 \Leftrightarrow \underline{11x+7y=0}\ \ (1),$$

$$x+y+4(3x+2y)=0 \Leftrightarrow x+y+12x+8y=0 \Leftrightarrow -11x-7y=0\ \ (2).$$

Равенките (1) и (2) се еквивалентни, па една од нив отфрламе.

Земаме $x=t$, $t\in\mathbb{R}$. Тогаш $y=-\dfrac{11}{7}t$ и $z=3t+2\left(-\dfrac{11}{7}t\right)=-\dfrac{1}{7}t$.

2.3 ЗАДАЧИ

2.1 Детерминанти

Задача 2.1.3-8. Пресметај ги детерминантите:

$$3)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix},\quad 4)\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & 3-\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} & 1-\sqrt{5} \end{vmatrix},\quad 5)\begin{vmatrix} \log_3 9 & \log_2 8 \\ \log_8 2 & \log_9 3 \end{vmatrix},$$

$$6)\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix},\quad 7)\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x^2+xy+y^2 & x^2-xy+y^2 \end{vmatrix},\quad 8)\begin{vmatrix} \sin\alpha+\sin\beta & \cos\alpha+\cos\beta \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{vmatrix}.$$

Одговор. 3) -2, 4) -11, 5) 0, 6) 0, 7) $2y^3$, 8) 0.

Задача 2.1.9. За кои вредности на x детерминантата $\begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ -2 & x+2 \end{vmatrix}$ има вредност нула?

Одговор. $x=1$ или $x=-1$.

Задача 2.1.10. Реши ја неравенката $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 3 & x+2 \end{vmatrix}>8$. **Одговор.** $x\in(-3,3)$.

Задача 2.1.11. Докажи го равенството

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) - (ax+by+cz)^2 .$$

Задача 2.1.12-14. Пресметај ги детерминантите:

$$12)\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}; \qquad 13)\ \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{vmatrix}; \qquad 14)\ \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Одговор. 12) -15; 13) $a(a-b)^2$; 14) 1.

Задача 2.1.15-16. Пресметај ја детерминантата $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ со развивање

15) по трета редица; 16) втора колона. **Одговор.** -28.

Задача 2.1.17-19. Користејќи својства на детерминанти пресметај:

$$17)\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}; \qquad 18)\ \begin{vmatrix} 101 & -707 & 101 \\ 0 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 19)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Одговор. 17) 0; 18) -1414; 19) 3.

Задача 2.1.20-25. Користејќи ги својствата на детерминантите, пресметај:

$$20)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}; \qquad 21)\ \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}; \qquad 22)\ \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix},$$

$$23)\ \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 24)\ \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & a-b-c & 2b \\ 2c & 2c & a-b-c \end{vmatrix}; \quad 25)\ \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Одговор. 20) $(y-x)(z-x)(z-y)$; 21) $-2\left(a^3+b^3\right)$; 22) $(b-a)(c-a)(c-b)$;

23) 1; 24) $(a+b+c)^3$; 25) $\left(1-x^2\right)\left(a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1c_2b_3-a_2b_1c_3\right)$.

Задача 2.1.26-27. Докажи дека:

$$26)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = 0; \quad 27)\ \begin{vmatrix} x_1-a & y_1-b & 1 \\ x_2-a & y_2-b & 1 \\ x_3-a & y_3-b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 2.1.28. Докажи дека детерминантата $D = \begin{vmatrix} 1 & m+3 & (m+2)(m+3) \\ 1 & m+4 & (m+3)(m+4) \\ 1 & m+5 & (m+4)(m+5) \end{vmatrix}$ не зависи од m.

Задача 2.1.29. Реши ја равенката $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Без примена својства на детерминанти ќе се добие сложен израз којшто тешко се средува. Но, ако од втората и третата равенка ја одземеме првата, добиваме

$$\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = R_2^* \to -R_1+R_2 = \\ R_3^* \to -R_1+R_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

што се сведува на линеарната равенка

$$24(x-3)+2(x+2)+10(x-1)+12(x-1)-2(x-3)+20(x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$22(x-3)+22(x+2)+22(x-1)=0 \Leftrightarrow x-3+x+2+x-1=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Задача 2.1.30. Пресметај ги детерминантите

30) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$; 31) $D=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$; 32) $D=\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

33) $D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$; 34) $D=\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix}$; 35) $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Решение 30).

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ R_1(-2)+R_2 \\ = \\ R_1\cdot 1+R_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Одговор. 31) $\frac{1}{35}$; 32) -2; 33) $abc+abd+acd+bcd+abcd$; 34) 0; 35) $(-1)^{n-1}$.

Задача 2.1.36*. Низа на Фибоначи се нарекува низата која започнува со броевите 1 и 2, а секој нареден член е збир од претходните два; 1,2,3,5,8,... Докажи дека n-тиот член на низата на Фибоначи е еднаков со детерминантата од n-ти ред

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 2.1.37*. Со помош на математичка индукција докажи дека

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{D_n} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n},\ n\in\mathbb{N}.$$

Задача 2.1.38*. Пресметај ја детерминантата на Вандермонд

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2.2 Системи линеарни равенки

Задача 2.2.6-20. Реши ги системите равенки:

6) $\begin{cases} 12x+15y=8 \\ 16x+9y=7 \end{cases}$; 7) $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 6x-9y=12 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$; 9) $\begin{cases} 0x+0y=1 \\ 0x+0y=2 \end{cases}$; 10) $\begin{cases} \sqrt{3}x+7y=0 \\ 3x+\sqrt{7}y=0 \end{cases}$; 11) $\begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x-7y+z=-1 \end{cases}$; 12) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ \sqrt{3}x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=\sqrt{27} \end{cases}$; 13) $\begin{cases} 3x-2y+3z=5 \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{4}{3}z=-7 \end{cases}$; 14) $\begin{cases} 0x+0y+0z=0 \\ 0x+0y+0z=7 \end{cases}$;

15) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$; 16) $\begin{cases} 4x+3y=3 \\ 6y+4z=3 \\ 4x+4z=3 \end{cases}$; 17) $\begin{cases} 4x-2y-2z=3 \\ 2x-y-z=1 \\ 6x-3y-3z=2 \end{cases}$;

18) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-4z=4 \\ 0x+0y+0z=2 \end{cases}$; 19) $\begin{cases} 3x+2y+3z=1 \\ 4x+4y+6z=2 \\ 5x+2y+3z=1 \end{cases}$; 20) $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$.

Задача 2.2.21. Во зависност од параметерот a определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} ax-2y=1 \\ 8x-ay=2 \end{cases}$. **Одговор.** $x=t,\ y=\dfrac{4t-1}{2},\ t\in\mathbb{R}$.

Задача 2.2.22. Во зависност од параметрите a и b, определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} ax-9y=6 \\ 10x-by=10 \end{cases}$.

Решение. Детерминантите на системот се

$$D=\begin{vmatrix} a & -9 \\ 10 & -b \end{vmatrix}=90-ab,\ D_x=\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 10 & -b \end{vmatrix}=90-6b,\ D_y=\begin{vmatrix} a & 6 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}=10a-60.$$

Притоа, $D=0 \Leftrightarrow 90-ab=0 \Leftrightarrow ab=90$, $D_x=0 \Leftrightarrow 90-6b=0 \Leftrightarrow b=15$,

$$D_y=0 \Leftrightarrow 10a-60=0 \Leftrightarrow a=6.$$

Дискусија:

1. Ако $ab\neq 90$ системот има единствено решение:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{90-6b}{90-ab},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{10a-60}{90-ab}.$$

2. Детерминантите на системот се нули ако

$$D=0, D_x=0, D_y=0 \Leftrightarrow ab=90, a=6, b=15 \Leftrightarrow a=6, b=15.$$

Значи, за $a=6$ и $b=15$, системот има бесконечно решенија,

$$6x-9y=6 \Leftrightarrow 2x-3y=2 \Leftrightarrow x=t,\ y=\frac{2t-2}{3},\ t\in\mathbb{R}.$$

3. Ако $ab=90$ и $a\neq 6$, тогаш системот нема решение.

Задача 2.2.23. Во зависност од параметерот a определи ги решенијата на системот равенки $\begin{cases}2x+y+z=0\\2x+y+az=1\end{cases}$. **Одговор.** Ако $a\neq 1$, системот има бесконечно решенија $\left(\frac{-at+t-1}{2(a-1)},t,\frac{1}{(a-1)}\right)$, $t\in\mathbb{R}$; ако $a=1$ системот нема решение.

Задача 2.2.24-25. Реши ги системите равенки:

$$24)\ \begin{cases}\frac{1}{x-y}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{y-z}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{z-x}=-\frac{1}{4}\end{cases},\qquad 25)\ \begin{cases}\frac{1}{x+y-2z}+\frac{1}{2x+3y+z}+\frac{1}{x+3y+z}=1\\ \frac{2}{x+y-2z}+\frac{2}{2x+3y+z}+\frac{1}{x+3y+z}=3\\ \frac{1}{x+y-2z}-\frac{1}{2x+3y+z}+\frac{3}{x+3y+z}=-1\end{cases}.$$

Одговор. 24) $(t+4,t+2,t)$, $t\in\mathbb{R}$, 25) $(2,-1,0)$.

Задача 2.2.26. Во зависност од параметарот a, определи ги решенијата на системот равенки: $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+2y+az=2\\ax-3y+z=0\end{cases}$.

Решение. Прв начин. Главната и споредните детерминанти на системот се:

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&a\\a&-3&1\end{vmatrix}=a^2+a-6=(a+3)(a-2),\ D_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&a\\0&-3&1\end{vmatrix}=3(a-2),$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&a\\a&0&1\end{vmatrix}=a^2-2a=a(a-2) \text{ и } D_z=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\a&-3&0\end{vmatrix}=0.$$

Детерминантата на системот е нула ако $a=-3$ и $a=2$. Дискусија:

1. За $a\neq -3$ и $a\neq 2$, системот има единствено решение:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{3(a-2)}{(a+3)(a-2)}=\frac{3}{a+3},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{a(a-2)}{(a+3)(a-2)}=\frac{a}{a+3},\ z=\frac{D_z}{D}=0.$$

2. За $a=-3$ важи $D=0$ и $D_x\neq 0$, па системот нема решение.

3. За $a=2$ го добиваме системот $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+2y+2z=2\\2x-3y+z=0\end{cases}$. Важи: $D=D_x=D_y=D_z=0$ и првата и втората равенка се еквивалентни. Затоа системот е еквивалентен со $\begin{cases}x+y+z=1\\2x-3y+z=0\end{cases}$.

Од првата равенка имаме: $x=1-y-z$. Заменуваме во втората равенка

$$2-2y-2z-3y+z=0 \Leftrightarrow 5y+z=2.$$

Избираме $y=t$. Тогаш, $z=2-5t$ и $x=1-t-(2-5t)=4t-1$. Значи, решенијата се

$$\{(4t-1,t,2-5t) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Втор начин. Од првата равенка $z=1-x-y$. Заменуваме во останатите равенки

$$2x+2y+a(1-x-y)=2 \Leftrightarrow (2-a)x+(2-a)y=2-a \ (1),$$

$$ax-3y+1-x-y=0 \Leftrightarrow (a-1)x-4y=-1 \ (2).$$

Ако $a=2$, равенката (1) е секогаш исполнета, а (2) има вид $x-4y=-1$. Тогаш системот има бесконечно решенија. За $y=t$, имаме $x=4t-1$ и $z=1-(4t-1)-t=2-5t$.

Нека $a \neq 2$. Тогаш равенката (1) е еквивалентна со $x+y=1$, односно $y=1-x$. Заменуваме во (2), $(a-1)x-4(1-x)=-1 \Leftrightarrow (a+3)x=3$ (3).

Ако $a=-3$ равенката (3) нема решение, па системот нема решение.

Ако $a \neq -3$, имаме $x=\dfrac{3}{a+3}$ од каде $y=1-\dfrac{3}{a+3}=\dfrac{a}{a+3}$ и $z=2-\dfrac{6}{a+3}-\dfrac{2a}{a+3}=0$.

Задача 2.2.27-29. Во зависност од параметарот a, определи ги решенијата на системите равенки:

$$27)\ \begin{cases} 2x-ay+2z=8 \\ 2x+3y-z=3 \\ ax-y+z=11 \end{cases}; \quad 28)\ \begin{cases} ax+2ay+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+2y+cz=1 \end{cases}; \quad 29)\ \begin{cases} ax+y+4z=0 \\ 3x+2y+5z=0 \\ 5x+(a+1)y+(4a+1)z=0 \end{cases}.$$

Одговор. 27) За $a \neq 0, a \neq 4$ системот има бесконечно решенија $\left(\dfrac{14}{a},-\dfrac{14}{a},-\dfrac{3a+14}{a}\right)$, $a \in \mathbb{R}$; 2. За $a=4$, системот има бесконечно решенија $\left\{\left(\dfrac{18-t}{7},\dfrac{3t-5}{7},t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$, и за $a=0$ системот нема решение; 28) За $ac \neq 1$, системот има бесконечно решенија $\left(\dfrac{-ac+2a+c-1}{1-ac},\dfrac{ac-a-c+1}{1-ac},\dfrac{1-a}{1-ac}\right)$, $a,c \in \mathbb{R}$; за $a=c=1$, системот има бесконечно решенија $(t,0,1-t)$, $t \in \mathbb{R}$; и за $ac=1$ и $a \neq 1$ системот нема решение; 29) Ако $a \neq 2$ и $a \neq -1$, решението е $(0,0,0)$; ако $a=2$, решенијата се $(-3t,2t,t)$, $t \in \mathbb{R}$ и ако $a=-1$, решенијата се $(-3t,17t,-5t)$.

Задача 30-38. Во зависност од параметарот a, определи ги решенијата на системите равенки:

$$30)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+3y+az=3 \\ 2ax-9y+3z=0 \end{cases}; \quad 31)\ \begin{cases} ax-y+z=3 \\ -x+y+z=-1 \\ x+y+3z=1 \end{cases}; \quad 32)\ \begin{cases} x+3y+az=0 \\ 4x+5y-z=0 \\ 4x-2y+10z=0 \end{cases};$$

$$33)\ \begin{cases} (1+a)x+y+z=1 \\ x+(1+a)y+z=a \\ x+y+(1+a)z=a^2 \end{cases}; \quad 34)\ \begin{cases} (a-1)x+y+4z=0 \\ 3x+2y+5z=0 \\ 5x+ay+(4a-3)z=0 \end{cases}; \quad 35)\ \begin{cases} ax+y+z=3 \\ x+y+z=1 \\ x+y-az=1 \end{cases};$$

$$36)\ \begin{cases} 5ax-4by+2cz=3abc \\ 3ax-6by+5cz=2abc \\ 2ax-3by+cz=0 \end{cases}; \quad 37)\ \begin{cases} x-ay+z=3 \\ -x+ay+z=-1 \\ x+2ay+z=0 \end{cases}; \quad 38)\ \begin{cases} x+ay=3 \\ ax+z=2 \\ y+az=1 \end{cases}.$$

3. МАТРИЦИ

Дефиниција 3.1.1. Правоаголна шема од облик
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$
каде a_{ij}, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$ се реални броеви, се нарекува **матрица.**

Означуваме $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ или само $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, односно $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ако се подразбираат m и n. Хоризонталните n-торки броеви се нарекуваат **редици**, а вертикалните m-торки **колони**. Значи i-тата редица, $i = 1,2,...,m$, се состои од елементите $a_{i1}, a_{i2},..., a_{in}$; а j-тата колона, $j = 1,2,...,n$; се состои од елементите $a_{1j}, a_{2j},..., a_{mj}$. Матрицата што има m редици и n колони се нарекува матрица од **тип** $m\times n$.

Две матрици се **еднакви** ако се од ист тип $m\times n$ и ако соодветните елементи им се еднакви.

Пример 3.1.1. Ќе дадеме пример на неколку матрици:
$$A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}_{2\times 2},\ B = \begin{bmatrix} -2 & -7 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 4},\ C = \begin{bmatrix} tg2 & 1 & \sqrt{3} \\ -2 & \ln 5 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} \text{ и } D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}.$$

Матрица што има една редица се нарекува **вектор редица** или **матрица-редица**, а матрица што има една колона се нарекува **вектор колона** или **матрица-колона**. **Спротивна матрица** на матрицата A е матрицата од ист тип, чии елементи се спротивни од елементите на матрицата A. Спротивната матрица се означува со $-A$. **Нула** или нулта матрица од тип $m\times n$ е матрицата чии елементи се нули. Нула матрицата се означува со 0. Значи,
$$\text{за } A = \lfloor a_{ij} \rfloor,\ -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix} \text{ и } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.1.2. Спротивната матрица на $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -6 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ е
$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -7 & 6 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Нула матрици од тип 1×2 и 2×2 соодветно се $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Операции со матрици. Ќе дефинираме операции собирање и одземање на матрици, множење и делење на матрица со број како и множење на матрици.

Дефиниција 3.1.2. (Збир и разлика на матрици) Збир на две матрици $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ и $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$, од ист тип $m\times n$ е матрица од тип $m\times n$, чии елементи се збир од соодветните елементите на двете матрици, односно $A+B=\lfloor a_{ij}+b_{ij}\rfloor$. **Разлика** на матрицата A со матрицата B е збирот на матрицата A со матрицата $-B$, односно $A-B=\lfloor a_{ij}-b_{ij}\rfloor$.

Задаќа 3.1.3. Пресметај го збирот $A+B$ и разликата $A-B$, ако постојат, за матриците

а) $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}7 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ б) $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

Решение. а) Елементите од матрицата $A+B$, се збир од соодветните елементи на матриците A и B, односно

$$A+B=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+7 & 2+3 & 1-1\\ -2+2 & 1+0 & 0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

Елементите од матрицата $A-B$, се разлика од соодветните елементи на матриците A и B, односно

$$A-B=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5-7 & 2-3 & 1+1\\ -2-2 & 1-0 & 0-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 2\\ -4 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

б) Збирот и разликата не постојат бидејќи матриците A и B не се од ист тип, односно немаат ист број на редици и колони.

Теорема 3.1.3. Нека A, B и C се матрици од ист тип. Тогаш:

1) $(A+B)+C=A+(B+C)$; 2) $A+0=0+A=A$;

3) $A+(-A)=-A+A=0$; 4) $A+B=B+A$.

Доказ. Својствата следуваат директно од својствата на реалните броеви. Нека $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$, $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ и $B=\lfloor c_{ij}\rfloor$ се матрици од тип $m\times n$. Тогаш:

$$1)\ (A+B)+C=(\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor b_{ij}\rfloor)+\lfloor c_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}+b_{ij}\rfloor+\lfloor c_{ij}\rfloor=\lfloor (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\rfloor=$$
$$\lfloor a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\rfloor=\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor b_{ij}+c_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}\rfloor+(\lfloor b_{ij}\rfloor+\lfloor c_{ij}\rfloor)=A+(B+C);$$

2) $A+0=\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor 0\rfloor=\lfloor a_{ij}+0\rfloor=\lfloor a_{ij}\rfloor=A$. Слично $0+A=A$;

3) $A+(-A)=\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor -a_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}-a_{ij}\rfloor=\lfloor 0\rfloor=0$. Слично $-A+A=0$;

4) $A+B=\lfloor a_{ij}\rfloor+\lfloor b_{ij}\rfloor=\lfloor a_{ij}+b_{ij}\rfloor=\lfloor b_{ij}+a_{ij}\rfloor=\lfloor b_{ij}\rfloor+\lfloor a_{ij}\rfloor=B+A$.■

Дефиниција 3.1.4. (Производ и количник на матрица со број) Производот на матрица $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ од тип $m\times n$ со бројот λ, е матрицата λA од тип $m\times n$ чии елементи се производ на елемените на матрицата со бројот, односно $\lambda A=\lfloor \lambda a_{ij}\rfloor$.

Количник на матрицата A со бројот $\lambda\neq 0$ е производот $\frac{1}{\lambda}A$.

Пример 3.1.4. Производот на матрицата $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ со бројот -3 е матрицата

$$-3\cdot A=\begin{bmatrix}-9 & -12 & 3\\ 0 & -6 & 0\end{bmatrix}.$$

Теорема 3.1.5. Нека A, B и C се матрици од ист тип, а λ и μ броеви. Тогаш важат следниве равенства:

1) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$; 2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

3) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$; 4) $1\cdot A=A$, $0\cdot A=0$, $(-1)\cdot A=-A$.

Доказ. Својствата следуваат директно од својствата на реалните броеви.

1) Нека $A=\left[a_{ij}\right]$ и $B=\left[b_{ij}\right]$ се матрици од ист тип $m\times n$. Тогаш постои збирот на матриците A и B и производот на матриците A и B со бројот λ и

$$\lambda(A+B)=\lambda\left(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right)=\lambda\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\left[\lambda\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\right]=\left[\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}\right]=$$
$$\left[\lambda a_{ij}\right]+\left[\lambda b_{ij}\right]=\lambda\left[a_{ij}\right]+\lambda\left[b_{ij}\right]=\lambda A+\lambda B;$$

2) $(\lambda+\mu)A=(\lambda+\mu)\left[a_{ij}\right]=\left[(\lambda+\mu)a_{ij}\right]=\left[\lambda a_{ij}+\mu a_{ij}\right]=\left[\lambda a_{ij}\right]+\left[\mu a_{ij}\right]=\lambda\left[a_{ij}\right]+\mu\left[a_{ij}\right]=\lambda A+\mu A$;

3) $(\lambda\mu)A=(\lambda\mu)\left[a_{ij}\right]=\left[(\lambda\mu)a_{ij}\right]=\left[\lambda\left(\mu a_{ij}\right)\right]=\lambda\left[\mu a_{ij}\right]=\lambda\left(\mu\left[a_{ij}\right]\right)=\lambda(\mu A)$;

4) $1\cdot A=1\cdot A\left[a_{ij}\right]=\left[1a_{ij}\right]=\left[a_{ij}\right]=A$, $0\cdot A=0\left[a_{ij}\right]=\left[0a_{ij}\right]=\left[0\right]=0$ и $(-1)\cdot A=(-1)\left[a_{ij}\right]=\left[-a_{ij}\right]=-A$.■

Дефиниција 3.1.6. (Множење на матрици) Нека бројот на колони на матрицата $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ се совпаѓа со бројот на редици на матрицата $B=\left[b_{jk}\right]_{n\times p}$. Тогаш **производот** на матрицата A со матрицата B е матрицата $C=\left[c_{ik}\right]_{m\times p}$ чии елементи се збир од производот на соодветните елементи од соодветната редица и колона, односно

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk},\ i=1,2,\ldots,m,\ k=1,2,\ldots,p.$$

Значи, ако $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$ и $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{np}\end{bmatrix}_{n\times p}$, тогаш $AB=$

$$\begin{bmatrix}a_{i1}b_{11}+a_{12}b_{21}+\ldots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\ldots+a_{1n}b_{n2} & \ldots & a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\ldots+a_{1n}b_{np}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\ldots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\ldots+a_{2n}b_{n2} & \ldots & a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+\ldots+a_{2n}b_{np}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}b_{11}+a_{i2}b_{21}+\ldots+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\ldots+a_{mn}b_{n2} & \ldots & a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\ldots+a_{mn}b_{np}\end{bmatrix}_{m\times p}.$$

или во скратен запис ако $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ и $B=\left[b_{jk}\right]_{n\times p}$, тогаш $AB=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]_{m\times p}$.

Пример 3.1.5. Производот AB на матриците $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ е дефиниран бидејќи бројот на колони на матрицата A е еднаков на бројот на редици на B, односно A и B се согласни матрици. Според дефиницијата на производ

$$AB=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}_{4\times 2}\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}5\cdot 3+(-2)\cdot 0 & 5\cdot 4+(-2)\cdot 2 & 5\cdot(-1)+(-2)\cdot 0\\ (-3)\cdot 3+1\cdot 0 & (-3)\cdot 4+1\cdot 2 & (-3)\cdot(-1)+1\cdot 0\\ 2\cdot 3+0\cdot 0 & 2\cdot 4+0\cdot 2 & 2\cdot(-1)+0\cdot 0\\ 0\cdot 3+4\cdot 0 & 0\cdot 4+4\cdot 2 & 0\cdot(-1)+4\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 16 & -5\\ -9 & -10 & 3\\ 6 & 8 & -2\\ 0 & 8 & 0\end{bmatrix}.$$

<u>Пример 3.1.6</u>. Комутативниот закон за множење на матрици, не важи во општ случај Имено, за матриците

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ -1 & 5 & 1\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ -2 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{bmatrix},$$

$$AB=\begin{bmatrix}11 & -1 & 14\\ 7 & 2 & 14\\ -7 & -2 & -3\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}1 & 14 & 6\\ -1 & -3 & -5\\ -4 & 21 & 12\end{bmatrix}, \text{ односно } AB\neq BA.$$

Може да се случи да постои само еден или ниту еден од производите AB и BA. За матриците од претходниот пример производот AB постои, но BA не постои.

<u>Пример 3.1.7</u>. Во множеството реални броеви важи својството: ако $a\neq 0$ и $b\neq 0$ тогаш $ab\neq 0$. Во множеството матрици аналогно својство не важи. На пример, матриците

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix} \text{ и } B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix} \text{ се ненулти, но } AB=0.$$

Последните два примера покажуваат дека законите што важат за реалните броеви не мора да важат и за матрици. Затоа треба да се биде внимателен при оперирањето со матрици.

Теорема 3.1.7. (Асоцијативен закон за производ на матрици) Нека A, B и C се матрици и постојат производите AB и BC. Тогаш $(AB)C=A(BC)$.

Доказ. Бидејќи постојат AB и BC матриците A,B и B,C се согласни. Нека $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{jk}]_{n\times p}$ и $C=[C_{kl}]_{p\times q}$. Тогаш

$$(AB)C=([a_{ij}][b_{jk}])[C_{kl}]=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]_{m\times p}[c_{kl}]_{p\times q}=\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}\right]_{m\times q}=\left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right]_{m\times q} \text{ и}$$

$$A(BC)=[a_{ij}]([b_{jk}][C_{kl}])=[a_{ij}]_{m\times n}\left[\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\right]_{n\times q}=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\right)\right]_{m\times q}=\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right]_{m\times q}.\blacksquare$$

Бидејќи $\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}b_{jk}c_{kl}$ важи $(AB)C=A(BC)$.

Заради асоцијативниот закон, производот на три и повеќе матрици ќе го пишуваме без загради.

Теорема 3.1.8. Нека A, B и C се матрици и k е реален број. Тогаш,
1) $A(B+C)=AB+AC$; 2) $(A+B)C=AC+BC$; 3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$;
под услов да постојат производите од десните страни.

Доказ. Доказот следува директно од својствата на реалните броеви и дефиницијата за збир на матрици.

1) За да постојат производите од десната страна мора бројот на колони на матрицата A да се совпаѓа со бројот на редици на секоја од матриците B и C. Нека $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{jk}\right]_{n\times p}$ и $C=\left[b_{jk}\right]_{n\times p}$. Тогаш,

$$A(B+C)=\left[a_{ij}\right]\left(\left[b_{jk}\right]+\left[c_{jk}\right]\right)=\left[a_{ij}\right]\left[b_{jk}+c_{jk}\right]=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(b_{jk}+c_{jk}\right)\right]=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}b_{jk}+a_{ij}c_{jk}\right)\right]=$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}\right]=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]+\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk}\right]=\left[a_{ij}\right]\left[b_{jk}\right]+\left[a_{ij}\right]\left[c_{jk}\right]=AB+AC.$$

2) Се покажува аналогно како 1)

3) $k(AB)=k\left(\left[a_{ij}\right]\left[b_{jk}\right]\right)=k\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]=\left[k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(ka_{ij}\right)b_{jk}\right]=\left[ka_{ij}\right]\left[b_{jk}\right]=(kA)B$.

Аналогно се покажува рвенството $k(AB)=(kA)B$.■

Ќе наведеме уште една теорема чија точност е очигледна. Нека се дадени матриците A, B и C. Ако $A=B$ тогаш $AC=BC$ и $CA=CB$ под услов да постојат производите од десните страни. Значи матрици може да се множат од лево и од десно.

<u>Транспонирана матрица</u>. **Транспонирана матрица на матрицата** A е матрицата, чии колони се соодветните редици на матрицата A. Ознака A^T. Значи ако

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix} \text{ тогаш } A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix},$$

односно ако $A=\left[a_{ij}\right]$ тогаш $A^T=\left[a'_{ij}\right]=\left[a_{ji}\right]$.

<u>Пример 3.1.8</u>. Транспонирана матрица на $A=\begin{bmatrix}2 & 7 & -6 & 4\\ 0 & -5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ е $A^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 7 & -5\\ -6 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$.

Својство 3.1.10. Нека A и B се $m\times n$ матрици и k е број. Тогаш важи:

1) $(A+B)^T=A^T+B^T$; 2) $(kA)^T=kA^T$; 3) $\left(A^T\right)^T=A$.

Доказ. Доказот следува директно од дефиницијата на транспонирана матрица. Нека се дадени матриците $A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right]$ од ист тип. Тогаш,

1) $(A+B)^T=\left(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right)^T=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]^T=\left[a_{ji}+b_{ji}\right]=\left[a_{ji}\right]+\left[a_{ji}\right]=\left[a_{ij}\right]^T+\left[a_{ij}\right]^T=A^T+B^T$;

2) $(kA)^T=\left(k\left[a_{ij}\right]\right)^T=\left[ka_{ij}\right]^T=\left[ka_{ji}\right]=k\left[a_{ji}\right]=k\left[a_{ij}\right]^T=kA^T$;

3) $\left(A^T\right)^T=\left(\left[a_{ij}\right]^T\right)^T=\left[a_{ji}\right]^T=\left[a_{ij}\right]=A$.■

Својство 3.1.11. Нека A е $m\times n$ и B е $n\times p$ матрица. Ако постои AB, тогаш

$$(AB)^T=B^TA^T.$$

Доказ*. Матрицата AB е од тип $m\times p$, па $(AB)^T$ е од тип $p\times m$. Матрицата B^T и A^T се од тип $p\times n$ и $n\times m$ соодветно, па $B^T A^T$ е од тип $p\times m$. Значи $(AB)^T$ и $B^T A^T$ се од ист тип.

● На местото (i,k) од матрицата $(AB)^T$ стои елементот c_{ki}^{AB} од производот на матриците A и B. Добивме $c_{ik}^{(AB)^T} = c_{ki}^{AB} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji}$.

● На местото (i,k) од матрицата $B^T A^T$ стои елементот $c_{ik}^{B^T A^T}$ кој е производ од i-та редица на B^T, $b_{1i}, b_{2i}, ..., b_{ni}$, со k-тата колона на матрицата A^T, $a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn}$, односно

$$c_{ik}^{B^T A^T} = \sum_{j=1}^{n} b'_{ij} a'_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji}.$$

Бидејќи $c_{ik}^{(AB)^T} = c_{ik}^{B^T A^T}$, следува дека $(AB)^T = B^T A^T$.■

Од претходната теорема и принципот на математичка индукција следува дека ако постои производот $AB\cdot ...\cdot C$, тогаш $(AB\cdot ...\cdot C)^T = C^T \cdot ...\cdot B^T A^T$.

Квадратни матрици

Дефиниција 3.1.12. Матрицата што има ист број на редици и колони, се нарекува **квадратна матрица**. Означуваме $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_n$ или $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ ако е познат редот n.

Елементите a_{11}, a_{22}, ... a_{nn}, ја сочинуваат **главната дијагонала**, а елементите a_{n1}, $a_{n-1,2}$, ... a_{1n} ја сочинуваат **споредната дијагонала** на квадратната матрица. Бројот на редици или колони се нарекува **ред** на квадратната матрица. Квадратната матрица чии елементи не лежат на главната дијагонала се нули, се нарекува **дијагонална** матрица. Квадратната матрица чии елементи лежат на главната дијагонала се еднакви, а сите останати нули, се нарекува **скаларна** матрица. Квадратната матрица чии елементи лежат на главната дијагонала се единици, а сите останати нули, се нарекува **единечна** матрица. Единечната матрица се означува со E или со E_n ако е потребно да се потенцира нејзиниот ред. Квадратната матрица чии елементи над главната дијагонала се нула се нарекува **долнотриаголна** матрица. Квадратната матрица чии елементи под главната дијагонала се нула се нарекува **горнотриаголна** матрица.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

квадратна матрица — долнотриаголна матрица — горнотриаголна матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

дијагонална матрица   скаларна матрица   единечна матрица

Квадратната матрица A се нарекува **симетрична** ако $A^T = A$, **антисиметрична** ако $A^T = -A$ и **ортогонална** ако $AA^T = E$.

<u>Пример 3.1.10</u>. Дадени се матриците

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицата A е симетрична, додека матрицата B е антисиметрична.

<u>Степен на матрица и матричен полином</u>. **Степен** со показател природен број на квадратна матрицата A е дефиниран со равенствата: $A^0 = E$, $A^n = A^{n-1}A$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Теорема 3.1.13. Ако A е квадратна матрица и m и n се ненегативни цели броеви, тогаш: 1) $A^m A^n = A^{m+n}$ и 2) $\left(A^m\right)^n = A^{mn}$.

Доказ. Доказот следува директно од дефиницијата за степен на матрица. Имено,

$$1)\ A^m A^n = A^{m-1}AA^n = A^{m-1}A^{n+1} = \ldots = A^0 A^{m+n} = A^{m+n} \text{ и}$$

$$2)\ \left(A^m\right)^n = \left(A^m\right)^{n-1}A^m = \left(A^m\right)^{n-2}A^m A^m = \left(A^m\right)^{n-2}A^{2m} = \ldots = EA^{mn} = A^{mn}.\blacksquare$$

<u>Пример 3.1.11</u>. Во множеството реални броеви важи биномната формула. Специјално $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Во множеството матрици истото својство не важи бидејќи не важи комутативниот закон. Имено, за матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ имаме:

$$(A+B)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}. \text{ Но,}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.\blacklozenge$$

Теорема 3.1.14*. Ако A и B се комутативни матрици и n е природен број, тогаш:

1) $(AB)^n = A^n B^n$,   2) $(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \ldots + \binom{n}{k}A^{n-k}B^k + \ldots + \binom{n}{n}B^n$.

Доказ*. Теоремата се докажува со методот на математичка индукција и примена на биномната формула.■

Ако $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^k + a_1x + a_0$ е полином од степен n со реални коефициенти, A е квадратна матрица тогаш:

$$P_n(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_kA^k + a_1A + a_0E$$

се нарекува **матричен полином**. Јасно $P_n(A)$ е квадратна матрица од ист ред со A.

Ако $P_n(A)$ и $Q_m(A)$ се матрични полиноми, тогаш непосредно од својствата за степен на матрица следува дека дека полиномите се комутативни, односно $P_n(A)Q_m(A) = Q_m(A)P_n(A)$.

Матрицата A **нилпотентна** ако постои природен број m така што $A^m = 0$. Најмалиот број m со претходното својство се нарекува **степен** на нилпотентната матрица. Матрицата A е **инволуторна** ако $A^2 = E$. Матрицата A е **идемпотентна** ако $A^2 = A$.

Детерминанта на квадратната матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ е детерминантата } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***<u>Адјунгирана матрица</u>*. Адјунгирана** матрица на матрицата A, е матрицата

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

чии елементи A_{ij}, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$ се алгебарските комплементи на елементите a_{ij}, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Притоа M_{ij} се минорите на A, добиени од A со пречкртување на i-тата редица и j-тата колона.

Теорема 3.1.15. Ако A е квадратна матрица и $\widetilde{A}$ нејзината адјунгирана матрица, тогаш

$$A\widetilde{A}^T = \widetilde{A}^T A = \det A \cdot E.$$

Доказ. Имајќи го предвид својството на детерминанти

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},$$

со директно множење добиваме

$$A\widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{na} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot E.$$

Аналогно се покажува второто равенство $\widetilde{A}^T A = \det A \cdot E$.■

Теорема 3.1.17. (Теорема на Бинет-Коши) Детерминантата од производ на две матрици е еднаква на производот од детерминантите на матриците т.е $\det AB = \det A \det B$.

Доказ. Доказот е даден во прилог.

***<u>Инверзна матрица</u>*. Инверзна матрица** на <u>квадратната матрица</u> A, ознака A^{-1}, е матрицата за која важи $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема 3.1.18. Ако матрицата A има инверзна, тогаш таа е единствена.

Доказ. Нека матрицата A има две инверзни матрици B и C. Следува $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Тогаш,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C .$$

Следува дека инверзните матрици се еднакви.

Својство 3.1.19. Единечната матрица E има инверзна и $E^{-1} = E$.

Доказ. Бидејќи $EE = EE = E$ следува E има инверзна и $E^{-1} = E$.

Својство 3.1.20. Нека матрицата A има инверзна. Тогаш $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Доказ. Имаме: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1} E = \left(A^{-1}\right)^{-1}\left(A^{-1}A\right) = \left(\left(A^{-1}\right)^{-1}A^{-1}\right)A = EA = A$.

Теорема 3.1.21. (Критериум за постоење на инверзна матрица и формула за нејзино пресметување) Матрицата A има инверзна акко $\det A \neq 0$. Во тој случај,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T .$$

Доказ. Нека матрицата A има инверзна матрица A^{-1}. Тогаш од $AA^{-1} = E$, следува: $\det\left(AA^{-1}\right) = \det E = 1$ и заради теорема 3.1.17 важи:

$$\det A \det A^{-1} = 1,$$

Од последното равенство следува дека $\det A \neq 0$.

Обратно, нека $\det A \neq 0$. Од теорема 3.1.15 важи: $A\widetilde{A}^T = \widetilde{A}^T A = \det A \cdot E$. Бидејќи $\det A \neq 0$, следува дека $A\left(\frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T\right) = \left(\frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T\right)A = E$. Според дефиницијата за инверзна матрица, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T$ е инверзна на A.■

Квадратната матрица A се нарекува **регуларна**, ако има инверзна матрица, а **сингуларна** ако нема. Од теорема 3.1.21 следуваат следниве тврдења:

1. Матрицата A е регуларна акко $\det A \neq 0$. 2. Матрицата A е сингуларна акко $\det A = 0$.

Задача 3.1.12-13. Најди инверзна матрица на матрицата:

$$1)\ A = [2]; \qquad 2)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1) Нека $A^{-1} = [a]$, тогаш $[2][a] = [1]$, од каде $a = \frac{1}{2}$, па $A^{-1} = \left[\frac{1}{2}\right]$.

2) Инверзната матрица ќе ја најдеме според формулата $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T$. Бидејќи

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 6 = 9 \text{; и}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}3 = 3,\ A_{12} = (-1)^{1+2}3 = -3,\ A_{21} = (-1)^{2+1}2 = -2,\ A_{22} = (-1)^{2+2}5 = 5 .$$

Следува: $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

Својство 3.1.22. Нека матрците A и B имаат инверзна. Ако постои AB, тогаш постои $(AB)^{-1}$ и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказ. Ако матриците A и B имаат инверзна тогаш:

$$\det A \neq 0 \text{ и } \det B \neq 0 \text{ па } \det AB \neq 0.$$

Следува дека матрицата AB има инверзна и

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E \text{ и } B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

Оттука $B^{-1}A^{-1}$ е инверзна матрица на AB, односно $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.■

Од последново својство и принципот на математичка индукција следува дека ако $A, B, ..., C$ се регуларни матрици, тогаш:

$$(AB...C)^{-1} = C^{-1}...B^{-1}A^{-1}.$$

Сега може да дефинираме **негативен степен на матрица**. Ако A е регуларна матрица и n природен број, тогаш по дефиниција $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Својство 3.1.23. Нека A е регуларна матрица и m и n се цели броеви. Тогаш:

1) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$; 2) $A^m A^n = A^{m+n}$; 3) $(A^m)^n = A^{mn}$.

Доказ. Тврдењата следуваат од дефинициjата на степен и инверзна матрица. Ќе го докажеме само првото тврдење.

1) $(A^{-1})^m A^m = (A^{-1})^{m-1} A^{-1}AA^{m-1} = (A^{-1})^{m-1} A^{m-1} = ... = A^{-1}A = E$. Слично $A^m (A^{-1})^m = E$. Од дефиницијата на инверзна матрица следува дека $(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$.

Значи со целоброен степен на матрица се оперира аналогно како со целоброен степен на реален број.

3.2 ЕЛЕМЕНТАРНИ ТРАНСФОРМАЦИИ. РАНГ НА МАТРИЦА.

Дефиниција 3.2.1. Подматрица од ред k на матрицата A од тип $m \times n$ е матрицата добиена со изоставување на $m-k$ редици и $n-k$ колони. Детерминантата што одговара на подматрицата од ред k, се нарекува **минор** од ред k на матрицата A.

Дефиниција 3.2.2. Ранг на матрицата A, во ознака $r(A)$ или $rang(A)$, е бројот дефиниран на следниот начин:

1) $r(A) = 0$ ако матрицата A е нула матрица;

2) $r(A) = r$, ако постои минор од ред r, различен од нула, а сите минори од ред $r+1$, доколку ги има, се еднакви на нула.

Дефиниција 3.2.3. Елементарни трансформации на матрицата A се:

1. Замена на местата на две редици (колони);
2. Множење на елементите од една редица (колона) со број различен од нула;
3. Множење на елементите од една редица (колона) со број и додавање на соодветните елементи од друга редица (колона).

Дефиниција 3.2.4. Матриците A и B се **еквивалентни**, во ознака $A \approx B$, ако од едната матрица може да се добие другата со помош на конечен број на елементарни трансформации.

Една редица (колона) е **нулта** ако сите нејзини елементи се нули. Една редица (колона) е **ненулта** ако содржи барем еден ненулт елемент.

Дефиниција 3.2.6. Една матрица е **редично (колонично) скалеста** или има редично (колонично) скалеста форма, ако секоја наредна редица (колона) пред првиот ненулт елемент има барем една нула повеќе од претходната редица (колона) или редицата (колоната) е нулта. Првите ненулти елементи во секоја редица (колона) се нарекуваат **главни** или издвоени елементи. Една матрица е **скалеста**, ако има редично или колонично скалеста форма.

Понатаму, ако не е нагласено поинаку под скалеста форма на матрица ќе подразбираме, редично-скалеста форма. Ако матрицата A е еквивалентна со матрицата B која е во скалеста форма, тогаш ќе велиме дека A е доведена до скалестата форма B.

Теорема 3.2.9. (Критериум за определување на ранг на матрица) Рангот на матрицата A е бројот на ненулти редици (колони) на редично (колонично) скалестата матрица еквивалентна на A.

Доказ. Доказот е даден во прилог.

Задача 3.2.1. Најди го рангот на матрицата $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\2&3&1\\4&2&-2\\4&6&2\end{bmatrix}$.

Решение. Прв начин. Ја сведуваме матрицата до редично-скалеста форма,

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\2&3&1\\4&2&-2\\4&6&2\end{bmatrix}\underset{\substack{R_3/2\\R_4/2}}{\overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\approx}}\begin{bmatrix}2&3&1\\ \hline 0&1&1\\2&1&-1\\2&3&1\end{bmatrix}\underset{\substack{R_1(-1)+R_3\\R_1(-1)+R_4}}{\approx}\begin{bmatrix}2&3&1\\0&1&1\\ \hline 0&-2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\underset{R_2\cdot 2+R_3}{\approx}\begin{bmatrix}2&3&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Бидејќи скалестата форма на A има две ненулти редици, рангот на A е 2.

Втор начин. Да го определиме рангот по дефиниција. Вредностите на 4-те минори од трет ред се 0 бидејќи збирот на првата и третата нивна колона ја дава втората. Од друга страна минорот од втор ред $\begin{vmatrix}0&1\\2&3\end{vmatrix}=-2\neq 0$. Следува дека $r(A)=2$.

Теорема 3.2.13. (Метод на Гаус-Жордан за пресметување на инверзна матрица) Нека квадратната матрица A од ред n има инверзна и E е единечна матрица од ред n. Тогаш

$$\left[A \;\vdots\; E\right]\approx\left[E \;\vdots\; A^{-1}\right].$$

Доказ. Доказот е даден во прилог.

Методот на Гаус Жордан се состои во формирање на матрицата чии елементи се добиваат кога на матрицата A од десна страна ќе се допишат елементите од единечната матрица, а потоа со примена на елементарни трансформации, подматрицата A се сведува до единечна.

3.3 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Нека е даден системот од m линеарни равенки со n непознати,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Матрица на системот од m линеарни равенки со n непознати, ознака A, е матрицата чии елементи се соодветните коефициенти пред непознатите. **Проширената матрица на системот**, ознака A_p, е матрицата што се добива кога на матрицата на системот од десна страна ќе се допишат коефициентите пред слободните членови. Значи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ и } A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Теорема на Кронекер-Капели

Теорема 3.3.1. (Теорема на Кронекер-Капели) Системот равенки е согласен, ако и само ако рангот на матрицата на системот се совпаѓа со рангот на проширената матрица на системот, односно $r(A) = r(A_p)$.

Последица 3.3.2. (Последица од теоремата на Кронекер Капели) Нека A и A_p се матрицата и проширената матрица на системот и n е бројот на променливи. Тогаш:

1. Ако $r(A) = r(A_p) = n$, следува дека системот има единствено решение.
2. Ако $r(A) = r(A_p) < n$, следува дека системот има бесконечно решенија изразени преку $n - r(A)$ параметри.
3. Ако $r(A) < r(A_p)$, следува дека системот нема решение.

