УНИВЕРЗИТЕТ "СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ" – СКОПЈЕ
ФАКУЛТЕТ ЗА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА И ИНФОРМАЦИСКИ ТЕХНОЛОГИИ

Верка Георгиева, Христина Спасевска, Маргарита Гиновска,
Ласко Баснарков, Лихнида Стојановска-Георгиевска

ЗБИРКА ОДБРАНИ РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКА

Скопје, 2014

Автори
Верка Георгиева, Христина Спасевска, Маргарита Гиновска, Ласко Баснарков, Лихнида Стојановска-Георгиевска
*

Наслов
ЗБИРКА ОДБРАНИ РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКА
*

Рецензенти:
М-р Димитар Качурков
редовен професор на Факултет за електротехника и информациски технологии во Скопје
Д-р Михаил Толев
редовен професор на Факултет за електротехника и информациски технологии во Скопје
*

Јазична редакција
Алена Горгиевска
*

Техничко уредување и коректура
Александар Апостолов
*

Издавач
УКИМ, Факултет за електротехника и информациски технологии
*

Електронско издание

CIP – Каталогизација во НУБ

С О Д Р Ж И Н А

1. Кинематика 7
2. Динамика 33
3. Динамика на кружно движење 59
4. Еластичност, осцилации и бранови 74
5. Хидромеханика 99
6. Топлина 109
7. Термодинамика 116
8. Геометриска оптика 138
9. Физичка оптика 161
10. Фотометрија 181
11. Вредности на некои физички константи 197

Предговор

Оваа збирка содржи одбрани физички задачи од области кои се предвидени со програмата по предметот физика 1 што се предава на Факултетот за електротехника и информациски технологии. Збирката е наменета пред сé за студентите од истиот факултет и останатите Технички факултети.

Врз основа на долгогодишното искуство стекнато при работа со студентите, дојдовме до заклучок дека најголем проблем кај нив претставува примената на веќе стекнатите теориски знаења од физиката во решавање на соодветни проблеми поставени преку задачи. Со оглед на тоа што веќе постојат збирки на решени задачи по физика на македонски јазик кои содржи голем број на задачи со различна тежина, ние се определивме да го прошириме тој фонд со задачи за чие решавање е потребно солидно познавање на физичките закони. Структурата на одбраните задачи овозможува полесно разбирање на суштината на физичките закони и појави.

Бидејќи задачите во збиркава се целосно решени и решенијата ги пратат детални образложенија и дискусии, оваа збирка може да послужи и како прирачник од кој може да се научи како се решаваат задачи по физика. Дадените решенија не се и единствени. Нашиот труд ќе биде повреден доколку предизвикаме нови оригинални идеи за нивно решавање. Поголем број на задачи се илустрирани со цртежи, што исто така овозможува подлабоко и сестрано разбирање на поедини физички законитости. При решавање на задачите доследно е применуван Меѓународниот систем на единици (SI).

На крајот на збирката се дадени вредности на некои физички константи.

Искрено им се заблагодаруваме на нашите долгогодишни професори м-р Димитар Качурков и д-р Михаил Толев коишто со задоволство прифатија да бидат рецензенти на оваа збирка и ни́ помогнаа со нивните корисни забелешки и совети Збирката да добие во квалитет.

Во исто време однапред благодариме на добронамерните кои што критички ќе гледаат на напишаното, а со тоа ќе придонесат за подобрување на квалитетот на следното преработено издание.

Авторите

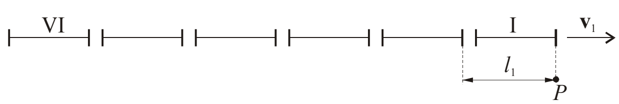
1. Кинематика

Задача 1.1. Шинобус стои на станица. Патник се наоѓа на станица пред почетокот на првиот вагон. Во моментот на поаѓање на шинобусот патникот измерил дека првиот вагон поминал покрај него за време $t_1 = 4$ s. За кое време покрај него ќе помине шестиот вагон, ако тој се движи рамномерно забрзано?

Решение:

Шинобусот почнува да се движи рамномерно забрзано. Патот на првиот вагон од сл. 1.1 е:

$$l_1 = \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2l_1}{t_1^2}\ .$$



Сл.1.1

Забрзувањето на шинобусот е константно со текот на времето и може да се определи како:

$$a = \frac{2l_x}{t_x^2}\text{, за шест вагони } a = \frac{2l_6}{t_6^2} = \frac{12l_1}{t_6^2}\ .$$

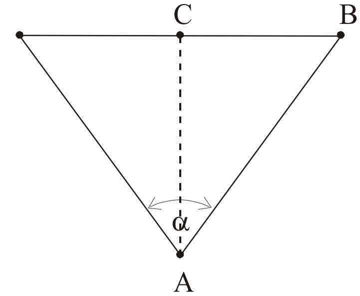
$\dfrac{12l_1}{t_6^2} = \dfrac{2l_1}{t_1^2} \;\Rightarrow\; t_6 = t_1\sqrt{6}$ е време на поминување на шест вагони.

$\dfrac{10l_1}{t_5^2} = \dfrac{2l_1}{t_1^2} \;\Rightarrow\; t_5 = t_1\sqrt{5}$ е време на поминување на пет вагони.

Време на поминување на шестиот вагон е:

$$\Delta t_6 = t_6 - t_5 = t_1(\sqrt{6} - \sqrt{5}) = 0{,}85\,\text{s}.$$

Задача 1.2. Од точката B на патот $\overline{BC}$ тргнува автобус со брзина 16 m/s. Под кој агол α од точката A треба да тргне човек со брзина 4 m/s за да го стигне автобусот? Со која најмала брзина на движење човекот ќе може да го стаса автобусот ако $\overline{AB}$ = 400 m, а $\overline{AC}$ = 60 m.

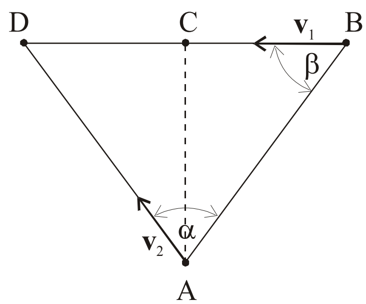


Сл. 1.2.1

Решение:

Во моментот t, кога ќе се сретнат човекот и автобусот во точката D (сл.1.2.2), човекот има поминато пат $\overline{AD} = v_2 t$, а автобусот $\overline{BD} = v_1 t$, од каде:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{v_1}{v_2} .$$



Сл. 1.2.2

Аголот α од синусната теорема може да се пресмета од:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\sin\beta , \quad \text{каде што } \sin\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} ,$$

или:

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 0{,}6 , \qquad (1)$$

$$\alpha = 36{,}9^\circ .$$

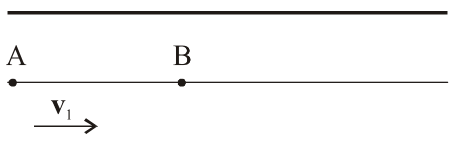
Брзината v_2 со која се движи човекот од равенката (1) може да се изрази како:

$$v_2 = \frac{v_1}{\sin\alpha}\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Таа има најмала вредност кога sin $\alpha = 1$, т.е.:

$$v_{2\min} = v_1 \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2{,}4 \text{ m/s}.$$

Задача 1.3. Моторен чамец се движи со постојана брзина v_2 по текот на река која тече со брзина v_1. Тој престига сплав во точката A (сл.1.3.1). По време t = 60 min чамецот свртува и се враќа назад при што го сретнува сплавот во точката B на растојание s = 7,2 km од A. Да се најде брзината на течење на реката.



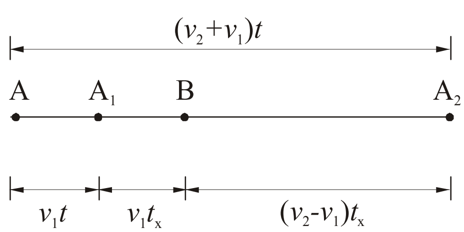
Сл. 1.3.1

Решение:

Патот што го поминува сплавот до сретнување со чамецот од сл. 1.3.2 е:

$$\overline{AB} = s = v_1(t + t_X), \tag{1}$$

каде што t_X е времето што минува од моментот на свртување на чамецот до повторното сретнување со сплавот.