Доказ. Бидејќи рангот на една матрица е еднаков на бројот на ненулти редици во нејзината редично-скалеста форма, точноста на теоремата на Кронекер-Капели и нејзината последица е покажана во прилогот 1.1.4 при описот на Гаусовиот метод на елиминации. Во еквивалентниот систем кој е во скалеста форма (види прилог) можни се следниве случаи:

1. Случајот во кој $r = n$ и последната равенка е $a_{nn}^n x_n = b_n^n$, $a_{nn}^n \neq 0$ т.е. системот има единствено решение е еквивалентен со $r(A) = r(A_p) = n$.

2. Случајот во кој последната равенка е $0 = b_r^r$, $b_r^r \neq 0$ т.е. системот нема решение е еквивалентен со $r(A_p) = r(A) + 1$.

3. Случајот во кој $r < n$ и последната равенка е $a_{rs}^r x_s + ... + a_{rn}^r x_n = b_r^r$, $a_{rs}^r \neq 0$ т.е. системот има бесконечно решенија изразени преку $n - r$ параметри е еквивалентен со $r(A) = r(A_p) = n$.

Теорема 3.3.3*. Нека A_p и B_p се проширени матрици на соодветни системи линеарни равенки и A_p и B_p се редично еквивалентни. Тогаш и нивните системи равенки се еквивалентни.

Доказ. Види прилог. ■

Ако е даден систем линеарни равенки, проширената матрица на системот, која како подматрица ја содржи и матрицата на системот, се сведува во редично-скалестата форма анлогно како што се вршеа елементарните трансформации со равенки (види прилог). Системот што соодветствува на скалестата форма на матрицата има исти решенија со првобитниот систем. Ако во новодобиениот систем $r\left(A_p\right)=r\left(A\right)+1$ тогаш системот нема решение. Во спротивно се решава последната равенка, преку изразување на ненултиот коефициент и замена во претпоследната равенка. Останатите коефициенти се земаат за параметри. Потоа се решава претпоследната равенка и.т.н.

Задача 3.3.1-3. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теоремата на Кронекер-Капели, определи ги решенијата на системите равенки

$$1)\ \begin{cases} x_1-x_2+x_3=-1 \\ x_1+2x_2+2x_3=0 \\ x_1-4x_2=-3 \end{cases};\ 2)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+2z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 3x+4y+3z=2 \\ 2x-y-4z=5 \end{cases};\ 3)\ \begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1 \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1 \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1 \end{cases}.$$

Решение. 1) За да го определиме рангот, ја сведуваме матрицата на системот во скалеста форма,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -3 \end{array}\right] \approx \begin{matrix} R_1 \\ R_1(-1)+R_2 \\ R_1(-1)+R_3 \end{matrix} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{array}\right] \approx \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2\cdot 1+R_3 \end{matrix} \approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \approx \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3(-1) \end{matrix} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Рангот на матрицата на системот равенки е 2, а рангот на проширената матрица е 3. Од теоремата на Кронекер-Капели следува дека системот равенки е противречен, односно нема решение.

2) Со примена на Гаусовиот метод на елиминации, добиваме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} \\ R_1(-2)+R_2 \\ R_1(-1)+R_3 \\ R_1(-3)+R_4 \\ R_1(-2)+R_5 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} \\ \\ R_2(-1)+R_3 \\ R_2(-1)+R_4 \\ R_2\cdot 3+R_5 \end{matrix} \approx$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ R_3\cdot 3+R_5 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx R_3/(-2) \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Од четвртата и петтата равенка добиваме $0=0$ и истите се секогаш исполнети. Затоа на последната матрица и соодветствува системот

$x_3=0$, $x_2=-1$ и $x_1+x_2+x_3=1$ чии решенија се $x_1=2$, $x_2=-1$ и $x_3=0$.

3) Со примена на Гаусов метод на елиминации, добиваме:

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_1 \\ \\ \\ \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} \\ R_2 \to (-2)R_1+R_2 \\ R_3 \to (-4)R_1+R_3 \\ R_4 \to (-2)R_1+R_4 \end{array} \approx$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \\ 0 & -18 & 9 & -9 & 15 & -3 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} \\ \\ R_3 \to (-3)R_2+R_3 \\ R_4 \to (-3)R_2+R_4 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Бидејќи $r(A)=r(A_p)=2$ и $n=5$, системот равенки има бесконечно решенија изразени преку $5-2=3$ параметри.

На последната матрица и соодветствува системот $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1 \\ -6x_2+3x_3-x_4+5x_5=-1 \end{cases}$.

Ако ставиме $x_3=t$, $x_4=k$ и $x_5=l$; добиваме дека

$$-6x_2+3t-k+5l=-1 \Leftrightarrow x_2=\frac{1+3t-3k+5l}{6} \text{ и}$$

$$x_1+2\frac{1+3t-3k+5l}{6}-t+k-2l=1 \Leftrightarrow x_1=\frac{2+l}{3}.$$

Значи решенијата на системот равенки се $\left\{\left(\frac{2+l}{3},\frac{1+3t-3k+5l}{6},t,k,l\right)\middle| t,k,l\in\mathbb{R}\right\}$.■

Сведување на систем линеарни равенки на матрична равенка.

Равенките во кои непознатите се матрици, се нарекуваат матрични равенки.

Нека е даден системот од m линеарни равенки со n непознати,

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}.$$

Нека $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$,

соодветно се матрицата на системот, колоната на непознатите и колоната од слободните членови. Тогаш системот е еквивалентен со матричната равенка

$$AX=B.$$

Ако системот е квадратен и матрицата A е регуларна матрица, тогаш со множење од лево на $AX=B$ добиваме:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow EX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B.$$

Имајќи предвид дека $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}^T = \dfrac{1}{D}\widetilde{A}^T$, добиваме:

$$X = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{D} \\ \frac{D_2}{D} \\ \vdots \\ \frac{D_n}{D} \end{bmatrix}.$$

од каде ги добиваме Крамеровите формули

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

3.4 РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧИ СО МАТРИЧНИ РАВЕНКИ

Решавањето на матричните равенки ќе го проучиме преку конкретни задачи.

Задача 3.4.1-2. Изрази ја регуларната матрица X од матричната равенка,

$$1)\ 2X + B = AX\ ; \qquad 2)\ \left(AX^{-1}\right)^{-1} + XB = C\ ;$$

под претпоставка сите матрици добиени при процесот на изразување да се регуларни.

Решение. Користејќи ја формулата за инверзна матрица од производ на матрици, и својствата на операциите со матрици, добиваме:

$$1)\ 2X + B = AX \Leftrightarrow B = AX - 2X \Leftrightarrow B = (A-2E)X \,/\, (A-2E)^{-1} \text{ лево} \Leftrightarrow$$

$$(A-2E)^{-1}B = (A-2E)^{-1}(A-2E)X \Leftrightarrow (A-2E)^{-1}B = X \Leftrightarrow X = (A-2E)^{-1}B.$$

$$2)\ \left(AX^{-1}\right)^{-1} + XB = C \Leftrightarrow \left(X^{-1}\right)^{-1}A^{-1} + XB = C \Leftrightarrow XA^{-1} + XB = C \Leftrightarrow$$

$$X\left(A^{-1}+B\right) = C/\left(A^{-1}+B\right)^{-1} \text{десно} \Leftrightarrow X\left(A^{-1}+B\right)\left(A^{-1}+B\right)^{-1} = C\left(A^{-1}+B\right)^{-1} \Leftrightarrow X = C\left(A^{-1}+B\right)^{-1}.$$

3.5 ТЕОРЕМА НА ХАМИЛТОН-КЕЛИ.

Дефиниција 3.5.1. Нека A е матрица од ред n. Тогаш полиномот

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

се нарекува **карактеристичен полином** на матрицата A.

Ако A е квадратна од ред n тогаш карактеристичниот полином го има обликот

$$D = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix},$$

и се добива кога на дијагоналните елементи, од детерминантата на матрицата A, ќе се додаде бројот $-\lambda$. Ако ја развиеме детерминантата, тогаш

$$P(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

Коефициентот пред λ^n и λ^{n-1} се определуваат од членот што го содржи производот на дијагоналните елементи $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ldots(a_{nn}-\lambda)$, бидејќи сите останати членови го содржат степенот λ^k, каде $k\le n-2$.

Јасно, членот $a_0=(-1)^n\ne 0$. Следува дека карактеристичниот полином на квадратна матрица од ред n е полином од n-ти степен.

Понатаму $a_1=(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})$. Сумата од дијагоналните елементи се нарекува **трага** на матрицата A и се означува со

$$\overline{mp}A=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}.$$

Да го одредиме сега членот a_n. Важи:

$$P(0)=a_0 0+a_1 0+\ldots+a_{n-1}0+a_n=a_n \text{ и } P(0)=\det(A-0E)=\det A$$

Следува дека $a_n=\det A$. Затоа карактеристичниот полином на матрицата A е:

$$\underline{P(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\overline{mp}A\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\lambda+\det A}$$

Ако го знаеме карактеристичниот полином на A тогаш од слободниот член може да утврдиме дали има инверзна матрица. Имено, ако $a_n=\det A\ne 0$ матрицата има инверзна, а ако $a_n=\det A=0$, матрицата нема инверзна. Значи:

Теорема 3.5.2. (Критериум за постоење инверзна матрица со помош на карактеристичен полином) Квадратната матрица A има инверзна, акко слободниот член во нејзиниот карактеристичен полином е различен од 0.

Дефиниција 3.5.3. Равенката $\det(A-\lambda E)=0$ се нарекува **карактеристична равенка** на матрицата A.

Во развиена форма карактеристичната равенка е:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Во полиномот $P(\lambda)$ ако променливата $\lambda=A$ е матрица, тогаш добиваме матричен полином:

$$P(A)=(-1)^nA^n+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+\det A$$

Без доказ ќе ја дадеме следнава теорема:

Теорема 3.5.4. (Теорема на Хамилтон-Кели) Секоја квадратна матрица е корен на својот карактеристичен полином т.е. $P(A)=0$.

Бидејќи коренот на полиномот е корен на соодветната равенка, теоремата на Хамилтон-Кели гласи: Секоја матрица е корен (решение) на својата карактеристична равенка.

Теоремата на Хамилтон-Кели се користи за пресметување на матрични полиноми и наоѓање на инверзна матрица.

Задача 3.5.1. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, пресметај го изразот

$$A^4-3A^3-3A^2+8A+5E\text{, ако } A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\-1&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-1\\-1&-1-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)=(2-\lambda)(-3-2\lambda+\lambda^2)=$$

$$-6-4\lambda+2\lambda^2+3\lambda+2\lambda^2-\lambda^3=-\lambda^3+4\lambda^2-\lambda-6.$$

Според теорема на Хамилтон-Кели, добиваме:

$$-A^3+4A^2-A-6E=0 \text{ од каде: } A^3=4A^2-A-6E.$$

Ако последната равенка ја помножиме со A, имаме: $A^4=4A^3-A^2-6A$.

Сега, прво ја заменуваме матрицата A^4 во изразот што треба да го пресметаме, потоа го средуваме изразот, ја заменуваме матрицата A^3 и го пресметуваме истиот. Имаме

$$A^4-3A^3-3A^2+8A+5E=4A^3-A^2-6A-3A^3-3A^2+8A+5E=$$

$$A^3-4A^2+2A+5E=4A^2-A-6E-4A^2+2A+5E=A-E=$$

$$\begin{bmatrix}2&0&-1\\-1&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&-2&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

Коментар. Со помош на претходната постапка може израз од вид $a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+...a_1A+a_0E$, каде $a_0,a_1,...,a_n$ се реални броеви и A е матрицата од задачата, да го сведеме до вид $b_2A^2+b_1A+b_0E$ и лесно да го пресметаме.

Задача 3.5.2. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, најди ја инверзната матрица на матрицата $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином е $P(\lambda)=\det(A-\lambda E)$, каде:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-4=1-2\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-2\lambda-3.$$

Според теоремата на Хамилтон-Кели следува $P(A)=0$, односно $A^2-2A-3E=0$. Бидејќи $\det A=-3\neq 0$, равенката може да ја помножиме со A^{-1},

$$A^2A^{-1}-2AA^{-1}-3EA^{-1}=0 \Leftrightarrow A-2E-3A^{-1}=0 \text{ од каде } 3A^{-1}=A-2E \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}(A-2E).$$

Оттука $A^{-1}=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&2\\2&-1\end{bmatrix}$.

Коментар. Со помош на равенствата од дефиницијата за инверзна матрица на матрицата A, $A^{-1}A=E$ и $AA^{-1}=E$, можеме да извршиме контрола на точноста на резултатот. Навистина $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&2\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

3.6 СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ И ВЕКТОРИ

Нека A е квадратна матрица од ред n. Нека $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ е вектор матрица или вектор.

Дефиниција 3.6.1. Секој ненулт вектор X се нарекува **сопствен вектор** на матрицата A, ако постои реален број λ, така што

$$AX=\lambda X\ .$$

Тогаш бројот λ се нарекува **сопствена вредност** што одговара на сопствениот вектор X.

Матричната равенка $AX=\lambda X$ е еквивалентна со равенката $(A-\lambda E)X=0$ која запишана во форма систем равенки е :

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0 \end{cases}.$$

Системот има ненулто решение ако:

$$D=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \det(A-\lambda E)=0\ .$$

Следува сопствените вредности се решенија на карактеристичната равенка $\det(A-\lambda E)=0$. Притоа, матрицата A има сопствени вредности ако и само ако равенката $\det(A-\lambda E)=0$ има решение. Па, покажана е следнава теорема.

Теорема 3.6.2. (Критериум за наоѓање на сопствени вредности и вектори) Нека $P(\lambda)=\det(A-\lambda E)$ е карактеристичен полином на матрицата A. Корените на карактеристичната равенка $\det(A-\lambda E)=0$ се сопствени вредности на матрицата A. За секоја сопствена вредност λ ненултите решенија на матричната равенка $(A-\lambda E)X=0$ се сопствени вектори матрицата A што одговараат на сопствената вредност λ.

Теоремата го дава редоследот на решавање во задачите во кои треба да се одредат сопствените вредности и вектори на дадена матрица.

Задача 3.6.1. Определи ги сопствените вредности и вектори на матрицата $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Решение. Карактеристичниот полином на матрицата A е:

$$P(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(5-\lambda)-4=\lambda^2-6\lambda+5-4=\lambda^2-6\lambda+1, \text{ каде}$$

$$\lambda^2-6\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}=3\pm2\sqrt{2}\ .$$

За $\lambda = 3 + 2\sqrt{2}$ добиваме:

$$\left(A-\lambda E\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-3-2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 5-3-2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2-2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2-2\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-2-2\sqrt{2}\right)x + 2y = 0 \\ 2x + \left(2-2\sqrt{2}\right)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-1-\sqrt{2}\right)x + y = 0 \\ x + \left(1-\sqrt{2}\right)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(1+\sqrt{2}\right)x \\ x + \left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \end{cases}.$$

За $x = t$ добиваме $y = \left(1+\sqrt{2}\right)t$. Следува дека $X = \begin{bmatrix} t \\ \left(1+\sqrt{2}\right)t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Аналогно за $\lambda = 3 - 2\sqrt{2}$ имаме: $\begin{cases} \left(-1+\sqrt{2}\right)x + y = 0 \\ x + \left(1+\sqrt{2}\right)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ y = \left(1-\sqrt{2}\right)x \right.$.

За $x = t$, $y = \left(1-\sqrt{2}\right)t$. Следува: $X = \begin{bmatrix} t \\ \left(1-\sqrt{2}\right)t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Задача 3.6.2. Определи ги сопствените вредности и вектори на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Сопствените вредности се решенија на карактеристичната равенка

$$\det\left(A-\lambda E\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) + (2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Притоа последната еквиваленција е точна бидејќи $(1-\lambda)^2 + 1 > 0$.

За $\lambda = 2$, матричната равенка е:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ од каде } -x + 2y + z = 0,\ -x - 3y - z = 0.$$

Од првата равенка $x = 2y + z$. Заменуваме во втората равенка $-2y - z - 3y - z = 0$, од каде имаме $-5y - 2z = 0$ или $y = -\frac{2}{5}z$. Тогаш, $x = -\frac{4}{5}z + z = \frac{1}{5}z$. Земаме $z = 5t$, $t \in \mathbb{R}$, тогаш $x = t$ и $y = -2t$. Следува дека решенијата на системот се $x = t$, $y = -2t$, $z = 5t$, $t \in \mathbb{R}$ од каде сопстевените вредности се

$$X = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ 5t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3.7 ЗАДАЧИ

3.1 Операции со матрици

Задача 3.1.14. Определи ги x, y, z и t, така што матрицата $2\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ t & z-1 \end{bmatrix}$, да е еднаква со матрицата $\begin{bmatrix} 0 & y \\ -1 & t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Задача 3.1.15. Пресметај $(AB)^T$ и $B^T A^T$, ако матрицата $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Што заклучуваш? **Одговор.** $(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Задача 3.1.16-17. Пресметај: а) A^5, ако $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; б) A^3, ако $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

Одговор. а) $\begin{bmatrix} 98 & 49 \\ 147 & -98 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} -5 & -6 & 12 \\ 9 & -35 & 30 \\ -36 & 60 & -83 \end{bmatrix}$.

Задача 3.1.18. Ако полиномот $f(x)=x^2+2x-2$, пресметај $f(A)$, каде матрицата

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$ **Одговор.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 9 & 14 & 12 \\ -3 & -6 & -1 \end{bmatrix}$.

Задача 3.1.19. Матрицата A е нилпотентна, ако $A^n=0$, за некој природен број n. Докажи дека матрицата $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ е нилпотентна.

Задача 3.1.20-21. Покажи дека следниве матрици се идемпотентни

$$10)\ A=\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\quad 11)\ A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Задача 3.1.22-27. Пресметај ги n-тите степени на следниве матрици:

$$22)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n,\quad 23)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n,\quad 24)\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n,$$

$$25)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^n,\quad 26)\ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}^n,\quad 27)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n.$$

Решение 22). Првите неколку степени се:

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ 2)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$3)\ \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Заклучуваме дека $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{bmatrix}$. Равенството ќе го покажеме со помош на принципот на математичка индукција. За $n=1$, $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$. За $n=k$, нека важи $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{bmatrix}$.

Треба да докажеме дека равенството важи за $n=k+1$, т.е. $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & 2(k+1)\\0 & 1\end{bmatrix}$. Навистина

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2k\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2k+2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2(k+1)\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Одговор. 24) $\begin{bmatrix}\cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha\\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha\end{bmatrix}$, 27) $\begin{bmatrix}1 & k+1 & \frac{k(k+1)}{2}\\ 0 & 1 & k+1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Задача 3.1.28. Докажи ги равенствата $A^{2n}-A^{2n-2}-A^2+E=0$, каде $n\in\mathbb{N}$ и матрицата

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Задача 3.1.29. Покажи дека инверзната матрица на несингуларната матрица

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \text{ е } A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}.$$

Задача 3.1.30. Најди инверзна матрица на матрицата $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 3\end{bmatrix}$.

Решение. Прв начин. Решението дадено во задача 3.1.11.

Втор начин. Според формулата од претходната задача, бидејќи $\det A=9$, следува:

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3 & -2\\-3 & 5\end{bmatrix}.$$

Трет начин. Нека матрицата $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$. Од условот $AA^{-1}=E$, ја добиваме матричната равенка $\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}5a+2c & 5b+2d\\3a+3c & 3b+3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$,

која е еквивалентна со системот $5a+2c=1$, $5b+2d=0$, $a+c=0$ и $b+d=\frac{1}{3}$.

Од третата равенка $c=-a$. Заменуваме во првата равенка, $5a-2a=1$ односно $a=\frac{1}{3}$. Оттука $c=-\frac{1}{3}$. Од четвртата равенка $d=\frac{1}{3}-b$, од каде ако замениме во втората равенка, добиваме $5b+\frac{2}{3}-2b=0$ или $b=-\frac{2}{9}$. Оттука, $d=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$. Следува: $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}$.

Четврт начин. Бидејќи $\det A\neq 0$, следува дека матрицата A, има инверзна. Инверзната матрица ќе ја најдеме со методот на Гаус-Жордан, $\left[A\middle|E\right]\approx\left[E\middle|A^{-1}\right]$. Формираме матрица која се добива кога до елементите на матрицата A, од десна страна ќе се допишат елементите на единечната матриаца од втор ред E. Потоа со елементарни трансформации елементите на подматрицата A ги сведуваме до елементи на единечна подматрица.

$$\left[\begin{array}{cc:cc}5 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 1\end{array}\right]\approx\begin{matrix}R_1/5\\ R_2\end{matrix}\approx\left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ 3 & 3 & 0 & 1\end{array}\right]\approx\begin{matrix}R_1\\ R_1(-3)+R_2\end{matrix}\approx\left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & 1\end{array}\right]\approx\begin{matrix}R_1\\ R_2\cdot\frac{5}{9}\end{matrix}\approx$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{9}\end{array}\right]\approx\begin{matrix}R_2\left(-\frac{2}{5}\right)+R_1\\ R_2\end{matrix}\approx\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{9}\end{array}\right].\ \text{Следува: } A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -3 & 5\end{bmatrix}.$$

Задача 3.1.31. Најди инверзна матрица на матрицата $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

Решение. Прв начин. Ќе ја користиме формулата $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T$. Бидејќи

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=6-1+1+3-2-1=6 \text{ и}$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2,\quad A_{13}=+\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5,$$

$$\text{Следува: } A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ 0 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}^T=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ -4 & -3 & 5\end{bmatrix}.$$

Втор начин. Со користење на методот на Гаус Жордан, добиваме:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\approx R_1\leftrightarrow R_3\approx\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\approx\begin{matrix}R_1\cdot 1+R_2\\ R_1(-2)+R_3\end{matrix}\approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\0&4&2&0&1&1\\0&-3&-3&1&0&-2\end{array}\right]\approx R_2/4\approx\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&-3&-3&1&0&-2\end{array}\right]\approx\begin{array}{c}R_2(-1)+R_1\\ \\ R_2\cdot 3+R_3\end{array}\approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&-\frac{3}{2}&1&\frac{3}{4}&-\frac{5}{4}\end{array}\right]\underset{R_3\left(-\frac{2}{3}\right)}{\approx}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{5}{6}\end{array}\right]\approx\begin{array}{c}R_3\left(-\frac{1}{2}\right)+R_1\\ R_3\left(-\frac{1}{2}\right)+R_2\end{array}\approx$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{5}{6}\end{array}\right].\text{ Следува, } A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{5}{6}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&0&2\\2&3&-1\\-4&-3&5\end{bmatrix}.$$

Задача 3.1.32. Со помош на методот на Гаус-Жордан, најди инверзна матрица на матрицата $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

Задача 3.1.33-35. Најди ја адјунгираната матрица на матрицата

33) $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}$; 34) $A=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&3\\-2&-3&0\end{bmatrix}$; 35) $A=\begin{bmatrix}1&-2&0&1\\-2&0&1&-2\\0&1&-1&0\\1&-2&0&3\end{bmatrix}$.

Задача 3.1.36-39. Докажи дека дадените матрици се несингуларни, а потоа најди ги нивните инверзни матрици.

36) $A=[2]$; 37) $A=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}$; 38) $A=\begin{bmatrix}4&-3&7\\-5&0&2\\1&-1&2\end{bmatrix}$; 39) $A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$.

Задача 3.1.40. Најди за која вредност на x, матрицата $A=\begin{bmatrix}x^2&4&9\\x&2&3\\1&1&1\end{bmatrix}$ е сингуларна.

Одговор. $x=-1$ и $x=6$.

3.2 Елементарни трансформации. Ранг на матрица.

Задача 3.2.4-5. Со помош на елементарни трансформации, матрицата

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-2&0&1\\1&1&-2&-1&0\\-2&-2&4&2&1\end{bmatrix}$$ редуцирај ја до:

4) редично-скалеста форма, 5) канонично-скалеста форма. Колку е рангот на A?

Задача 3.2.6. Најди го рангот на матрицата $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&7\\7&8&9&10&11&12\end{bmatrix}$. **Одговор.** 3.

Задача 3.2.7. Во зависност од параметарот a дискутирај го рангот на матрицата

$$A=\begin{bmatrix}a&a&2&0\\2a&a&a-1&1\\-3a&-3a&-3-a&1-a\end{bmatrix}.$$

Решение. Со примена на елементарни трансформации, ја сведуваме матрицата во скалеста форма

$$A=\begin{bmatrix}a&a&2&0\\2a&a&a-1&1\\-3a&-3a&-3-a&1-a\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1/2\\ \approx -2R_1+R_2 \approx\\ 3R_1+R_3\end{matrix}\begin{bmatrix}a/2&a/2&2&0\\0&-a&a-5&1\\0&0&3-a&1-a\end{bmatrix}.$$

Дискусија: 1. За $a\neq 0$, рангот на матрицата A е $r(A)=3$, бидејќи елементите a, $-a$ и $3-a$ или $1-a$ од првата, втората и третата редица, се различни од нула па матрицата е во скалеста форма.

2. За $a=0$ имаме:

$$A\approx\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&-5&1\\0&0&3&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \approx 5R_1+R_2\\ -3R_1+R_3\end{matrix}\approx\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \approx \qquad\approx\\ -R_2+R_3\end{matrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Следува $r(A)=2$.

Задача 3.2.8-9. Пресметај: 8) $\begin{bmatrix}4&3&2\\3&2&1\\2&1&1\end{bmatrix}^{-3}$ 9) $\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$.

3.3 Системи линеарни равенки

Задача 3.3.4-9. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теоремата на Кронекер-Капели, определи ги решенијата на системите равенки

4) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3+x_4=-2\\x_1-x_2+2x_3-x_4=-5\\x_1-5x_2-x_3+5x_4=4\\3x_1-x_2+4x_3+x_4=0\end{cases}$; 5) $\begin{cases}x_1+7x_2+2x_4=10\\x_1+9x_2+8x_3+5x_4=22\\x_1+6x_2+x_4=6\\2x_1+9x_2+6x_4=28\end{cases}$; 6) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+3x_4=0\\2x_1-x_3=1\\x_2-x_4=2\end{cases}$;

7) $\begin{cases}x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3\\2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2\\3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1\\3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=1\end{cases}$; 8) $\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0\\3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0\end{cases}$; 9) $\begin{cases}9x_2+7x_4=0\\x_1+9x_2+8x_3+8x_4=9\\3x_2+9x_4=0\\x_1+9x_2+8x_3+7x_4=9\end{cases}$.

Одговор. 4) Нема решение; 5) $(2,0,0,4)$; 6) $\{(5+5t,2+t,9+10t,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$.

Задача 3.3.10-11. Со помош на Гаусовиот метод на елиминации, толкувајќи според теоремата на Кронекер-Капели, во зависност од параметарот, определи ги решенијата на системот равенки:

$$10)\ \begin{cases} x_1+x_2-x_3=9 \\ x_1+2x_2+x_3=12 \\ -x_1-x_2+4x_3=-12 \\ -2x_1+x_2+x_3=\lambda \end{cases};\quad 11)\ \begin{cases} (1+a)x+y+z=1 \\ x+(1+a)y+z=a \\ x+y+(1+a)z=a^2 \end{cases}.$$

Одговор. 10) За $\lambda \neq -2$ нема решение, за $\lambda=-2$ $(3,5,-1)$;

11) За $a=0,-3$ нема решение, за $a\neq 0,-3$ $x=\dfrac{2-a^2}{a(a+3)}$, $y=\dfrac{2a-1}{a(a+3)}$ и $z=-\dfrac{1+a-2a^2-a^3}{a(a+3)}$.

Задача 3.3.12-13. Реши ги системите равенки, со формирање и решавање на неговата матрична равенка.

$$12)\ \begin{cases} x+2y=3 \\ x+3y=4 \end{cases};\quad 13)\ \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+3y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}.$$

Одговор. 11) $(1,1)$, 12) $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{6},\dfrac{17}{6}\right)$.

3.4 Матрични равенки

Задача 3.4.3-6. Изрази ја регуларната матрица X од матричните равенки, под претпоставка сите матрици во процесот на изразување да се регуларни:

3) $-2X+C^T=\tilde{A}-B$; 4) $3X-XA=XA-XC^T+2(B+X)$; 5) $(A+X)^2=AX+X^2+B$; и 6) $(AX)^{-1}+X^{-1}=B$. **Одговор.** 3) $X=-\dfrac{1}{2}\left(\tilde{A}-B-C^T\right)$; 4) $X=2B\left(E-2A+C^T\right)^{-1}$;

5) $X=BA^{-1}-A$; 6) $X=\left(A^{-1}+E\right)B^{-1}$.

Задача 3.4.7-11. Реши ги матричните равенки

7) $2X+3AB=4C$, ако $A=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix}$ и $C=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$;

8) $X^{-1}AB=X^{-1}A+C$, ако $A=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\3&1\end{bmatrix}$ и $C=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$ и X е регуларна;

9) $(A-3E)X=-A+E$, ако $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$;

10) $AX-2AB^T=3C^T$, ако $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\4&-1&3\end{bmatrix}$ и $C=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&-3\\1&2&-1\end{bmatrix}$;

11) $(AX)^{-1}+X^{-1}=B$, ако $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$ и X е регуларна.

Задача 3.4.12-17. Реши ги матричните равенки

12) $(XA+C)(AX+2AB)^{-1}=A^{-1}$, ако $A=\begin{bmatrix}3&1\\4&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1\\4&1\end{bmatrix}$ и $C=\begin{bmatrix}2&1\\0&-2\end{bmatrix}$ и $X+2B$ е регуларна. **Одговор.** $X=\begin{bmatrix}1-2b&b\\4-2d&d\end{bmatrix}$, $b\in\mathbb{R}$, $d\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{14}{9}+\dfrac{16}{9}b\right\}$.

13) $AX = B + X$, ако $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **Одговор.** Нема решение.

14) $\left(AX\right)^{-1} + X^{-1} = B$, ако $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ и X регуларна.

Одговор. Нема решение.

15) $XA + C = X + 2B$, ако $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Одговор. $X = \begin{bmatrix} 1-2b & b \\ 4-2d & d \end{bmatrix}$, $c, d \in \mathbb{R}$.

16) $AX = B$, ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \\ 7 & 18 \end{bmatrix}$. **Одговор.** $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

17) $AX + BC - D = 0$, ако $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ и $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Решение 17). Равенката $AX + BC - D = 0$, ја сведуваме во вид $AX = D - BC$. Не може да множиме со A^{-1} од лево бидејќи матрицата A не е квадратна, односно нема инверзна. За да се изведе множењето, треба матрицата X да има четири редици и една колона. Нека

$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$. Тогаш $AX = D - BC \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 3a+2b+c+4d \\ a+b+2c+3d \\ 2a+b-c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3a+2b+c+4d \\ a+b+2c+3d \\ 2a+b-c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c+4d = -11 \\ a+b+2c+3d = -6 \\ 2a+b-c+d = -5 \end{cases}.$$

Забележуваме дека првата равенка е збир на втората и третата равенка, па системот се сведува на системот:

$$a+b+2c+3d = -6,\ 2a+b-c+d = -5.$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, имаме:

$$a-3c-2d = 1 \text{ односно } a = 1+3c+2d.$$

Заменуваме во првата равенка и добиваме:

$$1+3c+2d+b+2c+3d = -6 \Leftrightarrow b+5c+5d = -7 \Leftrightarrow b = -7-5c-5d.$$

Следува решение на матричната равенка се сите матрици $X = \begin{bmatrix} 1+3c+2d \\ -7-5c-5d \\ c \\ d \end{bmatrix}$, $c, d \in \mathbb{R}$.

Задача 3.4.18. Определи ги сите матрици што комутираат со матрицата $X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Одговор. $\begin{bmatrix} a & -5c \\ a-c & c \end{bmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R}$.

Задача 3.4.19. Докажи дека матриците што комутираат со матрицата $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, комутираат и меѓу себе.

Задача 3.4.20*. Матрицата A е инволуторна, ако $A^2=E$. Определи ги сите инволуторни матрици од втор ред.

Одговор. $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\c&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0\\c&1\end{bmatrix}$, $c\in\mathbb{R}$; $\begin{bmatrix}-d&b\\ \frac{1-d^2}{b}&d\end{bmatrix}$, $d\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Задача 3.4.21*. Определи ги сите инволуторни матрици што комутираат со матрицата $A=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&0\end{bmatrix}$. **Одговор.** $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

Задача 3.4.22. Матрицата A е инволуторна, ако $A^2=E$, а идемпотентна, ако $A^2=A$. Докажи дека матрицата A е идемпотентна акко матрицата $B=2A-E$ е инволуторна.

Задача 3.4.23. Секоја квадратна матрица A, може да се напише како збир од симетрична матрица $A_1=\dfrac{A+A^T}{2}$ и антисиметрична матрица $A_2=\dfrac{A-A^T}{2}$. Докажи.

3.5 Теорема на Хамилтон Кели

Задача 3.5.3. Најди го карактеристичниот полином на матрицата $A=\begin{bmatrix}1&\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&-2\end{bmatrix}$.

Задача 3.5.4-5. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, пресметај ги изразите:

4) $-A^3+11A^2-36A+36E$ ако $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}$. **Одговор.** 0.

5) $-A^3+11A^2-40A+37E$, ако $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}$. **Одговор.** $\begin{bmatrix}-11&4&-4\\4&-19&4\\-4&4&-11\end{bmatrix}$.

Задача 3.5.6. Со помош на карактеристичниот полином на матрицата $A=\begin{bmatrix}1&2\\-2&-4\end{bmatrix}$, докажи дека истата нема инверзна.

Задача 3.5.7. Со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, најди ја инверзната матрица на матрицата $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&-1\\0&-3&1\end{bmatrix}$. **Одговор.** $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\6&-3&-2\end{bmatrix}$.

Задача 3.5.8. Дадена е матрицата $A=\begin{bmatrix}0&1&-2\\2&0&-1\\1&-3&0\end{bmatrix}$. Најди го карактеристичниот полином на матрицата A. Без да пресметуваш, со помош на карактеристичниот полином, кажи ја вредноста на детерминантата соодветна на матрицата A и дали матрицата A има инверзна. Ако матрицата A има инверзна, со примена на теоремата на Хамилтон-Кели, пресметај ја инверзната матрица.

Решение. Карактеристичниот полином е:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -2\\ 2 & -\lambda & -1\\ 1 & -3 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-1+12-2\lambda+3\lambda+2\lambda=-\lambda^3+3\lambda+11.$$

Следува $\det A=11$, па матрицата A има инверзна. Од теорема на Хамилтон-Кели, добиваме:

$$P(A)=0 \Leftrightarrow -A^3+3A+11E=0\ /A^{-1} \Leftrightarrow -A^2+3E+11A^{-1}=0 \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{11}\left(A^2-3E\right).$$

Следува $A^{-1}=\dfrac{1}{11}\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=$

$$\frac{1}{11}\left(\begin{bmatrix}0 & 6 & -1\\ -1 & 5 & -4\\ -6 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3 & 6 & -1\\ -1 & 2 & -4\\ -6 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

3.6 Сопствени вредности и вектори

Задача 3.6.3-8. Определи ги сопствените вредности и вектори на следниве матрици.

3) $A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & -4\end{bmatrix}$. **Одговор.** $\lambda=-3$, $X=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

4) $A=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}$. **Одговор.** Нема.

5) $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$. **Одговор.** За $\lambda=1$, $X=t\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$. За $\lambda=7$, $X=t\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

6) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$. **Одговор.** $\lambda=2$, $X=t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$; $\lambda=3$, $X=t\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ и $\lambda=6$, $X=t\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

7) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. **Одговор.** $\lambda=0$, $X=t\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ и $\lambda=1$, $X=t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

8) $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$. **Одговор.** $\lambda=1$, $X=t\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ и $\lambda=3$, $X=\begin{bmatrix}t\\ k\\ t+k\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$, $t,k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Задача 3.6.9. Во зависност од параметарот a, определи ги сопствените вредности за матрицата $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

4. ВЕКТОРСКА АЛГЕБРА

Многу од големините коишто се користат во математиката и останатите науки се определени само со бројна вредност. На пример должина, плоштина, волумен, температура и друго. Бројот го претставува односот на дадената големина со референтната големина избрана за единица мерка. Таквите големини се нарекуваат **скаларни** големини.

Но, постојат големини што не можат целосно да се определат само со бројка, на пример брзина, забрзување, работа, сила и друго. За определување на истите, покрај нивната големина, потребно е да се знае и нивниот правец и насока. Овие големини се нарекуваат **векторски** големини.

4.1 ВЕКТОРИ

Насочена отсечка или врзан вектор е отсечката кај која едната крајна точка се зема за почеток, а другата за крај. Ако A е почетна точка (почеток), а B крајна точка (крај), тогаш врзаниот вектор го бележиме со $\overrightarrow{AB}$.

Ако точката B се совпаѓа со точката A, тогаш насочената отсечка $\overrightarrow{AA}$ се нарекува **нулта** насочената отсечка. **Спротивна** насочена отсечка на $\overrightarrow{AB}$, ознака $-\overrightarrow{AB}$ е $\overrightarrow{BA}$.

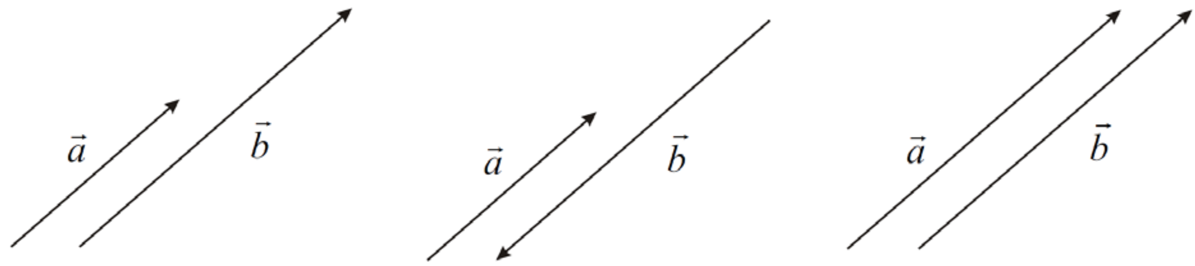
Должина (големина, интензитет, модул) на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ е должината на отсечката AB и се означува со $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Нултата насочена отсечка има должина нула.

Множеството од сите паралелни прави определува еден **правец**. Ненултите насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се **колинеарни** (имаат ист **правец**), ако правите AB и CD се паралелни.

Колинеарните ненулти насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имаат **иста насока** (се **истонасочени**), ако правите AB и CD се совпаѓаат и полуправата $AB \subseteq CD$ или $CD \subseteq AB$, или ако правите AB и CD се паралелни и точките B и D лежат на иста страна од правата AC. Во спротивно $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имаат **спротивна насока** (се **спротивнонасочени**). Всушност, насоката на ненултата насочена отсечка ја определуваат крајните точки A и B, бидејќи сите насочени отсечки што имаат ист правец со $\overrightarrow{AB}$, имаат или иста насока со $\overrightarrow{AB}$ (од A кон B) или иста насока со $\overrightarrow{BA}$ (од B кон A).

Нултата насочена отсечка има ист правец и насока со кој било друг вектор.

Ненултите насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се **еднакви,** ако имаат ист правец, насока и големина. Кои било две нулти насочени отсечки се еднакви.



Истонасочени вектори | Спротивнонасочени вектори | Еднакви вектори

Три насочени отсечки се **компланарни**, ако лежат во иста или паралелни рамнини.

Множеството од сите еднакви насочени отсечки се нарекува **вектор**.

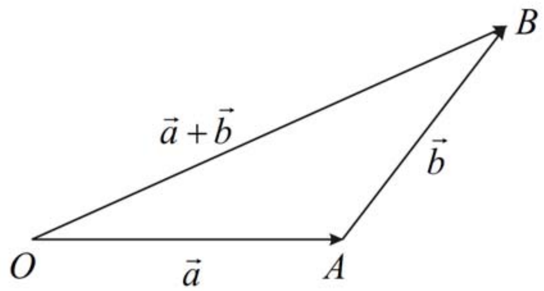
Векторите се означуваат со малите латински букви $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... Под **правец, насока и големина** на еден вектор се подразбира правецот, насоката и големината на кој било негов елемент (претставник). Значи два вектора имаат иста **должина**, ако сите нивни претставници имаат иста должина. Ако е дадена точка O, тогаш секој вектор $\vec{a}$ има претставник $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}$, чија почетна точка е O. Два вектора се **колинеарни**, ако имаат претставници што лежат на иста права. Колинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ги означуваме со $\vec{a} \| \vec{b}$. Два колинеарни ненулти вектори $\vec{a} \ni \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} \ni \overrightarrow{OB}$ имаат иста насока, ако точките A и B се наоѓаат на иста страна од оската OA. Во спротивно, имаат спротивна насока.

Бидејќи секој вектор е определен од кој било негов претставник, во натамошната дискусија векторите ќе ги поистоветуваме со нивните претставници насочените отсечки, кои исто така ќе ги нарекуваме вектори. Значи исказот „нека е даден векторот $\overrightarrow{AB}$,“ ќе означува „нека е даден векторот чиј еден негов претставник е насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$“ и наместо $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ ќе пишуваме $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Множеството што ги содржи нултите насочени отсечки се вика **нулти** вектор и се означува со $\vec{0}$. **Спротивен вектор** на $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, ознака $-\vec{a}$, е векторот $-\vec{a} = \overrightarrow{AO}$. Спротивниот вектор $-\vec{a}$ на векторот $\vec{a}$, има иста големина, ист правец и спротивна насока со $\vec{a}$.

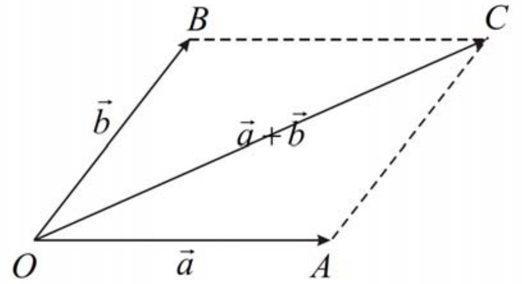
Ќе дефинираме операции собирање и одземање на вектори, како и множење и делење на вектор со скалар, што поседуваат исти својства како операциите со реални броеви.

Збир и разлика на вектори. Нека се дадени векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. **Збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторот $\vec{c} = \overrightarrow{OB}$ чиј почеток се совпаѓа со почетокот на $\vec{a}$, а крај со крајот на $\vec{b}$. Означуваме со $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Збирот на вектори е добро дефиниран и не зависи од изборот на претставниците. Имено, ако избереме точка O' и на ист начин ги нанесеме векторите $\vec{a} = \overrightarrow{O'A'}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{A'B'}$, тогаш лесно се покажува дека $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$. Понатаму, ова својство ќе го подразбираме. Претходното правило за определување на збир на два вектора се нарекува **правило на триаголник**.



Разлика на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е збирот на векторот $\vec{a}$ со $-\vec{b}$ т.е. векторот $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$. Разликата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се означува со $\vec{a} - \vec{b}$.

Збирот и разликата на два неколинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ може геометриски да го определиме и според **правилото на паралелограм**. Избираме точка O и на неа ги нанесуваме векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Дијагоналата што минува низ точката O во паралелограмот $OACB$ ќе ја наречеме главна, а другата споредна.



Сега векторот $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ што лежи на главната дијагонала во паралелограмот $OACB$ е збирот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, додека векторот $\vec{d} = \overrightarrow{BA}$ што лежи на споредната дијагонала е разликата на векторот $\vec{b}$ со векторот $\vec{a}$.

За правилото на паралелограм да се однесува и за колинеарни вектори, точките O, A, C и B по договор ќе ги сметаме за темиња, отсечката OC за главна и BA за споредна дијагонала на таканаречениот „сплеснат паралелограм“ $OACB$ ($OACB$ не е паралелограм).

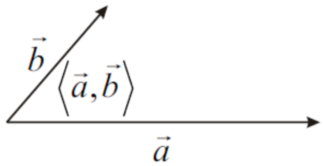
Множење на вектор со број. **Производ** на бројот λ со векторот $\vec{a}$ е векторот $\lambda\vec{a}$, чија должина е $|\lambda||\vec{a}|$, правецот е еднаков со правецот на векторот $\vec{a}$, а насоката е еднаква со насоката на векторот $\vec{a}$ за $\lambda > 0$, или спротивна од насоката на векторот $\vec{a}$ за $\lambda < 0$. Ако $\lambda = 0$ тогаш јасно $0\vec{a} = \vec{0}$.

Количникот на векторот $\vec{a}$ со скаларот $\lambda \neq 0$, е производот на векторот $\vec{a}$ со скаларот $\dfrac{1}{\lambda}$.

Пример 4.1.1. Нека е даден ненултиот вектор $\vec{a}$. Векторот $2\vec{a}$ е истонасочен со $\vec{a}$ и има должина $2|\vec{a}|$. Векторот $-\dfrac{1}{2}\vec{a}$ е спротивнонасочен во однос на $\vec{a}$ и должината е

$$\left|-\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \frac{1}{2}|\vec{a}|.$$

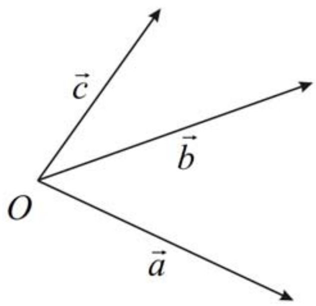
Агол меѓу два вектора. **Агол** меѓу ненултите неколинеарни вектори $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, доведени до заеднички почеток, е помалиот од аглите што ги формираат полуправите OA и OB. Означуваме со $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Од дефиницијата следува дека $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) \in [0,\pi]$. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$ кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се истонасочени и $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \pi$ кога $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се спротивнонасочени.