Сл. 1.3.2

За време t чамецот минува пат $\overline{AA_2}$, а сплавот $\overline{AA_1}$.

$$\overline{AA_2} = (v_2 + v_1)t\,,$$

$$\overline{AA_1} = v_1 t\,.$$

За време t_X чамецот минува пат $\overline{A_2B}$, а сплавот $\overline{A_1B}$.

$$\overline{A_2B} = (v_2 - v_1)t_X\,.$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{AA_2} - \overline{AA_1} = \overline{A_1B} + \overline{A_2B}\,,$$

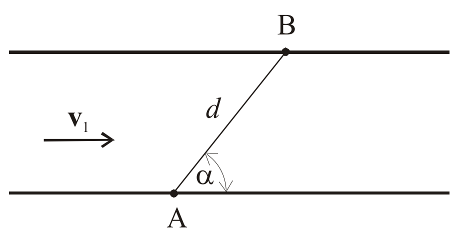
$$(v_2 + v_1)t - v_1 t = v_1 t_X + (v_2 - v_1)t_X\,,$$

$$v_2 t = v_2 t_X\,,$$

$$t = t_X\,.$$

Од равенката (1) следува: $v_1 = \dfrac{s}{t + t_X} = \dfrac{s}{2t} = 3{,}6\ \text{km/h} = 1\ \text{m/s}$.

Задача 1.4. Два моторни чамца поаѓаат истовремено од градовите A и B, кои се наоѓаат на спротивните брегови на реката, и се движат по правата $\overline{AB}$ (сл. 1.4.1). Растојанието меѓу градовите е d = 1 km. Правата $\overline{AB}$ со текот на реката зафаќа агол α = 60°. Брзината на реката по целата ширина е иста и изнесува v_1 = 2 m/s. Да се определи местото каде чамците ќе се сретнат, аголот под кој треба да се движат во однос на правата $\overline{AB}$ и брзината на движење на чамците во однос на мирна вода, ако се знае дека чамците се сретнуваат по време t = 3 min од поаѓањето.

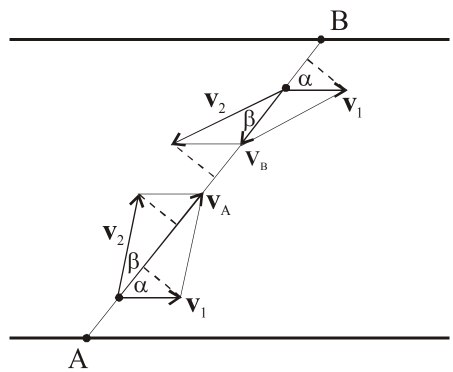


Сл. 1.4.1

Решение:

Чамците би се движеле по $\overline{AB}$ ако дијагоналите на паралелограмите, добиени со сложување на векторите на брзините $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ се совпаѓаат со правата $\overline{AB}$. Интензитетите на резултантните брзини $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ од сл. 1.4.2 би биле:

$$\begin{aligned} v_A &= v_2 \cos\beta + v_1 \cos\alpha, \\ v_B &= v_2 \cos\beta - v_1 \cos\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$



Сл. 1.4.2

За да се определи местото на сретнување, треба да се најдат патиштата s_1 и s_2 што ќе ги поминат чамците:

$$\begin{aligned} s_1 &= v_A t = (v_2 \cos\beta + v_1 \cos\alpha)\, t, \\ s_2 &= v_B t = (v_2 \cos\beta - v_1 \cos\alpha)\, t. \end{aligned} \tag{2}$$

$$d = s_1 + s_2, \;\Rightarrow \frac{d}{2t} = v_2 \cos\beta$$

$$\begin{aligned} s_1 &= d - s_2 = \frac{d}{2} + v_1 t \cos\alpha = 680 \text{ m}. \\ s_2 &= d - s_1 = \frac{d}{2} - v_1 t \cos\alpha = 320 \text{ m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Ако равенките (2) се соберат, се добива:

$$v_2 \cos\beta = \frac{d}{2\,t}\,. \tag{4}$$

Услов за движење на чамците по правецот $\overline{AB}$ е:

$$v_2 \sin\beta = v_1 \sin\alpha\,. \tag{5}$$

Од равенките (4) и (5) следува:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2v_1 \sin\alpha}{d} t ,$$

$$\operatorname{tg}\beta \approx 0{,}624 \;\; ; \;\; \beta \approx 32°.$$

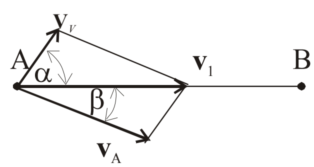
Брзината на чамците од равенката (4) е:

$$v_2 = \frac{d}{2t\cos\beta} \approx 3{,}3 \text{ m/s} .$$

Задача 1.5. Авион лета меѓу градовите A и B кои се оддалечени $s = 400$ km. Брзината на авионот во однос на воздухот е $v_1 = 600$ km/h. Во текот на летот постојано дува ветер во североисточен правец со брзина $v_V = 60$ km/h, при што зафаќа агол $\alpha = 30°$ во однос на правецот $\overline{AB}$. Да се најде времето потребно авионот да лета од градот A до B и обратно.