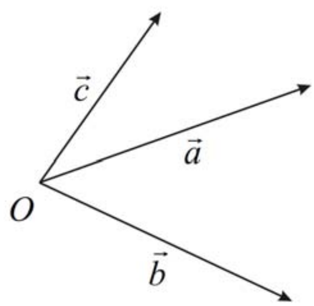
Под агол меѓу нултиот вектор и кој било друг вектор ќе го подразбираме секој од аглите $\varphi \in [0,\pi]$.

Десна (лева) тројка вектори. Три вектори се **компланарни** ако имаат претставници што лежат во иста рамнина.

Некомпланарните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат **десна (лева) тројка вектори** ако доведени до заеднички почеток, соодветно се совпаѓаат со палецот, кажипрстот и средниот прст на десната (левата) рака. Во тој случај ако третиот вектор се „фати“ со **десната (левата)** рака, така што четирите прсти да се движат од $\vec{a}$ кон $\vec{b}$, тогаш палецот ја покажува насоката на третиот вектор.



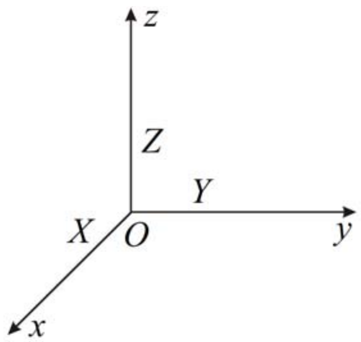
десна тројка вектори



лева тројка вектори

Ако векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни, тогаш ќе сметаме дека формираат и десна и лева тројка вектори.

4.2 ДЕКАРТОВИ (ПРАВОАГОЛНИ) КООРДИНАТИ ВО ПРОСТОР



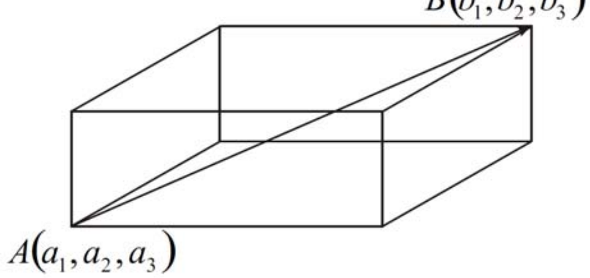
Избираме три заемно нормални оски, x, y и z-оска, што се сечат во една точка O, која е почетна точка на секоја од оските. Подредената четворка од точката O заедно со x, y и z-оските се нарекува **декартов правоаголен координатен систем**. Точката O се нарекува **координатен почеток**. Секоја од оските се нарекува координатна оска. Познато е придружувањето меѓу точките од оската со почетна точка O и реалните броеви, такво што на точката O ѝ соодветствува бројот 0 и за точките X од секоја од оските за кои насоката од O кон X е **позитивна насока**, им се придружени позитивни реални броеви.

Рамнините што ги содржат x и y, x и z, како и y и z-оската, се нарекуваат **координатни рамнини** и соодветно се означуваат со xOy, xOz и yOz. Бидејќи секоја рамнина го дели просторот на 2 дела, трите кординатни рамнини го делат просторот на 8 делови наречени **октанти**. Делот што ги содржи точките од оските на кои им соодветствуваат позитивни броеви се нарекува прв октант. За редоследот на другите октанти нема еднозначен договор во литературата.

Нека е дадена точка A од просторот. Трите рамнини низ A паралелни со координатните рамнини, ги сечат оските во три точки на кои им соодветствуваат броевите a_1, a_2 и a_3. На овој начин на секоја точка A ѝ е придружена единствена подредена тројка од реални броеви (a_1, a_2, a_3), и обратно секоја тројка од реални броеви (a_1, a_2, a_3) определува една точка A. Означуваме $A(a_1, a_2, a_3)$. Броевите a_1, a_2 и a_3 се нарекуваат координати (правоаголни координати) на точката A. Секој вектор во простор има претставник $\overrightarrow{OA}$ чија почетна точка е координатниот почеток $O(0,0,0)$ и крајна точка $A(a_1, a_2, a_3)$, и е еднозначно определен со координатите (a_1, a_2, a_3). Бидејќи векторот во простор е определен со 3 координати, уште се нарекува тридимензионален вектор.

Запомни. На секој вектор во простор му соодветствува подредена тројка (a_1, a_2, a_3) од реални броеви. Броевите a_1, a_2 и a_3 се нарекуваат координати на векторот. Означуваме $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Два вектора се **еднакви** ако имаат ист правец, насока и големина. Тогаш ним ќе им одговара единствена подредена тројка од броеви, односно нивните координати мора да се еднакви.



Нека векторот $\overrightarrow{AB}$ е даден со почетната точка $A(a_1, a_2, a_3)$ и крајната точка $B(b_1, b_2, b_3)$. Тогаш $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$ и $b_3 - a_3$ се соодветните поместувања од точката A кон точката B, во однос на позитивните насоки на оските. Следува

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Нултиот вектор е векторот $\vec{0} = (0,0,0)$.

Нека е даден векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Спротивниот вектор на $\vec{a}$ е векторот

$$-\vec{a} = (0 - a_1, 0 - a_2, 0 - a_3) = (-a_1, -a_2, -a_3).$$

Должината на векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, ознака $|\vec{a}|$, е просторната дијагонала во квадар со страни $|a_1|$, $|a_2|$ и $|a_3|$. Следува $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Тврдењето важи и кога некоја од координатите е 0. Должината на нултиот вектор е 0. Значи:

Теорема 4.2.1. Два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ се еднакви, акко нивните координати се еднакви, т.е $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 = b_3$. Векторот со почетна точка A и крајна B, ознака $\overrightarrow{AB}$, е векторот $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. Нултиот вектор е $O(0,0,0)$. Спротивниот вектор на $\vec{a}$ е векторот $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$. Должина на векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е бројот $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

<u>Пример 4.2.1</u>. Спротивен вектор на векторот $\vec{a} = (1,5,3)$ е векторот $(-1,-5,-3)$. За произволен вектор $\vec{a}$, спротивен вектор на $2\vec{a}$ е $-2\vec{a}$.

<u>Пример 4.2.2</u>. Должината на векторот $\vec{a} = (5,3,1)$ е $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$.

Векторот чија должина е единица се нарекува **единечен вектор**. За секој ненулт вектор $\vec{a}$, векторот $\vec{a}/|\vec{a}|$ е единечен вектор.

Теорема 4.2.2. (Координатна форма на збир и разлика на вектори) Нека се дадени векторите $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Збирот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторот $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

Разлика на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е векторот $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

Доказ. 1) Нека се дадени векторите $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Ако $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$, тогаш векторот $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (b_1, b_2, b_3)$ е поместен соодветно за b_1, b_2 и b_3 единици во однос на позитивната насока на x, y и z оската во однос на точката $A(a_1, a_2, a_3)$. Следува дека $B(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, па збирот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

2) Од дефиницијата на разлика на вектори, следува разликата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2, a_3) + (-b_1, -b_2, -b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3). \blacksquare$$

<u>Пример 4.2.3</u>. Збирот и разликата на векторите $\vec{a} = (7,-2,1)$ и $\vec{b} = \left(-\frac{3}{2}, -2, 3\right)$ се:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{11}{2}, -4, 4\right) \text{ и } \vec{a} - \vec{b} = \left(\frac{17}{2}, 0, -2\right).$$

Теорема 4.2.3. (Својства на операциите збир и разлика на вектори) За произволни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи:

1) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$; 4) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Доказ. Доказот следува директно од претходната теорема и својствата на реалните броеви. Нека $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ и $\vec{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right)$. Тогаш:

1) $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\left(a_1,a_2,a_3\right)+\left(\left(b_1,b_2,b_3\right)+\left(c_1,c_2,c_3\right)\right)=$

$$\left(a_1,a_2,a_3\right)+\left(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3\right)=\left(a_1+\left(b_1+c_1\right),a_2+\left(b_2+c_2\right),a_3+\left(b_3+c_3\right)\right)=$$
$$\left(\left(a_1+b_1\right)+c_1,\left(a_2+b_2\right)+c_2,\left(a_3+b_3\right)+c_3\right)=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\right)+\left(c_1,c_2,c_3\right)=$$
$$\left(\left(a_1,a_2,a_3\right)+\left(b_1,b_2,b_3\right)\right)+\left(c_1,c_2,c_3\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}\ .$$

2) $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(a_1,a_2,a_3\right)+\left(-a_1,-a_2,-a_3\right)=\left(a_1-a_1,a_2-a_2,a_3-a_3\right)=\left(0,0,0\right)=\vec{0}$.

3) $\vec{a}+\vec{0}=\left(a_1,a_2,a_3\right)+\left(0,0,0\right)=\left(a_1+0,a_2+0,a_3+0\right)=\left(a_1,a_2,a_3\right)=\vec{a}$.

4) $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\right)=\left(b_1+a_1,b_2+a_2,b_3+a_3\right)=\vec{b}+\vec{a}$.

Заради важење на комутативниот закон 4), и 2) и 3) следува: $-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$ и $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.■

Теорема 4.2.4. (Координатна форма на производ и количник на вектор со број) Нека е даден векторот $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ и скаларот λ .

Производ на векторот $\vec{a}$ со скаларот λ е векторот $\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\right)$.

Количник на векторот $\vec{a}$ со скаларот $\lambda\neq 0$ е векторот $\dfrac{\vec{a}}{\lambda}=\left(\dfrac{a_1}{\lambda},\dfrac{a_2}{\lambda},\dfrac{a_3}{\lambda}\right)$.

Доказ. 1) Нека е даден векторот $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ и скаларот λ . Тогаш:

$$|\lambda||\vec{a}|=|\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\left(\lambda a_1\right)^2+\left(\lambda a_2\right)^2+\left(\lambda a_3\right)^2}=|\lambda\vec{a}|.$$

Уште векторот $\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\right)$ за $\lambda>0$ е истонасочен со $\vec{a}$ и за $\lambda<0$ е спротивнонасочен на $\vec{a}$. Следува: $\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\right)$.

2) Ако $\lambda\neq 0$, $\dfrac{\vec{a}}{\lambda}=\left(\dfrac{a_1}{\lambda},\dfrac{a_2}{\lambda},\dfrac{a_3}{\lambda}\right)$.■

***<u>Пример 4.2.4</u>*.** Производот на бројот $\sqrt{3}$ со векторот $\vec{a}=\left(0,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ е $\sqrt{3}\vec{a}=\left(0,3,3\right)$.

Теорема 4.2.5. (Својства на производот на вектор со број) За произволни вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и произволни скалари λ и μ важи:

1) $0\vec{a}=\vec{0}$, $1\vec{a}=\vec{a}$, $\left(-1\right)\vec{a}=-\vec{a}$; 2) $\left(\lambda\mu\right)\vec{a}=\lambda\left(\mu\vec{a}\right)$;

3) $\left(\lambda+\mu\right)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$; 4) $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Доказ. Доказот следува од претходната теорема и својствата на реалните броеви.

Нека $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$, $\vec{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right)$ и $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Тогаш:

1) $0\vec{a}=0\left(a_1,a_2,a_3\right)=\left(0\cdot a_1,0\cdot a_2,0\cdot a_3\right)=\left(0,0,0\right)=\vec{0}$. Слично $1\vec{a}=\vec{a}$ и $\left(-1\right)\vec{a}=-\vec{a}$;

2) $(\lambda\mu)\vec{a} = (\lambda\mu)(a_1, a_2, a_3) = ((\lambda\mu)a_1, (\lambda\mu)a_2, (\lambda\mu)a_3) = (\lambda(\mu a_1), \lambda(\mu a_2), \lambda(\mu a_3)) =$

$$\lambda(\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) = \lambda(\mu(a_1, a_2, a_3)) = \lambda(\mu\vec{a});$$

3) $(\lambda + \mu)\vec{a} = (\lambda + \mu)(a_1, a_2, a_3) = ((\lambda + \mu)a_1, (\lambda + \mu)a_2, (\lambda + \mu)a_3) =$

$$(\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2, \lambda a_3 + \mu a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) =$$
$$= \lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(a_1, a_2, a_3) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a};$$

4) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)) = \lambda(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) =$

$$(\lambda(a_1 + b_1), \lambda(a_2 + b_2), \lambda(a_3 + b_3)) = (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda a_2 + \lambda b_2, \lambda a_3 + \lambda b_3) =$$
$$(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) + (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) = \lambda(a_1, a_2, a_3) + \lambda(b_1, b_2, b_3) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}\ .\blacksquare$$

Од дефиницијата за производ на вектор со број следува дека:

Теорема 4.2.6. Два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни ако постои $\lambda \neq 0$, така што $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Ако еден од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е нултиот, тогаш за $\lambda = 0$, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ или $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Базни вектори. Векторите $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ и $\vec{k} = (0,0,1)$ се специјални единечни вектори наречени **базни вектори**. Ако векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ формираат десна (лева) тројка на вектори, тогаш координатниот систем се нарекува **десен (лев)**. Ние ќе работиме само со десен координатен систем.

***Линеарна комбинација*.** **Линеарна комбинација** на векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ за реалните броеви, $x_1, x_2, ..., x_n$ е векторот $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n$. Со помош на операциите собирање и множење на вектор со број, векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ може да се претстави како линеарна комбинација од базните вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Имено,

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\ .$$

Досега еден вектор во простор го опишавме аналитички на четири начини, како подредена тројка реални броеви (a_1, a_2, a_3), како точка (a_1, a_2, a_3), како насочена отсечка со почетна точка $A(x_1, x_2, x_3)$ и крајна точка $B(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$ и како линеарна комбинација $a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

***Вектори во рамнина и вектори на права*.** Нека е даден правоаголен Декартов координатен систем во рамнина (O, x, y). На ист начин на секоја точка од рамнината ѝ е придружена подредена двојка од реални броеви (a_1, a_2). Означуваме $A(a_1, a_2)$. На точката $A(a_1, a_2)$ ѝ соодветствува единствен вектор со почетна точка O и крајна A. Означуваме $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Векторите во рамнина се нарекуваат рамнински или дводимензионални вектори. Ако $\vec{i} = (1,0)$ и $\vec{j} = (0,1)$ се базните единечни вектори, тогаш $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$.

Да го разгледаме просторниот вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)$ што лежи во xOy рамнината. Тридимензионалниот вектор $\vec{a}$ се запишува како линеарна комбинација од базните вектори

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ на ист начин како што се запишува дводимензионалниот вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на xOy рамнината, тогаш и векторите $\vec{a} + \vec{b}$ и $\lambda\vec{a}$ лежат во неа. Затоа рамнинските вектори (a_1, a_2) може да ги поистоветиме со просторните вектори $(a_1, a_2, 0)$ од xOy рамнината во просторот и да воведеме поими еднаквост на вектори, должина на вектор, операции собирање и одземање на рамнински вектори, како и множење и делење на рамнински вектор со број, што ќе соодветствуваат на операциите на нивните соодветни тродимензионални вектори.

Значи, ако се дадени точките $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$, тогаш векторот

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, бидејќи $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, 0)$ за $A(a_1, a_2, 0)$ и $B(b_1, b_2, 0)$.

Слично должината на векторот $\vec{a} = (a_1, a_2)$ е $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Ако се дадени векторите $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ и бројот λ,

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),\ \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2),\ \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

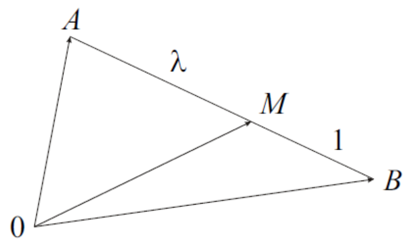
Од самата конструкција следува дека за рамнинските вектори важат идентични својства како за просторните вектори.

Аналогно еднодимензионален вектор на бројна оска $\vec{a} = (a_1) = a_1\vec{i}$ може да го поистоветиме со векторот $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$ што лежи на x-оската. За него се дефинираат аналогни операции и важат идентични својства. Еднодимензионалниот вектор не е толку значаен бидејќи се поистоветува со број.

Делење на отсечка во даден однос. Следнава задача го дава векторскиот облик на формулата за делење на отечка во даден однос.

Задача 4.2.5. Точката M ја дели отсечката AB во однос λ, односно $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = \lambda : 1$. Докажи дека за произволна точка O, важи $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$.

Решение. Од условот на задачата имаме дека $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$. Векторот



$$\underline{\overrightarrow{OM}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{MB} =$$
$$\overrightarrow{OA} + \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right) = \underline{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OM}}$$

Оттука

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \lambda\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}. \blacksquare$$

Ако $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $M(x, y, z)$, тогаш формулата за делење во даден однос го добива обликот

$$(x, y, z) = \frac{(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)}{1 + \lambda} \Leftrightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Претходните равенки го даваат скаларниот облик на формулата за делење на отсечка во даден однос.

Задача 4.2.6. Дадени се точките $A(2,-1,3)$ и $B(3,2,1)$. Определи ги координатите на точката M, така што $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = 2:1$.

Решение. Нека $M(x,y,z)$. Ќе ја примениме формулата за делење на отсечка во даден однос. Од условот на задачата $\lambda = 2$, па:

$$x = \frac{2+2\cdot 3}{3},\ y = \frac{-1+2\cdot 2}{3},\ z = \frac{3+2\cdot 1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3},\ y = 1,\ z = \frac{5}{3} \Leftrightarrow M\left(\frac{8}{3},1,\frac{5}{3}\right).$$

4.3 СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

Ќе дефинираме производ на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, наречен скаларен производ. Скаларниот производ е <u>број</u>.

Нека векторот $\vec{a} = \vec{0}$. Тогаш од $|\sin\varphi| \le 1$ и $|\cos\varphi| \le 1$, за кој било агол φ важи $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi = 0|\vec{b}|\sin\phi = 0$ и $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi = 0|\vec{b}|\cos\phi = 0$. Затоа може да кажеме дека ако еден од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е нултиот, $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$.

Дефиниција 4.3.1. (Геометриска форма на скаларен производ) Скаларниот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ознака $\vec{a}\vec{b}$, е скаларот $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

Скаларниот производ уште се нарекува точка производ или внатрешен производ и се означува уште со $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$.

<u>Пример 4.3.1</u>. Скалараниот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за кои

$$|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 2 \text{ и } \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{2\pi}{3} \text{ е } \vec{a}\vec{b} = 1\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = -1.$$

Теорема 4.3.2. (Координатна форма на скаларен производ) Скаларен производ на тридимензионалните вектори $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ е скаларот

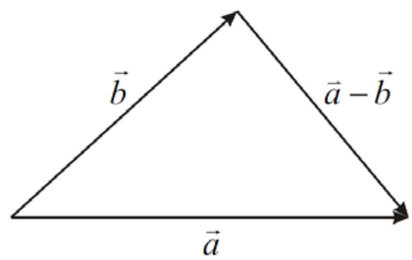
$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Доказ. Ако еден од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е нултиот вектор, тогаш јасно $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Нека се дадени ненултите вектори $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$. Векторот

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$$

лежи на третата страна од триаголникот.



Според косинусната теорема (важи и кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни) имаме:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\underbrace{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})}_{\vec{a}\vec{b}} \Leftrightarrow$$

$$(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow$$

$$a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2+a_3^2-2a_3b_3+b_3^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow$$
$$-2\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)=-2\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 .■$$

Според договорот за поистоветување на рамнинските вектори со согласни просторни вектори од xOy рамнината, скаларниот производ на $\vec{a}=\left(a_1,a_2\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1,b_2\right)$ е скаларот $\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$, а за векторите на права $\vec{a}=\left(a_1\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1\right)$, $\vec{a}\vec{b}=a_1b_1$.

<u>Пример 4.3.2</u>. Скаларниот производ на векторите
$$\vec{a}=\left(-\frac{3}{4},9,5\right) \text{ и } \vec{b}=\left(4,\frac{1}{3},-1\right) \text{ е } \vec{a}\vec{b}=-\frac{3}{4}\cdot 4+9\cdot\frac{1}{3}+5\left(-1\right)=-5 .$$

<u>Скаларен производ од базните вектори</u>. За векторите $\vec{i}=\left(1,0,0\right)$, $\vec{j}=\left(0,1,0\right)$ и $\vec{k}=\left(0,0,1\right)$, од дефиницијата за скаларен производ следува дека
$$\vec{i}\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=\vec{k}\vec{k}=1 \text{ и } \vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{i}=\vec{i}\vec{k}=\vec{k}\vec{i}=\vec{j}\vec{k}=\vec{k}\vec{j}=0 .$$
Заради поголема прегледност, вредностите може да ги запишеме во табела.

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

За рамнинските базни вектори $\vec{i}=\left(1,0\right)$ и $\vec{j}=\left(0,1\right)$ важи $\vec{i}\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=1$ и $\vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{i}=0$.

Теорема 4.3.3. (Својства на скаларен производ) За секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и скалар λ, важи

1) $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$; 3) $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)$;

2) $\vec{0}\vec{a}=0$; 4) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.

Доказ. Нека се дадени векторите $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ и $\vec{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right)$ и бројот λ.

1) Имаме: $\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\vec{b}\vec{a}$;

2) Бидејќи $\vec{0}=\left(0,0,0\right)$, очигледно $\vec{0}\vec{a}=0$;

3) $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\right)\left(b_1,b_2,b_3\right)=\lambda a_1b_1+\lambda a_2b_2+\lambda a_3b_3=\lambda\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$;

Тврдењето $\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)$ следува од 1) и 3).

4) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(a_1,a_2,a_3\right)\left(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3\right)=a_1\left(b_1+c_1\right)+a_2\left(b_2+c_2\right)+a_3\left(b_3+c_3\right)=$
$$a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3=\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)+\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c} .■$$

<u>Примена на скаларниот производ</u>. Скаларниот производ се користи за пресметување на должини на вектори и агол меѓу два вектора.

Теорема 4.3.4. Нека е даден векторот $\vec{a}$. Тогаш: 1) $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$ и 2) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Доказ. Имаме: $\vec{a}^2=\vec{a}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0°=\left|\vec{a}\right|^2$, односно $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$. Со коренување на равенството добиваме: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}$.■

Пример 4.3.3. Должината на векторот $\vec{a} = (1,-2,2)$ е $a = \sqrt{1+(-2)^2+2^2} = 3$.

Теорема 4.3.5. Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогаш,

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \left(|\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0 \wedge \vec{a} \perp \vec{b}\right).$$

Доказ. Од дефиницијата на скаларниот производ следува дека

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0 \vee |\vec{b}| = 0 \vee \left(|\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0 \wedge \cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \left(|\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0 \wedge \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \left(|\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0 \wedge \vec{a} \perp \vec{b}\right).$$

Од претходната теорема директно следува:

Последица 4.3.6. (Критериум за заемна нормалност на два вектора) Ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални ако и само ако $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Пример 4.3.4. Векторите $\vec{a} = \left(-\frac{3}{4}, 9, 5\right)$ и $\vec{b} = \left(4, \frac{1}{3}, 0\right)$ се заемно нормални бидејќи $\vec{a}\vec{b} = -3+3 = 0$. Двата пара вектори од претходниот пример не се заемно нормални.

Во општ случај скаларниот производ се користи за пресметување на агол меѓу два вектора.

Теорема 4.3.7. Косинусот од аголот меѓу ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е:

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Пример 4.3.5. Косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{a} = (-1,2,2)$ и $\vec{b} = (4,-3,0)$ е:

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-4-6}{\sqrt{9}\sqrt{25}} = -\frac{10}{15} = -\frac{2}{3}.$$

Пример 4.3.6. Косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ за кои $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ и $\vec{a}\vec{b} = 1$, е $\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, од каде $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Задача 4.3.7. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зафаќаат агол $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ако се знае дека нивните должини се $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ и $|\vec{b}| = 3$, пресметај го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. Скалараниот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 3\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\,.$$

и имајќи предвид дека $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2$ и $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9$, за скаларниот производ $\vec{p}\vec{q}$ и должините на векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, добиваме:

$$\vec{p}\vec{q} = \left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right) = 2\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} - 6\vec{b}^2 = 4+3-54 = -47\,,$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{8-36+81} = \sqrt{53}\,,$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{2+12+36} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

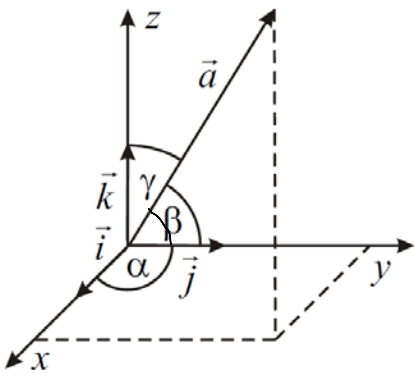
Следува $\cos\sphericalangle\left(\vec{p},\vec{q}\right) = -\dfrac{47}{5\sqrt{106}}$.

Задача 4.3.8. Најди го аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = \left(2,1,0\right)$ и $\vec{b} = \left(0,-2,1\right)$.

Решение. Векторите што лежат на дијагоналите се:

$\vec{d}_1 = \vec{a}+\vec{b} = \left(2,-1,1\right)$ и $\vec{d}_2 = \vec{a}-\vec{b} = \left(2,3,-1\right)$. Затоа

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{d}_1,\vec{d}_2\right) = \frac{\vec{d}_1\vec{d}_2}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{4-3-1}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{4+9+1}} = 0\text{, од каде } \sphericalangle\left(\vec{d}_1,\vec{d}_2\right) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$



Насочни агли и насочни косинуси. Аглите α, β и γ што ненултиот вектор $\vec{a}$ ги гради со векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ соодветно, се нарекуваат **насочни агли** на $\vec{a}$. Ако $\vec{a} = \left(a_1,a_2,a_3\right)$, тогаш од претходната теорема имаме:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{\vec{a}\vec{j}}{|\vec{a}||\vec{j}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}\ \text{ и }\ \cos\gamma = \frac{\vec{a}\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|}\,.$$

Велиме $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ се **насочни косинуси** на $\vec{a}$. Насочните косинуси на ненултиот вектор $\vec{a}$ се координати на единечниот вектор $\vec{a}/|\vec{a}|$. Имено,

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|},\frac{a_2}{|\vec{a}|},\frac{a_3}{|\vec{a}|}\right) = \left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right).$$

Бидејќи должината на $\vec{a}/|\vec{a}|$ е единица важи:

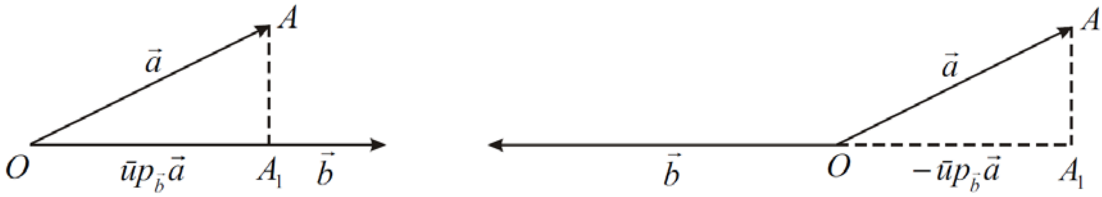
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

Пример 4.3.9. Насочните косинуси на векторот $\vec{a} = \left(-1,2,2\right)$ се:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|} = -\frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{\vec{a}\vec{j}}{|\vec{a}||\vec{j}|} = \frac{2}{3}\ \text{ и }\ \cos\gamma = \frac{\vec{a}\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|} = \frac{2}{3}\,.$$

Проекции. Нека се дадени векторите $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}$. Нека A_1 е ортогоналната проекција на точката A врз правата OB. Тогаш **проекција** (алгебарска проекција) **на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{b}$**, ознака $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, е бројот:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\overrightarrow{OA_1}\right| \text{ ако } \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=-\left|\overrightarrow{OA_1}\right| \text{ ако } \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$$



Теорема 4.3.8. Проекцијата на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{b}$ е:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Доказ. ● Ако $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ тогаш од дефиницијата на функцијата косинус од остар агол $\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}}{|\vec{a}|}$ од каде $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

● Ако $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\cos\left(\pi-\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)=-\frac{-\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

● Со директна проверка следува точноста на тврдењето за $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi\right\}$.■

Нека е даден векторот $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$. Тогаш,

$$a_1=\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a},\ a_2=\text{пр}_{\vec{j}}\vec{a} \text{ и } a_3=\text{пр}_{\vec{k}}\vec{a},$$

односно координатите на векторот $\vec{a}$ се проекции на векторот врз векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. На овој начин е дадена уште една интерпретација на поимот координата.

Од геометриската форма на скаларниот производ следува точноста на следново тврдење:

Теорема 4.3.9. $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$.

Пример 4.3.10. Проекцијата на векторот $\vec{a}=\left(-1,2,2\right)$ врз векторот $\vec{b}=\left(4,-3,0\right)$ е:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=-\frac{10}{5}=-2$$

Теорема 4.3.10. Нека се дадени векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}\neq\vec{0}$ и скаларот λ. Тогаш:

1) $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$ 2) $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}$.

Доказ. 1) Поради претходната теорема следува:

$$\bar{u}p_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{\vec{a}\vec{c}}{|\vec{c}|}+\frac{\vec{b}\vec{c}}{|\vec{c}|}=\bar{u}p_{\vec{c}}\vec{a}+\bar{u}p_{\vec{c}}\vec{b}\,.$$

2) Имаме: $\bar{u}p_{\vec{c}}\left(\lambda\vec{a}\right)=\dfrac{\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{c}}{|\vec{c}|}=\lambda\dfrac{\vec{a}\vec{c}}{|\vec{c}|}=\lambda\bar{u}p_{\vec{c}}\vec{a}$.■

Правата p заедно со подредена двојка (O,P) од две нејзини различни точки O наречена почеток и P, ја нарекувавме оска. **Проекција на векторот $\vec{a}$ врз оската p**, ознака $\bar{u}p_p\vec{a}$, е проекцијата на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\overrightarrow{OP}$. Затоа координатите на векторот $\vec{a}$ претставуваат проекции на векторот $\vec{a}$ врз координатните оски.

Поради начинот на дефинирање, истите својства и дефиниции се однесуваат и за дводимензионални и еднодимензионални вектори.

4.4 ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

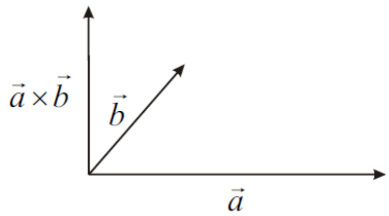
Ќе дефинираме уште еден производ наречен векторскиот производ, кој за разлика од скаларниот производ претставува <u>вектор</u> и се дефинира само за <u>тридимензионални</u> вектори.

Дефиниција 4.4.1. (Геометриска форма на векторски производ) Векторскиот производ $\vec{a}\times\vec{b}$ на просторните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ознака $\vec{a}\times\vec{b}$, е векторот $\vec{a}\times\vec{b}$ таков што:

1) векторот $\vec{a}\times\vec{b}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ формираат десна тројка вектори;

3) Должината на $\vec{a}\times\vec{b}$ е $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.



Тврдењето 1) од дефиницијата го определува правецот, 2) насоката, додека 3) должината на векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторскиот производ на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ уште се нарекува икс производ или надворешен производ и се користи и ознаката $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

<u>Пример 4.4.1</u>. Должината на векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ такви што $|\vec{a}|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$ и $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ е $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=3\cdot2\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=6\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

Теорема 4.4.2. (Координатна форма на векторски производ) Векторскиот производ на просторните вектори $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ е векторот

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\ (1).$$

Доказ. Нека се дадени векторите $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ и $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$. Нека

$$\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\right).$$

● Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$ или $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\pi$, па $\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$. Оттука, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=0$ па $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Од друга страна и $\vec{c}=0$ бидејќи сите дворедни детерминанти во (1) се 0 кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. Следува $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$. (бидејќи по договор нултиот вектор е колинеарен со кој било друг вектор, овде се содржи случајот кога некој од векторите е $\vec{0}$).

● Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни т.е. $\vec{a}\times\vec{b}\neq 0$, од каде следува дека $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$.

1) Векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ бидејќи $\vec{a}\vec{c}=0$ и $\vec{b}\vec{c}=0$. Имено,

$$\vec{a}\vec{c}=\left(a_1,a_2,a_3\right)\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=$$

$$a_1\left(a_2b_3-a_3b_2\right)+a_2\left(a_3b_1-a_1b_3\right)+a_3\left(a_1b_2-a_2b_1\right)=$$

$$\underline{a_1a_2b_3}-\underline{\underline{a_1a_3b_2}}+a_2a_3b_1-\underline{a_1a_2b_3}+\underline{\underline{a_1a_3b_2}}-a_2a_3b_1=0.$$

Вториот производ се покажува аналогно. Следува дека $\vec{c}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ имаат ист правец.

2) Ќе покажеме дека $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ т.е. $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Ќе ги пресметаме квадратите на левата и десната страна од равенството

$$\left|\vec{c}\right|^2=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2=$$

$$a_2^{\,2}b_3^{\,2}-2a_2a_3b_2b_3+a_3^{\,2}b_2^{\,2}+a_3^{\,2}b_1^{\,2}-2a_1a_3b_1b_3+a_1^{\,2}b_3^{\,2}+a_1^{\,2}b_2^{\,2}-2a_1a_2b_1b_2+a_2^{\,2}b_1^{\,2},$$

и

$$\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left(1-\cos^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)=$$

$$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=$$

$$\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}\right)\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2=$$

$$a_2^{\,2}b_3^{\,2}-2a_2a_3b_2b_3+a_3^{\,2}b_2^{\,2}+a_3^{\,2}b_1^{\,2}-2a_1a_3b_1b_3+a_1^{\,2}b_3^{\,2}+a_1^{\,2}b_2^{\,2}-2a_1a_2b_1b_2+a_2^{\,2}b_1^{\,2}.$$

Добивме: $\left|\vec{c}\right|^2=\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)^2$, од каде $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|$. Бидејќи

$$\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in\left[0,\pi\right],\ \sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\geq 0,\text{ па }\sqrt{\sin^2\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)}=\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Значи, $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, што требаше да се докаже.

3) Се покажува дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат десна тројка вектори бидејќи векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ формираат десна тројка вектори т.е $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}>0$.■

<u>Пример 4.4.2</u>. Векторскиот производ на векторите $\vec{a}=\left(-1,2,2\right)$ и $\vec{b}=\left(4,-3,0\right)$ е

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}2 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}\right)=\left(6,8,-5\right)\text{ и има должина}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{36+64+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}.$$

Задача 4.4.3. Дадени се векторите $\vec{a}=(1,-3,1)$ и $\vec{b}=(-1,2,-2)$. Најди го векторскиот производ $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{a})$.

Решение. Бидејќи $2\vec{a}+\vec{b}=(2,-6,2)+(-1,2,-2)=(1,-4,0)$ и $\vec{b}-\vec{a}=(-2,5,-3)$, имаме:

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{a})=\left(\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 5 & -3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -4\\ -2 & 5\end{vmatrix}\right)=(12,3,-3).$$

<u>Векторски производ од базните вектори.</u> За векторите $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ и $\vec{k}=(0,0,1)$ важи $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ и $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ и $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$. Значи во низата вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{i},\vec{j}$ векторскиот производ на два соседни вектори одејќи од лево е следниот вектор, додека одејќи од десно кон лево е исто така следниот вектор, но со знак минус.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Ако $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ тогаш векторскиот производ ако $\vec{a}\times\vec{b}$ може да го запишеме со „детерминантата“ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$ во која елементите од првата редица се вектори.

Теорема 4.4.3. (Својства на векторски производ) За секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и скалар λ важи:

1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$; 2) Ако $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$, тогаш $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

3) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$; 4) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$;

5) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$; 6) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Доказ. 1) и 2) следуваат директно од дефиницијата за векторски производ. Имено, $|\vec{a}\times\vec{a}|=|\vec{a}|^2\sin 0=0$, од каде $\vec{a}\times\vec{a}=0$ и ако $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$ тогаш $|\vec{a}\times\vec{b}|=0$, па $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Нека се дадени векторите $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ и $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ и бројот λ. Тогаш векторот $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$ и $\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)$ и

3) $$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(-\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right)=$$

$$-\left(\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right)=-(\vec{b}\times\vec{a});$$

4) $$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\lambda\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(\begin{vmatrix}\lambda a_2 & \lambda a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\lambda a_3 & \lambda a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\lambda a_1 & \lambda a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(\lambda\vec{a})\times\vec{b};$$

$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ се покажува аналогно или со помош на 3) на следниов начин:

$$\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=-\left(\left(\lambda\vec{b}\right)\times\vec{a}\right)=-\lambda\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=-\lambda\left(-1\right)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

5) $$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3+c_3 & b_1+c_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2\end{vmatrix}\right)=$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ c_3 & c_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right)=$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)+\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ c_3 & c_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c};$$

6) Се докажува аналогно како 5), но може да се покаже и со помош на 5), 3) и 4).

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=-\left(\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)=-\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.\blacksquare$$

Примена на векторски производ. Ќе утврдиме критериум за колинеарност на два вектора со помош на векторски производ. Ќе покажеме дека должината на векторскиот производ $\vec{a}\times\vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е плоштина на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ова ќе биде искористено за пресметување во плоштина и висина на паралелограм и триаголник, а понатаму во делот на аналитичка геометрија и за пресметување на растојание од точка до права.

Теорема 4.4.4. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}\vee\vec{b}=\vec{0}\vee\left(|\vec{a}|\neq 0\wedge|\vec{b}|\neq 0\wedge\vec{a}\|\vec{b}\right)$.

Доказ. Имаме:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$|\vec{a}|=0\vee|\vec{b}|=0\vee\left(|\vec{a}|\neq 0\wedge|\vec{b}|\neq 0\wedge\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\vec{a}=\vec{0}\vee\vec{b}=\vec{0}\vee\left(|\vec{a}|\neq 0\wedge|\vec{b}|\neq 0\wedge\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in\{0,\pi\}\right)\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}\vee\vec{b}=\vec{0}\vee\left(|\vec{a}|\neq 0\wedge|\vec{b}|\neq 0\wedge\vec{a}\|\vec{b}\right).$$

Последица 4.4.5. (Критериум за колинеарност на два вектора) Ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни ако и само ако $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Доказ. Директно следува од 4.4.4.

Пример 4.4.4. Дали векторите $\vec{a}=\left(1,-3,1\right)$ и $\vec{b}=\left(-1,2,-2\right)$ се колинерни.

Решение. Бидејќи векторскиот производ

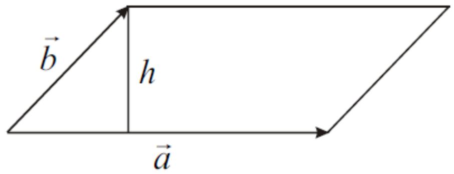
$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2\end{vmatrix}\right)=\left(4,1,-1\right)$$

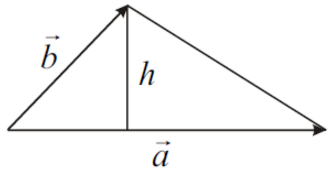
не е нултиот вектор, следува дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни.

Теорема 4.4.6. (Формула за плоштина на паралелограм преку векторски производ) Плоштината на паралелограмот (триаголникот) конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е $P=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ ($P=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$).

Доказ. Плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е

$$P = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = |\vec{a}\times\vec{b}|$$





Плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е половина од плоштината на паралелограмот, па $P = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.■

Теорема 4.4.7. (Формула за висина во паралелограм преку векторски производ) Висината на паралелограмот (триаголникот) конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нормална на страната конструирана над векторот $\vec{a}$ е $h = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

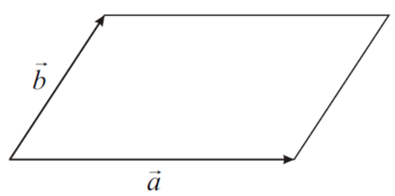
Доказ. Од формулата за плоштина на паралелограм $P = |\vec{a}|h$, односно $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|h$ добиваме $h = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Триаголникот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ има иста висина.■

<u>Пример 4.4.5</u>. Плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ каде $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\pi}{4}$ е $P = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Висината спуштена кон страната конструирана над $\vec{a}$ е $h = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

<u>Пример 4.4.6</u>. Плоштината на триаголникот ABC, $A(1,-2,1)$, $B(1,0,0)$ и $C(0,1,2)$, ја добиваме ако ги најдеме векторите $\overrightarrow{AB} = (0,2,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,3,1)$. Оттука,

$$P = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 0\\1 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 2\\-1 & 3\end{vmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}|(5,1,2)| = \frac{1}{2}\sqrt{25+1+4} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Висината спуштена од темето C кон страната AB е $h = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}$.



Задача 4.4.6. Најди ја плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$, каде што $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\frac{\pi}{6}$.

Решение. Плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изнесува:

$$P = |\vec{a}\times\vec{b}| = \left|(\vec{m}+2\vec{n})\times(2\vec{m}+\vec{n})\right| = |\vec{m}\times 2\vec{m} + \vec{m}\times\vec{n} + 2\vec{n}\times 2\vec{m} + 2\vec{n}\times\vec{n}| =$$

$$\left|\vec{m}\times\vec{n} + 2\cdot 2\left(\vec{n}\times\vec{m}\right)\right| = \left|\vec{m}\times\vec{n} - 4\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)\right| = \left|-3\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)\right| = 3|\vec{m}\times\vec{n}| =$$

$$3|\vec{m}||\vec{n}|\sin\langle m,n\rangle = 3\cdot 1\cdot 1\sin\frac{\pi}{6} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

4.5 МЕШАН ПРОИЗВОД

Дефиниција 4.5.1. (Геометриска форма на мешан производ) Мешан производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ознака $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, е скаларот $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

Теорема 4.5.2. (Координатна форма на мешан производ) Ако

$$\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right),\ \vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right) \text{ и } \vec{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right), \text{ тогаш } \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Доказ. Нека $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$, $\vec{b}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ и $\vec{c}=\left(c_1,c_2,c_3\right)$. Тогаш:

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(b_2c_3-b_3c_2,b_3c_1-b_1c_3,b_1c_2-b_2c_1\right) \text{ и}$$

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=a_1\left(b_2c_3-b_3c_2\right)+a_2\left(b_3c_1-b_1c_3\right)+a_3\left(b_1c_2-b_2c_1\right)=$$

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1=$$

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.\blacksquare$$

Важи:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{=}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Затоа може да напишеме $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$.

Пример 4.5.1. Мешаниот производ на векторите

$$\vec{a}=\left(2,-1,3\right),\ \vec{b}=\left(1,-2,0\right) \text{ и } \vec{c}=\left(0,0,2\right) \text{ е } \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=-8+2=-6.$$

Теорема 4.5.3. (Својства на мешан производ) За секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и скалар λ, важи:

1) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)$;

2) $\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}\right)$;

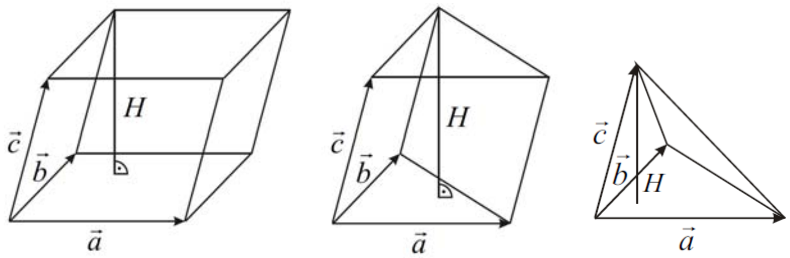
3) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)$.

Доказ. Својствата директно следуваат од својствата на детерминанти. Претходно покажавме едно од равенствата во 3) , $\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.$\blacksquare$

Примена на мешаниот производ. Ќе покажеме дека апсолутната вредност на мешаниот производ на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е волуменот паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. На тој начин, со помош на мешан производ, ќе можеме да го пресметаме волуменот на паралелопипедот, тристраната призма и тетраедарот, како и нивните висини, а во делот на аналитичка геометрија и растојание меѓу прави. На крај, ќе дадеме критериум кога три вектори лежат во иста рамнина.

Теорема 4.5.4. (Формула за волумен на паралелопипед преку мешан производ) Волуменот на паралелопипедот (тристраната призма, тетраедарот) конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е $V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$ ($V=\frac{1}{2}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$, $V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$).

Доказ. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не лежат во иста рамнина. Тогаш волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е:



$$V=BH=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\bar{u}p_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\frac{\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\right|=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|.$$

Волуменот на тристрана призма (тетраедар) е 2 пати (6 пати) помал од волуменот на паралелопипедот конструирани над истите вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, па важат другите 2 формули.■

Пример 4.5.2. Волумените V_1, V_2 и V_3 на паралелопипедот, тристраната призма и тетраедарот конструиран над векторите $\vec{a}=(2,1,3)$, $\vec{b}=(1,0,1)$ и $\vec{c}=(3,2,1)$ ќе ги најдеме откако ќе го пресметаме мешаниот производ

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&0&1\\3&2&1\end{vmatrix}=3+6-4-1=4,$$

и ќе ги примениме формулите од претходната теорема

$$V_1=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=4,\ V_2=\frac{1}{2}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=2 \text{ и } V_3=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.■$$

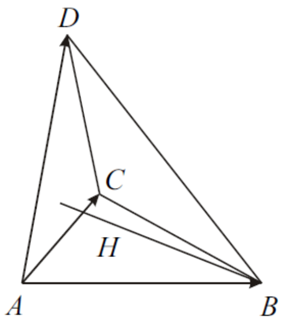
Теорема 4.5.5. (Формула за висина во паралелопипед преку мешан производ) Висината на паралелопипедот (тристраната призма, тетраедарот) конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, нормална на страната конструирана над $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е $H=\frac{\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$.

Доказ. Од геометрија познато е дека формулата за пресметување на волумен на паралелопипед е $V = BH$, каде B е плоштината на базата, а H висината спуштена кон истата. Следува $\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| H$, од каде $H = \dfrac{\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$.

Призмата и тетраедарот конструирани над истите вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имаат иста висина спуштена кон иста страна.■

Задача 4.5.3. Дадени се темињата на тетраедарот $ABCD$: $A(2,-1,3)$, $B(5,-2,5)$, $C(4,-1,2)$ и $D(2,0,4)$. Пресметај ја должината на висината спуштена од темето B.

Решение. Висината спуштена од темето B е $H = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|}$. Имаме: $\overrightarrow{AB} = (3,-1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (2,0,-1)$ и $\overrightarrow{AD} = (0,1,1)$,



$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4+3+2 = 9,\quad \left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right| = 9,$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (1,-2,2) \text{ и}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3. \text{ Следува: } H = \frac{9}{3} = 3.■$$

Покажавме дека ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не се компланарни вектори, тогаш $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \neq 0$ и обратно, бидејќи волуменот на паралелопипедот конструиран над $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не може да е нула. Еквивалентното тврдење е искажано во следнава теорема:

Теорема 4.5.6. (Критериум за компланарност на 3 вектори) Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни ако и само ако мешаниот производ $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 0$.

4.6 ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ И НЕЗАВИСНОСТ НА ВЕКТОРИ

Дефиниција 4.6.1. Векторите $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ се **линеарно независни** ако

$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$, само кога $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Дефиниција 4.6.2. Векторите $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ се **линеарно зависни** ако

$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$ и барем еден скалар $x_i \neq 0$, $i \in \{1,2,...n\}$.

<u>Пример 4.6.1</u>. Нека $\vec{a}$ е вектор и $\vec{b} = -2\cdot\vec{a}$. Тогаш $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни бидејќи

$$2\vec{a} + (-2)\vec{a} = \vec{0} \text{ т.е. } 2\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \text{ и } 2 \neq 0.$$

Теорема 4.6.3. Векторите $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ се линеарно зависни, ако и само ако барем еден од нив може да се запише како линеарна комбинација од останатите.

Доказ. Нека векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно зависни. Следува:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \vec{0} \text{ и } x_i \neq 0 \text{ за некое } i \in \{1,2,...n\}.$$

Но, тогаш важи:

$$x_i\vec{a}_i = -x_1\vec{a}_1 - x_2\vec{a}_2 - ... - x_{i-1}\vec{a}_{i-1} - x_{i+1}\vec{a}_{i+1} - ... - x_n\vec{a}_n \Leftrightarrow$$

$$\vec{a}_i = -\frac{x_1}{x_i}\vec{a}_1 - \frac{x_2}{x_i}\vec{a}_2 - ... - \frac{x_{i-1}}{x_i}\vec{a}_{i-1} - \frac{x_{i+1}}{x_i}\vec{a}_{i+1} - ... - \frac{x_n}{x_i}\vec{a}_n,$$

односно векторот $\vec{a}_i$ е линеарна комбинација од останатите вектори.

Обратно. Не губиме од општоста ако претпоставиме дека векторот $\vec{a}_n$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ т.е. постојат скалари $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ такви што $\vec{a}_n = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_{n-1}\vec{a}_{n-1}$. Тогаш $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_{n-1}\vec{a}_{n-1} + (-1)\vec{a}_n = \vec{0}$ и $-1 \neq 0$, односно векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно зависни.■

Од теоремата следува дека векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно независни, акко ниту еден вектор од нив не може да се запише како линеарна комбинација од останатите.

Теорема 4.6.4. Нека се дадени векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

а) Ако меѓу векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се наоѓа нултиот вектор, тогаш векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно зависни.

б) Ако некои од векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно зависни, тогаш сите вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно зависни.

в) Ако векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно независни, тогаш кое било подмножество од нив е линеарно независно.

Доказ. а) Нека $\vec{a}_i = \vec{0}$ за некој $i \in \{1,2,...,n\}$. Тогаш:

$$0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + ... + 0\vec{a}_{i-1} + 1\vec{a}_i + 0\vec{a}_{i+1} + ... + 0\vec{a}_n = \vec{0} \text{ и } 1 \neq 0,$$

следува векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно зависни.

б) Не губиме од општост ако претпоставиме дека векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$, $1 \leq k \leq n$, се линеарно зависни. Следува $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_k\vec{a}_k = \vec{0}$ и постои број $x_i \neq 0$, $i \in \{1,2,...,k\}$. Тогаш:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_k\vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + ... + 0\vec{a}_n = \vec{0} \text{ и } x_i \neq 0 \text{ за некое } i \in \{1,2,...,n\},$$

па векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ се линеарно независни.

в) Следува директно од б).

Теорема 4.6.5. (Критериум за линеарна зависност во простор) Важат следниве тврдења:

1) Два вектора се линеарно зависни акко се колинеарни;

2) Три вектори се линеарно зависни акко се компланарни; и

3) Било кои четири вектори се линеарно зависни.

Доказ. 1) $\Rightarrow$ Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни тогаш важи:

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \text{ и } (x \neq 0 \text{ или } y \neq 0)$$

Ако $x \neq 0$, тогаш $\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$, т.е. векторите се колинеарни. Слично се заклучува кога $y \neq 0$.

$\Leftarrow$Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни тогаш $\vec{b} = x\vec{a}$ за некој ненулт број x или $\vec{a} = y\vec{b}$ за некој ненулт број y. Нека $\vec{b} = x\vec{a}$. Тогаш $x\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ и $-1 \neq 0$, што значи дека векторите се линеарно зависни. Аналогно заклучуваме ако $\vec{a} = y\vec{b}$.

2) Ако векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни, тогаш постојат броеви x, y и z такви што

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \text{ и } (x \neq 0 \text{ или } y \neq 0 \text{ или } z \neq 0).$$

Да претпоставиме дека $x \neq 0$. Тогаш,

$$\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b} - -\frac{z}{x}\vec{c},$$

Тогаш од својства на детерминанти следува дека $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 0$, односно дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни.

Обратно, нека векторите $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$ и $\vec{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right)$, се компланарни. Тогаш $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 0$. Да го разгледаме равенството

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) + z(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$
$$(xa_1 + yb_1 + zc_1, xa_2 + yb_2 + zc_2, xa_3 + yb_3 + zc_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$
$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,\ a_2x + b_2y + c_2z = 0,\ a_3x + b_3y + c_3z = 0.$$

Последниот систем е хомоген систем по непознатите x, y и z кој има бесконечно решенија бидејќи детерминантата на системот $D = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 0$. Следува постои ненулт скалар x, y или z така што $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, односно векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни.

3) Ако три вектори се компланарни, тогаш тие се линеарно зависни па според теорема 4.6.4 б), и четирите вектори ќе бидат линеарно зависни.

Нека постојат три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ кои не се линеарно зависни. Тогаш $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \neq 0$. Следува равенството $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$ каде $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\vec{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$, $\vec{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right)$ и $\vec{d} = \left(d_1, d_2, d_3\right)$ се сведува на системот

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2,\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

кој има решение бидејќи неговата детерминанта $D = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \neq 0$. Оттука, постојат x, y и z такви што $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$ и $-1 \neq 0$, односно $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се линеарно зависни.■

Од последната теорема следува дека било кои два вектора на права се линеарно зависни и кои било три вектори во рамнина се линеарно зависни.

Задача 4.6.2. Докажи дека векторите $\vec{a} = \left(-1, 3, 2\right)$, $\vec{b} = \left(-2, -3, 4\right)$ и $\vec{c} = \left(-3, 12, 6\right)$ се линеарно зависни, а потоа ако е можно, изрази го векторот $\vec{c}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Детерминантата $D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$, бидејќи коефициентите во првата и третата колона се пропорционални. Следува дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни.

Векторот $\vec{c}$ е линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, акко

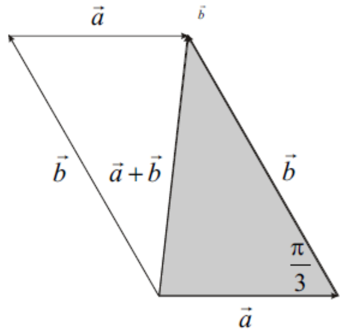
$$(-3,12,6)=x(-1,3,2)+y(-2,-3,4)\Leftrightarrow(-3,12,6)=(-x-2y,3x-3y,2x+4y)\Leftrightarrow$$

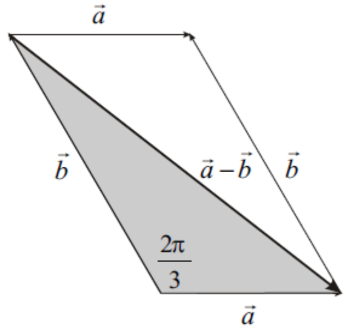
$$\begin{cases}-x-2y=-3\\ 3x-3y=12\\ 2x+4y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\ x-y=4\\ x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\ x-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+4\\ 3y+4=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}\\ x=\dfrac{11}{3}\end{cases}.\text{ Значи } \vec{c}=\frac{11}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}.$$

ЗАДАЧИ

4.1 Операции со вектори

Задача 4.1.2. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат должини $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=5$ и зафаќаат агол $\alpha=\frac{2\pi}{3}$. Конструирај ги збирот и разликата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и определи ги нивните должини.





Решение. На цртежот се претставени векторите $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, според правилото на паралелограм.

Нека $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$. Од косинусната теорема, имаме:

$$|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\frac{1}{2}=34-15=19 \text{ и}$$

$$|\vec{d}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=34+15=49.$$

Значи должините на збирот и разликата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се $\sqrt{19}$ и 7, соодветно.

Задача 4.1.3. Дали може должината на збирот од два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ да биде помала од должината на секој од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Одговор. Да, може, на пример кога $\vec{a}\neq0$ и $\vec{b}=-\vec{a}$.

Задача 4.1.4. Со помош на векторите $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{v}=2\vec{a}+\vec{b}$ изрази го векторот $2\vec{b}-\vec{a}$

Решение. Ги изразуваме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ преку векторите $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

$$\begin{cases}\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}\\ \vec{v}=2\vec{a}+\vec{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{b}=\vec{a}-\vec{u}\\ \vec{v}=2\vec{a}+\vec{a}-\vec{u}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}=\dfrac{1}{3}\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}\\ \vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}-\vec{u}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}=\dfrac{1}{3}\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}\\ \vec{b}=-\dfrac{2}{3}\vec{u}+\dfrac{1}{3}\vec{v}\end{cases}.$$

Оттука $2\vec{b}-\vec{a}=-\frac{4}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}-\frac{1}{3}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}=-\frac{5}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$.

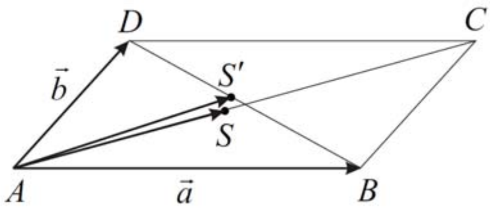
Задача 4.1.5. Со помош на векторите $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{v}=2\vec{a}+\vec{b}$ изрази го векторот $4\vec{a}-3\vec{b}$.

Одговор. $4\vec{a}-3\vec{b}=\frac{10}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$.

Задача 4.1.6. Докажи дека услов за формирање на триаголник од ненултите вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Задача 4.1.7. Докажи дека може да се конструира триаголник чии страни се еднакви и паралелни со тежишните линии на даден триаголник.

Задача 4.1.8. Докажи дека дијагоналите во паралелограмот $ABCD$ се преполовуваат.



Решение. Нека е даден паралелограмот $ABCD$ и $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$. Следува: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$.

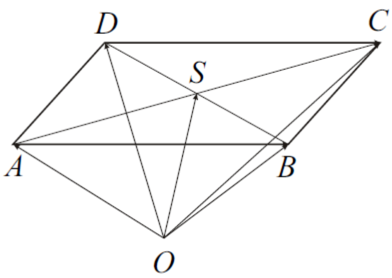
Нека S е средина на странта AC и S' е средина на страната BD. Тогаш, $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ и

$$\overrightarrow{AS'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS'}=\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

Следува дека $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AS'}$, односно $S\equiv S'$ т.е. дека дијагоналите се преполовуваат.

Задача 4.1.9. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ и A, B, C и D не се колинеарни.

Задача 4.1.10. Докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако за произволна точка O важи: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

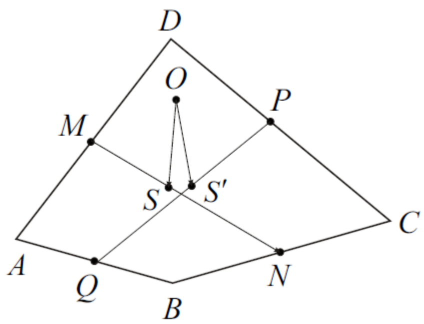


Задача 4.1.11. Даден е паралелограмот $ABCD$ и произволна точка O. Ако S е пресекот а дијагоналите тогаш:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OS}.$$

Решение. Бидејќи дијагоналите во паралелограмот се преполовуваат, важи $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\vec{0}$. Заради $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SD}$, добиваме: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OS}+\underbrace{\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}}_{\vec{0}}=4\overrightarrow{OS}$.

Задача 4.1.12. Докажи дека средните линии, во произволен четириаголник, се преполовуваат.



Решение. Нека точките M, N, P и Q се средини на страните AD, BC, CD и AB на четириаголникот $ABCD$, соодветно. Нека S е средина на отсечката MN, а S' е средина на отсечката PQ.

За да ја видиме врската помеѓу векторите $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{OS'}$, истите ги изразуваме преку векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$. Со помош на формулата за делење на отсечка во даден однос, за произволна точка O важи:

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right) \text{ и}$$

$$\overrightarrow{OS'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right).$$

Значи $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OS'}$, од каде добиваме дека точките S и S' се совпаѓаат. Следува дека средните линии, во произволен четириаголник, се преполовуваат.

Задача 4.1.13. Во паралелограмот $ABCD$, на страната AD се наоѓа точка L, таква што $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, на дијагоналата AC се наоѓа точка M таква што $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, и на страната

BC се наоѓа точка N таква што $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$. Докажи дека точките L, M и N, лежат на една права. Пресметај во каков однос точката M ја дели отсечката LN.

Задача 4.1.14. Нека A, B, C и D се четири точки во просторот, а P и Q се средини на отсечките AC и BD. Докажи дека $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{PQ}$.

Задача 4.1.15. Нека M и N се средини на страните AD и BC во четириаголникот $ABCD$. Докажи дека $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.

Задача 4.1.16. Докажи дека средната линија на трапезот е $ABCD$ е паралелна со основите, а нејзината должина е еднаква на полузбирот од основите.

Задача 4.1.17. Во рамнокрак трапез $OACB$ аголот BOA е $60°$ и $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=2$. Точките M и N се средини на страните BC и AC, соодветно. Изрази ги векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ со помош на векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ кои се единечни вектори по правците $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соодветно.

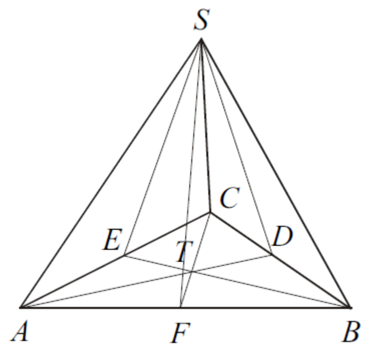
Задача 4.1.18. Во паралелограмот $ABCD$, точката M е средина на страната AD, а точката N е средина на страната AB. Изрази го векторот $\overrightarrow{AT}$, каде T е тежиштето на триаголникот ABD, преку векторите $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

Задача 4.1.19. Дадена е тристрана пирамида чија основа е триаголникот ABC, а врвот е во точката S. Средините на рабовите на основата BC, CA и AB се обележани со D, E и F, соодветно. Покажи дека $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{FS}$.

Решение. Ги изразуваме векторите $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$ и $\overrightarrow{CS}$ со помош на векторите на страните на триаголникот ABC и векторите $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{ES}$ и $\overrightarrow{FS}$. Имаме:

$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}$ и

$$\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ES}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ES}.$$



Со собирање на левите и десните страни од равенствата добиваме:

$$\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}=$$

$$\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}}_{0}\Big)+\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{FS}=\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{FS}.$$

Задача 4.1.20. Во тетраедарот $OABC$, дадени се рабовите $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$. Со помош на дадените вектори изрази ги векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, како и векторот $\overrightarrow{OT}$, каде T е тежиштето на триаголникот ABC.

4.2 Координати на вектор

Задача 4.2.7. Дадени се векторите $\vec{a}=(2,-2,1)$ и $\vec{b}=(-1,2,5)$. Најди ја должината на векторот $\vec{a}$ и векторите $\vec{a}+\vec{b}$ и $5\vec{a}-2\vec{b}$.

Решение. Должината на векторот $\vec{a}$ изнесува $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$, векторот

$$\vec{a}+\vec{b}=(2-1,-2+2,1+5)=(1,0,6) \text{ и}$$

$$5\vec{a}-2\vec{b}=5(2,-2,1)-2(-1,2,5)=(10,-10,5)+(2,-4,-10)=(12,-14,-5).$$

Задача 4.2.8. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC, $A(1,2,1)$, $B(3,1,-1)$, $C(2,3,1)$. **Одговор.** $L = 6\sqrt{2}$.

Задача 4.2.9. Дадени се три последователни темиња на паралелограмот $ABCD$: $A(-3,2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$. Определи ги координатите на четвртото теме D.

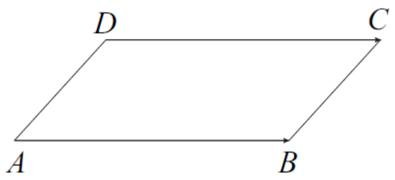
Одговор. $D(-1,5,1)$.

Задача 4.2.10. Дадени се три последователни темиња на паралелограмот $ABCD$: $A(-3,2,t)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,t,2)$. Определи ги темињата на паралелограмот така што должината на отсечката $\overrightarrow{AD}$ да изнесува $\sqrt{14}$.

Решение. Нека координатите на темето D се $D(x,y,z)$. Во паралелограмот $ABCD$, важи $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, каде $\overrightarrow{AB} = (6,-5,1-t)$ и $\overrightarrow{DC} = (5-x, t-y, 2-z)$, од каде

$$6 = 5 - x,\ -5 = t - y,\ 1 - t = 2 - z \Leftrightarrow x = -1,\ y = t + 5,\ z = 1 + t.$$

Следува: $D(-1, t+5, t+1)$. Од условот на задачата $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{14}$, имаме:



$$|(2, t+3, 1)| = \sqrt{14} \Leftrightarrow \sqrt{2^2 + (t+3)^2 + 1} = \sqrt{14} \Leftrightarrow$$
$$5 + t^2 + 6t + 9 = 14 \Leftrightarrow t(t+6) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -6.$$

Значи задачата има две решенија. За $t = 0$ ги добиваме точките $A(-3,2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$ и $D(-1,5,1)$, а за $t = -6$, точките $A(-3,2,-6)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,-6,2)$ и $D(-1,-1,-5)$.

Задача 4.2.11. Темињата во четириаголникот $ABCD$ се $A(2,0,4)$, $B(7,-15,16)$ и $C(-1,-1,11)$ и $D(-14,28,-6)$. Докажи дека $ABCD$ е трапез.

Задача 4.2.12. Средините на страните во триаголникот се во точките $A_1(2,3,0)$, $B_1(4,-1,1)$ и $C_1(-2,1,-1)$. Најди ги координатите на темињата во триаголникот.

Одговор. $A(0,-3,0)$, $B(-4,5,-2)$ и $C(8,1,2)$.

Задача 4.2.13. Дадени се темињата $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ во триаголникот ABC. Определи ги координатите на тежиштето T.

Одговор. $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$, $z = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

Задача 4.2.14. Најди ги координатите на тежиштето T на триаголникот ABC, чии темиња се $A(-2,1,3)$, $B(1,2,-1)$ и $C(1,-3,-2)$. **Одговор.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача 4.2.15. Отсечката чии крајни точки се $A(5,10,4)$ и $B(-2,3,-3)$ со внатрешните точки M и N е поделена на 3 дела така што, тргнувајќи од A кон B, секој следен дел е 2 пати поголем од претходниот. Определи ги координатите на точките M и N.

Одговор. $M(4,9,3)$ и $N(2,7,1)$.

Задача 4.2.16. Паралелопипедот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со теме во точката $A(2,1,0)$ е генериран од векторите $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{AD} = (-1,2,1)$ и $\overrightarrow{AA_1} = (1,1,1)$. Определи ги координатите на останатите темиња. Покажи дека просторните дијагонали во паралелопипедот се сечат во една точка, која ги преполовува истите.

Одговор. $B(3,1,1)$, $C(2,3,2)$, $D(1,3,1)$, $A_1(3,2,1)$, $B_1(4,2,2)$, $C_1(3,4,3)$ и $D_1(2,4,2)$.

4.3 Скаларен производ

Задача 4.3.11. Дадени се векторите $\vec{a} = (2,1,4)$, $\vec{b} = (1,-2,-3)$ и $\vec{c} = (1,1,1)$. Најди ги координатите на векторот $\vec{x}$ кој е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{c} \cdot \vec{x} = 2$.

Одговор. $\vec{x}=(1,2,-1)$.

Задача 4.3.12. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зафаќаат агол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Ако се знае дека нивните должини се $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ и $|\vec{b}|=1$, пресметај го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$. **Одговор.** $\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Задача 4.3.13. Определи го аголот меѓу векторите $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, ако должините на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ и $|\vec{c}|=1$ и аглите што ги зафаќаат се $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{5\pi}{6}$ и $\sphericalangle(\vec{b},\vec{c})=\dfrac{\pi}{4}$.

Одговор. $\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{7+\sqrt{3}+15\sqrt{2}/2}{\sqrt{31-12\sqrt{3}-6\sqrt{2}}\sqrt{53+2\sqrt{3}-6\sqrt{2}}}$.

Задача 4.3.14. Определи го аголот меѓу единечните вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$, ако $\vec{m}+2\vec{n}$ и $5\vec{m}-4\vec{n}$ се заемно нормални вектори. **Одговор.** $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 4.3.15. Најди го аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, каде $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\dfrac{\pi}{3}$.

Одговор. $\cos\sphericalangle(\vec{d}_1,\vec{d}_2)=\dfrac{4}{\sqrt{91}}$.

Задача 16. Во триаголникот ABC, $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-6\vec{b}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{a}+7\vec{b}$, каде $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални ортови. Определи ги страните и аглите на триаголникот ABC.

Одговор. $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{BC}|=5\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10}$,

$$\sphericalangle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2},\ \cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{и}\ \cos\sphericalangle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Задача 4.3.17. Докажи дека дијагоналите во ромбот $ABCD$ се заемно нормални.

Задача 4.3.18. Докажи дека со помош на векторите $\vec{a}=(10,-5,10)$, $\vec{b}=(-11,-2,10)$ и $\vec{c}=(-2,-14,-5)$ може да се конструира коцка.

Задача 4.3.19. За единечните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Пресметај го изразот $\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$. **Одговор.** $-\dfrac{3}{2}$.

Задача 4.3.20*. Докажи ја косинусната теорема, „Во секој триаголник ABC важи равенството $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, каде $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$ и $\alpha=\angle BAC$.“

Задача 4.3.21. Дадени се страните на триаголникот ABC, $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$. Пресметај ја должината на висината CD, ако $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се единечни заемно нормални вектори. **Одговор.** $h=\dfrac{19}{5}$ **Забелешка:** Задачата се решава и со примена на векторски производ.

Задача 4.3.22. Определи го аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ако векторот $\vec{a}+3\vec{b}$ е нормален на векторот $7\vec{a}-5\vec{b}$, а векторот $\vec{a}-4\vec{b}$ е нормален на векторот $7\vec{a}-2\vec{b}$.

Одговор. $\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 4.3.23*. Докажи дека висините во секој триаголник ABC, се сечат во една точка, која се нарекува ортоцентар.

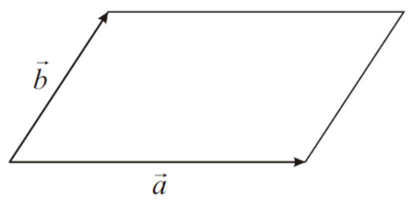
Задача 4.3.24. За триаголникот ABC познати се должините на неговите страни a, b и c. Најди ја должината на тежишната линија спуштена од темето A.

Задача 4.3.25. Докажи дека во секој паралелограм збирот од квадратите на дијагоналите е еднаков на двојниот збир од квадратите на две соседни страни.

4.4 Векторски производ

Задача 4.4.7. Најди ја плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, каде што $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\dfrac{\pi}{6}$.

Одговор. $P=\dfrac{3}{2}$.



Задача 4.4.8. Пресметај ја плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a}=2\vec{n}-\vec{m}$ и $\vec{b}=3\vec{m}+2\vec{n}$, ако $|\vec{m}|=5$ и $|\vec{n}|=5$ $\measuredangle\left(\vec{m},\vec{n}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изнесува:

$$P=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\left(2\vec{n}-\vec{m}\right)\times\left(3\vec{m}+2\vec{n}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|6\left(\vec{n}\times\vec{m}\right)-2\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-8\left(\vec{m}\times\vec{n}\right)\right|=$$

$$=4|\vec{m}||\vec{n}|\sin\langle m,n\rangle=4\cdot5\cdot5\sin\frac{\pi}{4}=100\frac{\sqrt{2}}{2}=50\sqrt{2}.$$

Задача 4.4.9. Дадени се темињата на триаголникот ABC: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ и $C(1,3,-1)$. Пресметај ја висината повлечена од темето B кон страната AC.

Одговор. $h_b=5$.

Задача 4.4.10. Докажи дека плоштината на паралелограмот $ABCD$ е $P=\dfrac{1}{2}\left|\vec{d}_1\times\vec{d}_2\right|$, каде $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ се векторите кои лежат над дијагоналите AC и BD.

Задача 4.4.11. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се определени од векторите $\vec{d}_1=\left(3,1,-2\right)$ и $\vec{d}_2=\left(1,-3,4\right)$.

Задача 4.4.12. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се конструирани над векторите $\vec{d}_1=3\vec{m}+3\vec{n}$ и $\vec{d}_2=\vec{m}-\vec{n}$ каде што $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни вектори кои зафаќаат агол $\dfrac{\pi}{6}$. **Одговор.** $P=\dfrac{3}{2}$.

Задача 4.4.13*. Докажи ја синусната теорема: „Во секој триаголник ABC важи $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$, каде $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$ и $\alpha=\angle BAC$, $\beta=\angle ABC$ и $\gamma=\angle ACB$.“

Задача 4.4.14. Пресметај ја проекцијата на векторот $\vec{a}=\left(3,-12,4\right)$ врз векторот $\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$, ако $\vec{c}=\left(1,0,-2\right)$ и $\vec{d}=\left(1,3,-4\right)$. **Одговор.** $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{6}{13}$.

Задача 4.4.15. Најди вектор $\vec{x}$ кој е нормален на векторите $\vec{a}=(1,2,7)$ и $\vec{b}=(1,-2,3)$, а неговата проекција врз векторот $\vec{c}=(1,2,-7)$ е $\frac{10}{3\sqrt{6}}$. **Одговор.** $\vec{x}=(7,5,1)$.

Задача 4.4.16. Докажи го равенството $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$.

4.5 Мешан производ

Задача 4.5.4-5. Пресметај го мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако:

1) $\vec{a}=(3,-1,2)$, $\vec{b}=(2,-2,5)$ и $\vec{c}=(0,-7,3)$

2) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=5$, $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\pi}{3}$ и $\sphericalangle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=\frac{\pi}{4}$.

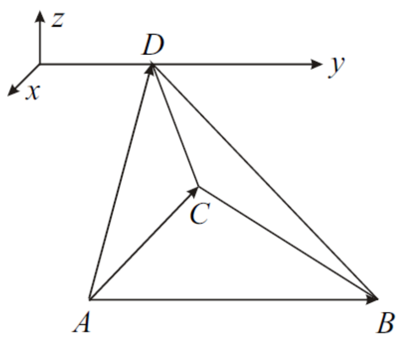
Задача 4.5.6. Провери дали точките $A(1,-1,2)$, $B(-2,1,3)$, $C(1,0,1)$ и $D(2,-2,-1)$ лежат во иста рамнина. **Одговор.** Не лежат.

Задача 4.5.7. Определи параметарот t т.ш. векторите $\vec{a}=(\ln(t-2),-2,6)$, $\vec{b}=(t,-2,5)$ и $\vec{c}=(0,-1,3)$ да бидат компланарни. **Одговор.** $t=3$.

Задача 4.5.8. Дадени се точките $A(3,2,-3)$, $B(4,3,1)$, $C(7,0,1)$ и $D(6,-1,-3)$. Докажи дека точките A, B, C и D лежат во иста рамнина. Најди го аголот меѓу дијагоналите на четириаголникот $ABCD$. **Одговор.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Задача 4.5.9. Дадени се темињата на тетраедарот $ABCD$: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ и $D(-5,-4,8)$. Пресметај ја висината спуштена од темето D. **Одговор.** $H=11$.

Задача 4.5.10. Волуменот на тетраедарот $ABCD$ е 5. Трите негови темиња се во точките $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ и $C(2,-1,3)$. Определи ги координатите на четвртото теме D, ако е познато дека тоа лежи на y-оската.



Решение. Бидејќи темето D лежи на y-оската, неговите координати се $D(0,y,0)$.

Притоа, $\overrightarrow{AB}=(1,-1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-2,4)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,y-1,1)$ и

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 4\\ -2 & y-1 & 1\end{vmatrix}=-2+8-8-4(y-1)=-4y+2.$$

Од условот волуменот на тетраедарот да е 5 добиваме:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|\Leftrightarrow 5=\frac{1}{6}|2-4y|\Leftrightarrow 30=\pm(2-4y)\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}30=2-4y\\30=-2+4y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4y=28\\4y=32\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-7\\y=8\end{array}\right..$$

Следува задачата има две решенија $D_1(0,-7,0)$ и $D_2(0,8,0)$.

Задача 4.5.11. Пресметај ја висината во паралелопипедот конструиран над векторите

$$\vec{a}=(3,-2,5),\ \vec{b}=(1,-1,4)\text{ и }\vec{c}=(1,-3,1),$$

спуштена кон страната конструирана над векторите $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Задача 4.5.12. Пресметај ја висината во тетраедарот конструиран над векторите

$$\vec{a}=(2,3,1),\ \vec{b}=(1,2,4)\text{ и }\vec{c}=(3,-1,2),$$

спуштена кон страната конструирана над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 4.5.13*. Ако, $\vec{a} = a_1\vec{m} + a_2\vec{n} + a_3\vec{p}$, $\vec{b} = b_1\vec{m} + b_2\vec{n} + b_3\vec{p}$ и $\vec{c} = c_1\vec{m} + c_2\vec{n} + c_3\vec{p}$, тогаш волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е:

$$V = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| \left| (\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}) \right|.$$

Задача 4.5.14. Пресметај го волуменот на паралелопипедот, конструиран над векторите $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$, $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$ и $\vec{c} = \vec{m} - \vec{n} + \vec{p}$, ако волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ е 1. **Одговор.** $V = 4$.

Задача 4.5.15. Пресметај го волуменот на паралелопипедот, конструиран над векторите $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + \vec{p}$ и $\vec{c} = \vec{m} - \vec{n} - \vec{p}$, ако $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $|\vec{p}| = 3$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ и $\angle(\vec{p}, \Sigma) = \frac{\pi}{3}$, каде Σ е рамнината во која лежат векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$. **Одговор.** $V = \frac{27}{4}$.

Задача 4.5.16. За ненултите вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи равенството $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$. Докажи дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни.

4.6 Линеарна зависност и независност на вектори

Задача 4.6.3. Испитај ја линеарната зависност на векторите $\vec{a} = (1,1,2)$, $\vec{b} = (2,0,1)$ и $\vec{c} = (1,2,0)$, а потоа претстави го векторот $\vec{d} = (3,-3,4)$ како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение. а) Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни ако и само ако детерминантата формирана од координатите на векторите има вредност 0. Но,

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 8 - 2 = 7 \neq 0$. Следува дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни.

б) Нека векторот $\vec{d}$ е линеарна комбинација на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + c\vec{z} \Leftrightarrow (3,-3,4) = x(1,1,2) + y(2,0,1) + z(1,2,0) \Leftrightarrow$$

$$(3,-3,4) = (x + 2y + z, x + 2z, 2x + y) \Leftrightarrow x + 2y + z = 3,\ x + 2z = -3,\ 2x + y = 4.$$

Детерминантите на системот се:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 2 = 7,\ D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 - 3 - 6 = 7,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 + 4 + 6 - 8 = 14,\ D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 3 + 3 - 8 = 14,$$

од каде $x = \frac{D_x}{D} = \frac{7}{7} = 1$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{14}{7} = 2$ и $z = \frac{D_z}{D} = -\frac{14}{7} = -2$. Следува $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$.

Задача 4.6.4. Дадени се точките $A(2,-1,3)$, $B(1,-1,1)$, $C\left(-\frac{3}{2},2,-2\right)$ и $D(-1,2,-1)$.

Докажи дека радиус векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на точките A, B и C, соодветно, се линеарно независни, а потоа изрази го радиус векторот $\vec{d}$ на точката D, како линеарна комбинација на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. **Одговор.** $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$.

Задача 4.6.5. Испитај ја линеарната зависност на векторите $\vec{a} = (-1,2,1)$, $\vec{b} = (-2,1,1)$ и $\vec{c} = (1,2,0)$, а потоа претстави го векторот $\vec{d} = (1,-2,3)$ како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задача 4.6.6. Дадени се векторите $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Разложи го векторот $\vec{c} = 9\vec{i} + 4\vec{j}$ по правците на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ т.е. претстави го како линеарна комбинација на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $\vec{i}$ и $\vec{j}$ се единечни заемно нормални вектори.

Задача 4.6.7. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни. Докажи дека векторите $\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{c}+\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ исто така се линеарно независни.

Решение. Линеарната комбинација на векторите $\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{c}+\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ е $\vec{0}$ акко:

$$x\left(\vec{b}+\vec{c}\right) + y\left(\vec{c}+\vec{a}\right) + z\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow (y+z)\vec{a} + (x+z)\vec{b} + (x+y)\vec{c} = \vec{0}.$$

Бидејќи $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни важи: $y+z=0$, $x+z=0$, $x+y=0$. Детерминантата на хомогениот систем е $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$. Следува дека системот има единствено решение $x=0$, $y=0$ и $z=0$, односно векторите $\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{c}+\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ исто така се линеарно независни.

Задача 4.6.8. Докажи дека векторите $3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{b}-3\vec{c}$ и $2\vec{c}-\vec{a}$ се линеарно зависни.

Задача 4.6.9. Дадени се векторите $\vec{p} = 2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q} = 3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{r} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, каде $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се некомпланарни вектори. Да се разложи векторот $\vec{s} = 2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ по $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$.

Задача 4.6.10. Дадени се векторите $\vec{m} = x\vec{a} - 4\vec{b} - 6\vec{c}$ и $\vec{n} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + y\vec{c}$, каде $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се некомпланарни вектори. Најди ги вредностите на x и y, за векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ да бидат колинеарни.

Равенството $x\vec{a} = y\vec{b}$ *

Задача 4.6.1.1. Даден е паралелограмот $ABCD$. На страната AB се наоѓа точка M, таква што $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. Нека точката $N = AC \cap DM$. Пресметај во каков однос точката N ја дели отсечката AC. **Одговор.** $\overrightarrow{AN} : \overrightarrow{NC} = 2:3$.

Задача 4.6.1.2*. Докажи дека тежишните линии во триаголникот се сечат во една точка, тежиште, која ја дели тежишната линија во однос $2:1$.

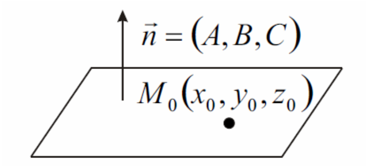
Задача 4.6.1.3. Со користење на линеарна зависност на вектори, докажи дека дијагоналите во паралелограмот се преполовуваат.

5. АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Аналитичката геометрија е дел од алгебрата што ги проучува геометриските својства со помош на алгебарскиот апарат.

5.1 РАМНИНА

<u>5.1.1. Равенка на рамнина што минува низ точка и е нормална на вектор</u>. Од геометрија е познато дека постои единствена рамнина Σ што содржи дадена точка $M_0(\vec{r}_0)$ и е нормална на даден ненулт вектор $\vec{n}$. Векторот $\vec{n}$ се нарекува нормален вектор на рамнината Σ. Секој ненулт вектор колинеарен со $\vec{n}$, исто така е вектор нормален на Σ.



Нека е дадена произволна точка $M(\vec{r})$ од просторот. Точката M лежи на рамнината ако и само ако векторот $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ е нормален на векторот $\vec{n}$ т.е.

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{n} = 0 \quad (1).$$

Равенката (1) се нарекува **векторска равенка** на рамнината што е нормална на векторот $\vec{n}$ и ја содржи точката $M_0(\vec{r}_0)$. Секој ненулт нормален вектор на рамнината уште се нарекува **носечки** вектор на рамнината.

Во оваа равенка векторот на положба $\vec{r}$ на произволна точка M игра улога на променлива и ги опишува сите точки од рамнината.

Нека $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{n} = (A, B, C)$. Бидејќи векторот $\vec{n}$ е ненулт, еден од коефициентите A, B и C е различен од 0. Овој факт ќе го <u>подразбираме</u> во понатамошниот текст. Тогаш, заради $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, равенката (1) го добива видот

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

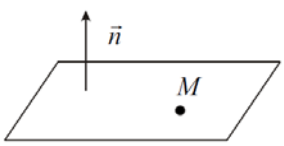
Равенката

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2),$$

се нарекува **скаларна равенка** на рамнината што минува низ точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е нормална на векторот $\vec{n} = (A, B, C)$.

Оваа равенка на рамнина најчесто ќе ја користиме при решавање на задачи, бидејќи овозможува наместо со рамнина, да се работи со нормален вектор и точка.

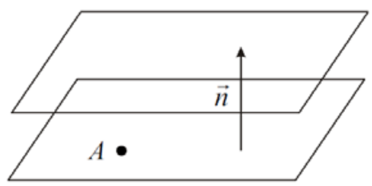
Задача 5.1.1. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(2,2,3)$, и е нормална на векторот $\vec{n} = (4, -1, 3)$.



Решение. Задачата се решава директно според формулата за скаларна равенка на рамнина

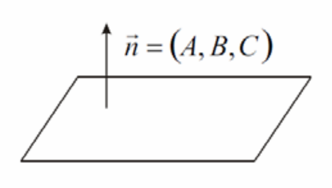
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) - 1(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$4x - 8 - y + 2 + 3z - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x - y + 3z - 15 = 0 .$$

Задача 5.1.2. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $A(3,-1,2)$ и е паралелна со рамнината $2x - y + 2z - 4 = 0$.



Решение. Нормалниот вектор $\vec{n} = (2, -1, 2)$ на дадената рамнина, е нормален вектор и на рамнината чија равенка треба да ја најдеме. Затоа нејзината равенка е:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow$$
$$2(x-3)-1(y+1)+2(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-y+2z-11=0.$$



5.1.2. <u>Општа равенка на рамнина</u>. Со развивање на скаларната равенка (2) добиваме: $Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$ или $Ax+By+Cz+D=0$, каде $D=-Ax_0-By_0-cz_0$.

Равенката
$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (3)$$
се нарекува **општа равенка** на рамнината нормална на векторот $\vec{n}=(A,B,C)$.

Поради прегледниот запис на општата равенка, решенијата на задачите најчесто се запишуваат во ваков вид. Ќе ја разгледаме местоположбата на рамнините зададени со равенки во општ вид, во кои некој од коефициентите A, B, C и D е 0.

● Ако $D=0$, рамнината минува низ точката $(0,0,0)$, бидејќи $A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0=0$.

● Ако $A=0$ рамнината е нормална на yOz рамнината т.е. е паралелна ($D\neq 0$) или ја содржи ($D=0$) x-оската. Имено, паралелниот вектор на x-оската $\vec{i}=(1,0,0)$ е нормален на нормалниот вектор на рамнината $\vec{n}=(0,B,C)$ бидејќи $\vec{i}\,\vec{n}=0$.

Аналогно, ако $B=0$ рамнината е нормална на xOz рамнината т.е. е паралелна или ја содржи y-оската и ако $C=0$ рамнината е нормална на xOy рамнината т.е. е паралелна или ја содржи z-оската.

● Ако $A=B=0$ рамнината е нормална на z-оската т.е. е паралелна ($D\neq 0$) или се совпаѓа ($D=0$) со рамнината $z=0$. Имено, нормалниот вектор на рамнината $\vec{n}=(0,0,C)$ е колинеарен со нормалниот вектор $\vec{k}=(1,0,0)$ на рамнината $z=0$.

Аналогно, ако $A=C=0$, $B=C=0$ рамнината, соодветно е нормална на y-оската, x-оската т.е. соодветно е паралелна или се совпаѓа со рамнината $y=0$, $x=0$.

Задача 5.1.3. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(-2,6,-4)$ и е паралелна со xOz рамнината.

Решение. Бидејќи рамнината е паралелна со xOz рамнината, има равенка $y=D$. Рамнината ја содржи точката M, па $D=6$ т.е. нејзината равенка е $y=6$.

5.1.3. <u>Сегментна равенка на рамнина</u>. Ако во општата равенка на рамнината $Ax+By+Cz+D=0$ важи $A,B,C,D\neq 0$, тогаш:

$$Ax+By+Cz=-D \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ каде } a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B} \text{ и } c=-\frac{D}{C}.$$

Точките $X(a,0,0)$, $Y(0,a,0)$ и $Z(0,0,a)$ лежат на рамнината, но и на координатните оски. Затоа броевите a, b и c претставуваат отсечоци што рамнината ги отсекува на координатните оски.

Равенката

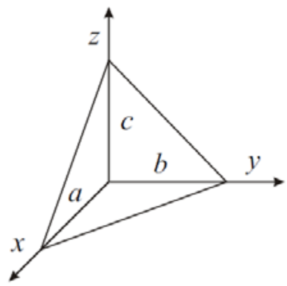
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \ (4),$$

се нарекува **сегментна равенка** на рамнината чии ненулти отсечоци на x, y и z оските соодветно се a, b и c.

Сегментната равенка се користи во задачите во кои се зададени или треба да се најдат отсечоците. Равенката не ги опфаќа рамнините паралелни со координатните оски.

Задача 5.1.4. Дадена е точката $M(2,2,3)$. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката M, а на координатните оски отсекува сегменти a, b и c, така што $a:b:c=1:2:3$.

Решение. Нека равенката на рамнината е $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, каде a, b и c се отсечоците на координатните оски. Од условот $a:b:c=1:2:3$, ако го земеме a за параметар добиваме: $b=2a$, $c=3a$. Бидејќи точката M лежи на рамнината,



$$\frac{2}{a}+\frac{2}{2a}+\frac{3}{3a}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=4.$$ Следува: $b=8$ и $c=12$

Затоа равенката на рамнина е $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}+\frac{z}{12}=1$.

<u>5.1.4.</u> ***<u>Равенка на рамнина низ три точки</u>.*** **Прв начин.** Нека се дадени три некомпланарни точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ и $M_3(\vec{r}_3)$. Тогаш векторскиот производ $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ е ненулт вектор нормален на рамнината определена со точките M_1 M_2 и M_3. Па равенката на рамнината низ трите точки може да ја најдеме со помош на формулата за равенка на рамнина што ја содржи точката M_1 и е нормална на векторот $\vec{n}$.

Втор начин. Нека се дадени точките $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ и $M_3(\vec{r}_3)$ и произволна точка $M(\vec{r})$ од рамнината. Векторите $\overrightarrow{M_1M}=\vec{r}-\vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_3}=\vec{r}_3-\vec{r}_1$ се компланарни, па

$$\left(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{r}_2-\vec{r}_1,\vec{r}_3-\vec{r}_1\right)=0 \ (5),$$

определува равенка на рамнина наречена **векторска равенка на рамнина низ три точки**.

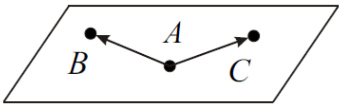
Ако во (5) ставиме $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{r}=_3(x_3,y_3,z_3)$, тогаш ја добиваме равенката

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_2-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

која се нарекува **скаларна равенка на рамнината што минува низ трите точки** $M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3(x_3,y_3,z_3)$.