Решение:

Бидејќи авионот е изложен на североисточен ветер, тој треба да се насочи под агол β во однос на правецот $\overline{AB}$, така што како резултат на собирање на векторот на брзината на ветерот $\mathbf{v}_V$ и векторот на брзината на авионот $\mathbf{v}_A$ да се добие вектор на резултантната брзина на авионот $\mathbf{v}_1$, во правецот $\overline{AB}$.



Сл. 1.5.1

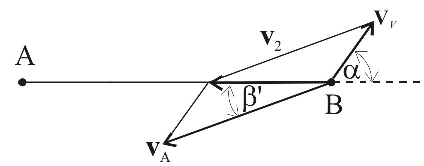
1. Од $A \to B$

$$v_1 = v_V \cos\alpha + v_A \cos\beta ,$$
$$v_V \sin\alpha = v_A \sin\beta ,$$
$$\sin\beta = \frac{v_V}{v_A}\sin\alpha .$$
$$v_1 = v_V \cos\alpha + v_A\sqrt{1-\sin^2\beta} ,$$

$$v_1 = v_V \cos\alpha + v_A \sqrt{1 - \frac{v_V^2}{v_A^2}\sin^2\alpha}\ ,$$

$$v_1 = v_V \cos\alpha + \sqrt{v_A^2 - v_V^2 \sin^2\alpha}\ ,$$

$$v_1 = 651{,}2 \text{ km/h} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}61 \text{ h}\ .$$



Сл. 1.5.2

2. Од $B \rightarrow A$

$$v_2 = v_A \cos\beta' - v_V \cos\alpha\ ,$$
$$v_A \sin\beta' = v_V \sin\alpha\ ,$$
$$\sin\beta' = \frac{v_V}{v_A}\sin\alpha\ .$$
$$v_2 = v_A \sqrt{1 - \sin^2\beta'} - v_V \cos\alpha\ ,$$

$$v_2 = v_A \sqrt{1 - \frac{v_V^2}{v_A^2}\sin^2\alpha} - v_V \cos\alpha\ ,$$

$$v_2 = 547{,}3 \text{ km/h} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}73 \text{ h}\ .$$

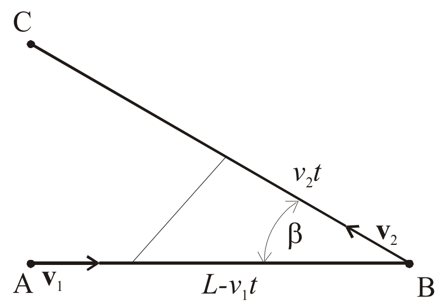
$$t = t_1 + t_2 = 1{,}34 \text{ h}.$$

Задача 1.6. Материјална точка почнува да се движи од A кон B со брзина v_1. Во исто време друга точка почнува да се движи од B кон C со брзина v_2. Растојанието $\overline{AB} = L$, а аголот меѓу правите $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ е $\beta = \angle ABC$. Да се пресмета по кое време од почетниот момент двете точки ќе бидат на минимално растојание. Колкаво е тоа време за $v_1 = v_2$?

Решение:

По време t првата точка ќе се наоѓа на растојание $L - v_1 t$ од B (сл. 1.6), а втората точка на растојание $v_2 t$ од B. Меѓусебното растојание се определува според косинусната теорема:

$$h^2 = (L - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2 - 2(L - v_1 t)(v_2 t)\cos\beta \ .$$



Сл. 1.6

Најмалото растојание се наоѓа како проблем на екстремни точки каде што првиот извод е еднаков на 0, т.е.

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2h\frac{dh}{dt} = (h^2)' = 0 \ ,$$

од каде се добива:

$$t = \frac{L(v_1 + v_2\cos\beta)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\beta} \ .$$

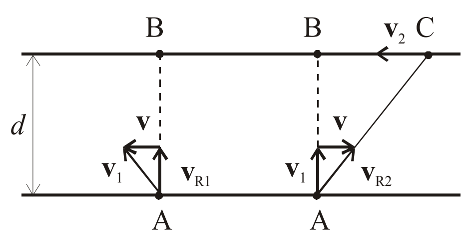
$$\text{За } v_1 = v_2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{2v} .$$

Задача 1.7. Човек стои на брег од една река и сака да помине на спротивниот брег, т.е. од точка A до точката B. Тоа може да го стори на два начина: прво, да плива под некој агол во однос на текот на реката, така што резултантната брзина е во правецот $\overline{AB}$, или да плива во правецот $\overline{AB}$, а растојанието на кое ќе го однесе реката во однос на B да го помине одејќи по брегот. Човекот плива со брзина 2,5 km/h, а оди со брзина 4 km/h, а брзината на течење на водата е 2 km/h. Во кој случај тој побрзо ќе дојде во точката *B*, ако правецот $\overline{AB}$ е нормален на бреговите на реката?