Задача 5.1.5. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точките

$$A(2,2,3),\ B(-1,2,2) \text{ и } C(3,1,1).$$



Решение. Векторите $\overrightarrow{AB}=(-3,0,-1)$ и $\overrightarrow{AC}=(1,-1,-2)$ се паралелни на рамнината. Затоа нивниот векторски производ
$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(-1,-7,3)\|(1,7,-3),$$
е нормален вектор на рамнината. Нормален вектор на рамнината е и векторот $(1,7,-3)$. Сега ја користиме формулата за равенка на рамнина што содржи точка и е нормална на вектор,
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow (x-2)+7(y-2)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+7y-3z-7=0.$$

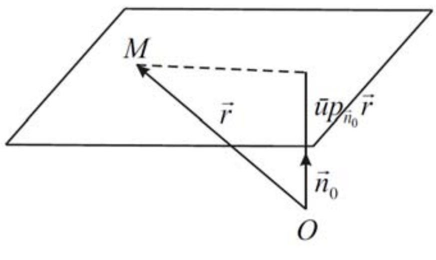
Втор начин. Задачата ја решаваме директно, користејќи ја формулата за равенка на рамнина што содржи три дадени точки.
$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2 & y-2 & z-3\\ -3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$
$$-(y-2)+3(z-3)-(x-2)-6(y-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)+7(y-2)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2+7y-14-3z+9=0 \Leftrightarrow x+7y-3z-7=0.$$

5.1.5. Параметарски равенки на рамнина*. Нека се дадени неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и точката M_0. Постои единствена рамнина што минува низ точката M_0 и е паралелна со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нејзината равенка се определува според формулата за равенка на рамнина што е нормална на векторот $\vec{a}\times\vec{b}$ и ја содржи точката M_0.

Равенката на рамнината може да ја определиме и на следниот начин. Нека е дадена точката $M_0(\vec{r}_0)$. Нека $M(\vec{r})$ е произволна точка од рамнината. Векторот $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ е линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ т.е. $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{a}+k\vec{b}$ или $\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{a}+k\vec{b}$, $t,k\in\mathbb{R}$. Тогаш равенката
$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}+k\vec{b},$$
се нарекува **векторска параметарска равенка** на рамнина.

Ако $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ тогаш добиваме:
$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a_1,a_2,a_3)+k(b_1,b_2,b_3),\ t,k\in\mathbb{R}.$$
Со прирамнување на соодветните координати ја добиваме равенката
$$x=x_0+ta_1+kb_1,\ y=y_0+ta_2+kb_2,\ z=z_0+ta_3+kb_3,$$
која се нарекува **(скаларана) параметарска равенка** на рамнината која е паралелна со векторите $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ и ја содржи точката $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

5.1.6. Нормална равенка на рамнина. Нека е дадена рамнина што не минува низ координатниот почеток O. Нека $\vec{n}$ е нормален вектор на рамнината насочен од O кон рамнината, $\vec{n}_0=\vec{n}/|\vec{n}|$ е единечен вектор на $\vec{n}$ и $M(\vec{r})$ е произволна точка од рамнината. Тогаш растојанието p од координатниот почеток до рамнината е



$p=\bar{u}p_{\vec{n}_0}\vec{r}=\dfrac{\vec{r}\vec{n}_0}{|\vec{n}_0|}=\vec{r}\vec{n}_0$ од каде имаме:
$$\vec{r}\vec{n}_0-p=0.$$

Равенката се нарекува **векторска нормална равенка** на рамнината што е нормална на единечниот вектор $\vec{n}_0$ и е оддалечена p единици од O.

Притоа секогаш p е позитивно, инаку равенката не е во нормален облик. Добиената формулата важи и за рамнините што минуваат низ координатниот почеток.

Ако $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ тогаш равенката добива вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

и се нарекува **(скаларна) нормална равенка** на рамнината оддалечена p единици од координатниот почеток.

Ако $Ax + By + Cz + D = 0$ е општата равенка на рамнината, тогаш нормалната равенка е $\dfrac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$, при што знакот пред коренот се избира да биде спротивен од знакот на членот D. Имено нормалниот вектор на рамнината е единечен, а со изборот на знакот пред коренот истиот е насочен кон рамнината.

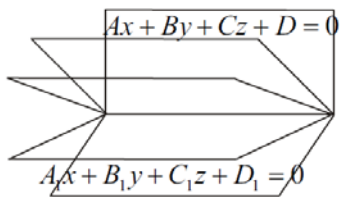
Задача 5.1.6. Равенката на рамнината $2x + y - 2z - 4 = 0$ напиши ја во нормален вид.

Решение. Општата равенка на рамнина $Ax + By + Cz + D$ ја делиме со изразот $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, каде знакот пред коренот го избираме таков што слободниот член да биде негативен. Значи:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x + y - 2z - 4}{+\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} = 0.$$

5.1.7. Равенка на сноп рамнини. Нека се дадени рамнините

$$\Sigma_1 : Ax + By + Cz + D = 0 \text{ и } \Sigma_2 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$



Множеството од сите рамнини кои минуваат низ пресечната права на двете рамнини, се нарекува **сноп** (прамен) **рамнини**. Равенката на снопот рамнини е:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0,\ \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad (1)$$

α и β се параметри. Рамнината Σ_1 се добива за $\beta = 0$ ($\alpha \neq 0$), а Σ_2 за $\alpha = 0$ ($\beta \neq 0$).

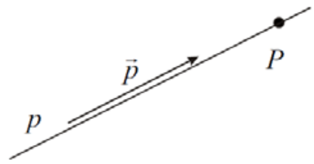
Ако равенката (1) се подели со $\alpha \neq 0$ и се стави $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$, тогаш ја добиваме равенката

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Равенката ги содржи сите рамнини од снопот освен рамнината Σ_2 и се нарекува исто така сноп рамнини. За $\lambda = 0$ се добива рамнината Σ_1. Секоја рамнина од снопот е определена со единствена вредност на параметарот λ.

5.2 ПРАВА

5.2.1. Параметарски равенки на права. Од геометрија е познато дека постои единствена права која содржи дадена точка и е паралелна со даден ненулт вектор. Нека правата p е паралелна со ненултиот вектор $\vec{p}$ и ја содржи точката $P(\vec{r}_0)$. Нека $Q(\vec{r})$ е произволна точка од правата. Тогаш векторот $\overrightarrow{PQ} = \vec{r} - \vec{r}_0$ е паралелен со векторот $\vec{p}$, па важи: $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{p}$ или



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p},$$

и се нарекува **векторска равенка** на правата која минува низ точката $P(\vec{r}_0)$ и е паралелна на векторот $\vec{p}$. Секој ненулт паралелен вектор на правата уште се нарекува **носечки** вектор на правата.

Ако $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{r} = (x, y, z)$, тогаш добиваме:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(p_1, p_2, p_3) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0 + tp_1, y_0 + tp_2, z_0 + tp_2) \Leftrightarrow$$

$$x = x_0 + p_1 t,\ y = y_0 + p_2 t,\ z = z_0 + p_3 t.$$

Равенките

$$x = x_0 + p_1 t,\ y = y_0 + p_2 t,\ z = z_0 + p_3 t,$$

се нарекуваат **параметарските равенки** на правата која минува низ точката $P(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна на векторот $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

Параметарските равенки најчесто се користат кога се бара пресек на права и рамнина, односно кога треба да се реши некој систем.

5.2.2. Канонични равенки на права. Ако координатите p_1, p_2, p_3 се различни од 0, тогаш од параметарските равенки на правата може да го изразиме параметарот t,

$$t = \frac{x - x_0}{p_1},\ t = \frac{y - y_0}{p_2},\ t = \frac{z - z_0}{p_3};$$

и со негова елиминација ги добиваме равенките $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$.

Во овој вид ги запишуваме и равенките на правата кога некои од коефициентите p_1, p_2, p_3 се 0. На пример под записот $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$ го подразбираме системот $x - x_0 = 0$, $\frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$; или под $\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{p_3}$ го подразбираме системот $x - x_0 = 0$, $y - y_0 = 0$.

Равенките

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3} \quad (2)$$

се нарекуваат **канонични равенки** на правата која минува низ точката $P(x_0, y_0, z_0)$ и е паралелна на векторот $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$.

Каноничните равенки на права најчесто се користат бидејќи се прегледни и од нив се гледаат координатите на една точка од правата и еден паралелен вектор на правата.

Задача 5.2.1. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $P(3,-1,2)$ и е паралелна на векторот $\vec{p}=(-1,0,2)$.

Решение. Равенката ја наоѓаме според формулата за равенка на права што минува низ дадена точка и е паралелна на даден вектор, $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-2}{2}$.

Заради естетика, често избираме првиот коефицеиент пред паралелниот вектор на правата да биде позитивен. Бидејќи векторот $(1,0,-2)$ е паралелен со векторот $\vec{p}$, тој е паралелен и со правата. Тогаш равенката на правата е $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-2}$.

Задача 5.2.2. Напиши ја равенката на правата што минува низ точките $P(-2,3,1)$ и $Q(1,1,-1)$.

Решение. Правата е паралелна на векторот $\overrightarrow{PQ}=(3,-2,-2)$ и ја содржи точката Q. Следува дека нејзината равенка е:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2}.$$

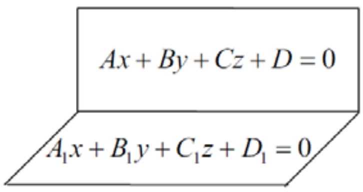
Задача 5.2.3. Равенката на правата $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{-1}$, напиши ја во параметарски вид.

Решение. Секоја страна од равенките ја прирамнуваме со параметарот t,

$$\frac{x+2}{1}=t,\ \frac{y-3}{0}=t,\ \frac{z-1}{-1}=t \Leftrightarrow x+2=t,\ y-3=0,\ z-1=-t \Leftrightarrow x=t-2,\ y=3,\ z=1-t.$$

Десните равенки се параметарските равенки на правата.

5.2.3. Општ вид равенки на права. Нека се дадени рамнините $A_1x+B_1y+C_1+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2+D_2=0$ што се сечат. Следува нивните нормални вектори $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ не се колинеарни. Од геометрија е познато дека две рамнини се сечат во права, па системот



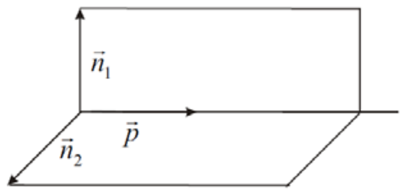
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases},$$

определува една права. Равенките на рамнините кои се сечат во правата се нарекуваат **општи равенки** на правата.

Ако правата е зададена во општ вид $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$, за да ја сведеме во каноничен, еден начин е да најдеме еден нејзин паралелен вектор и точка. Еден паралелен вектор е векторскиот производ $\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, каде $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ се нормалните вектори на рамнините. Точка од правата наоѓаме ако најдеме едно решение на системот, најчесто со фиксирање на една од променливите.

Задача 5.2.4. Напиши ги равенките на правата $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ x-2y-z=-2 \end{cases}$ во канонични вид.

Решение. Рамнините се нормални на векторите $\vec{n}_1=(1,2,-1)$ и $\vec{n}_2=(1,-2,-1)$.



1) Еден паралелен вектор на правата е:

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\left(\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=(-4,0,-4)\|(1,0,1).$$

2) За да најдеме точка од правата бараме едно решение на системот равенки $x+2y-z=3$, $x-2y-z=-2$. На пример, за $x=0$ добиваме: $2y-z=3$ и $-2y-z=-2$, од каде имаме: $-2z=1$ или $z=-\frac{1}{2}$. Оттука, $2y=\frac{7}{2}$, односно $y=\frac{7}{4}$. Следува дека точката е $P\left(0,\frac{7}{4},-\frac{1}{2}\right)$.

Затоа равенката на правата гласи: $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}\Leftrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-\frac{7}{4}}{0}=\frac{z+\frac{1}{2}}{1}$.

<u>5.2.4</u>. <u>Равенки на права во проекции</u>. Равенките (2) всушност претставуваат систем од 3 равенки

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2},\ \frac{x-x_0}{p_1}=\frac{z-z_0}{p_3},\ \frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}.$$

но доволно е да се разгледаат 2, бидејќи третата равенка е линеарно зависна од првите две. Значи правата p може да се претстави со еден од следниве системи:

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}\\ \frac{x-x_0}{p_1}=\frac{z-z_0}{p_3}\end{cases},\ \begin{cases}\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}\\ \frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}\end{cases}\text{ и }\begin{cases}\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{z-z_0}{p_3}\\ \frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}\end{cases}.\ (3)$$

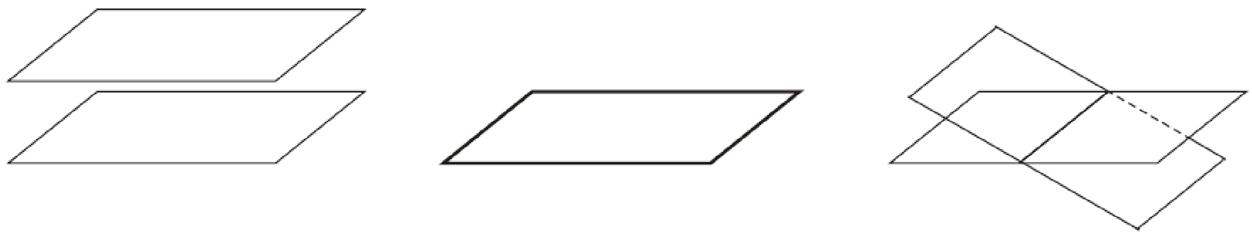
Равенките во системите се рамнини паралелни со оските. На пример во првиот систем првата рамнина $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}$ е паралелна со z-оската, а втората $\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{z-z_0}{p_3}$ со y-оската. Првата рамнина ја определува проекцијата на правата во xOy рамнината, а втората во xOz. Затоа равенките на правата определени со некој од системите (3) се нарекуваат **равенки на права во проекции**.

Равенките на правата во проекции се специјален случај на равенки на права во општ вид. На овој начин е опишана постапката на сведување на права од каноничен во општ вид.

5.3 Заемен однос

<u>5.3.1</u>. <u>Заемен однос на две рамнини</u>. Нека се дадени рамнината $\sum_1$ која е нормална на векторот $\vec{n}_1$ и ја содржи точката M_1, и рамнината $\sum_2$ која е нормална на векторот $\vec{n}_2$ и ја содржи точката M_2. Еден критериум за колинеарност на ненултите вектори $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ е $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$, додека за нормалност е $\vec{n}_1\vec{n}_2 = \vec{0}$.

Од геометрија е познато дека две рамнини може да се паралелни, совпаѓаат или сечат. На следниот цртеж се дадени геометриските интерпретации на трите случаи.



1) Рамнините се **паралелни**, ако векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ се колинеарни и $M_1 \notin \Sigma_2$.

2) Рамнините се **совпаѓаат**, ако ако векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ се колинеарни и $M_1 \in \Sigma_2$.

3) Рамнините се **сечат** во права, ако векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не се колинеарни. Притоа рамнините се **заемно нормални,** ако векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ се заемно нормални.

Да забележиме дека условот $M_1 \notin \Sigma_2$ ($M_1 \in \Sigma_2$) може да се замени со: не се (се) нормални на векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Ако рамнините се паралелни тогаш немаат заеднички точки, а ако се совпаѓаат или сечат имаат бесконечно заеднички точки.

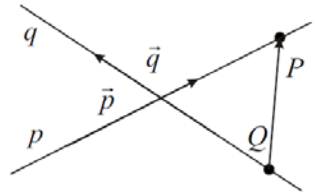
Ако рамнините се дадени со нивните општи равенки $\Sigma_1 :\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, тогаш тие се паралелни ако $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} \neq \frac{D_2}{D_1}$, се совпаѓаат ако $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}$ и се сечат ако не важи едно од равенствата $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$. Притоа количниците може да содржат 0 во именителот, според претходниот договор (види прилог 1.1.4).

Задача 5.3.1-3. Во каков заемен однос е рамнината $2x + 2y - 7z + 1 = 0$ со рамнините:
1) $x + y - 2z + 2 = 0$; 2) $4x + 4y - 14z + 2 = 0$; 3) $4x + 4y - 14z + 3 = 0$.

Решение. 1) Бидејќи $\vec{n}_1 = (2,2,-7)$ и $\vec{n}_2 = (1,1,-2)$ и $\frac{2}{1} = \frac{2}{1} \neq \frac{7}{2}$ следува дека рамнините се сечат. Притоа уште $\vec{n}_1\vec{n}_2 = 2 + 2 + 14 = 18 \neq 0$, па рамнините не се ниту заемно нормални.

2) Заради $\frac{4}{2} = \frac{4}{2} = \frac{-14}{-7} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow 2 = 2 = 2 = 2$, следува дека рамнините се совпаѓаат.

3) Заради $\frac{4}{2} = \frac{4}{2} = \frac{-14}{-7} \neq \frac{3}{1} \Leftrightarrow 2 = 2 = 2 \neq 3$, следува дека рамнините се паралелни.



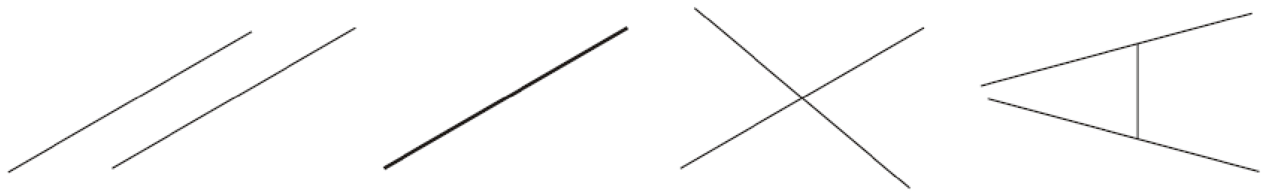
<u>5.3.2</u>. <u>Заемен однос на две прави</u>. Нека се дадени правата p која минува низ точката P и е паралелна на векторот $\vec{p}$, и правата q која минува низ точката Q и е паралелна на векторот $\vec{q}$. Од геометрија следува дека две прави се **сечат** ако лежат во една рамнина, не се совпаѓаат и не се паралелни. Во поглавјето за мешан производ покажано е дека векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$ лежат во една рамнина ако и само ако $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=0$. Ако уште векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни, тогаш формулата $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=0$ го дава условот за сечење на две прави.

Нека векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни. Тогаш правата p која минува низ P и е паралелна на $\vec{p}$, и правата q која минува низ Q и е паралелна на $\vec{q}$, се сечат ако и само ако $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=0$.

Уште еден критериум за сечење на две прави е следниов: Правите p и q се сечат ако и само ако системот формиран од нивните равенки има единствено решение. Притоа најпогодни се параметарските равенки на права.

Правите p и q се заемно нормални ако векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се заемно нормални.

Од геометрија е познато дека две прави може да се паралелни, да се совпаѓаат, да се сечат и да се разминувачки. На следниот цртеж се илустрирани четирите случаи.



1) Правите p и q се **паралелни** ако векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се колинеарни и $P\notin q$.
2) Правите p и q се **совпаѓаат** ако векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се колинеарни и $P\in q$.
3) Правите p и q се **сечат**, ако $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни и $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=0$.
4) Правите p и q се **разминувачки** ако $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)\neq 0$.

Условот $P\in q$ ($P\notin q$) може да се замени со $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се (не се) колинеарни со векторот $\overrightarrow{PQ}$.

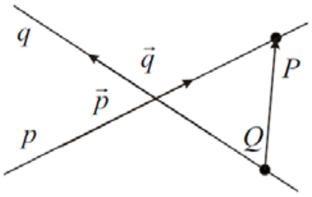
Задача 5.3.4-7. Во каков заемен однос е правата $p:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ со правата q:

1) $\dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$; 2) $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-8}{2}=\dfrac{z-9}{8}$;

3) $x=2t+3,\ y=t-1,\ z=t$; 4) $2x+3y-7=0,\ y+2z+1=0$.

Решение. Правата p е паралелна со векторот $\vec{p}=(2,1,4)$ и ја содржи точката $P(1,7,5)$.

1) Правата q е паралелна со векторот $\vec{q}=(3,-2,1)$ и ја содржи точката $Q(6,-1,0)$.



Векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни. Понатаму, $\overrightarrow{PQ}=(5,-8,-5)$ и

$$\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=\begin{vmatrix}5&-8&-5\\2&1&4\\3&-2&1\end{vmatrix}=5-96+20+15+40+16=0.$$

Следува дека правите p и q се сечат.

2) Векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни. Една точка од p е $P(1,7,5)$ и

$$P \in q \Leftrightarrow \frac{1-3}{4} = \frac{7-8}{2} = \frac{5-9}{8} \Leftrightarrow \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = \frac{-4}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Следува дека $P \in q$, односно правите се совпаѓаат.

3) Имаме: $\vec{p} = \vec{q} = (2,1,4)$, $P(1,7,5)$ и

$$P \in q \Leftrightarrow 1 = 2t+3,\ 7 = t-1,\ z = t \Leftrightarrow t = 1,\ t = 8,\ t = 5.$$

Следува дека $P \notin q$, односно правите се паралелни.

4) Правата p е паралелна со векторот $\vec{p} = (2,1,4)$ и ја содржи точката $P(1,7,5)$.

Правата q ќе ја сведеме во каноничен облик. Од втората равенка имаме: $\frac{z}{1} = \frac{y+1}{-2}$. Од првата $3(y+1) = -2x+10$ т.е. $\frac{y+1}{-2} = \frac{x-5}{3}$. Следува дека каноничните равенки на q се $\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$. Оттука, $\vec{q} = (3,-2,1)$, $Q(5,-1,0)$ и $\overrightarrow{PQ} = (4,-8,-5)$. Затоа

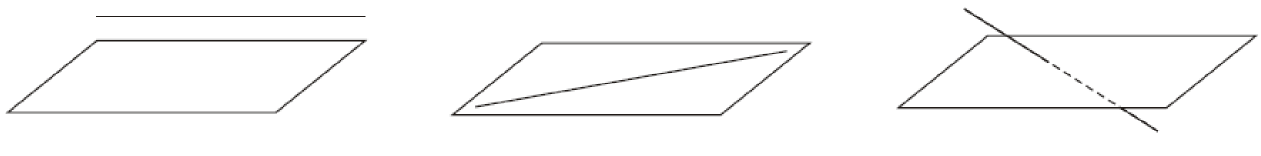
$$\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right) = \begin{vmatrix} 4 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4-96+20+15+32+16 = 87-96 = -9 \neq 0.$$

Следува дека правите p и q се разминувачки.

Задача 5.3.8. Докажи дека правите $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ се заемно нормални.

Решение. Првата права е паралелна со векторот $\vec{p} = (3,-1,1)$, а втората со $\vec{q} = (1,2,-1)$. Скаларниот производ $\vec{p}\vec{q} = 3\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) = 0$. Следува дека правите се заемно нормални.

5.3.3. Заемен однос на права и рамнина. Нека е дадена правата p која минува низ точката P и е паралелна на векторот $\vec{p}$ и рамнината Σ која е нормална на векторот $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и ја содржи точката M. Да забележиме дека векторите $\vec{p}$ и $\vec{n}$ се заемно нормални ако $\vec{p}\vec{n} = 0$. Можни се следниве случаи:



1) Правата p е **паралелна** со рамнината Σ ако $\vec{p}\vec{n} = 0$ и $P \notin \Sigma$.

2) Правата p **лежи** во рамнината Σ ако $\vec{p}\vec{n} = 0$ и $P \in \Sigma$.

3) Правата p ја **сече** рамнината Σ ако $\vec{p}\vec{n} \neq 0$. Притоа правата p е **нормална** на рамнината Σ ако векторите $\vec{p}$ и $\vec{n}$ се колинеарни ($\vec{p} \times \vec{n} = \vec{0}$).

Условот $P \notin \Sigma$ ($P \in \Sigma$) може да се замени со $\vec{n}\overrightarrow{PM} \neq 0$ ($\vec{n}\overrightarrow{PM} = 0$).

Ако правата p и рамнината $\sum$ се паралелни тогаш немаат заедничка точка, ако p лежи во $\sum$ имаат бесконечно, а ако p и $\sum$ се сечат имаат една заедничка точка.

Задача 5.3.9-11. Во каков заемен однос се правата $\frac{x+1}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+5}{-3}$ и рамнината:

1) $x-5y+z-2=0$; 2) $x+z-2=0$; 3) $x+z+6=0$.

Решение. Правата е паралелна на векторот $\vec{p}=(3,2,-3)$ и ја содржи точката $P(-1,7,-5)$.

1) Рамнината е нормална на $\vec{n}=(1,-5,1)$. Бидејќи $\vec{p}\vec{n}=3-10-3=-10\neq 0$, следува дека правата ја сече рамнината.

2) Имаме $\vec{n}=(1,0,1)$, од каде $\vec{p}\vec{n}=3-3=0$. Притоа $P\in\Sigma \Leftrightarrow -1-5-2=0 \Leftrightarrow -8=0$.

Следува дека $P\notin\Sigma$, односно правата е паралелна на рамнината.

3) Имаме: $\vec{n}=(1,0,1)$, па $\vec{p}\vec{n}=0$. Притоа $P\in\Sigma \Leftrightarrow -1-5+6=0 \Leftrightarrow 0=0$.

Следува дека $P\in\Sigma$, односно правата лежи во рамнината.

5.4 Агол

5.4.1. Агол меѓу две рамнини. Нека $\varphi\in[0,\pi/2]$ е аголот меѓу рамнината $\sum_1$ и рамнината $\sum_2$, односно еден од двата диедарски агли што ги зафаќаат рамнините (ако рамнините се паралелни или се совпаѓаат, тогаш $\varphi=0$). Нека рамнината $\sum_1$ е нормална на векторот $\vec{n}_1$ и рамнината $\sum_2$ е нормална на векторот $\vec{n}_2$. Важи: $\varphi=\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ ако $\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\in[0,\pi/2]$ и $\varphi=\pi-\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ ако $\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\in[\pi/2,\pi]$, па

$$\cos\varphi=\begin{cases}\cos\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2), \sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\in[0,\pi/2]\\ \cos(\pi-\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)), \sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\in[\pi/2,\pi]\end{cases}=$$

$$\begin{cases}\cos\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2), \cos\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\geq 0\\ -\cos\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2), \cos\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\leq 0\end{cases}=\left|\cos\sphericalangle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right|=\frac{|\vec{n}_1\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

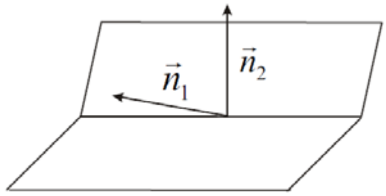
Косинусот од аголот $\varphi\in[0,\pi/2]$ меѓу рамнината $\sum_1$ нормална на векторот $\vec{n}_1$, и рамнината $\sum_2$ нормална на векторот $\vec{n}_2$, е определен од равенката $\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$.

Задача 5.4.1. Најди го аголот меѓу рамнините $2x-y+2z-1=0$ и $x+y+4z-5=0$.

Решение. Првата рамнина е нормална на $\vec{n}_1=(2,-1,2)$, а втората на $\vec{n}_2=(1,1,4)$. Нека φ е аголот меѓу рамнините. Според формулата за агол меѓу две рамнини,

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|2\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot 4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=$$

$$\frac{9}{\sqrt{9}\sqrt{18}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ Оттука $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.



5.4.2. Агол меѓу две прави. Нека $\varphi\in[0,\pi/2]$ е аголот меѓу правата p и правата q, односно еден од двата агли што ги зафаќаат правите паралелни на p и q што се сечат (ако p

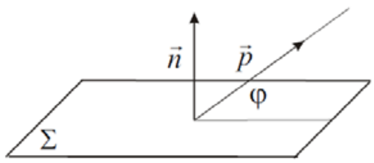
и q се паралелни или се совпаѓаат тогаш $\varphi=0$). Нека правата p паралелна на векторот $\vec{p}$ и правата q паралелна на векторот $\vec{q}$. Важи: $\varphi=\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})$ ако $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})\in[0,\pi/2]$ и $\varphi=\pi-\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})$ ако $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})\in[\pi/2,\pi]$, од каде $\cos\varphi=\left|\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})\right|=\dfrac{|\vec{p}\vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}$. Значи:

> **Косинусот од аголот** $\varphi\in[0,\pi/2]$ меѓу правата p паралелна на векторот $\vec{p}$ и правата q паралелна на векторот $\vec{q}$, е $\cos\varphi=\dfrac{|\vec{n}_1\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$.

Задача 5.4.2. Најди аголот меѓу правите p: $x=0$, $y=0$ и q: $x=2$, $y=-1$.

Решение. Правите се паралелни (со $\vec{p}=(0,0,1)$). Следува аголот меѓу нив е 0.

<u>5.4.3.</u> ***<u>Агол меѓу права и рамнина.</u>*** Агол меѓу правата p и рамнината Σ, е аголот φ меѓу правата p и нејзината проекција p' на рамнината Σ (ако правата p и рамнината Σ се паралелни, тогаш $\varphi=0$). Јасно $\varphi\in[0,\pi/2]$. Нека правата p е паралелна на векторот $\vec{p}$ и рамнината Σ е нормална на векторот $\vec{n}$. Нека θ е аголот меѓу p и нормалата на Σ низ прободот P. Тогаш $\theta\in[0,\pi/2]$ е $\theta=\pi/2-\varphi$, од каде $\sin\varphi=\cos\theta=\left|\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{n})\right|=\dfrac{|\vec{p}\vec{n}|}{|\vec{p}||\vec{n}|}$. Значи:

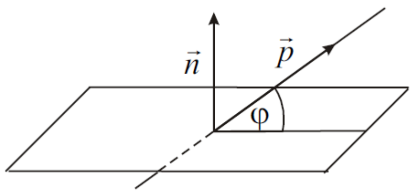


> **Синусот од аголот** $\varphi\in[0,\pi/2]$ меѓу правата p која е паралелна на векторот $\vec{p}$ и рамнината Σ која е нормална на векторот $\vec{n}$ е $\sin\varphi=\dfrac{|\vec{p}\vec{n}|}{|\vec{p}||\vec{n}|}$.

Задача 5.4.3. Најди го синусот од аголот меѓу правата $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$ и рамнината $2x-y+z-5=0$.

Решение. Правата е паралелна со векторот $\vec{p}=(1,-2,2)$, а рамнината е нормална на векторот $\vec{n}=(2,-1,1)$. Според формулата за пресметување на агол меѓу права и рамнина, имаме

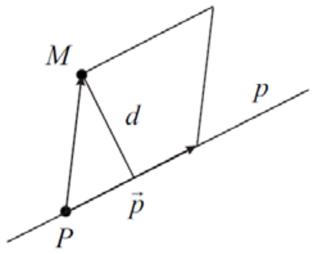
$$\sin\phi=\frac{|\vec{p}\vec{n}|}{|\vec{p}||\vec{n}|}=\frac{|1\cdot2+(-2)(-1)+2\cdot1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot3}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$



5.5 Растојание

<u>5.5.1.</u> ***<u>Растојание меѓу две точки.</u>*** Растојанието меѓу е $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ е дадено со формулата $d=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$.

5.5.2. Растојание од точка до права. Растојанието од точката M до правата P која е паралелна на векторот $\vec{p}$ и ја содржи точката P, претставува висина во паралелограмот конструиран над векторите $\vec{p}$ и $\overrightarrow{PM}$ спуштена кон страната над векторот $\vec{p}$. Од поглавјето за векторски производ, следува $d = \left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right| / |\vec{p}|$. Формулата го опфаќа и случајот кога точката M лежи на правата, иако јасно во тој случај $d = 0$. Значи:



Растојанието од точката M до правата p која е паралелна на векторот $\vec{p}$ и ја содржи точката P е определено со формулата $d = \dfrac{\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right|}{|\vec{p}|}$.

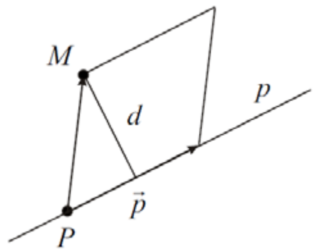
Задача 5.5.1. Најди го растојанието од точката $M(3,5,4)$ до правата $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{2}$.

Решение. Правата е паралелна на векторот $\vec{p} = (-1,2,2)$ и ја содржи точката $P(2,1,0)$. Векторот $\overrightarrow{PM} = (1,4,4)$. Растојанието меѓу точката M и правата ќе го пресметаме според формулата $d = \left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right| / |\vec{p}|$. Имаме:

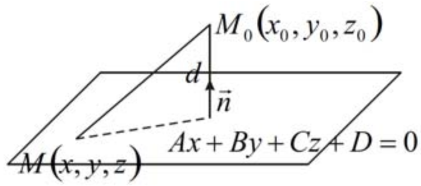
$$\vec{p} \times \overrightarrow{PM} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right) = (0,6,-6) = 6(0,1,-1),$$

$$\left|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}\right| = 6\sqrt{1+1} = 6\sqrt{2} \text{ и } |\vec{p}| = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

Следува: $d = \dfrac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$.



5.5.3. Растојание од точка до рамнина. Нека се дадени точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и рамнината Σ: $Ax+By+Cz+D=0$ нормална на векторот $\vec{n} = (A,B,C)$. Нека $M(x,y,z)$ е произволна точка од рамнината. Тогаш векторот $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, од каде



$$d = \left|\bar{u}p_{\vec{n}}\, \overrightarrow{MM_0}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{MM_0}\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax+By+Cz)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Бидејќи точката M лежи на рамнината, нејзините координати ја исполнуваат равенката $Ax+By+Cz+D=0$, па $D=-(Ax+By+Cz)$. Затоа, $d = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Формулата го опфаќа и случајот кога точката M_0 лежи на рамнината Σ, тогаш $d = 0$. Значи:

Растојанието од точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до рамнината $Ax+By+Cz+D=0$ е

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

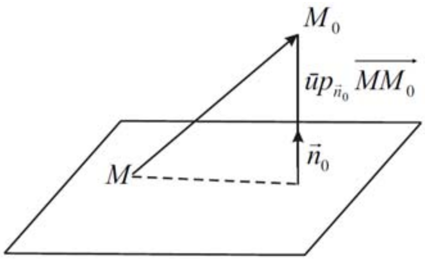
Задача 5.5.2. Најди го растојанието од точката $M(3,5,4)$ до рамнината $2x+y-2z+3=0$.

Решение. Според формулата за растојание од точка до рамнина,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 3+1\cdot 5-2\cdot 4+3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2.\blacksquare$$

Нека е дадена рамнина Σ нормална на $\vec{n}$, точка $M\in\Sigma$ и $M_0\notin\Sigma$. Тогаш,

$$d'=\bar{u}p_{\vec{n}_0}\overrightarrow{MM_0}=Ax_0+By_0+Cz_0+D\ \left(\vec{n}_0=\vec{n}/|\vec{n}|\right) \text{ и } \bar{u}p_{\vec{n}}\overrightarrow{MM_0},$$



имаат ист знак и $d'>0$ кога $\vec{n}$ е насочен кон M_0, а во спротивно $d'<0$.

Нека M_1 и M_2 се две точки што не лежат на рамнината која е нормална на $\vec{n}$ и ја содржи M. Следува дека ако $d'=\bar{u}p_{\vec{n}_0}\overrightarrow{MM_1}$ и $d''=\bar{u}p_{\vec{n}_0}\overrightarrow{MM_2}$ се со исти знаци точките M_1 и M_2 лежат на исти страни, а во спротивно на различни страни од рамнината.

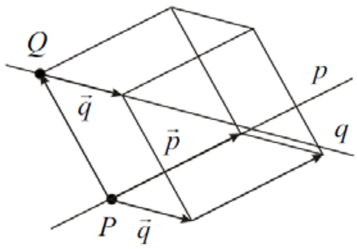
Задача 5.5.3. Дали точките: 1) $M(3,5,4)$ и $N(-2,1,1)$; 2) $M(3,5,4)$ и $O(0,0,0)$; се од исти или различни страни во однос на рамнината $2x+y-2z+3=0$?

Решение. 1) Имаме: $d_M=6+5-8+3=6>0$ и $d_N=-4+1-2+3=-2<0$.

Следува дека точките M и N лежат на различни страни од рамнината.

2) Имаме: $d_M>0$ и $d_O>0$. Следува O и M лежат на исти страни од рамнината.

5.5.4. Растојание меѓу две прави. Растојанието меѓу две **паралелни** прави е растојанието од произволна точка од едната права до другата права. Во оваа формула е опфатен случајот кога правите се **совпаѓаат** (тогаш $d=0$).



Нека правата p која е паралелна на векторот $\vec{p}$ и ја содржи точката P и правата q која е паралелна со векторот $\vec{q}$ и ја содржи точката Q, се **разминувачки**. Тогаш растојанието d е висината на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$, спуштена кон страната конструирана над векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Од поглавјето за мешан производ следува дека $d=\left|\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)\right|\big/\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|$. Формулата го опфаќа и случајот кога правите се **сечат**, тогаш $d=0$. Значи:

Растојанието меѓу разминувачките прави p која е паралелна на векторот $\vec{p}$ и ја содржи точката P, и q која е паралелна со векторот $\vec{q}$ и ја содржи точката Q, е:

$$d=\frac{\left|\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)\right|}{\left|\vec{p}\times\vec{q}\right|}.$$

Задача 5.5.4. Најди го растојанието меѓу разминувачките прави

$$p:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2} \text{ и } q:\frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

Решение. Ја користиме формулата за растојание меѓу разминувачки прави. Притоа,

$$\vec{p}=(-1,2,2),\ \vec{q}=(2,2,1),\ P(2,1,0),\ Q(5,4,3) \text{ и } \overrightarrow{PQ}=(3,3,3)=3(1,1,1),$$

$$\vec{p}\times\vec{q}=\left(\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)=(-2,5,-6) \text{ и } |\vec{p}\times\vec{q}|=\sqrt{4+25+36}=\sqrt{65}.$$

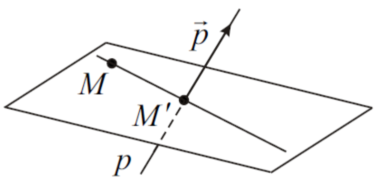
$$\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=3\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3(-3)=-9 \text{ и } \left|\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)\right|=9. \text{ Следува: } d=\frac{\left|\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)\right|}{|\vec{p}\times\vec{q}|}=\frac{9}{\sqrt{65}}.$$

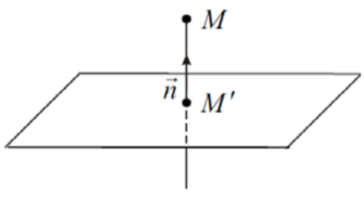
5.5.5. Растојание меѓу права и рамнина. Ако правата е **паралелна** на рамнината тогаш растојанието меѓу правата и рамнината е растојанието од една точка од правата до рамнината. Во овој случај спаѓа и случајот кога правата **лежи** во рамнината, тогаш $d=0$. Ако правата ја **сече** рамнината тогаш, исто така, $d=0$.

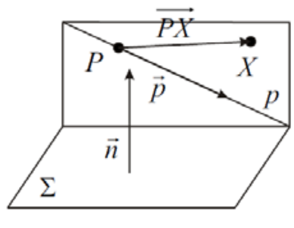
5.5.6. Растојание меѓу две рамнини. Ако рамнините се **паралелни** тогаш растојанието меѓу нив е растојанието од точка од едната рамнина до другата рамнина. На овој случај се сведува случајот кога рамнините се **совпаѓаат**, тогаш $d=0$. Ако рамнините се **сечат** тогаш, исто така, $d=0$.

5.6 Проекции

Проекција на точката A врз рамнината Σ се добива како пресек на правата низ A нормална на Σ, со рамнината Σ. Проекцијата на точката A врз правата p се добива како пресек на рамнината низ A нормална на p, со правата p. Проекцијата на правата p која е паралелна на $\vec{p}$ и ја содржи P, врз рамнината Σ која е нормална на $\vec{n}$, е пресекот на проектирачката рамнина т.е. рамнината која е нормална на Σ и ја содржи p, со рамнината Σ. Проектирачката рамнина има равенка $\left(\vec{p},\vec{n},\overrightarrow{PX}\right)=0$, каде X е нејзина произволна точка. Проектирачката рамнина се наоѓа и по формулата за рамнина што ја содржи точката P и е: нормална на векторот $\vec{p}\times\vec{n}$.

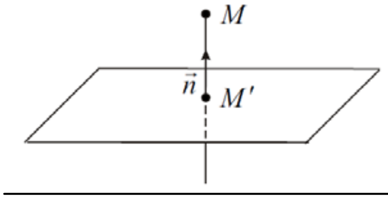






Задача 5.6.1. Најди ја ортогоналната проекција на точката $M(2,-3,5)$ врз рамнината $x+2y-2z-4=0$.

Решение. Рамнината е нормална на векторот $\vec{n}=(1,2,-2)$. Равенката на правата што ја содржи точката M и е нормална на рамнината е



$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-2}.$$

За да ги најдеме координатите на прободот, равенките на правата ги сведуваме во параметарски вид

$$x = t + 2\,,\ y = 2t - 3\,,\ z = -2t + 5\,;$$

и ги заменуваме во равенката на рамнината $x + 2y - 2z - 4 = 0$,

$$t + 2 + 2(2t - 3) - 2(-2t + 5) - 4 = 0 \Leftrightarrow t + 2 + 4t - 6 + 4t - 10 - 4 = 0 \Leftrightarrow 9t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 2\,.$$

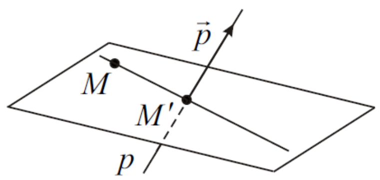
Следува:

$$x = 2 + 2 = 4\,,\ y = 2\cdot 2 - 3 = 1\,,\ z = -2\cdot 2 + 5 = 1\,;$$

од каде ортогоналната проекција е $M'(4,1,1)$.

Задача 5.6.2. Најди ја ортогоналната проекција на точката $M(2,-3,5)$ врз правата $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Решение. Паравата е паралелна на векторот $\vec{p} = (1,2,3)$. Равенката на рамнината што е нормална на правата и ја содржи точката M е:



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x - 2 + 2(y + 3) + 3(z - 5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x - 2 + 2y + 6 + 3z - 15 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 11 = 0\,.$$

За да го најдеме пресекот на правата со рамнината ги сведуваме равенките на правата во параметарски вид

$$x - 2 = t\,,\ y + 1 = 2t\ ,\ z = 3t \Leftrightarrow x = t + 2\,,\ y = 2t - 1\ ,\ z = 3t\,,$$

и ги заменуваме во равенките на рамнината

$$x + 2y + 3z - 11 = 0 \Leftrightarrow t + 2 + 2(2t - 1) + 9t - 11 = 0 \Leftrightarrow 14t = 11 \Leftrightarrow t = \frac{11}{14}\,.$$

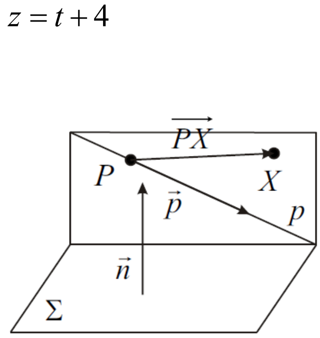
Оттука, координатите на прободот се:

$$x = \frac{11}{14} + 2 = \frac{39}{14}\,,\ y = 2\frac{11}{14} - 1 = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}\ ,\ z = 3\frac{11}{14} = \frac{33}{14}\,.$$

Следува проекцијата е $M'\left(\dfrac{39}{14}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{33}{14}\right)$.

Задача 5.6.3. Најди ја проекцијата p' на правата $p : \begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 4 \end{cases}$ врз рамнината $\Sigma : 2x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Решение. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p} = (5,1,1)$ и ја содржи точката $P(3,-1,4)$, а рамнината Σ е нормална на векторот $\vec{n} = (2,-2,3)$.



Равенката на проектирачката рамнина е:

$$\left(\overrightarrow{PX}, \vec{p}, \vec{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(x - 3) + 2(y + 1) - 10(z - 4) - 2(z - 4) + 2(x - 3) - 15(y + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$5(x - 3) - 13(y + 1) - 12(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 15 - 13y - 13 - 12z + 48 = 0 \Leftrightarrow 5x - 13y - 12z + 20 = 0\,.$$

Следува дека равенките на проекцијата p' се: $\begin{cases} 2x - 2y + 3z + 5 = 0 \\ 5x - 13y - 12z + 20 = 0 \end{cases}$.

5.7 ЗАДАЧИ

5.1 РАМНИНА

Задача 5.1.7. Дадена е точката $M(-2,-1,6)$. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката M, а на координатните оски отсекува сегменти a, b и c, такви што $a:b:c=4:-2:3$.

Задача 5.1.8. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точките $A(1,1,2)$, $B(1,-2,-2)$ и $C(-2,3,1)$.

Задача 5.1.9. Провери дали точките $A(0,0,1)$, $B(3,-2,0)$, $C(4,6,-9)$ и $D(-1,0,2)$, лежат во една рамнина. Во случај на потврден одговор, најди ја равенката на рамнината во која лежат. **Одговор.** $x+y+z-1=0$.

Задача 5.1.10. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ точката $M(2,2,3)$ и е паралелна со векторите $\vec{a}=(-3,0,-5)$ и $\vec{b}=(1,-1,-2)$. **Одговор.** $5x+11y-3z-23=0$.

Задача 5.1.11. Напиши ја равенката на рамнината која ги содржи точките $A(3,-1,2)$ и $B(0,1,2)$ и е нормална на рамнината $2x-y+2z-4=0$. **Одговор.** $4x+6y-z-4=0$.

Задача 5.1.12. Напиши ја равенката на рамнината која ја содржи точката $M(3,-1,2)$ и е нормална на рамнините $2x-y+2z-4=0$ и $x+y+4z-5=0$. **Одговор.** $2x+2y-z-2=0$.

Задача 5.1.13. Во снопот рамнини $x+3y-5+\lambda(x-y+z+4)=0$, најди ја рамнината која отсекува еднакви ненулти отсечки на x и y оските. **Одговор.** $2x+2y+z=1$.

Задача 5.1.14. Во снопот рамнини определен со рамнините $\Sigma: 2x+y-3z+2=0$ и $\prod: 25x+5y-48z+31=0$, определи две нормални една на друга рамнини, од кои едната минува низ точката $M(4,-3,1)$.

Задача 5.1.15. Во xOz рамнината најди точка M колинеарна со точките $A(3,-1,2)$ и $B(-1,-2,4)$. **Одговор.** $M(7,0,0)$.

5.2 Права

Задача 5.2.5. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $P(1,2,3)$ и е паралелна со правата $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$. **Одговор.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{2}$.

Задача 5.2.6. Провери дали правата

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-1} \text{ минува низ точките } M(1,3,-1) \text{ и } N(-2,1,1).$$

Решение. Правата минува низ дадените точки, ако нивните координати ги исполнуваат нејзините равенки. За точката M имаме:

$$\frac{1-1}{1}=\frac{3-3}{2}=\frac{-1+1}{-1} \Leftrightarrow 0=0=0.$$

Следува дека точката M лежи на правата. За точката N добиваме:

$$\frac{-2-1}{1}=\frac{1-3}{2}=\frac{1+1}{-1} \Leftrightarrow -3=-1=-2.$$

Значи, точката N не лежи на правата.

Задача 5.2.7. Провери дали точките $M(3,0,1)$, $N(0,2,4)$ и $P\left(1,\frac{4}{3},3\right)$, лежат на една права. **Одговор.** Да.

Задача 5.2.8. Напиши ја равенката на правата што минува низ точката $P(-2,3,1)$ и е паралелна на z -оската. **Одговор.** $\frac{x+2}{0}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{1}$.

Задача 5.2.9. Равенките на правата $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{1}$, запиши ги во проекции.

Одговор. $x+y-1=0$, $x-z+3=0$.

Задача 5.2.10. Равенката на правата $\begin{cases}2x-3y+4z-7=0\\3x-y-z+19=0\end{cases}$ запиши ја во проекции.

Одговор. $7x-5z+64=0$, $130x+15y+1287=0$

Задача 5.2.11. Најди паралелен вектор на правата $\begin{cases}2x-3y+4z-7=0\\3x-y-z+19=0\end{cases}$.

Задача 5.2.12. Најди точка што лежи на правата $\begin{cases}2x-3y+4z-7=0\\3x-y-z+19=0\end{cases}$.

Задача 5.2.13. Напиши ги равенките на правата $\begin{cases}2x+y+8z=16\\x-2y-z=-2\end{cases}$ во канoничен вид.

Задача 5.2.14. Напиши ги равенките на правата $x=0$, $y+2z-1=0$ во каноничен вид.

Задача 5.2.15. Најди ја пресечната точка, ако постои, на рамнините:

1) $x+2y+z-4=0$, $3x-5y+3z-1=0$ и $2x+7y-z-8=0$.

5.3 Заемен однос

Задача 5.3.12. Провери дали правите $p:\begin{cases}3x+2y+3z-5=0\\x+y+z-4=0\end{cases}$ и $q:\begin{cases}x=2t+3\\y=t-4\\z=-3t+2\end{cases}$ се заемно нормални.

Задача 5.3.13. Најди го прободот на правата $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$ врз рамнината $x-2y+z-1=0$.

Задача 5.3.14. Најди ја равенката на правата p што минува низ точката $P(1,2,3)$, нормална е на правата $q:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$ и паралелна со рамнината $\sum : x+y-z+2=0$.

Решение. Правата q е паралелна на векторот $\vec{q}=(1,-2,2)$. Рамнината $\sum$ е нормална на векторот $\vec{n}=(1,1,-1)$. И двата вектори се нормални на правата p, па нивниот векторски производ е паралелен на p.

$$\vec{q}\times\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}1&-1\\-2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}\right)=(0,-3,-3)\|(0,1,1).$$

Следува дека правата p има равенка $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\Leftrightarrow\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Задача 5.3.15. Најди ја равенката на рамнината која е паралелна со правата $p:\begin{cases}x=4t-5\\y=7t+2\\z=2t+1\end{cases}$ и ја содржи правата $q:\begin{cases}x=2t+3\\y=t-4\\z=-3t+2\end{cases}$. **Одговор.** $23x-15y+10z-153=0$.

Задача 5.3.16. Најди ја равенката на рамнината што минува низ правата p која е пресек на рамнините $x+4y+3z+4=0$ и $3x+2y+5z+12=0$, и која е паралелна со правата $q:\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-3}$. **Одговор.** $2x-3y+4z+8=0$.

Задача 5.3.17. Напиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(-3,0,2)$ и правата $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$. **Одговор.** $4x+5y+3z+6=0$.

Задача 5.3.18. Напиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $M(-3,0,2)$ и правата $p:\begin{cases}3x+2y+3z-5=0\\ x+y+z-4=0\end{cases}$.

Решение. Рамнината ја содржи точката $M(-3,0,2)$ и припаѓа на снопот рамнини $3x+2y+3z-5+\lambda(x+y+z-4)=0$. Од овие услови го наоѓаме параметарот λ. Имено,

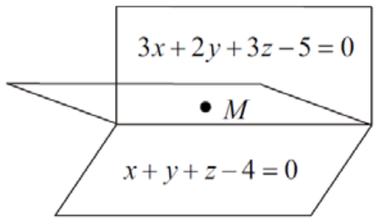
$$3(-3)+2\cdot 0+3\cdot 2-5+\lambda(-3+0+2-4)=0 \Leftrightarrow -8-5\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{8}{5}$$

Оттука, равенката на рамнината е:

$$3x+2y+3z-5-\frac{8}{5}(x+y+z-4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x+10y+15z-25-8x-8y-8z+32=0$$

$$\Leftrightarrow 7x+2y+7z+7=0.$$



Задача 5.3.19. Напиши ја равенката на рамнината во која лежат паралелните прави

$$\frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2} \text{ и } \frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2}.$$

Решение. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p}=(7,4,2)$ и ја содржи точката $P(1,3,4)$. Правата q е паралелна на векторот $\vec{p}$ и ја содржи точката $Q(0,0,0)$.

Треба да најдеме уште еден неколинеарен вектор со векторот $\vec{p}$, што е паралелен на рамнината. Таков вектор е $\overrightarrow{QP}=(1,3,4)$. Сега векторот

$$\vec{p}\times\overrightarrow{QP}=\left(\begin{vmatrix}4&2\\3&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&7\\4&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}7&4\\1&3\end{vmatrix}\right)=(10,-26,17),$$

е нормален на рамнината. Оттука, равенката на рамнината е:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 10x-26y+17z=0.$$

Задача 5.3.20. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ правата $p:\begin{cases}2x-y+z=0\\ x+3y-2z+3=0\end{cases}$ и на x и y оските отсекува еднакви ненулти отсечоци.

Одговор. $7x+7y-4z+9=0$.

Задача 5.3.21. За кои вредности на параметрите B и D, правата $\begin{cases}x-2y+z-9=0\\ 3x+By+z+D=0\end{cases}$ лежи во xOy рамнината. **Одговор.** $B=-6$ и $D=-27$.

Задача 5.3.22. Покажи дека правите $p: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и $q: \dfrac{x-6}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ се сечат.

Задача 5.3.23. Најди го прободот на правата што минува низ точките $P(3,1,2)$ и $Q(-1,1,0)$ врз рамнината $x-2y+z-1=0$.

Решение. Правата што минува низ точките P и Q, е паралелна со векторот $\overrightarrow{PQ}=(-4,0,-2)\|(2,0,1)$, па нејзината равенка е $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-2}{1}$.

Координатите на прободот, се решение на системот равенки на правата и рамнината. За да го решиме системот, прво равенките на правата ги запишуваме во параметарски вид,

$$x=2t+3,\ y=1,\ z=t+2$$

а потоа ги заменуваме променливите во равенката на рамнината.,

$$x-2y+z-1=0 \Leftrightarrow (2t+3)-2+(t+2)-1=0 \Leftrightarrow 2t+3-2+t+2-1=0 \Leftrightarrow 3t+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}.$$

Следува: $x=2\left(-\dfrac{2}{3}\right)+3=\dfrac{5}{3}$, $y=1$, $z=-\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{4}{3}$, од каде прободот е: $S\left(\dfrac{5}{3},1,\dfrac{4}{3}\right)$.

Задача 5.3.24. Покажи дека правите $p:\begin{cases}4x+z-1=0\\ x-2y+3=0\end{cases}$ и $q:\begin{cases}3x+y-z+4=0\\ y+2z-8=0\end{cases}$ се сечат.

Задача 5.3.25. Дадени се правите $p: \dfrac{x-2}{a}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ и $q:\begin{cases}x=-2+t\\ y=1+2t\\ z=t\end{cases}$. Определи го параметарот a така што правите p и q да се сечат, а потоа за тие вредности на a најди ја пресечната точка и равенката на рамнината во која лежат. **Одговор.** $a=3$, $x+2y-5z=0$.

Задача 5.3.26. Најди ги равенките на правата p која минува низ точката $P(2,4,5)$, паралелна е со рамнината $\Sigma: 2x-y+z=7$ и ја сече правата $q: \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-6}{2}$.

Решение. Рамнината Σ е нормална на векторот $\vec{n}=(2,-2,1)$. Правата q е паралелна на векторот $\vec{q}=(-1,3,2)$ и ја содржи $Q(3,4,6)$. Нека правата p е паралелна на $\vec{p}=(x,y,z)$. Векторот $\overrightarrow{PQ}=(1,0,1)$. Од условот, правата p е паралелна со рамнината Σ, следува:

$$\vec{p}\vec{n}=0. \Leftrightarrow (x,y,z)(2,-2,1)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z=0.$$

Од условот, правите p и q се сечат, следува:

$$\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{PQ}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3x+2y-3z+y=0 \Leftrightarrow x+y-z=0.$$

Двата услови се исполнети ако се решение на системот равенки

$2x-2y+z=0$, $x+y-z=0$, од каде

$$x=k\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=k,\ y=k\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3k,\ z=k\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4k.$$

Следува: $\vec{p}=(k,3k,4k)\|(1,3,4)$, од каде равенките на правата p се $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{4}$.

Задача 5.3.27. Најди ги равенките на правата која е паралелна со рамнините $\sum: 3x+12y-3z-5=0$ и $\prod: 3x-4y+9z+7=0$ и ги сече правите

$$p:\ \frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3} \text{ и } q:\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

Одговор. $25x+32y+26z+55=0$, $4y-3z+10=0$.

Задача 5.3.28. Најди ги равенките на заедничката нормала на правите

$$p:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1} \text{ и } q:\ \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

Коментар. Заедничка нормала на две прави е правата која ги сече и е нормална на правите

Одговор. $x-y+z+1=0$, $x+2y+z-2=0$.

5.4 Агол

Задача 5.4.4. Најди го косинусот од аголот меѓу рамнините

$$2x-3y+z-1=0 \text{ и } 4x-6y+2z-3=0.$$

Задача 5.4.5. Најди го аголот меѓу правата $\begin{cases} y=2 \\ 3x-\sqrt{3}z=0 \end{cases}$ и рамнината $x=1$.

Одговор. $\phi=\frac{\pi}{6}$.

Задача 5.4.6. Најди го аголот меѓу правите $p:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$ и $q:\ \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$.

Задача 5.4.7. Напиши ги равенките на правата, што минува низ точката $M(1,-5,3)$, и со координатните оски x, y и z, зафаќа агли $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{2\pi}{3}$, соодветно.

Одговор. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{\sqrt{2}}=\frac{z-3}{-1}$.

Задача 5.4.8. Пресметај ги косинусите на аглите што правата $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$ ги гради со координатните оски.

Решение. Правата е паралелна на векторот $\vec{p}=(1,-2,2)$. Векторите паралелни со x, y и z оската се $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ и $\vec{k}=(0,0,1)$, соодветно. Тогаш косинусите на аглите што правата ги гради со координатните оски се:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{p}\vec{i}}{|\vec{p}||\vec{i}|}=\frac{1}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{\vec{p}\vec{j}}{|\vec{p}||\vec{j}|}=\frac{-2}{\sqrt{1+4+4}}=-\frac{2}{3} \text{ и } \cos\gamma=\frac{\vec{p}\vec{k}}{|\vec{p}||\vec{k}|}=\frac{2}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}.$$

Задача 5.4.9*. Низ z оската повлечи рамнина која со рамнината $2x+y-\sqrt{5}z=0$ зафаќа агол од 60^0. **Одговор.** $x+3y=0$ и $x-\frac{1}{3}y=0$.

Задача 5.4.10*. Запиши ја равенката на рамнината Σ која ја содржи правата p: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ и со рамнината $\prod$: $x-4y-8z+12=0$, зафаќа агол $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Одговор. $x+20y+7z-14=0$ и $x-z+4=0$.

5.5 Растојание

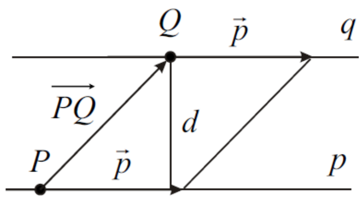
Задача 5.5.5. Најди го растојанието од точката

$$M(3,5,4) \text{ до правата } \ p: x+y=0,\ z=2.$$

Задача 5.5.6. Најди го растојанието меѓу паралелните прави

$$p:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2} \text{ и } q:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

Решение. Растојание меѓу две паралелни прави е растојанието од произволна точка на едната права до другата права. Правата p е паралелна на векторот $\vec{p}=(-1,2,2)$ и ја содржи точката $P(2,1,0)$, правата q ја содржи точката $Q(2,1,1)$ и $\overrightarrow{PQ}=(0,0,1)$. Притоа,



$$\vec{p}\times\overrightarrow{PQ}=\left(\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&2\\0&0\end{vmatrix}\right)=(2,1,0)$$

$$\left|\vec{p}\times\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5} \text{ и } |\vec{p}|=\sqrt{1+4+4}=3, \text{ од каде } d=\frac{\left|\vec{p}\times\overrightarrow{PQ}\right|}{|\vec{p}|}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Задача 5.5.7. Најди го растојанието од точката $M(3,-1,1)$ до рамнината $2x-y+2z=0$.

Задача 5.5.8. Најди го растојанието меѓу паралелните рамнини $2x+y-2z+3=0$ и $2x+y-2z-12=0$. **Одговор.** $d=5$.

Задача 5.5.9. Најди го растојанието меѓу правата $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ и рамнината $2x+y=0$. **Одговор.** $d=\sqrt{5}$.

Задача 5.5.10. Најди равенка на рамнина која е паралелна со рамнината $2x+2y-z-11=0$ и е на растојание 5 единици од неа. Притоа бараната рамнина и точката $M(1,2,4)$ се на различни страни од дадената рамнина. **Одговор.** $2x+2y-z-26=0$.

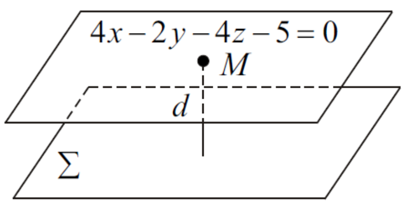
Задача 5.5.11. Најди го растојанието меѓу разминувачките прави

$$p:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=1-t\\ z=2+2t\end{cases} \text{ и } q:\begin{cases}x+y-4=0\\ z=1\end{cases}.$$

Задача 5.5.12. На x-оската определи точка M еднакво оддалечена од рамнините $2x+2y-z-1=0$ и $12x-16y+15z+1=0$. **Одговор.** $M_1(2,0,0)$ и $M_2\left(\frac{11}{43},0,0\right)$.

Задача 5.5.13. Состави равенка на рамнина Σ, која паралелна на рамнината Π: $4x-2y-4z-5=0$ и е на растојание 4 единици од неа.

Решение. Бидејќи рамнината Σ е паралелна со рамнината Π, нејзината равенка е $4x-2y-4z+D=0$. Ако $x=0$ и $y=0$, следува: $-4z-5=0$, или $z=-\frac{5}{4}$. Значи точката $M\left(0,0,-\frac{5}{4}\right)$ лежи на рамнината Π.



Бидејќи растојанието до рамнината Σ е 4, имаме:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Leftrightarrow 4=\frac{\left|-4\left(-\frac{5}{4}\right)+D\right|}{\sqrt{16+4+16}} \Leftrightarrow 4=\frac{|5+D|}{6} \Leftrightarrow 24=|5+D| \Leftrightarrow 24=\pm(5+D) \Leftrightarrow$$

$$24=5+D,\ 24=-5-D \Leftrightarrow D=19,\ D=-29.$$

Следува дека задачата има две решенија: $4x-2y-4z+19=0$ и $4x-2y-4z-29=0$.

Задача 5.5.14. Точките $A(1,-2,3)$ и $C(5,-4,-1)$ се спротивни темиња на ромб. Третото теме B лежи на правата $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-2}{-3}$. Напиши ја равенката на рамнината во која лежи ромбот и пресметај ја неговата плоштина. **Одговор.** $5x+2y+4z-13=0$.

5.6 Проекции

Задача 5.6.4. Најди ја симетричната точка на точката $M(2,-3,5)$, во однос на точката $M'(4,1,1)$. **Одговор.** $M''(6,5,-3)$.

Задача 5.6.5. Најди ги координатите на симетричната точка на точката $M(3,4,7)$ во однос на рамнината $2x-y+z+9=0$.

Задача 5.6.6. Најди ја симетричната точка на точката $M(2,3,4)$ во однос на правата

$p:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. **Одговор.** $M''(6,1,-4)$.

Задача 5.6.7. Дадена е точката $M(2,3,4)$ и рамнината $\Sigma: x-y+2z+5=0$. Најди ја:

а) правата низ точката M нормална на рамнината Σ;

б) ортогонална проекција M' на точката M врз рамнината Σ.

в) точката M'' симетрична на точката M во однос на рамнината Σ. **Одговор.** $M''(-2,7,-4)$.

Задача 5.6.8. Дадени се точката $M(2,3,4)$ и правата $p:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Најди ја:

а) рамнината низ точката M нормална на правата p.

б) ортогоналната проекција M' на точката M врз правата p.

в) точката M'' симетрична на точката M во однос на правата p. **Одговор.** $M''(6,1,-4)$.

Задача 5.6.9. Напиши ја равенката на нормалата спуштена од точката $M(1,-1,1)$ на правата $p: x=0$, $y-z+1=0$.

Коментар. Нормала на права е права нормална на неа. **Одговор.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

Задача 5.6.10. Дадена е правата $p:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$ и рамнината $\Sigma: x-y+2z+5=0$.

Најди ја проекцијата p' на правата p врз рамнината Σ. **Одговор.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y+\frac{8}{3}}{1}=\frac{z+\frac{7}{3}}{0}$.

Задача 5.6.11. Најди ја проекцијата p' на правата $p: x=5t+3$, $y=t-1$, $z=t+4$; врз рамнината $\Sigma: 2x-2y+3z+5=0$. **Одговор.** $\begin{cases} 2x-2y+3z+5=0 \\ 5x-13y-12z+20=0 \end{cases}$.

Задача 5.6.12. Најди ја симетричната права на правата $p:\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ во однос на рамнината $\sum: x-y+3z+8=0$. **Одговор.** $\frac{x-\frac{4}{5}}{54}=\frac{y-\frac{23}{5}}{23}=\frac{z+\frac{7}{5}}{8}$.

6. ПОВРШИНИ

6.1 Површини

Не навлегувајќи во дефиницијата за површина, под **површина** ќе подразбираме множество точки во простор. Во Декартов правоаголен координатен систем површината може да се зададе со равенка од видот

$$F(x,y,z)=0 \quad (1).$$

Притоа, точката $M(x_0,y_0,z_0)$ лежи на површината, ако нејзините координати ја исполнуваат равенката на површината, т.е. $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Ако M не лежи на површината, тогаш $F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Равенката (1) е имплицитна равенка на површина. Ако променливата

$$z=f(x,y) \quad (2)$$

е експлицитно изразена како функција од x и y од равенката (1), тогаш (2) се нарекува равенка на површина во експлицитен вид. Слично, ако променливите y и x може да се изразат експлицитно, тогаш соодветните експлицитни равенки на површината се $y=f(x,z)$ и $x=f(y,z)$.

Просторна крива C ќе сметаме дека е пресек на две површини

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0.$$

Ако точката $M(x_0,y_0,z_0)$ припаѓа на кривата, тогаш

$$F_1(x_0,y_0,z_0)=0,\ F_2(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Ако M не лежи на кривата тогаш $F_1(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ или $F_2(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Затоа равенка на крива во простор ќе претставува системот равенки

$$C:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}.$$

Крива во простор може да се зададе и со помош на параметарски равенки, така што променливите x, y и z се функција од четврта променлива (параметар) t,

$$C: x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t).$$

Да забележиме дека секое множество точки не е површина. Ниту секоја равенка од типот $F(x,y,z)=0$ е равенка на површина. Во оваа тема ќе разгледаме некои видови површини врз основа на нивните равенки, за кои знаеме дека се равенки на површини.

Рамнината во простор е површина. Интуитивно ако рамнината личи на рамен неограничен лист хартија, површината може да личи на изгужван, потскинат, превиткан ограничен или неограничен лист. Истото се однесува и за крива. Правата е крива. Интуитивно кривата може да изгледа како деформирана со растегнување, кинење или виткање права или отсечка.

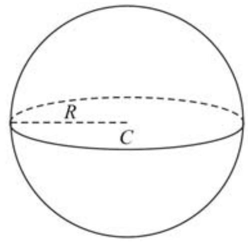
Сфера

Дефиниција 6.1.1. Сфера е множество точки во просторот кои се на еднакво растојание R од дадена точка C. Точката C се нарекува **центар** на сферата, а растојанието R **радиус** на сферата.

Теорема 6.1.2. Равенката на сферата со центар во точката $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиус R е:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Доказ. Нека точката $C(x_0, y_0, z_0)$ е центар на сферата што ја содржи точката $M(x, y, z)$. Тогаш:



$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Задача 6.1.1. Најди го центарот и радиусот на сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 5 = 0.$$

Решение. Ја сведуваме равенката на сферата од општ во каноничен вид

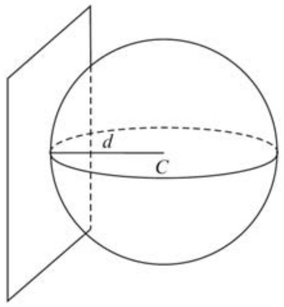
$$(x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 + (z+2)^2 - 4 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 11.$$

Следува центарот е $C(1,-1,-2)$, а радиусот е $R = \sqrt{11}$.

Задача 6.1.2. Најди ја равенката на сферата со центар $C(1,-2,2)$ и радиус $R = 4$.

Решение. Равенката на сферата со центар $C(1,-2,2)$ и радиус $R = 4$ е:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 16.$$



Задача 6.1.3. Најди ја равенката на сферата што има центар во точката $C(1,3,-6)$ и ја допира рамнината $6x + 6y - 7z + 55 = 0$.

Решение. Радиусот на сферата е еднаков на растојанието од центарот на сферата до рамнината, $d = R$. Растојанието е:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Leftrightarrow d = \frac{|6 + 6\cdot 3 - 7(-6) + 55|}{\sqrt{36+36+49}} \Leftrightarrow d = 11.$$

Тогаш равенката на сферата е $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 121$.

6.2 ЦИЛИНДРИЧНИ, КОНУСНИ И РОТАЦИОНИ ПОВРШИНИ

6.2.1 ЦИЛИНДРИЧНИ ПОВРШИНИ

Дефиниција 6.2.1. Нека е дадена просторната крива D и ненултиот вектор $\vec{p}$. Површината што ја сочинуваат сите прави што ја сечат кривата D и се паралелни на векторот $\vec{p}$ се нарекува **цилиндрична површина**.

Кривата D се нарекува **директриса**, правите што ја формираат цилиндричната површина се нарекуваат **генератриси**, а векторот $\vec{p}$ **вектор на правец** на цилиндричната површина.

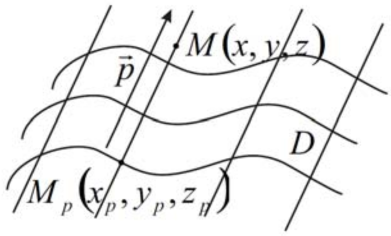
Значи цилиндричната површина се добива кога една права p се движи низ директрисата паралелно на векторот $\vec{p}$.

Равенка на цилиндрична површина. Нека

$$D: F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0$$

е просторна крива и $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ е ненулт вектор. Нека $M(x,y,z)$ е произволна точка од цилиндричната површина што ја содржи D и е паралелна на $\vec{p}$. Тогаш точката M лежи на некоја генератриса p. Ако $M_p(x_p,y_p,z_p)$ е пресекот на директрисата D, со генератрисата p, тогаш равенките на p се:

$$\frac{x-x_p}{p_1}=\frac{y-y_p}{p_2}=\frac{z-z_p}{p_3}(=t)\ (1)$$



Бидејќи точката M_p лежи и на директрисата, важи:

$$F_1(x_p,y_p,z_p)=0,\ F_2(x_p,y_p,z_p)=0.$$

Нека каноничните равенки (1) на генератрисата p ги запишеме во параметарски вид

$$x-x_p=p_1t,\ y-y_p=p_2t,\ z-z_p=p_3t,$$

ги изразиме координатите x_p, y_p и z_p,

$$x_p=x-p_1t,\ y_p=y-p_2t,\ z_p=z-p_3t,$$

и ги замениме во равенките на директрисата, добиваме:

$$F_1(x-p_1t,y-p_2t,z-p_3t)=0,\ F_2(x-p_1t,y-p_2t,z-p_3t)=0\ (2)$$

Со елиминирање параметарот t од системот (2), ја добиваме равенката на цилиндричната површина

$$F(x,y,z)=0.$$

Запомни. Равенката на цилиндричната површина што има директриса D: $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ и е паралелна на векторот $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$, ја добиваме така што ги изразуваме координатите на пресечната точка x_p, y_p и z_p од равенката на генератрисата $\frac{x-x_p}{p_1}=\frac{y-y_p}{p_2}=\frac{z-z_p}{p_3}=t$ преку x, y, z и t, ги заменуваме во равенките на директрисата D_p: $F_1(x_p,y_p,z_p)=0$, $F_2(x_p,y_p,z_p)=0$ и го елиминираме параметарот t.

Цилиндрични површини со генератриси паралелни на координатните оски. Нека директрисата на цилиндричната површина лежи во xOy рамнината т.е. има равенка

$$D: F(x,y)=0,\ z=0$$

и генератрисата е паралелна со векторот $\vec{k}=(0,0,1)$. Тогаш равенката на цилиндричната површина е $F(x,y)=0$. Значи, равенката $F(x,y)=0$ на крива во рамнина (што се поистоветува со рамнинската крива $D: F(x,y)=0$, $z=0$), во простор претставува равенка на цилиндричната површина што е паралелна на z оската и ја содржи директрисата D. Слично се добива ако кривата лежи во xOz или yOz и соодветно е паралелна со y или x-оската.

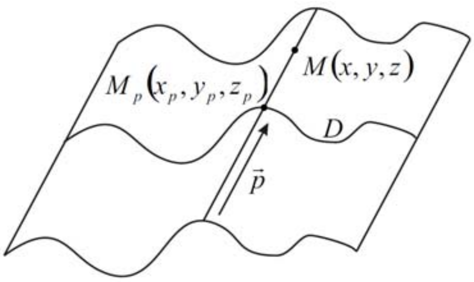
Нека кривата C е зададена со равенките $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$. Со елиминирање на променливата z од равенките на кривата се добива равенката $F(x,y)=0$. Следува дека кривата C припаѓа на цилиндричната површина $F(x,y)=0$, па

$$F(x,y)=0,\ z=0$$

е ортогоналната проекција на кривата C на xOy рамнината. Аналогно, со елиминација на променливата y или z од равенката на кривата C соодветно се добиваат проекциите на C на xOz или yOz рамнините.

Задача 6.2.1. Состави ја равенката на цилиндричната површина чија директриса е дадена со равенката $z=y^2$, $x=0$, а генератрисата е паралелна со правата $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Решение. Цилиндричната површина е паралелна со векторот $\vec{p}=(1,2,3)$ и има директриса $D: z=y^2$, $x=0$. Нека $M(x,y,z)$ е точка од цилиндричната површина. Правата низ M која е паралелна со векторот $\vec{p}$, минува низ една точка од директисата, $M_p(x_p,y_p,z_p)$. Тогаш важи:



$$\frac{x-x_p}{1}=\frac{y-y_p}{2}=\frac{z-z_p}{3}=t \Leftrightarrow$$
$$x-x_p=t,\ y-y_p=2t,\ z-z_p=3t \Leftrightarrow$$
$$x_p=x-t,\ y_p=y-2t,\ z_p=z-3t$$

Бидејќи $M_p(x_p,y_p,z_p)$ лежи на директрисата, важи:

$$x_p=0 \Leftrightarrow x-t=0 \Leftrightarrow t=x \text{ и } z_p=y_p^2 \Leftrightarrow z-3t=(y-2t)^2.$$

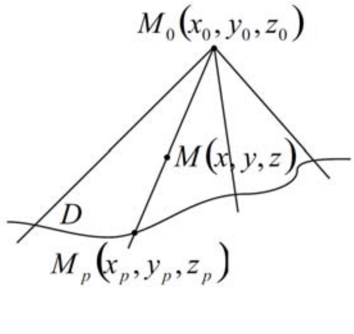
Следува дека равенката на цилиндричната површина е $z-3x=(y-2x)^2$.

6.2.2 КОНУСНИ ПОВРШИНИ

Дефиниција 6.2.2. Нека е дадена просторната крива D, и точката M_0. Површината што ја сочинуваат сите прави што ја сечат кривата D и минуваат низ точката M_0, се нарекува **конусна површина**. Кривата D се нарекува **директриса**, точката M_0 **теме**, а правите што ја формираат конусната површина се нарекуваат **генератриси** на конусната површина.

Значи конусната површина се добива кога една права p се движи низ директрисата и минува низ точката M_0.

<u>Равенка на конусна површина</u>. Нека е дадена просторната крива D: $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ и темето $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Нека $M(x,y,z)$ е произволна точка од конусната површина со теме M_0 што ја содржи D. Нека $M_p(x_p,y_p,z_p)$ е пресекот на директрисата D, со генератрисата p што ја содржи точката M. Тогаш равенката на p е:



$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}\left(=\frac{1}{t}\right).$$

Бидејќи точката M_p лежи на директрисата, важи:

$$F_1(x_p,y_p,z_p)=0,\ F_2(x_p,y_p,z_p)=0.$$

Од равенката на директрисата ги изразуваме координатите на пресечната точка x_p, y_p и z_p,

$$x_p-x_0=t(x-x_0),\ y_p-y_0=t(y-y_0),\ z_p-z_0=t(z-z_0),$$

односно

$$x_p=x_0+t(x-x_0),\ y_p=y_0+t(y-y_0),\ z_p=z_0+t(z-z_0),$$

и ги заменуваме во равенките на директрисата

$$F_1(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0),z_0+t(z-z_0))=0,\ F_2(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0),z_0+t(z-z_0))=0.$$

Со елиминација на параметарот t од последниот систем равенки ја добиваме равенката на конусната површина

$$F(x,y,z)=0.$$

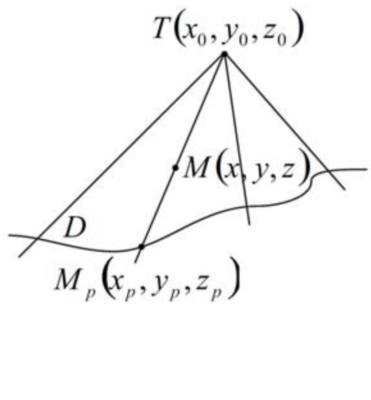
Запомни. Равенката на конусната површина со теме $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и директриса D: $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$, ја добиваме така што ги изразуваме координатите на пресечната точка x_p, y_p и z_p од равенката на генератрисата $\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t}$ преку x, y, z и t, ги заменуваме во равенките на директрисата D_p: $F_1(x_p,y_p,z_p)=0$, $F_2(x_p,y_p,z_p)=0$ и го елиминираме параметарот t.

Задача 6.2.2. Состави ја равенката на конусната површина со теме $T(0,0,1)$ и директриса $x^2+y^2+z^2=1$, $z=0$.

Решение. Нека $M(x,y,z)$ е точка од конусната површина. Правата MT минува низ една точка од директисата $M_p(x_p,y_p,z_p)$. Тогаш:

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow\frac{x}{x_p}=\frac{y}{y_p}=\frac{z-1}{z_p-1}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow$$

$$x_p=tx,\ y_p=ty,\ z_p-1=t(z-1)\Leftrightarrow x_p=tx,\ y_p=ty,\ z_p=1+t(z-1).$$



Бидејќи точката $M_p(x_p,y_p,z_p)$ лежи на директрисата, важи:

$$z_p=0\Leftrightarrow 1+t(z-1)=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{z-1}\ (1)\text{ и}$$

$$x_p{}^2+y_p{}^2+z_p{}^2=1\Leftrightarrow t^2x^2+t^2y^2=1\Leftrightarrow t^2(x^2+y^2)=1\ (2).$$

Од (1) и (2) следува дека бараната равенка е

$$\frac{1}{(z-1)^2}(x^2+y^2)=1\Leftrightarrow x^2+y^2=(z-1)^2.$$

6.2.3 РОТАЦИОНИ ПОВРШИНИ

Дефиниција 6.2.3. Нека е дадена крива D и права p. Површината што се добива со ротација на кривата D околу правата p се нарекува **ротациона површина**. Правата p се нарекува **оска на ротација**.

Секоја точка од кривата D при ротацијата опишува кружница.

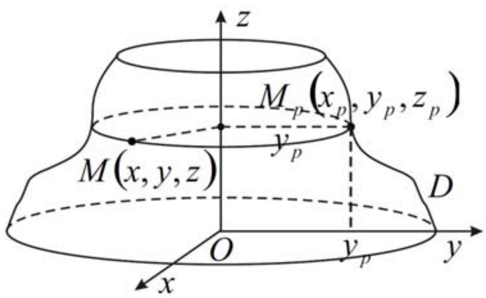
Специјални ротациони површини. Ќе ги разгледаме само ротационите површини што се добиваат кога кривата D е рамнинска и лежи во некоја од координатните рамнини, а оската на ротација е некоја од координатните оски која лежи во рамнината на кривата.

Нека кривата

$$D: F(y,z)=0\,,\ x=0$$

која лежи во yOz рамнината, ротира околу z-оската. Нека $M(x,y,z)$ е произволна точка од ротационата површина која лежи на кружницата, што при ротирањето ја формира точката $M_p(x_p, y_p, z_p)$ од кривата D. Бидејќи M_p лежи на кривата D, важи:

$$F(y_p, z_p)=0\,,\ x_p=0 \ \ (1).$$



Притоа, кружницата лежи во паралелна рамнина на xOy рамнината, па $z_p = z$. Радиусот на кружницата е y_p, од каде следува дека $x^2+y^2=y_p^2$, односно

$$y_p = \pm\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Со елиминација на x_p, y_p и z_p од равенката (1) ја добиваме равенката на ротационата површина

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0\,.$$

Аналогно се изведувааат равенките на ротационите површини добиени со ротација на рамнинските криви што лежат во xOy и xOz рамнините околу останатите координатни оски што не се нормални на рамнините во кои лежат кривите.

Запомни. Равенката на кривата што лежи во една од координатните рамнини и ротира околу координатна оска што не е нормална на рамнината, се добива така што променливата во равенката на кривата што се совпаѓа со оската на ротација останува иста, а другата променлива се заменува со плус, минус корен од збирот од квадратите на останатите променливи. Значи ако кривата $F(a,b)=0$, $c=0$, каде a, b и c се различни и $a,b,c\in\{x,y,z\}$, ротира околу a-оската, тогаш равенката на ротационата површина е $F\left(a,\pm\sqrt{b^2+c^2}\right)=0$.

Задача 6.2.3-4. Најди ги равенките на површините што се добиваат со ротација на следниве криви околу дадените оски:

3) $z=2x,\ y=0$ околу x-оската. 4) $x^2+y^2=a^2,\ z=0$ околу y-оската.

Решение. 3) Бидејќи ротационата површина ротира околу x-оската променливата x останува иста, а z го заменуваме со $\pm\sqrt{y^2+z^2}$,

$$\pm\sqrt{y^2+z^2}=2x \Leftrightarrow y^2+z^2=4x^2\,.$$

4) Бидејќи ротационата површина ротира околу y-оската променливата y останува иста, а x го заменуваме со $\pm\sqrt{x^2+z^2}$,

$$\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2+y^2=a^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=a^2.$$

6.3 ПОВРШИНИ ОД ВТОР РЕД

6.3.1 Површини од втор ред

Дефиниција 6.3.1. Површина од втор ред е множество точки во простор, чии координати ја исполнуваат равенката

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2xz+b_3yz+c_1x+c_2y+c_3z+d=0 \quad (1),$$

каде барем еден од броевите a_i, b_i, $i=1,2,3$ е различен од нула.

Сферата е површина од втор ред бидејќи нејзината општа равенка

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0,$$

е од облик (1). Обратно да видиме кога равенката од втор ред

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2xz+b_3yz+c_1x+c_2y+c_3z+d=0 \quad (1),$$

каде каде барем еден од a_i, b_i, $i=1,2,3$ е различен од нула е равенка на сфера. Ако општиот облик на равенка на сфера го помножиме со $A\neq 0$, добиваме:

$$Ax^2+Ay^2+Az^2-2Ax_0x-2Ay_0y-2Az_0z+Ax_0^2+Ay_0^2+Az_0^2-AR^2=0,\ A\neq 0$$

За да равенката (1) е равенка на сфера треба

$$a_1=a_2=a_3=A\neq 0,\ b_1=b_2=b_3=0,\ c_1=-2Ax_0,\ c_2=-2Ay_0,\ c_3=-2Az_0 \text{ и}$$

$$d=Ax_0^2+Ay_0^2+Az_0^2-AR^2 \text{ за некој } A\neq 0.$$

Заради произволноста на x_0, y_0 и z_0, следува $c_1=-2Ax_0$, $c_2=-2Ay_0$ и $c_3=-2Az_0$ може произволно да се изберат. Од последното равенство добиваме:

$$R=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2-\frac{d}{A}}=\frac{1}{2|A|}\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2-4Ad}>0,$$

што е можно само ако $c_1^2+c_2^2+c_3^2-4Ad>0$.

Значи (1) е равенка на сфера, ако

$$a_1=a_2=a_3=A\neq 0,\ b_1=b_2=b_3=0 \text{ и } c_1^2+c_2^2+c_3^2-4Ad>0.$$

Ако центарот на сферата е во координатниот почеток, $x_0=0$, $y_0=0$ и $z_0=0$, тогаш равенката на сферата е:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

и претставува канонска равенка на сфера.

Пресек на сферата со произволна рамнина е кружница.

Еден координатен систем со помош на транслација и ротација може да се трансформира во друг со друг центар и друга тројка на заемно нормални десно ориентирани оски. При промена на координатниот систем површините не се менуваат туку само се менуваат нивните равенки.

Се покажува дека површините од втор ред при избран координатен систем може да имаат равенки од облик

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D,$$

кои се нарекуваат **канонски равенки**.

Сферата е специјален вид на површината од втор ред наречена елипсоид. Во понатамошниот текст ќе ги дефинираме и класифицираме површините од втор ред преку нивните канонски равенки што ги имаат во избран координатен систем. Значи, <u>во овој дел, под равенка на површина ќе ја подразбираме нејзината канонската равенка</u>.

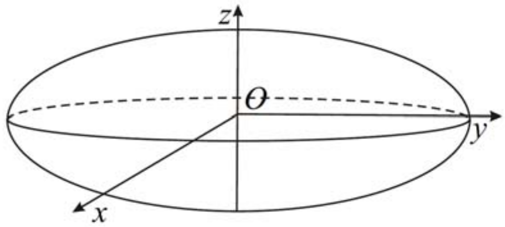
6.3.2 Елипсоид

Дефиниција 6.3.2. Елипсоид е површина зададена со равенката $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Да забележиме дека секогаш кога имаме параметар што е парен степен, се подразбира основата да е позитивна. Така за параметарот a^2, b^2 и c^2 важи $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Да ги разгледаме пресеците на елипсоидот со рамнините $z = h$. Добиваме: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$, $z = h$. Ако $|h| < c$ тогаш пресеците се елипси кои лежат во рамнините $z = h$. За $h = \pm c$ пресеците се точките $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$ кои се нарекуват темиња на елипсоидот. За $|h| > c$ елипсоидот и рамнината не се сечат.

Слично се добива ако $x = h$ и $y = h$.



Ако $a = b = c$, тогаш елипсоидот е сфера.

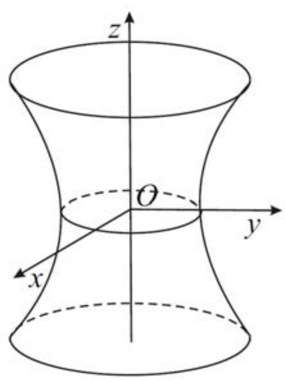
6.3.3 Еднокрилен хиперболоид

Дефиниција 6.3.3. Еднокрилен хиперболоид е површина зададена со равенката
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Да го разгледаме пресекот на еднокрилниот хиперболоид со рамнината $z = h$. Имаме: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$, што претставува елипса. Значи пресеците на еднокрилниот хиперболоид со рамнините паралелни со xOy рамнината се елипси.

Ако $x = h$ тогаш ја добиваме равенката $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$, што претставува хипербола за $h \neq \pm a$ и пар прави за $h = \pm a$.

Слично се добива ако бараме пресек со рамнините $y = h$.

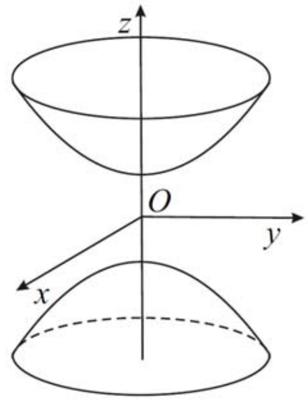


6.3.4 Двокрилен хиперболоид

Дефиниција 6.3.4. Двокрилен хиперболоид е површина зададена со равенката

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,.$$

Да ги анализираме пресеците на двокрилниот хиперболоид со рамнините $z=h$, $h\in\mathbb{R}$. Имаме: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$, што претставува елипса за $|h|>c$, точките $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$ за $|h|=c$ и празно множество за $|h|<c$.



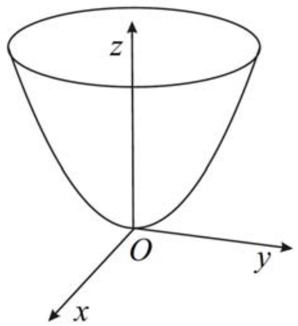
Ако $x=h$ тогаш ја добиваме равенката $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{a^2}$ што претставува хипербола во рамнината $x=h$.

Слично се добива ако бараме пресек со рамнините $y=h$.

6.3.5 Елиптичен параболоид

Дефиниција 6.3.5. Елиптичен параболоид е површина зададена со равенката

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\,.$$



Ќе ги разгледаме пресеците на елиптичниот параболоид со рамнините $z=h$. Имаме: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h$. Следува: за $h>0$ пресеците се елипси, за $h=0$ пресекот е точката $(0,0,0)$ и за $h<0$ елиптичниот параболоид нема пресек со рамнините $z=h$.

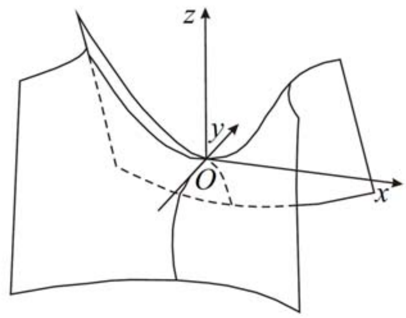
Ако $y=h$ имаме: $\frac{x^2}{a^2}=z-\frac{h^2}{b^2}$, односно пресекот е парабола. Слично, за $x=h$ пресекот е парабола.

6.3.6 Хиперболичен параболоид

Дефиниција 6.2.5. Хиперболичен параболоид е површина зададена со равенката

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\,.$$

Ќе ги разгледаме пресеците на хиперболичниот параболоид со рамнините $z=h$, $h\in\mathbb{R}$. Имаме: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=h$. Следува дека за $h\neq 0$ пресеците се хиперболи, а за $h=0$ пресекот е пар прави.



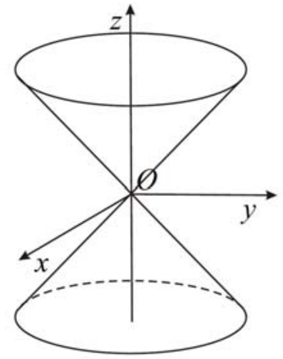
Ако $x=h$, тогаш пресеците се параболи.

Слично, за $y=h$ пресеците се параболи.

6.3.7 Конус

Дефиниција 6.3.7. Конус е површина зададена со равенката $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Да ги анализираме пресеците на конусот со рамнините $z=h$, $h\in\mathrm{R}$. Имаме: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$. Следува: за $h\neq 0$ пресеците се елипси, а за $h=0$ пресекот е точката $(0,0,0)$.



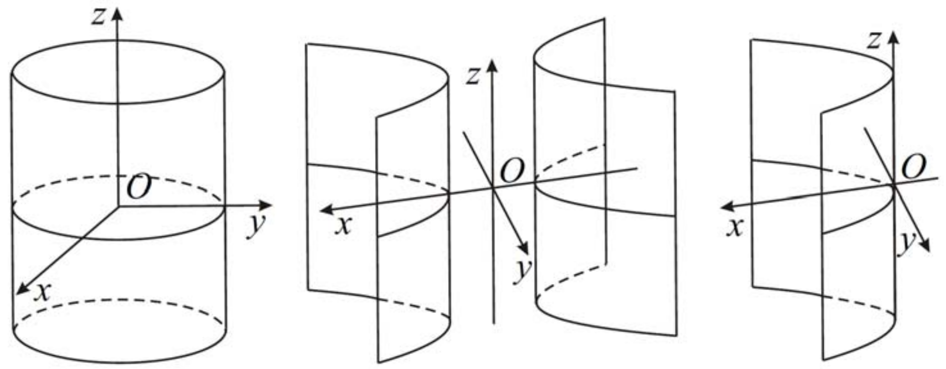
Ако $x=h$ добиваме дека $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}$, па за $h\neq 0$ пресеците се хиперболи и за $h=0$ пресекот е пар прави.

Слично добиваме кога $y=h$.

6.3.8 Цилиндри од втор ред

Дефиниција 6.3.8. Цилиндричните површини што претставуваат површини од втор ред се нарекуваат **цилиндри од втор ред**.

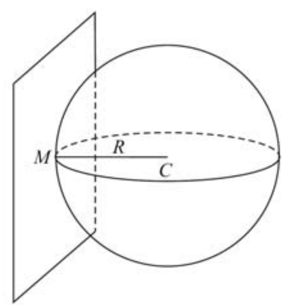
Од равенките на цилиндрите од втор ред ќе ги наброиме елиптичниот цилиндер $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, хиперболичниот цилиндер $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, параболичниот цилиндер $x^2=ay$, $a\neq 0$, парот рамнини $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ ($x=cy$, $x=-cy$, $c\neq 0$) и двојната рамнина $\frac{x^2}{a^2}=0$ ($x=0$).



6.3 ЗАДАЧИ

<u>6.1 Сфера</u>

Задача 6.1.4. Определи ја равенката на рамнината што ја допира сферата $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$ во точката $M(1,1,3)$.



Решение. Сферата има центар $C(2,3,1)$. Нормалниот вектор на рамнината е $\overrightarrow{CM}=(-1,-2,2)=-(1,2,-2)$. Затоа нејзината равенка е

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow x-1+2(y-1)-2(z-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$x-1+2y-2-2z+6=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+3=0.$$

Задача 6.1.5. Напиши ја равенката на сферата што минува низ точките

$$A(1,1,0),\ B(1,0,-1),\ C(2,0,0) \text{ и } O(0,0,0).$$

Решение. Каноничната равенка на сферата е $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=R^2$. Бидејќи точките A, B, C и O лежат на сферата, исполнет е системот равенки

$$(1-p)^2+(1-q)^2+r^2=R^2 \Leftrightarrow 1-2p+p^2+1-2q+q^2+r^2=R^2;$$
$$(1-p)^2+q^2+(1+r)^2=R^2 \Leftrightarrow 1-2p+p^2+q^2+1+2r+r^2=R^2;$$
$$(2-p)^2+q^2+r^2=R^2 \Leftrightarrow 4-4p+p^2+q^2+r^2=R^2;$$
$$p^2+q^2+r^2=R^2 \Leftrightarrow p^2+q^2+r^2=R^2.$$

Ако од првите три равенки ја одземеме четвртата добиваме:

$$1-2p+1-2q=0 \Leftrightarrow p+q-1=0;\ 1-2p+1+2r=0 \Leftrightarrow p-r-1=0;\ 4-4p=0 \Leftrightarrow p=1.$$

Оттука $p=1$, $q=0$ и $r=0$. Следува $R^2=1$.

Значи равенката на сферата е $(x-1)^2+y^2+z^2=1$.

Задача 6.1.6. Напиши ја равенката на сферата која има центар во точката $C(2,6,0)$ и ја допира одвнатре сферата $S_1: x^2+y^2+z^2-8x-10y+4z+20=0$.

Одговор. $(x-2)^2+(y-6)^2+z^2=4$.

Задача 6.1.7. Покажи дека сферите

$$x^2+y^2+z^2=9 \text{ и } x^2+y^2+z^2-8x+4y+8z-45=0$$

се допираат, определи ги координатите на допирната точка и најди ја равенката на нивната заедничка тангентна рамнина. **Одговор.** $P_2(-2,1,2)$, $2x-y-2z+9=0$.

Задача 6.1.8. Напиши ја равенката на сферата опишана околу тетраедарот чии темиња се во точките $A(2,0,0)$, $B(0,5,0)$, $C(0,0,3)$ и $D(0,0,0)$.

Одговор. $(x-1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{19}{2}$.

Задача 6.1.9. Напиши ја равенката на сферата впишана во тетраедарот што го заградуваат рамнините $3x-2y+6z-18=0$, $x=0$, $y=0$ и $z=0$.

Одговор. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$.

Задача 6.1.10. Напиши ја равенката на сферата чиј центар е во точката $C(2,3,-1)$ и која од правата p: $5x-4y+3z+20=0$, $3x-4y+z-8=0$, отсекува тетива со должина 16 единици. **Одговор.** $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289$.

Задача 6.1.11. Најди ги координатите на центарот C_1 и радиусот r на кружницата која е пресек на сферата $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z-11=0$ и рамнината $2x+y-2z=0$.

Одговор. $C_1(0,2,1)$, $r=4$.

Задача 6.1.12. Напиши ја равенката на сферата што минува низ кружниците $x^2+y^2=9$, $z=0$ и $x^2+y^2=25$, $z=2$. **Одговор.** $x^2+y^2+(z+5)^2=34$.

Задача 6.1.13. Напиши ја равенката на сферата што минува низ кружницата $x^2+y^2-11=0$, $z=0$ и ја допира рамнината $x+y+z-5=0$. **Одговор.** $x^2+y^2+(z+1)^2=12$.

Задача 6.1.14. Најди точка на сферата $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ која е најблиску до рамнината $3x-4y+19=0$. Пресметај го растојанието од таа точка до рамнината.

Одговор. 1.

6.2.1 Цилиндрични површини

Задача 6.2.5. Состави ја равенката на цилиндричната површина чија директриса е правата $p: y=x+1$, $z=x-2$, а векторот на правец е $\vec{l}=(2,-1,3)$.

Одговор. $4x-y-3z-5=0$.

Задача 6.2.6. Состави ја равенката на цилиндричната површина чија директриса е дадена со равенката $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, а генератрисата е паралелна со векторот $\vec{p} = (1,1,1)$.

Одговор. $(x - z + 1)^2 + (y - z + 1)^2 = 1$.

Задача 6.2.7. Директрисата на цилиндричната површина е дадена со равенките

$$x = y^2 + z^2,\ x = 2z,$$

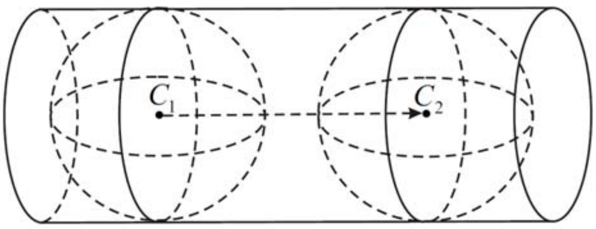
а генератрисата е нормална на рамнината во која лежи директрисата. Состави ја равенката на цилиндричната површина. **Одговор.** $10(2x + z) = y^2 + (z + 2x)^2$.

Задача 6.2.8. Состави ја равенката на цилиндричната површина која е паралелна со правата $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ и е опишана околу топката $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Одговор. $(10x - 2y - 2z)^2 + (7y - 2x - 4z)^2 + (5z - 3x - 6y)^2 = 121$.

Задача 6.2.9. Состави ја равенката на цилиндричната површина опишана околу топките $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 49$ и $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-7)^2 = 49$.

Решение. Центрите на топките се $C_1(2,1,0)$ и $C_2(2,1,7)$. Векторот на правец на цилиндричната површина е $\overrightarrow{C_1C_2} = (0,0,7) \| (0,0,1) = \vec{p}$.



Рамнината што го содржи координатниот почеток и е нормална на $\overrightarrow{C_1C_2}$ е xOy рамнината чија равенка е $z = 0$. Затоа директрисата е $D: (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 49$, $z = 0$.

Ќе ја определиме равенката на цилиндричната површина која има директриса D и е паралелна со $\vec{p}$. Генратрисата во произволна точка $M_p(x_p, y_p, z_p)$ е

$$\frac{x - x_p}{0} = \frac{y - y_p}{0} = \frac{z - z_p}{1} = t \Leftrightarrow x_p = x,\ y_p = y,\ z_p = z - t.$$

Точката M_p лежи на директрисата, па

$$(x_p - 2)^2 + (y_p - 1)^2 + {z_p}^2 = 49,\ z_p = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 49.$$

Следува дека равенката на цилиндричната површина е $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 49$.

Задача 6.2.10. Сферата со равенка $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ е осветлена од зраци паралелни на правата $x = 0$, $z = y$. Најди ја равенката на контурата на сенката во xOy рамнината.

Одговор. $2x^2 + (y+2)^2 = 8$.

6.2.2 Конусни површини

Задача 6.2.11. Состави ја равенката на конусната површина со теме $T(1,-2,1)$ и директриса $D: x + y - z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

Одговор. $(2x + y - z + 1)^2 + (2x + y - 2z + 2)^2 = (x + y - 2z + 2)^2$.

Задача 6.2.12. Состави ја равенката на конусната површина со теме во точката $T(a,b,c)$ и директриса $y^2 = 2px$, $z = 0$. **Одговор.** $(bz - cy)^2 = 2p(az - cx)(z - c)$.

Задача 6.2.13. Состави ја равенката на конусната површина што има теме во точката $T(3,0,0)$ и е опишана околу сферата $x^2+y^2+z^2=1$. **Одговор.** $(x-3)^2=8(y^2+z^2)$.

Задача 6.2.14. Светлосен извор се наоѓа во координатниот почеток. Најди ја контурата на сенката на сферата $S: x^2+y^2+z^2-10x+2y+10=0$ во рамнината $3x-2y=30$.

Решение. Прво ќе ја определиме конусната површина која има теме во точката $O(0,0,0)$ и е опишана околу сферата S. Каноничната равенка на сферата S е:

$$(x-5)^2-25+(y+1)^2-1+z^2+10=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16,$$

од каде нејзиниот радиус и центар се $C(5,-1,0)$ и $R=4$. Растојанието $\left|\overrightarrow{CO}\right|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$.

Да ја разгледаме сферата S_1 со центар во координатниот почеток и радиус R_1 што го задоволува условот

$$R_1^{\,2}=\left|\overrightarrow{CO}\right|^2-R^2 \text{ т.е. } R_1^{\,2}=26-16=10. \text{ Нејзината равенка е: } x^2+y^2+z^2=10.$$

Ако од равенката на сферата S_1 ја одземеме равенката на сферата S, добиваме дека $10x-2y-10=10$ или $5x-y-10=0$. Оттука, равенката на една директриса е:

$$x^2+y^2+z^2=10,\ 5x-y-10=0$$

Ја спроведуваме постапката за добивање на равенка на конусна површина со дадена директриса и теме.

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{x}{x_p}=\frac{y}{y_p}=\frac{z}{z_p}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow x_p=tx,\ y_p=ty,\ z_p=tz;$$

$$5x_p-y_p-10=0 \Leftrightarrow 5tx-ty-10=0 \Leftrightarrow t(5x-y)=10 \Leftrightarrow t=\frac{10}{5x-y};$$

$$x_p^{\,2}+x_p^{\,2}+z_p^{\,2}=10 \Leftrightarrow t^2x^2+t^2y^2+t^2z^2=10 \Leftrightarrow t^2(x^2+y^2+z^2)=10;$$

$$\frac{10^2}{(5x-y)^2}(x^2+y^2+z^2)=10 \Leftrightarrow 10(x^2+y^2+z^2)=(5x-y)^2.$$

Следува дека равенката на контурата на сенката е:

$$10(x^2+y^2+z^2)=(5x-y)^2,\ 3x-2y=30.$$

Задача 6.2.15. Состави ја равенката на конусната површина опишана околу сферите

$$S_1: (x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1 \text{ и } S_2: x^2+y^2+z^2=4.$$

Одговор. $53^2\left((x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2\right)=3^5\cdot 4(x+y+z-18)^2$.

Задача 6.2.16. Состави равенка на кружна конусна површина што минува низ точката $S(2,-1,1)$, има теме во точката $M(4,-4,3)$, а за оска и служи правата

$$p: x=3t+1,\ y=-2t-2,\ z=t+2.$$

Одговор. $196\left((x-4)^2+(y+4)^2+(z-3)^2\right)=17(3x-2y+z-23)^2$.

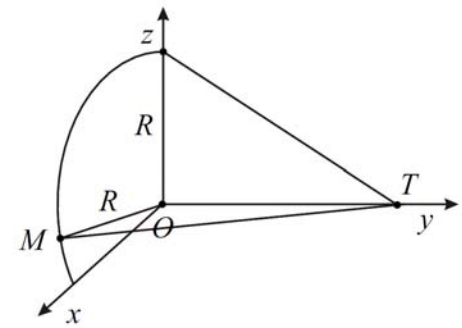
Задача 6.2.17. Правата $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ ротира околу y-оската. Состави ја равенката на опишаната површина.

Решение. Пресекот на правата $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ со y-оската е точката $T(0,2,0)$. Затоа опишаната површина е конусна и има теме во точката T.

Рамнината $x0z$ е нормална на оската на ротација на конусната површина. Нека $M(x,0,z)$ е пресечната точка на дадената права со $x0z$ рамнината. Важи:

$\frac{x}{6}=\frac{-2}{3}=\frac{z}{2}\Leftrightarrow x=-4,\ z=-\frac{4}{3}$, односно $M\left(-4,0,-\frac{4}{3}\right)$, од

каде $R=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{(-4)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{160}{9}}$.



Директрисата е пресек на $x0z$ рамнината и сферата со центар во координатниот почеток и радиус R, односно $D:\ x^2+y^2+z^2=\frac{160}{9},\ y=0$. Оттука ја добиваме равенката на конусната површина.

$$\frac{x-x_0}{x_p-x_0}=\frac{y-y_0}{y_p-y_0}=\frac{z-z_0}{z_p-z_0}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow\frac{x}{x_p}=\frac{y-2}{y_p-2}=\frac{z}{z_p}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow$$

$$x_p=tx,\ y_p-2=t(y-2),\ z_p=tz\Leftrightarrow x_p=tx,\ y_p=t(y-2)+2,\ z_p=tz;$$

$$y_p=0\Leftrightarrow t(y-2)+2=0\Leftrightarrow t=-\frac{2}{y-2};$$

$$x_p{}^2+y_p{}^2+z_p{}^2=\frac{160}{9}\Leftrightarrow t^2\left(x^2+z^2\right)=\frac{160}{9}\Leftrightarrow\frac{4}{(y-2)^2}\left(x^2+z^2\right)=\frac{160}{9}\Leftrightarrow$$

$$9\left(x^2+z^2\right)=40(y-2)^2\Leftrightarrow 9x^2+40(y-2)^2+z^2=0.$$

6.2.3 Ротациони површини

Задача 6.2.18-19. Најди ги равенките на површините што се добиваат со ротација на следниве криви околу дадените оски:

18) $(y-2)^2+(z-2)^2=1,\ x=0$ околу y-оската; 19) $z=y^2+1, x=0$ околу z-оската.

Одговор. 18) $16\left(x^2+z^2\right)=\left((y-2)^2+x^2+z^2+3\right)^2$; 19) $z=x^2+y^2+1$.

Задача 6.2.20. Правата $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{2}$ ротира околу y-оската. Состави ја равенката на опишаната површина.

6.3 Елипсоид, параболоид, хиперболоид, конус и цилиндри од втор ред

Задача 6.3.1. Напиши ги пресечните точки на хиперболоидот

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и правата $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$. **Одговор.** $P(4,-3,2)$.

Задача 6.3.2. Напиши ја равенката на множеството точки еднакво оддалечени од точката $A\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$ и рамнината $\Sigma: z=-\frac{a}{2}$. Што претставува тоа множество?

Одговор. $2az=x^2+y^2$, параболоиди.

Задача 6.3.3. Точката $M(1,y,-1)$ лежи на хиперболичниот параболоид $4x^2-z^2=y$. Напиши ги равенките на правите што лежат на параболоидот и ја содржат точката M.

Одговор. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{12}=\frac{z+1}{2}$.

Задача 6.3.4. Напиши ја допирната рамнина на елипсоидот $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$, што е нормална на векторот $\vec{n}=(1,-1,0)$. **Одговор.** $x-y+\sqrt{5}=0$ и $x-y-\sqrt{5}=0$.

Прилог

1.1.4 Систем од m линеарни равенки со n непознати

Дефиниција 1.1.4.1. Систем од m линеарни равенки со n непознати, $m \times n$, над множеството од реални (комплексни) броеви за n-торката променливи $(x_1, x_2, ..., x_n)$ е системот равенки

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

каде m и n се природни броеви, а a_{ij} и b_i се реални (комплексни) броеви за $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Елементите a_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, се нарекуваат **коефициенти** пред непознатите, а елементите b_i, $1 \le i \le m$, се нарекуваат **слободни членови**.

Ако коефициентот пред некој член е 0, тогаш членот не мора да се пишува. Системот ќе го нарекуваме само систем од m линеарни равенки со n непознати, подразбирајќи дека се работи за n-торката променливи $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ако $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, тогаш системот се нарекува **хомоген**, а ако постои $b_i \ne 0$ за некое $i \in \{1,2...m\}$, тогаш системот е **нехомоген**.

Решение на системот линеарни равенки е секоја подредена n-торка $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ која ги исполнува сите равенки на системот. Решението го запишуваме и во форма

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0, ...,\ x_n = x_n^0.$$

Ако системот линеарни равенки има барем едно решение се нарекува **согласен**. Ако има точно едно решение тогаш велиме дека е **определен**. Ако има бесконечно решенија тогаш е **неопределен**. Ако системот линеарни равенки нема решение тогаш се нарекува несогласен или **противречен**. Два системи се **еквивалентни**, ако имаат еднакви множества на решенија. Значи два системи се еквивалентни ако секое решение на едниот систем е решение на другиот и обратно.

Линеарната равенка $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, претставува специјален случај на систем од една равенка (во однос на непознатите $(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Дефиниција 1.1.4.2. Нулта линеарна равенка, ознака 0, е равенката во која сите коефициенти се 0. **Противречна** линеарна равенка е равенката во која сите коефициенти пред непознатите се нули, додека слободниот член е различен од нула. Противречните и нулти равенки се нарекуваат **сингуларни**. **Регуларна** линеарна равенка (**во општа положба**) е равенката во која барем еден од коефициентите пред непознатите е различен од 0.

Значи нултата линеарна равенка од ред n е $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$ т.е. $0 = 0$, додека противречни линеарни равенки од ред n се $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = a$, $a \ne 0$ т.е. $0 = a$. Нултите, противречните и регуларните равенки ги делат равенките на класи. Нултите равенки од ред n имаат бесконечно решенија изразени преку n параметри. Множеството решенија им е $\mathbb{R}^n$. Противречните равенки немаат решение. Регуларните равенки од ред n имаат единствено решение за $n=1$ или бесконечно решенија за $n>1$ изразени преку $n-1$ параметар. Решенијата лесно може да се запишат експлицитно, така што ќе се изрази променливата чиј коефициент е ненулт преку останатите кои ќе се земат за параметри.

Задача 1.1.4.1. Определи ги решенијата на равенката $x+2y=3$.

Решение. Една од променливите ја земаме за параметар. Нека $y=t$. Тогаш $x=3-2t$, па решенија се подредените двојки

$$(t,3-2t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Задача 1.1.4.2. Определи ги решенијата на равенката $x+y+z=0$

Решение. Имаме три променливи и една равенка. Значи две од променливите треба ги избереме за параметри, а третата променлива ја изразуваме преку нив. Нека $y=t$ и $z=k$, $t,k\in\mathbb{R}$. Тогаш $x=-t-k$. Следува дека решенијата се:

$$x=-t-k,\ y=t,\ z=k,\ t,k\in\mathbb{R}.$$

Постапката за определување на решенијата на системот равенки се нарекува **решавање** на системот.

Познати ни се два метода за решавање на системи линеарни равенки, методот на замена и методот на спротивни коефициенти.

Методот на замена се состои во избор на една една од променливите од една од равенките чиј коефициент пред неа е различен од 0, и заменување во останатите равенки. На тој начин решавањето на системот m равенки со n непознати се сведува на решавање на систем од $n-1$ равенка со $m-1$ непозната. Продолжувајќи ја постапката проблемот го сведуваме на решавање на една линеарна равенка. Ако системот нема решение во текот на постапките ќе добиеме противречна равенка.

Според методот на спротивни коефициенти множиме две равенки од системот чии коефициенти пред одредена променлива x_i, $i\in\{1,2,...,n\}$ се ненулти броеви, така што после множењето да добиеме спротивни коефициенти пред променливата x_i. Потоа ги собираме равенките. Новодобиената равенка има коефициент 0 пред x_i и ако се замени со една од двете равенки од кои е добиена се добива еквивалентен систем. Една варијанта на методот на спротивни коефициенти е методот на Гаус што ќе го разгледаме во продолжение.

Дефиниција 1.1.4.3. Елементарни трансформации на систем линеарни равенки се:
1. Замена на местата на две равенки;
2. Множење на една равенка со број различен од нула;
3. Множење на една равенка со број и додавање на друга равенка.

Теорема 1.1.4.1. Со примена на конечен број на елементарни трансформации на еден систем од линеарни равенки се добива еквивалентен систем.

Доказ. Нека A е систем од m линеарни равенки со n непознати.

● Нека Системот B е добиен од системот A со примена на една елементарна трансформација.

1. Нека B е добиен од A со замена на местата на две равенки i и j, $i\neq j$.

Тогаш системите A и B се состојат од истите равенки, па имаат исти решенија.

2. Нека B е добиен од A со множење на i-тата равенка со број $\lambda \neq 0$. Тогаш системите A и B се разликуваат само во i-тата равенка.

Ако $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ е решение на A, важи: $a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + ... + a_{in}x_n^0 = b_i$ од каде $\lambda a_{i1}x_1^0 + \lambda a_{i2}x_2^0 + ... + \lambda a_{in}x_n^0 = \lambda b_i$. Следува, $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ ја исполнува i-тата равенка на B. Бидејќи останатите равенки се исти, $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ ги исполнува сите равенки на B.

Обратно, ако $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ е решение на B, тогаш од $\lambda a_{i1}x_1^0 + \lambda a_{i2}x_2^0 + ... + \lambda a_{in}x_n^0 = \lambda b_i$ бидејќи $\lambda \neq 0$, следува, $a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + ... + a_{in}x_n^0 = b_i$. Затоа $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ ја исполнува i-тата равенка на A, па ги исполнува сите равенки на A.

3. Нека B е добиен од A со множење на i-та равенка со број λ и додавање на j-тата равенка. Тогаш системите A и B се разликуваат само во j-тата равенка.

Ако $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ е решение на A, важи:

$$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + ... + a_{in}x_n^0 = b_i \text{ и } a_{j1}x_1^0 + a_{j2}x_2^0 + ... + a_{jn}x_n^0 = b_j \text{ па}$$
$$\lambda\left(a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + ... + a_{in}x_n^0\right) + a_{j1}x_1^0 + a_{j2}x_2^0 + ... + a_{jn}x_n^0 = \lambda b_i + b_j.$$

Следува, $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ ја исполнува j-та равенка на B.

Обратно, ако $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ е решение на B важи:
$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + ... + a_{in}x_n^0 = b_i$ и $\lambda\left(a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + ... + a_{in}x_n^0\right) + a_{j1}x_1^0 + a_{j2}x_2^0 + ... + a_{jn}x_n^0 = \lambda b_i + b_j$, од каде имаме $\lambda b_i + a_{j1}x_1^0 + a_{j2}x_2^0 + ... + a_{jn}x_n^0 = \lambda b_i + b_j$ или $a_{j1}x_1^0 + a_{j2}x_2^0 + ... + a_{jn}x_n^0 = b_j$, односно исполнета е j-та равенка на A.

● Нека системот B е добиен од системот A со примена на k елементарни трансформации. Тогаш системите $A = B_0, B_1, B_2, ..., B_k = B$ што се добиваат после примена на секоја елементарна трансформација се меѓусебно еквивалентни. Следува дека системите A и B се еквивалентни.■

Дефиниција 1.1.4.4. Линеарната равенка R е **линеарна комбинација** од равенките $R_1, R_2, ..., R_n$, ако постојат броеви $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ такви што

$$R = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + ... + \lambda_n R_n.$$

Дефиниција 1.1.4.5. Линеарните равенки $R_1, R_2, ..., R_n$ се **линеарно независни** ако

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + ... + \lambda_n R_n = 0, \text{ само кога } \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$$

Дефиниција 1.1.4.6. Линеарните равенки $R_1, R_2, ..., R_n$ се **линеарно зависни** ако

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + ... + \lambda_n R_n = 0 \text{ и барем еден } \lambda_i \neq 0,\ i \in \{1,2,...n\}.$$

Теорема 1.1.4.2. Линеарните равенки $R_1, R_2, ..., R_n$ се линеарно зависни, ако и само ако барем една од нив може да се запише како линеарна комбинација од останатите.

Доказ. Нека линеарните равенки $R_1, R_2, ..., R_n$ се линеарно зависни. Следува:

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + ... + \lambda_n R_n = 0 \text{ и } \lambda_i \neq 0 \text{ за некое } i \in \{1,2,...n\}.$$

Тогаш равенката

$$R_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}R_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i}R_2 - ... - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}R_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}R_{i+1} - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}R_n,$$

е линеарна комбинација од останатите равенки.

Обратно. Не губиме од општост ако претпоставиме дека линеарната равенка R_n е линеарна комбинација на равенките $R_1, R_2, ..., R_{n-1}$ т.е. постојат броеви $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ такви што $R_n = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + ... + \lambda_{n-1} R_{n-1}$. Тогаш $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + ... + \lambda_{n-1} R_{n-1} - R_n = 0$ и $-1 \neq 0$, односно равенките $R_1, R_2, ..., R_n$ се линеарно зависни.■

Од теоремата следува дека равенките $R_1, R_2, ..., R_n$ се линеарно независни, акко ниту една равенка од нив не може да се запише како линеарна комбинација од останатите.

Теорема 1.1.4.3. Нека се дадени линеарните равенки $R_1, R_2, ..., R_n$.

а) Ако меѓу равенките $R_1, R_2, ..., R_n$ се наоѓа нултата равенка, тогаш равенките $R_1, R_2, ... R_n$ се линеарно зависни.

б) Ако некои од равенките $R_1, R_2, ..., R_n$ се линеарно зависни, тогаш сите равенки $R_1, R_2, ..., R_n$ се линеарно зависни.

в) Ако равенките $R_1, R_2, ..., R_n$ се линеарно независни, тогаш кое било подмножество од нив е линеарно независно.

Доказ. а) Нека $R = 0$ за некој $i \in \{1,2,...,n\}$. Тогаш,

$$0R_1 + 0R_2 + ... + 0R_{i-1} + 1R_i + 0R_{i+1} + ... + 0R_n = 0 \text{ и } 1 \neq 0,$$

следува дека равенките $R_1, R_2, ... R_n$ се линеарно зависни.

б) Не губиме од општост ако претпоставиме дека равенките $R_1, R_2, ..., R_k$, $1 \leq k \leq n$, се линеарно зависни. Следува, $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + ... + \lambda_k R_k = 0$ и постои број $\lambda_i \neq 0$, $i \in \{1,2,...,k\}$. Тогаш:

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + ... + \lambda_k R_k + 0R_{k+1} + ... + 0R_n = 0 \text{ и } \lambda_i \neq 0 \text{ за некое } i \in \{1,2,...,n\},$$

па равенките $R_1, R_2, ..., R_n$ се линеарно зависни.

в) Следува директно од б).

Теорема 1.1.4.4. Ако во системот линеарни равенки S една линеарна равенка R е линеарна комбинација од останатите равенки, тогаш системот S е еквивалентен со системот S_1 што се добива со изоставување на равенката R.

Доказ. Со повеќекратна примена на елементарната трансформација множење на равенка со број добиваме еквивалентен систем кој место равенката R има нулта равенка, односно равенка во која коефициентите пред непознатите и слободните членови е 0. Но, бидејќи секоја n-торка $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ е решение на нултата равенка, системот со или без нултата равенка има ист број на решенија. Следува дека системот S_1 што се добива со отфрлање на нултата равенка е еквивалентен со системот S.

<u>Гаусов метод на елиминации</u>. Нека е даден системот од m линеарни равенки со n непознати

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1).$$

Ако сите коефициенти во системот се нули тогаш множеството решенија е $\mathbb{R}^n$. Затоа ќе сметаме дека системот содржи ненулт коефициент.

Идејата на Гаусовиот метод на елиминации е со трансформации што не ги менуваат решенијата на системот да се направи во секоја наредна равенка првиот ненулт коефициент да биде поместен барем за едно место во десно.

Ја разгледуваме колоната со најнизок реден број, што содржи ненулт коефициент. Нека тоа е колоната j. Може да сметаме дека $a_{1j} \neq 0$ (ако $a_{ij} \neq 0$ за некое $i \in \{1,2,...,m\}$, тогаш ги ротираме првата со i-тата равенка и ги пренумерираме коефициентите во стандарден редослед). Ги множиме елементите од првата редица со $-a_{ij}/a_{1j}$, за секое $i = 2,3,...,m$; и ги додаваме на втората, третата, ..., m-тата редица, соодветно. После овој чекор елементите во j-та колона под a_{1j} се нули. Ги пренумерираме коефициентите со стандарден долен индекс и горен индекс 1.

Во вторитот чекор постапката ја применуваме на елементите од втората до m-тата редица.

Продолжувајќи ја постапката добиваме дека последната ненулта редица има облик

$$a_{rs}^r x_s + ... + a_{rn}^r x_n = b_r^r \text{, каде } a_{rs}^r \neq 0 \text{; или } 0 = b_r^r \text{, каде } b_r^r \neq 0 .$$

Нултите равенки ги отфрламе. Се добива системот

$$\begin{cases} a_{1j}^1 x_j + ... + a_{1k}^1 x_k + ... + a_{1s}^1 x_s + ... + a_{1n}^1 x_n = b_1^1 \\ \qquad a_{2k}^2 x_k + ... + a_{2s}^2 x_s + ... + a_{2n}^2 x_n = b_2^2 \\ \qquad ... \\ \qquad a_{r-1,t}^{r-1} x_t + ... + a_{r-1,n}^{r-1} x_n = b_{r-1}^{r-1} \\ 0 = b_r^r, b_r^r \neq 0 \text{ или } a_{rs}^r x_s + ... + a_{rn}^r x_n = b_r^r, a_{rs}^r \neq 0 \end{cases} \text{(2), каде } a_{1i}^1 \neq 0 \text{, } a_{2k}^2 \neq 0 \text{, ... } a_{r-1,t}^{r-1} \neq 0$$

$$1 \le j < k < ... < s \le n \text{ и } 1 \le j, 2 \le k, ..., r-1 \le t, r \le s \text{, } r \le \min\{m+1, n\} ;$$

Системите (1) и (2) се еквивалентни. Можни се следните случаи:

1. Ако $r = n$ и последната равенка е $a_{nn}^n x_n = b_n^n$, $a_{nn}^n \neq 0$; тогаш системот има единствено решение кое се добива така што ќе се изрази променливата $x_n = b_n^n / a_{nn}^n$, и ќе се замени во претпоследната равенка $a_{n-1,n-1}^{n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{n-1} x_n = b_{n-1}^{n-1}$, од каде ќе се добие вредноста за x_{n-1}, $x_{n-1} = \left(b_{n-1}^{n-1} - a_{n-1,n}^{n-1} x_n\right) / a_{n-1,n-1}^{n-1}$. Бидејќи коефициентите $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ се ненулти броеви, секоја променлива ќе добие единствена вредност.

2. Ако последната равенка е $0 = b_r^r$, $b_r^r \neq 0$; тогаш системот нема решение бидејќи содржи противречна равенка.

3. Ако не важи $r < n$ и последната равенка е $a_{rs}^r x_s + ... + a_{rn}^r x_n = b_r^r$, $a_{rs}^r \neq 0$; тогаш системот има бесконечно решенија изразени преку $n - r$ параметри. Решенијата експлицитно ги добиваме така што ја изразуваме променливата x_s, земајќи и другите променливи (ако постојат) за параметри, $x_s = \left(b_r^r - a_{rn}^r x_n - a_{r,n-1}^r x_{n-1} ... - a_{r,s+1}^r x_{s+1}\right) / a_{rs}^r$, и ја заменуваме во претпоследната равенка, како кај 1). Постапката ја продолжуваме се додека не ја изразиме променливата x_j. За параметри се земаат и променливите што не се појавуваат при процесот на изразување.

Од постапката за добивање на нултите равенки во системот (2) при Гаусовиот метод на елиминации добиваме:

$$0 = R_k - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i R_i \ , \ k = r+1,...,m \text{ т.е. } R_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i R_i \ , \ k = r+1,...,m \, .$$

каде равенките $R_1, R_2, ..., R_m$ се пермутација на равенките од системот (1), додека λ_i, $i = 1,2,...,n$ се коефициенти. Следува дека $r+1$-вата до m-тата равенка се линеарна комбинација од првите r равенки т.е. се линеарно зависни. Равенките $R_1, R_2, ..., R_r$ се линеарно независни, бидејќи во спротивно би добиле нулта равенка меѓу првите r равенки на системот (2), што не е можно.

1.2.2 КУБНА РАВЕНКА

*Кубната равенка ја сведуваме на еден од следниве случаи:

● Случај 1: $x^3 + p = 0$, $p \neq 0$.

Следува $x^3 = -p$ од каде $x = \sqrt[3]{-p}$. Па, задачата е сведена на наоѓање на 3-тите корени $\sqrt[3]{-p}$ во множеството комплексни броеви.

● Случај 2: $x^3 + px + q = 0$, $p \neq 0$ (1).

Воведуваме смена $x = u + v$. Следува:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow$$
$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0 \, .$$

Избираме u и v така што $3uv + p = 0$. Тогаш важи $u^3 + v^3 = -q$ па го добиваме системот

$$u^3 + v^3 = -q \, , \; 3uv + p = 0 \;\; (2)$$

Теорема 1.2.2.1. Следните услови се еквивалентни

1) x_0 е корен на равенката $x^3 + px + q = 0$, $p \neq 0$

2) $x_0 = u_0 + v_0$ каде (u_0, v_0) е решение на системот $u^3 + v^3 = -q$, $3uv + p = 0$.

Доказ. 1)$\Rightarrow$2) Нека x_0 корен на равенката $x^3 + px + q = 0$. Следува $x_0^3 + px_0 + q = 0$ или $x_0^3 + px_0 = -q$. Ќе покажеме дека постојат броеви u_0 и v_0 такви што $x_0 = u_0 + v_0$, $u_0^3 + v_0^3 = -q$ и $u_0 v_0 = -\dfrac{p}{3}$. Да ја разгледаме квадратната равенка

$$z^2 - x_0 z - \frac{p}{3} = 0 \, .$$

Во множеството комплексни броеви секоја квадратна равенка има две решенија сметани со својата кратност. Нека решенијата се u_0 и v_0. Од Виетовите формули следува:

$$u_0 + v_0 = x_0 \text{ и } u_0 v_0 = -\frac{p}{3} \, .$$

Тогаш,

$$u_0^3 + v_0^3 = (u_0 + v_0)^3 - 3u_0 v_0 (u_0 + v_0) = x_0^3 + px_0 = -q \text{ и } 3u_0 v_0 + p = 0 \, .$$

Добивме дека $x_0 = u_0 + v_0$ и (u_0, v_0) е решение на $u^3 + v^3 = -q$, $3uv + p = 0$.

2)$\Rightarrow$1) Нека $x_0 = u_0 + v_0$, каде (u_0, v_0) е решение на системот $u^3 + v^3 = -q$, $3uv + p = 0$. Тогаш,

$$x_0^3 + px_0 + q = (u_0 + v_0)^3 + p(u_0 + v_0) + q = u_0^3 + v_0^3 + 3u_0v_0(u_0 + v_0) + p(u_0 + v_0) + q =$$
$$-q + (3u_0v_0 + p)(u_0 + v_0) + q = 0 .$$

Следува дека x_0 е корен на равенката $x^3 + px + q = 0$.

Теорема 1.2.2.2. Системот равенки
$u^3 + v^3 = -q$, $3uv + p = 0$, $p \neq 0$ (2) е еквивалентен со $u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, $3uv + p = 0$, $p \neq 0$ (3).

$2) \Rightarrow 3)$ Нека (u_0, v_0) е решение на системот (2). Следува $u_0^3 + v_0^3 = -q$ и $3u_0v_0 + p = 0$. Бидејќи $p \neq 0$, следува дека $u_0 \neq 0$. Од втората равенка имаме $v_0 = -\frac{p}{3u_0}$. Со замена во првата равенка добиваме:

$$u_0^3 + v_0^3 = -q \Leftrightarrow u_0^3 + \left(-\frac{p}{3u_0}\right)^3 = -q \Leftrightarrow u_0^3 - \frac{p^3}{27u_0^3} = -q \Leftrightarrow u_0^6 + qu_0^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \ (*).$$

Следува дека (u_0, v_0) е решение на (3).

$3) \Rightarrow 2)$ Нека (u_0, v_0) е решение на (3). Следува дека $u_0^6 + qu_0^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ и $3u_0v_0 + p = 0$. Бидејќи $p \neq 0$ следува дека $u_0 \neq 0$, па од втората равенка $v_0 = -\frac{p}{3u_0}$. Заради еквивалентност на чекорите во (*), од $u_0^6 + qu_0^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ следува дека $u_0^3 + v_0^3 = -q$, па (u_0, v_0) е решение на (2).■

Со смената $z = u^3$ во равенката $u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ ја добиваме квадратната равенка $z^2 + qz - \frac{p^3}{27}$ (4), наречена **квадратна резолвента**.

Едно решение (u_0, v_0) на системот (3) се добива ако се најде еден корен z_1 на квадратната резолвента $z^2 + qz - \frac{p^3}{27}$ (4), еден трети корен u_0 на z_1 и v_0 од $v_0 = -\frac{p}{3u_0}$.

Теорема 1.2.2.3*. Ако u е трети корен на комплексниот број $z \neq 0$, тогаш $\sqrt[3]{z} = \{u, u\varepsilon, u\varepsilon^2\}$ каде ε е трети корен на 1, различен од 1. Ако $z = 0$, тогаш $\sqrt[3]{0} = \{0\}$.

Доказ. Имено $\sqrt[3]{z}$ е множество од 3 елементи и u, $u\varepsilon$ и $u\varepsilon^2$ кои се меѓусебно различни.■

Третите корени на единицата се $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Притоа, ако

$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ тогаш $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, и ако $\varepsilon = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ тогаш $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следнава теорема е доста практична и ни овозможува да ги најдеме решенијата на кубната равенка (1) користејќи само едно решение на системот (2)

Теорема 1.2.2.4*. Нека (u_0, v_0) е едно решение на системот (2). Тогаш, решенијата на кубната равенка (1) се:

$$x_1 = u_0 + v_0,\ x_2 = u_0\varepsilon + v_0\varepsilon^2 \text{ и } x_3 = u_0\varepsilon^2 + v_0\varepsilon \quad (4)$$

каде ε е трети трети корен на 1, различен од 1.

Доказ. Нека (u_0, v_0) е едно решение на (2) и $u_0^3 = z_1$ каде z_1 и z_2 се корени на (4). Од Виетовите формули за равенката (4) добиваме:

$$z_1 z_2 = -\frac{p^3}{27} \Leftrightarrow u_0{}^3 z_2 = -\frac{p^3}{27} \Leftrightarrow z_2 = -\frac{p^3}{27u_0{}^3} \text{ и}$$

од системот (2), $v_0 = -\dfrac{p}{3u_0}$, од каде $v_0{}^3 = -\dfrac{p^3}{27u_0{}^3}$. Следува,

$$z_2 = v_0{}^3.$$

Значи ако u_0 е трети корен на едното решение на квадратната резолвента, тогаш v_0 е трети корен на другото.

● Нека (x, y) е произволно решение на (2). Ако

$x^3 = z_1$ ($x \in \sqrt[3]{z_1} = \{u_0, u_0\varepsilon, u_0\varepsilon^2\}$), тогаш $y^3 = z_2$ ($y \in \sqrt[3]{z_2} = \{v_0, v_0\varepsilon, v_0\varepsilon^2\}$).

Во овој случај од можните 9 подредени двојки решенија се

$$(u_0, v_0),\ (u_0\varepsilon, v_0\varepsilon^2) \text{ и } (u_0\varepsilon^2, v_0\varepsilon),$$

бидејќи со проверка се утврдува дека тие го задоволуваат системот (2) и ниту една преостаната двојка не ја исполнува равенката $uv = -\dfrac{p}{3}$. Имено во секој друг случај би добиле

$$u_0 v_0 \varepsilon = -\frac{p}{3} \text{ или } u_0 v_0 \varepsilon^2 = -\frac{p}{3} \text{ т.е. } u_0 v_0 = -\frac{p}{3\varepsilon} \neq \frac{p}{3} \text{ или } u_0 v_0 = -\frac{p}{3\varepsilon^2} \neq \frac{p}{3}.$$

Заради симетрија, ако $x^3 = z_2$ решенија се паровите

$$(v_0, u_0),\ (v_0\varepsilon, u_0\varepsilon^2) \text{ и } (v_0\varepsilon^2, u_0\varepsilon).$$

Конечно ако се вратиме во смената $x = u + v$ се добиваат решенијата на (1),

$$x_1 = u_0 + v_0,\ x_2 = u_0\varepsilon + v_0\varepsilon^2 \text{ и } x_3 = u_0\varepsilon^2 + v_0\varepsilon. ■$$

● Случај 3: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, $p \neq 0$.

Со смената $x = y - \dfrac{p}{3}$ равенката се сведува на еден од претходните случаи. Имено,

$$\left(y - \frac{p}{3}\right)^3 + p\left(y - \frac{p}{3}\right)^2 + q\left(y - \frac{p}{3}\right) + r = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^3 - py^2 + \frac{p^2}{3}y - \frac{p^3}{27} + py^2 - \frac{2p^2}{3}y + \frac{p^3}{9} + qy - \frac{pq}{3} + r = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)y + r - \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} = 0. ■$$

2.2.1 Решавање на квадратни системи со детерминанти

Системот

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

од n линеарни равенки со n непознати се вика **квадратен** од ред n. Детерминантата

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix},$$

е детерминанта (**главна детерминанта**) на квадратниот систем, а детерминантите

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \ i = 1,2,...,n .$$

се **споредни детерминанти**.

Споредните детерминанти D_{x_i} се добиваат кога елементите од i-тата колона ќе ги замениме со елементите од колоната од слободните членови.

Теорема 2.2.1.1 (Крамерово правило) Нека е даден квадратен систем од ред n. Ако детерминантата $D \neq 0$, тогаш системот има единствено решение

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \ x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \ ... \ , \ x_n = \frac{D_{x_n}}{D} .$$

Доказ. Нека равенките во системот (1) редоследно ги помножиме со $A_{11}, A_{21},..., A_{n1}$, па ги собереме. Добиваме:

$$\left(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{n1}A_{n1}\right)x_1 + \left(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + ... + a_{n2}A_{n1}\right)x_2 + ... +$$
$$\left(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + ... + a_{nn}A_{n1}\right) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{n1} \Leftrightarrow x_1D = D_{x_1} .$$

Ако равенките во (1) ги помножиме со $A_{12}, A_{22},..., A_{n2}$ и ги собереме, добиваме дека $x_2D = D_{x_2}$. Продолжувајќи ја постапката во n-от чекор добиваме дека $x_nD = D_{x_n}$.

На овој начин го добиваме системот

$$x_1D = D_{x_1}, \ x_2D = D_{x_2}, \ ..., \ x_nD = D_{x_n} \ (2).$$

Од конструкцијата следува дека секое решение на системот (1) е решение и на системот (2). Во општ случај системите (1) и (2) не се еквивалентни.

Нека $D \neq 0$. Ќе покажеме дека кога $D \neq 0$, системите (1) и (2) се еквивалентни и имаат единствено решение $x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \ x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \ ... \ , \ x_n = \frac{D_{x_n}}{D}$ (3).

Нека $\left(x_1, x_2,..., x_n\right)$ е решение на системот (2). Ако ги замениме $x_1, x_2,..., x_n$ во првата равенка на системот (1) добиваме:

$$a_{11}\frac{D_{x_1}}{D}+a_{12}\frac{D_{x_2}}{D}+\ldots+a_{1n}\frac{D_{x_n}}{D}=\frac{1}{D}\left(a_{11}D_{x_1}+a_{12}D_{x_2}+\ldots+a_{1n}D_{x_n}\right)=$$
$$\frac{1}{D}(a_{11}\left(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}\right)+a_{12}\left(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ldots+b_nA_{n2}\right)+\ldots+$$
$$a_{1n}\left(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ldots+b_nA_{nn}\right))=\frac{1}{D}(b_1\left(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n}\right)+$$
$$b_2\left(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\ldots+a_{1n}A_{2n}\right)+\ldots+b_n\left(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\ldots+a_{1n}A_{nn}\right)=\frac{1}{D}b_1D=b_1.$$

Следува, $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ ја исполнува првата равенка. Аналогно, со замена во другите равенки во системот добиваме дека $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ идентички ги исполнува и нив. Следува, $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ е решение на системот (1) т.е. системите (1) и (2) се еквивалентни.■

Последица 2.2.1.2. Нека е даден квадратен систем од ред n.

1. Ако детерминантата $D\neq 0$, тогаш системот има единствено решение

$$x_1=\frac{D_{x_1}}{D},\ x_2=\frac{D_{x_2}}{D},\ \ldots,\ x_n=\frac{D_{x_n}}{D}.$$

2. Ако детерминантата $D=0$ и барем една детерминанта $D_{x_i}\neq 0$, за некое $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, тогаш системот нема решение.

3. Ако детерминантата $D=0$ и $D_{x_1}=D_{x_2}=\ldots=D_{x_n}=0$, тогаш системот нема решение или има бесконечно решенија.

Хомогениот систем има само тривијално решение $(0,0,\ldots,0)$ ако детерминантата на системот $D\neq 0$. Во спротивен случај хомогениот систем има бесконечно решенија.

Доказ. Тврдењето 1) следува од претходната теорема.

2) Ако детерминаната $D=0$, а детерминантата $D_{x_i}\neq 0$, за некое $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, тогаш $x_iD\neq D_{x_i}$ па системот (2) кој ја содржи равенката $x_iD=D_{x_i}$, нема решение. Следува дека и системот (1) нема решение.

3) Ако $D=0$ и $D_{x_1}=D_{x_2}=\ldots=D_{x_n}=0$, тогаш од дискусијата при Гаусовиот метод на елиминации, следува дека системот нема решение или има бесконечно многу.■

2.2.1.2 Систем од две и три линеарни равенки

Дефиниција 2.2.1.1. Две линеарни равенки се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија. Две линеарни равенки се **меѓусебно противречни** ако немаат заедничко решение. Две линеарни равенки се **во општа положба** ако се регуларни, не се еквивалентни и не се меѓусебно противречни.

Во понатамошниот текст еквивалентните и меѓусебно противречните равенки ќе ги разгледуваме само во множеството регуларни равенки. Еквивалентните, меѓусебно противречните и равенките во општа положба го делат множеството регуларни равенки на класи (тврдењето не важи во случај кога равенките не се регуларни, на пример ако двете равенки во системот се противречни, тогаш истите се еквивалентни и меѓусебно противречни). Нека се дадени регуларните равенки

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \text{ и } a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2.$$

1. Равенките се еквивалентни ако и само ако постои ненулт број k

таков што $a_{21}=ka_{11}, a_{22}=ka_{12},\ldots,a_{2n}=ka_{1n}, b_2=kb_1$.

2. Равенките се меѓусебно противречни ако и само ако постои ненулт број k таков што $a_{21} = ka_{11}, a_{22} = ka_{12}, ..., a_{2n} = ka_{1n}, b_2 \neq kb_1$.
3. Равенките се во општа положба ако не постои ненулт број k таков што $a_{21} = ka_{11}, a_{22} = ka_{12}, ..., a_{2n} = ka_{1n}$.

Ако равенките се еквивалентни означуваме: $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = ... = \frac{a_{2n}}{a_{1n}} = \frac{b_2}{b_1}$ (1).

Ако равенките се меѓусебно противречни означуваме: $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = ... = \frac{a_{2n}}{a_{1n}} \neq \frac{b_2}{b_1}$ (2).

Ако равенките се во општа положба означуваме: не важи $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = ... = \frac{a_{2n}}{a_{1n}}$ (3).

Кога коефициентите се ненулти, тогаш записите (1)-(3) се равенства меѓу количници. Записите дозволуваат некој член да биде нула (тогаш записот не е количник), додека знакот за равенство или неравенството го избираме според следниот договор. Ако $a \neq 0, b = 0$ или $a = 0, b \neq 0$, тогаш $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ за секои $c, d \in \mathbb{R}$ и $\frac{0}{0} = \frac{c}{d}$ за секои $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Да забележиме дека во случаите (1) и (2) коефициентите пред непознатите содржат пар соодветни ненулти коефициенти.

<u>Пример 2.2.1.1</u>. Равенките $x - y - 2z = 3$ и $-2x + 2y + 4z = -6$ се еквивалентни бидејќи

$$\frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{4}{-1} = \frac{-6}{3}.$$

Равенките $x - 2z = 3$ и $-2x + 4z = 7$ се меѓусебно противречни бидејќи $\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} \neq \frac{7}{3}$.

Теорема 2.2.1.1. Нека е даден системот $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$, $n \geq 2$. Ако системот содржи противречна равенка, тогаш системот нема решение. Ако системот содржи нулта равенка, решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на другата равенка, која ако исто така е нулта множеството решенија е $\mathbb{R}^n$, додека ако е регуларна системот има единствено решение за $n = 1$ и бесконечно решенија за $n > 1$, изразени преку $n - 1$ параметар. Ако равенките се регуларни и:

1. Ако равенките се во општа положба (<u>не важи</u> $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = ... = \frac{a_{2n}}{a_{1n}}$), тогаш системот има единствено решение за $n = 2$ и бесконечно решенија за $n > 2$, изразени преку $n - 2$ параметри.

Системот се решава со методот на замена така што една од променливите чиј коефициент е ненулт, се изразува преку останатите $n-1$ променливи и се заменува во другата равенка, каде друга променлива чиј коефициент е ненулт, се изразува преку преостанатите $n - 2$ променливи. Потоа се заменува во првата равенка и првата променлива се изразува преку $n - 2$-те променливи кои ќе се земат за параметри. Системот се решава и со Крамеровиот метод. Бидејќи $D_{i_0 j_0} \neq 0$ за некои $i_0, j_0 \in I_n$, системот се сведува на 2×2, така што сите променливи, освен x_{i_0} и x_{j_0} ќе се земат за параметри. Тогаш $x_{i_0} = D'_{i_0(n+1)} / D_{i_0 j_0}$ и $x_{j_0} = D'_{(n+1)j_0} / D_{i_0 j_0}$, каде $D_{i_0 j_0}$ е главната, додека $D'_{i_0(n+1)}$ и $D'_{(n+1)j_0}$ споредните детерминанти во новоформираниот систем.

2. Ако равенките се меѓусебно противречни ($\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=...=\frac{a_{2n}}{a_{1n}}\neq\frac{b_2}{b_1}$), тогаш системот нема решение.

3. Ако равенките се еквивалентни ($\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=...=\frac{a_{2n}}{a_{1n}}=\frac{b_2}{b_1}$), тогаш решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на една од равенките, па системот има бесконечно многу решенија изразени преку $n-1$ параметар.■

Нека D_{ijk} е минор на проширената матрицата A_p на систем од тип $3\times n$, чии колони редоследно се совпаѓаат со i,j,k-тата колона на A_p. Следува, $i,j,k\in\{1,2,...,n+1\}=I_{n+1}$.

Три равенки од ред n се во општа положба (во целина) ако две равенки се во општа положба, а третата не е меѓусебно противречна или еквивалентна со која било линеарна комбинација на двете равенки. Нека $n\geq 3$. Трите равенки се во општа положба акко постои $D_{i_0j_0k_0}\neq 0$, за некои $i_0,j_0,k_0\in\{1,2,...,n\}=I_n$. За $n\geq 2$ две равенки од ред n се во општа положба акко постои $D_{i_0j_0}\neq 0$, за некои $i_0,j_0\in\{1,2,...,n\}$. Една равенка од ред n е регуларна или во општа положба акко постои $D_{i_0}\neq 0$ за некое $i_0\in I_n$.

Теорема 2.2.1.2. Нека е даден систем $3\times n$, $n\geq 3$, Тогаш:

Случај 1. Ако постои $D_{i_0j_0k_0}\neq 0$, $i_0,j_0,k_0\in I_n$, тогаш системот има единствено решение за $n=3$ или бесконечно решенија за $n>3$ изразени преку $n-3$ параметри. За параметри се земаат променливите чии коефициенти не ја формираат $D_{i_0j_0k_0}$, системот се сведува на 3×3.

Случај 2. Ако $D_{ijk}=0$, $i<j<k$, $i,j,k\in I_n=\{0,1,...,n\}$ и постои $D_{i_0j_0(n+1)}\neq 0$, $i_0,j_0\in I_n$, тогаш системот нема решение.

Случај 3. Ако $D_{ijk}=0$, $i<j<k$, $i,j,k\in I_{n+1}$, тогаш решенијата на системот се совпаѓаат со решенијата на системот добиен со отфрлање на најмалку една од равенките.

-Ако системот содржи две равенки во општа положба, тогаш се отфрла преостанатата равенка и се решава новодобиениот систем $2\times n$ кој има бесконечно решенија изразени преку $n-2$ параметри.

-Ако системот содржи противречна или две меѓусебно противречни равенки, тогаш системот нема решение.

-Ако системот се состои од три нулти равенки, множеството решенија е $\mathbb{R}^n$, односно е изразено преку n параметри.

-Во спротивно се отфрлаат нултите равенки и се отфрлаат сите еквивалентни равенки, освен една, и системот се сведува на $1\times n$, од една регуларна равенка која има бесконечно решенија изразени преку $n-1$ параметар.

Доказ. Доказот е аналоген како во случајот 3×3.

3. Матрици

Блок матрици* Со повлекување на хоризонтални или вертикални линии меѓу редиците и колоните, една матрица може да се подели на подматрици, наречени блокови. Подматриците може да ги сметаме за елементи на нова матрица, така што истите го задржуваат распоредот. Новодобиената матрица се нарекува **блок матрица**. Ако $q \times h$ е типот на блок матрицата, а $m \times n$ на матрицата од која е добиена, тогаш $q \le m$ и $h \le n$.

Пример 3.1.6. Ако е дадена матрица $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 7 \\ \hline 2 & 2 & -1 \end{array}\right]$, поделена на блокови со повлекување на линии, тогаш блоковите се:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } A_{22} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix},$$

и новодобиената блок матрица е: $A_{11} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$.

Следнава теорема покажува дека со блок матрици може да се оперира аналогно како со обични матрици.

Теорема 3.1.9. (Собирање на блок матрици, множење на блок матрица со скалар и множење на блок матрици)

1. Нека матриците A и B се од ист тип $m \times n$ и $\lfloor A_{ij} \rfloor_{q \times h}$ и $B = \lfloor B_{ij} \rfloor_{h \times k}$, $q \le m$, $h \le n$, се нивните блок матрици добиени на ист начин од A и B, односно постои збирот меѓу нивните соодветни блокови. Тогаш збирот на матрицата A со B е $A + B = \lfloor A_{ij} + B_{ij} \rfloor_{q \times h}$. Ако λ е реален број, тогаш производот на матрицата A со бројот λ е $\lambda A = \lfloor \lambda A_{ij} \rfloor_{q \times h}$.

2. Нека матрицата A е од тип $m \times n$, матрицата B е од тип $n \times p$ и матриците $\lfloor A_{ij} \rfloor_{q \times h}$ и $B = \lfloor B_{jk} \rfloor_{h \times k}$ се нивни соодветни блок матрици добиени на ист начин, односно постојат матриците $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{it}B_{tj} = \sum_{t=1}^{h} A_{it}B_{tj}$, $i = 1,2,\ldots,q$, $t = 1,2,\ldots,k$. Тогаш производот на матрицата A со матрицата B е матрицата $AB = \lfloor C_{ij} \rfloor_{q \times h}$.

Доказ. Тврдењето 1) е очигледно.

2) Нека матрицата A е од тип $m \times n$, матрицата B е од тип $n \times p$ и матриците $\lfloor A_{ij} \rfloor_{q \times h}$ и $B = \lfloor B_{jk} \rfloor_{h \times k}$ се нивни соодветни блок матрици добиени на ист начин. Значи,

$$A = \begin{bmatrix} m_1 \{ \overbrace{A_{11}}^{n_1} & \overbrace{A_{12}}^{n_2} & \ldots & \overbrace{A_{1h}}^{n_k} \\ m_2 \{ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_h \{ A_{q1} & A_{q2} & \ldots & A_{qh} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} n_1 \{ \overbrace{B_{11}}^{p_1} & \overbrace{B_{12}}^{p_2} & \ldots & \overbrace{B_{1k}}^{p_k} \\ n_2 \{ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_h \{ B_{h1} & B_{h2} & \ldots & B_{hk} \end{bmatrix},$$

каде A_{ij} се од тип $m_i \times n_j$ и $\sum_{i=1}^{q} m_i = m$ и B_{ij} се од тип $n_i \times p_j$ и $\sum_{j=1}^{h} n_j = n$.

Нека матрицата $C = AB$ е разбиена на следниов начин:

$$C = \begin{bmatrix} m_1 \{ \overbrace{C_{11}}^{p_1} & \overbrace{C_{12}}^{p_2} & \dots & \overbrace{C_{1k}}^{p_k} \\ m_2 \{ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_q \{ C_{q1} & C_{q2} & \dots & C_{qk} \end{bmatrix}$$

каде каде C_{ij} се од тип $m_i \times p_j$, $i = 1,2,..,q$, $j = 1,2,..,k$.

Ќе покажеме дека $C_{ij} = \sum_{t=1}^{h} A_{it} B_{tj}$, така што ќе покажеме дека произволни два елемента што се наоѓаат на исто место се еднакви.

● Елементот на местото (r,s) во C_{ij} е:

$$\left(C_{ij}\right)_{rs} = c_{r's'} = \sum_{t=1}^{h} a_{r't} b_{ts'}, \; r' = m_1 + m_2 + \ldots + m_{i-1} + r, \; s' = p_1 + p_2 + \ldots + p_{j-1} + s,$$

каде што $c_{r's'}$ се наоѓа на соодветното место (r', s') во недекомпониранатa матрица.

● Елементот на местото (r,s) во $\sum_{t=1}^{h} A_{it} B_{tj}$ е:

$$\left(\sum_{t=1}^{h} A_{it} B_{tj}\right)_{rs} = \sum_{t=1}^{h} \left(A_{it} B_{tj}\right)_{rs} = \sum_{t=1}^{h} \sum_{q=1}^{n_t} \left(A_{it}\right)_{rq} \left(B_{tj}\right)_{qs}.$$

бидејќи $\left(A_{it}\right)_{rq} = a_{r'q'}$ и $\left(B_{tj}\right)_{qs} = b_{q's'}$ каде $q' = n_1 + n_2 + \ldots + n_{t-1} + q$ следува:

$$\left(\sum_{t=1}^{h} A_{it} B_{tj}\right)_{rs} = \sum_{t=1}^{h} \sum_{q'=n_1+n_2+\ldots+n_{t-1}+1}^{n_1+n_2+\ldots+n_{t-1}+n_t} a_{r'q'} b_{q's'} = \sum_{t=1}^{h} a_{r't} b_{ts'}. \blacksquare$$

***Полураспаднувачка матрица*. Полураспаднувачка матрица** е матрицата од ред n што може да се напише во еден од следниве два вида:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{nn} & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Теорема 3.1.16. Детерминантата на полураспаднувачката матрица е еднаква на производот од детерминантите на дијагоналните блокови.

Доказ. Нека полураспаднувачката матрица од ред n може да се запише во облик $A=\begin{bmatrix} B & 0_{mp} \\ C & D \end{bmatrix}$, каде B и D се квадратни матрици од ред m и $p=n-m$, 0_{mp} е нулта матрица од тип $m\times p$ и C е матрица од тип $p\times m$.

Теоремата ќе ја докажеме со принципот на математичка индукција. За $n=2$,

$$A=\begin{bmatrix} b & 0_{mp} \\ c & d \end{bmatrix}=bd=\det B\det D, \text{ каде } B=|b| \text{ и } D=|d|.$$

Нека тврдењето е точно за сите полураспаднувачки матрици од ред $n-1$. Ако детерминантата на матрицата A од ред n, ја развиеме по првата редица добиваме:

$$\det A = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1m}A_{1m}.$$

Алгебарските комплементи се полураспаднувачки матрици од ред $n-1$ и според индуктивната претпоставка нивните детерминанти се производ од детерминантите на дијагоналните блокови т.е $A_{1i}=B_{1i}\det D$, $i=1,2,\ldots,m$. Следува:

$$\det A = a_{11}B_{11}\det D + a_{12}B_{12}\det D+\ldots+a_{1m}B_{1m}\det D =$$
$$(a_{11}B_{11}+a_{12}B_{12}+\ldots+a_{1m}B_{1m})\det D=\det B\det D.$$

Доказот е аналоген за полураспаднувачките матрици од облик $A=\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$, само што треба да ја развиеме детерминантата на матрицата по првата колона.■

Сега ќе ја докажеме основната теорема за детерминанати.

Теорема 3.1.17. (Теорема на Бинет-Коши) Детерминантата од производ на две матрици е еднаква на производот од детерминантите на матриците т.е $\det AB=\det A\det B$

Доказ. Нека се дадени матриците $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ од ред n. Според претходната теорема $D=\det A\det B$, каде D е детерминантата

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

На првата редица ги додаваме елементите од $n+1$-вата редица помножени со a_{11}, потоа елементите од $n+2$-вата редица помножени со a_{12} и така натаму до елементите од $2n$-тата редица помножени со a_{1n}. На тој начин добиваме детерминанта во која првите n елементи од првата редица се 0, а другите n елементи се збирови од производите на елементите од првата редица на матрицата A, со соодветните елементи од соодветната колона на матрицата B, и чија вредност е иста со првобитната детерминанта.

Понатаму на елементите од втората редица ги додаваме елементите од $n+1$-вата, $n+2$-вата, ..., $2n$-тата редица соодветно помножени со $a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}$.

Продолжувајќи ја постапката, ја добиваме детерминантата

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{in} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ако во детерминантата ги ротираме првата со првата со $n+1$-вата колона, втората со $n+2$ -та колона итн., добиваме:

$$D=\left(-1\right)^{n}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Со примена на претходната теорема добиваме:

$$D=\underbrace{\left(-1\right)^{n}\left(-1\right)^{n}}_{1}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}b_{in} \end{vmatrix}=\det AB.$$

Теорема 3.2.5. Еквивалентните матрици имаат ист ранг.

Доказ. Секоја матрица еквивалентна на нула матрица е нула матрица, па тврдењето важи за нула матрици. Да видиме што се случува со ненултите матрици.

● Нека матрицата B е добиена од матрицата A, со една редична елементарна трансформација.

Нека $m\times n$ е типот на матрицата. Нека $r(A)=r$. Следува дека постои ненулт минор од ред r. Ако подматрицата што одговара на минорот ја означиме со M_A, тогаш $\det M_A \neq 0$. Не губиме од општост ако претпоставиме дека подматрицата M_A на A е сместена во горниот лев агол, односно се состои од првите r елементи на првите r редици на A,

$$A=\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right].$$

Нека матрицата B е добиена од A со примена на една елементарна трансформација. Ќе покажеме дека B содржи ненулт минор M_B од ред r, односно $r(B)\geq r$. Минорот M_B ги содржи редиците од M_A каде една редица е помножена со ненулт број или на една редица ѝ се додадени елементите од друга редица помножени со број.

1. Нека матрицата B е добиена од A со ротација на две редици i и j, $1\leq i<j\leq m$.

1) Ако $1\leq i<j\leq r$ тогаш $\det M_B=-\det M_A$, т.е. $\det M_B\neq 0$.

2) Ако $1\leq i\leq r$ и $r+1\leq j\leq m$ тогаш $\det M_B=\det M_A$ или $\det M_B=\det M_A$.

3) Ако $r+1\leq i<j\leq m$, тогаш $\det M_B=\det M_A$ т.е. $\det M_B\neq 0$.

2. Нека B е добиена од A, така што редицата i на A е помножена со ненулт број λ.

1) Ако $1\leq i\leq r$ тогаш $\det M_B=\lambda\det M_A\neq 0$.

2) Ако $r+1\leq j\leq m$ тогаш $\det M_B=\det M_A$.

3. Нека матрицата B е добиена од A, така што елементите од i-та редица се помножени со бројот λ и се додадени на елементите од j-та редица.

1) Ако $1\leq i\leq r$ и $1\leq j\leq r$ (јасно и $i\neq j$), тогаш $\det M_B=\det M_A+D$, при што $\det D=0$ бидејќи D има две пропорционални редици. Следува $\det M_B\neq 0$.

2) Ако $1\leq i\leq m$ и $r+1\leq j\leq m$, тогаш $M_B=M_A$ па $\det M_B=\det M_A$.

3) Ако $r+1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq r$, тогаш $\det M_B=\det M_A+\lambda D$. Ако $\lambda D=0$, тогаш $\det M_B=\det M_A$. Ако $\lambda D\neq 0$, тогаш D е бараниот ненулт минор.

Покажавме дека $r(B)\geq r(A)$. Но, секоја елементарна трансформација што ја трансформира матрицата A во B има своја инверзна елементарна трансформација што ја трансформира B во A. Следува дека $r(A)\geq r(B)$, односно $r(A)=r(B)$.

Аналогно тврдењето важи и ако матрицата B е добиена од A со колонична трансформација.

● Ако матрицата B е добиена од A со конечен број на редични или колонични елементарни трансформации, тогаш матриците што се добиваат при секоја трансформација имаат ист ранг, па $r(A)=r(B)$.■

Теорема 3.2.7. Секоја матрица е еквивалентна со матрица која е во редично (колонично) скалеста форма.

Доказ. Ќе го разгледаме случајот кога матрицата A е доведена до матрица B, која е во редично-скалеста форма. Останатиот случај се докажува аналогно.

Нека е дадена матрицата

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Чекор 1. Ако $a_{i1}=0$, $i=1,2,...,n$, тогаш во овој чекор не правиме ништо. Ако елементот $a_{11}=0$ и постои елемент a_{i1} кој е различен од нула, тогаш првата редица ќе ја ротираме со i-та редица и ќе сметаме дека $a_{11}\neq 0$. Ако елементот $a_{11}\neq 0$, тогаш со множење на елементите од првата редица со $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}\neq 0$, $i=2,3,...,m$ и додавање на i-та редица, сите елементи под a_{11} ќе станат 0. На тој начин првиот елемент во првата колона ќе биде ненулт, а сите елементи под него ќе бидат нули. Добиваме:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{1} & \dots & a_{2n}^{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{1} & \dots & a_{mn}^{1} \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} a_{11}^{1}\neq 0 & a_{12}^{1} & \dots & a_{1n}^{1} \\ 0 & a_{22}^{1} & \dots & a_{2n}^{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{1} & \dots & a_{mn}'^{1} \end{bmatrix}$$

Чекор 2. Ако сите елементи од првата колона се 0, тогаш го разгледуваме првиот елемент од втората колона и анализираме како за a_{12}.

Нека $a_{11}^{1}\neq 0$. Ако елементот a_{22} и сите елементи под него се 0, не правиме ништо. Ако $a_{22}^{1}=0$ и постои елемент под a_{22} што е различен од 0, тогаш ја ротираме редицата што го содржи тој елемент и сметаме $a_{22}^{1}\neq 0$. Ако $a_{22}^{1}\neq 0$ тогаш со елементарни трансформации елементите под него ќе ги направиме 0.

Се добива една од следниве матрици:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^{1}\neq 0 & a_{13}^{1} & \dots & a_{1n}^{1} \\ 0 & 0 & a_{23}^{1} & \dots & a_{2n}^{1} \\ 0 & 0 & a_{33}^{2} & \dots & a_{3n}^{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{2} & \dots & a_{mn}^{2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{1}\neq 0 & a_{12}^{1} & a_{13}^{1} & \dots & a_{1n}^{1} \\ 0 & 0 & a_{23}^{1} & \dots & a_{2n}^{1} \\ 0 & 0 & a_{33}^{2} & \dots & a_{3n}^{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{2} & \dots & a_{mn}^{2} \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} a_{11}^{1}\neq 0 & a_{12}^{1} & a_{13}^{1} & \dots & a_{1n}^{1} \\ 0 & a_{22}^{2}\neq 0 & a_{23}^{2} & \dots & a_{2n}^{2} \\ 0 & 0 & a_{33}^{2} & \dots & a_{3n}^{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{2} & \dots & a_{mn}^{2} \end{bmatrix}.$$

Продолжувајќи ја постапката со примена на редични елементарни трансформации, матрицата A ја сведуваме до матрицата

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1i}^1 \neq 0 & \dots & a_{1,k-1}^1 & a_{1k}^1 & \dots & a_{1,s-1}^1 & a_{1s}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k}^2 \neq 0 & \dots & a_{2,s-1}^2 & a_{2s}^2 & \dots & a_{2n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rs}^r \neq 0 & \dots & a_{rn}^r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

која е во редично-скалеста форма.■

Да забележиме дека ако во последната матрица ги поделиме редиците $1,2,...,r$, соодветно со нивните главни елементи се добива матрицата

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & a_{1,k-1}^2 & a_{1k}^2 & \dots & a_{1,s-1}^1 & a_{1s}^2 & \dots & a_{1n}^1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & a_{2,s-1}^2 & a_{2s}^3 & \dots & a_{2n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & a_{rn}^r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ако на последната матрица се примени колоничната трансформација, замена на местата на елементите од две колони, се сведува на матрицата B (види подоле). Ако во B се примени редичната трансформација множење на редица со број и додавање на друга редица ја добиваме матрицата C.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Следува дека е точна следнава теорема:

Теорема 3.2.8. Ако матрицата A има ранг r, тогаш таа е еквивалентна со матрицата во која првите r дијагонални елементи се 1, а сите останати 0.

Теорема 3.2.9. Рангот на матрицата A е бројот на ненулти редици (колони) на редично (колонично) скалестата матрица еквивалентна на A.

Доказ. Тврдењето следува директно од теорема 3.2.1 и 3.2.2.

ЕЛЕМЕНТАРНИ МАТРИЦИ

Дефиниција 3.2.10. Елементарна матрица е матрицата што се добива од единечната матрица со примена на некоја од елементарните трансформации.

Ако е применета редична (колонична) елементарна трансформација, тогаш матрицата е редична (колонична) елементарна матрица.

Пример 3.2.2. На пример, три од 24-те елементарни матрици, добиени со примена на по една елементарна трансформација од трите типа, се:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, k \neq 0 \text{ и } \begin{bmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\blacklozenge$$

Да ги означиме со E_{ij} елементарните матрици кои се добиени од единечната со замена на i-тата и j-тата редица, E_i^λ со множење на i-тата редица со ненулт број λ и E_{ij}^λ со множење на i-тата редица со број λ и додавање на j-тата редица.

Пример 3.2.3. Нека е дадена матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Ако матрицата A ја помножиме со елементарната матрица E_{12}, што се добива од единечната матрица со ротација на првата и втората редица, добиваме:

$$E_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

односно и матрицата производ е добиена од матрицата A со ротација на првата и втората редица.

2. Ако матрицата A ја помножиме со елементарната матрица E_3^7 што се добива од единечната со множење на 3-тата редица со бројот 7, добиваме:

$$E_3^7 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 7\cdot 2 & 7\cdot 2 & 7\cdot 3 & 7\cdot 1 \end{bmatrix},$$

односно и матрицата $E_3^7 A$ е добиена од A со множење на третата редица со 7.

3. Ако матрицата A ја помножиме со елементарната матрица E_{12}^4 што се добива од единечната матрица со множење на првата редица со број 4 и додавање на втората редица,

$$E_{12}^4 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4\cdot 1+2 & 4\cdot 2+5 & 4\cdot(-3)+4 & 4\cdot 1+0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

тогаш и матрицата $E_{12}^4 A$ е добиена од A со соодветната елементарна трансформација.♦

Од последниот пример може да заклучиме дека важи следнава теорема. Доказот е идентичен како дискусијата во примерот и кога се работи за елементарни редични трансформации што се однесуваат за произволни редици.

Теорема 3.2.11. Нека матрицата B е добиена од матрицата A со елементарната редична трансформација што одговара на елементарната матрица E_1. Тогаш $B = E_1 A$.

Ако матриците A и B се редично еквивалентни, тогаш матрицата B е добиена од A со примена на конечен број на редични елементарни трансформации. Нека $E_1, E_2, ..., E_n$ се соодветните елементарни матрици што одговараат на елементарните трансформации. Ако матрицата A_1 е добиена од A со елементарната трансформација E_1 важи дека $A_1 = E_1 A$. Ако матрицата A_2 е добиена од A_1 со елементарната трансформација E_1, важи дека $A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$. Продолжувајќи ја постапката во n-тиот чекор, тогаш добиваме:

$$B = A_n = E_n ... E_2 E_1 A.$$

Важи и обратното тврдење, ако $B = E_n E_{n-1} ... E_1 A$ за некои елементарни матрици $E_1, E_2, ..., E_n$ тогаш A и B се редично еквивалентни. Следува дека е докажана следнава теорема:

Теорема 3.2.12. Матриците A и B се редично еквивалентни ако и само ако $B = E_n E_{n-1} ... E_1 A$ за некои елементарни матрици $E_1, E_2, ..., E_n$.

За елементарните матрици се покажува дека важи:

$$E_{ij} E_{ij} = E, \; E_i^{\lambda} E_i^{\frac{1}{\lambda}} = E \text{ и } E_{ij}^{\lambda} E_{ij}^{-\lambda} = E,$$

што всушност значи дека елементарните матрици се инверзибилни, $\left(E_{ij}\right)^{-1} = E_{ij}$, $\left(E_i^{\lambda}\right)^{-1} = E_i^{\frac{1}{\lambda}}$ и $\left(E_{ij}^{\lambda}\right)^{-1} = E_{ij}^{-\lambda}$, и инверзните на нив матрици повторно се елементарни матрици.

Ако матрицата $B = E_n ... E_2 E_1 A$ тогаш со множење од лево со E_n^{-1} добиваме: $E_n^{-1} B = E_{n-1} E_{n-2} ... E_1 A$. Продолжувајќи ја постапката, добиваме: $E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_{n-1}^{-1} B = A$ или

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_{n-1}^{-1} B.$$

Ако матрицата B е добиена од матрицата A со колоничната трансформација E_1, тогаш аналогно се покажува дека $B = AE_1$. Матриците A и B се колонично еквивалентни ако и само ако $B = AE_n ... E_2 E_1$.

Затоа може да заклучиме дека матриците A и B се еквивалентни акко $B = SAT$ каде матриците S и T се конечен производ на редични и колонични елементарни матрици, соодветно.

Теорема 3.2.13. (Метод на Гаус-Жордан за пресметување на инверзна матрица). Нека квадратната матрица A од ред n има инверзна и E е единечна матрица од ред n. Тогаш

$$\left[A \;\vdots\; E\right] \approx \left[E \;\vdots\; A^{-1}\right].$$

Доказ. Ако матрицата A има инверзна според 3.2.8, таа е редично еквивалентна со единечната матрица. Според теорема 3.2.12, $A = E_n ... E_2 E_1 E$, од каде со последователно множење од лево на изразот со $E_n^{-1}, E_{n-1}^{-1}, ..., E_1^{-1}$ на матрицата A, се добива:

$$E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_n^{-1} A = E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_n^{-1} E_n ... E_2 E_1 E \quad \text{т.е } E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_n^{-1} A = E$$

Следува: $A^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_n^{-1}$. Значи истите елементарни матрици што ја сведуваат матрицата A до единечна Е, единечната матрица Е ја сведуваат до A^{-1}.■

5.7 ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

5.7.1. Геометриска интерпретација на линеарните равенки. Противречната линеарна равенка се интерпретира со празно множество. За $n=1$, нултата равенка геометриски се интерпретира со права, додека регуларната $ax=b$, $a\neq 0$, со точка на права. За $n=2$, нултата равенка се интерпретира со рамнина, а регуларната $ax+by=c$, каде $a\neq 0$ или $b\neq 0$ со права во рамнина. За $n=3$, нултата равенка се интерпретира со простор, а регуларната $ax+by+cz=d$, каде $a\neq 0$ или $b\neq 0$ или $c\neq 0$, со рамнина во простор. На следниве цртежи се скицирани геометриските интерпретации:

За $n=1$, 1. 2. 3.

За $n=2$, 1. 2. 3.

За $n=3$, 1. 2. 3.

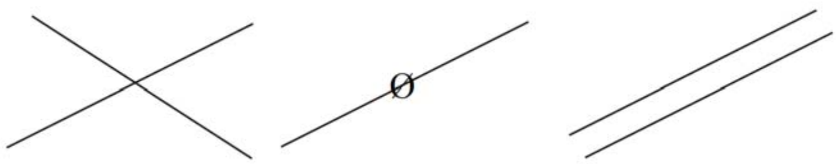
1. Постои $D_{i_0}\neq 0, i_0\in I_n$; 2. $D_i=0$, $i=1,2,...,n$, $D_{n+1}\neq 0$; 3. $D_i=0$, $i=1,2,...,n+1$

Во произволен случај нултата равенка го определува n-димензионалниот простор ($\mathbb{R}^n$), противречната празното множество, додека регуларната $n-1$-димензионална рамнина. Притоа може да се користи една од претходно наведените интерпретации, на пример за $n=3$.

2.5. Геометриска интерпретација на систем од 2 линеарни равенки.

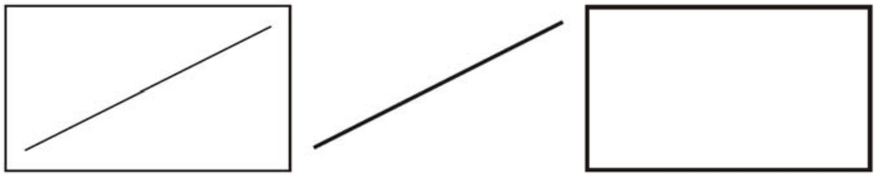
2×1. Две регуларни равенки кои се меѓусебно противречни или се еквивалентни, соодветно се интерпретираат со две различни точки или две точки што се совпаѓаат. Со комбинирање на видовите равенки и видовите парови регуларни равенки се добиваат 7 заемни положби на интерпретациите на равенките.

2×2. Две регуларни равенки кои се во општа положба, се противречни или се еквивалентни, соодветно се интерпретираат со две прави што се сечат, се паралелни или се совпаѓаат. Затоа постојат 8 заемни положби на интерпретациите на равенките, скицирани на следниве цртежи:



1. $D\neq 0$ 2-3. $D=0\wedge\left(D_x\neq 0\vee D_y\neq 0\right)$

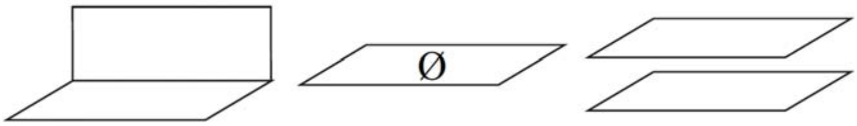
4-5. немаат решение решение



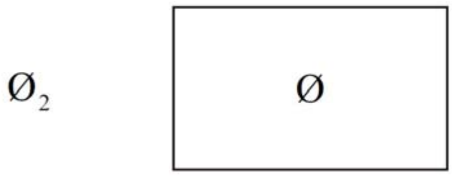
6-8. имаат бесконечно решенија изразени со: 6-7. Еден параметар и 8. два параметри

4-8. $D = D_x = D_y = 0$.

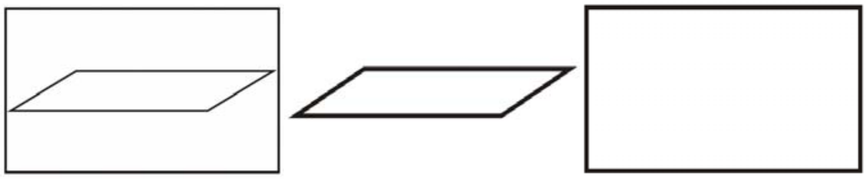
$\underline{2 \times 3}$. Две регуларни равенки кои се во општа положба, се противречни или се еквивалентни, соодветно се интерпретираат со две рамнини што се сечат, се паралелни или се совпаѓаат. Заради прегледност, нултата равенка место со квадар ќе ја претставиме со правоаголник. Постојат 8 заемни положби на интерпретациите на равенките, презентирани следнава табела:



1. $D_{i_0 j_0} \neq 0$, $i_0, j_0 \in \{1,2,3\}$; 2-3. $D_{ij} = 0$, $i, j \in \{1,2,3\}$ и $D_{i_0 4} \neq 0$, $i_0 \in \{1,2,3\}$;



4-5. немаат решение



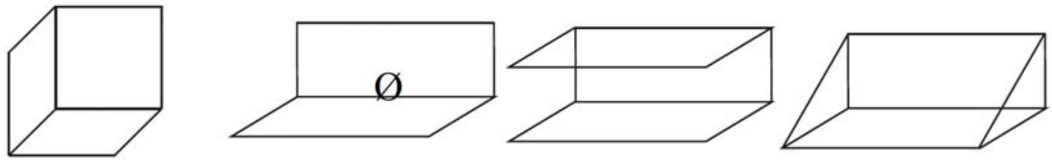
6-8. имаат бесконечно решенија изразени преку: 6-7 два и 8. три параметри

4-8. $D_{ij} = 0$, $i, j \in \{1,2,3,4\}$, $i \neq j$.

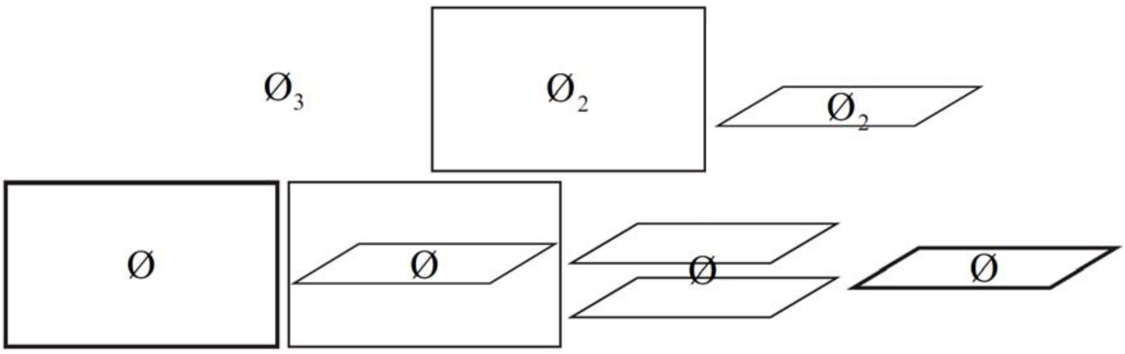
$\underline{2 \times n}$. Две регуларни равенки кои се во општа положба, се противречни или се еквивалентни, соодветно се интерпретираат со две $n-1$-димензионални рамнини што се сечат, се паралелни или се совпаѓаат. Постојат 8 заемни положби на интерпретациите на равенките, кои може да се интерпретираат преку некоја од претходните интерпретации, на пример за $n = 3$.

<u>3.4 Геометриска интерпретација на систем од три линеарни равенки</u>. $\underline{3 \times 3}$ Три регуларни равенки во општа положба определуваат три рамнини што се сечат во точка. Нека две рамнини што се сечат во права се интерпретација на две регуларни равенки во општа положба. Тогаш нивната линеарна комбинација во зависност од бројот на ненулти коефициенти определува простор, рамнина што се совпаѓа со една од рамнините или рамнина различна од рамнините што минува низ правата. Противречната равенка на линеарната комбинација определува празно множество, рамнина паралелна на една од рамнините или рамнина што ги сече рамнините во прави паралелни на правата.

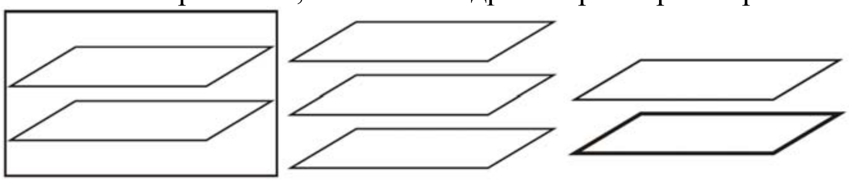
На следните цртежи се дадени интерпретациите на сите класи, вкупно 21.



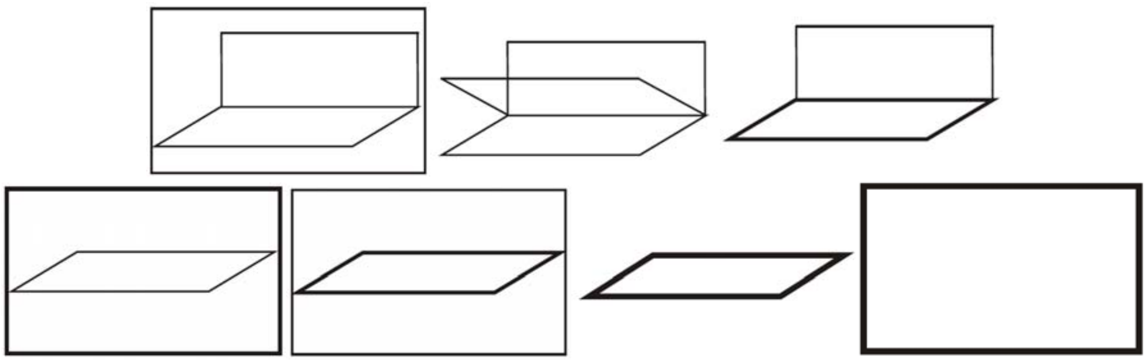
1. $D \neq 0$; 2-4. $D = 0 \wedge \left(D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0 \vee D_z \neq 0\right)$



5-11. немаат решение, така што содржат противречна равенка



5-14. немаат решение



15-21. имаат бесконечно решенија изразени преку: 15-17. еден параметар;
18-20. два параметри; 21. три параметри;
5-21. $D = D_x = D_y = D_z = 0$

За системот од $3 \times n$, $n > 3$ може да се користи интерпретацијата за $n = 3$.

За $n = 2$ постојат 20, додека за $n = 1$, 14 геометриски интерпретации на геометриските класи, кои исто така може да се искажат описно или да се скицираат. Во однос на $n = 3$, за $n = 2$ не постојат три равенки во општа положба (во целина), додека за $n = 1$ не постојат ни две равенки во општа положба.

Ако рамнините определени од равенките во системот се сечат во точка, тогаш системот има единствено решение. Ако рамнините или просторот определени од равенките во системот се сечат во права системот има бесконечно решенија изразени преку еден параметар, во рамнина преку два и во простор преку три параметри.

Литература

[1] Андоновиќ, Б., Мисајлески, З., Димовски, Т. *Збирка задачи по математика I*, за студентите на Технолошко-металургискиот факултет - Скопје, 2014.

[2] Георгиевска, С., Атанасова, Е. *Математика* - Скопје, 2002.

[3] Геговска Зајкова, С., Хаџи-Велкова Санева, К. *Математика 1, I дел* - Скопје, 2010.

[4] Геговска Зајкова, С., Трајковски, Г., Бучковска, А. *Збирка решени испитни задачи од математика 1* - Скопје, 1996.

[5] Јанев, И., Илиевски, Ј., Ѓорѓиев, Д. *Збирка задачи по математика за четврта година на средното образование* - Скопје: „Просветно дело", 2002.

[6] Малчески, Р. *Векторска и линеарна алгебра* - Скопје: „Цетис" 2007.

[7] Самарџиски, А. *Векторска алгебра низ задачи* - Скопје, 1991.

[8] Тренчевски, Г. *Векторска алгебра за средно образование* - Скопје: „Просветно дело", 2000.

[9] Тренчевски, К., Крстеска, Б., Тренчевски, Г., Здравеска, С. *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, за трета година на реформираното гимназиско образование,* - Скопје: „Просветно дело", 2004.

[10] Трпеновски, Б., Целаковски, Н., Чупона, Ѓ. *Виша математика, книга III* - Скопје: „Просветно дело", 1994.

[11] Трпеновски, Б., Целаковски, Н., Чупона, Ѓ. *Виша математика, книга IV* - Скопје: „Просветно дело", 1994.

[12] Улчар, Ј. *Аналитичка геометрија со векторска алгебра* - Скопје, 1995.

[13] Целакоски, Н. *Задачи по линеарна алгебра* - Скопје: „Просветно дело", 1996.

[14] Шапкарев, И. Кржовски, П. *Линеарна алгебра со аналитичка геометрија* - Скопје, 1995.

[14] Шапкарев, И. *Збирка задачи по математика I* - Скопје, 1995.

[16] Шапкарев, И. *Збирка задачи по математика II* - Скопје, 1995.

[17] Шекутковски, Н. *Математичка анализа I* - Скопје: „Просветно дело", 2008.

[18] Ellis, R., Gulick, D. Calculus with analytic geometry, fourth edition, Harcourt Brace Jovanovich, 1990.

[19] Stewart, J. Calculus early transcedentals, Thomson Brooks/Cole 2007.

[20] Dennis G. Zill, D., S. Wright, W. Calculus early transcedental, Jones and Bartlett publishers, 2011.

[21] Miličić, M. Elementi više matematike I део – Beograd: „Akademska misao", 2003.

[22] Miličić, M. Elementi više matematike, II део – Beograd: „Akademska misao", 2003.

[23] Hadžić, O., Takači, Đ. Matematičke metode za studente prirodnih nauka - Novi Sad, 2000.

[24] Miličić, P., Ušćumlić, M. Zbirka zadataka iz više matematike I, IP Nauka - Beograd, 1982.

[25] Došenović, T., Takači, A., Rakić, D., Brdar, M. Zbirka zadataka iz matematike I - Novi Sad: „Verzal", 2008.

[26] Борисов, А. Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия - Благоевград, 1993.

СОДРЖИНА

Е-издание: http://www.ukim.edu.mk/mk_content.php?meni=53&glavno=41