Решение:

Ако со $\mathbf{v}_1$ се означи векторот на брзината со која плива човекот, а со $\mathbf{v}$ векторот на брзината на течење на водата, тогаш времето t_1 за кое човекот ќе го мине патот $d = \overline{\mathrm{AB}}$ (сл.1.7) во првиот случај може да се одреди од равенката:

$$t_1 = \frac{d}{v_{R1}} = \frac{d}{\sqrt{v_1^2 - v^2}} .$$



Сл. 1.7

Во вториот случај t_2' е времето потребно човекот да го помине патот $\overline{AC}$, а t_2'' времето на одење со брзина $\mathbf{v}_2$ од точката *C* до *B*, па според сл.1.7 тие можат да се пресметаат како:

$$t_2' = \frac{\overline{AC}}{v_{R2}} = \frac{\overline{AC}}{\sqrt{v_1^2 + v^2}} , \qquad t_2'' = \frac{\overline{CB}}{v_2} .$$

Вкупното време во вториот случај ќе биде:

$$t_2 = t_2' + t_2'' = \frac{d}{v_1}(1 + \frac{v}{v_2}) ,$$

ако се земе предвид дека:

$$\overline{CB} = d \ \mathrm{tg}\alpha = d \frac{v}{v_1} ,$$

а растојанието:

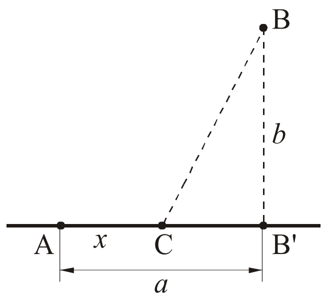
$$\overline{AC} = \sqrt{d^2 + \overline{CB}^2}\ .$$

Односот на времињата t_1 и t_2 во првиот и вториот случај, соодветно, ќе биде одреден со равенката:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1}{(1+\frac{v}{v_2})\sqrt{v_1^2 - v^2}} = 1{,}1\ ,$$

што покажува дека човекот во вториот случај побрзо ќе стигне во точката B на брегот.

Задача 1.8. Човек се наоѓа на брегот на едно езеро во точката A (сл. 1.8.1). Точката B е на растојание b = 600 m од брегот, а нејзината проекција B' е на растојание a = 400 m од A. Ако човекот оди со брзина v_1 = 2 m/s, а плива со брзина v_2 = 1 m/s, на кое растојание x од точката A човекот треба да почне да плива за да дојде во B за најкратко време?

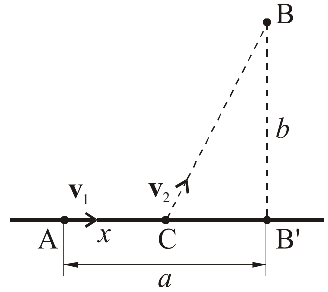


Сл. 1.8.1

Решение:

Вкупното време на движење на човекот според сл. 1.8.2 ќе биде:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{x}{v_1} + \frac{\overline{BC}}{v_2}, \qquad t = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{v_2}. \tag{1}$$



Сл. 1.8.2

За да го најдеме $t_{\min}$, го применуваме општиот метод за испитување екстреми на функции, т.е. изводот го израмнуваме на нула:

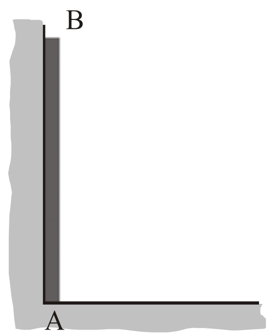
$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{v_1}-\frac{2(a-x)}{2v_2\sqrt{b^2+(a-x)^2}}=0\,,$$

$$\Rightarrow\quad x=a-\frac{v_2 b}{\sqrt{v_1^2-v_2^2}}=53\text{ m}\,,$$

со што го наоѓаме растојанието x кое човекот го минува движејќи се со брзина v_2

$$t_{\min}=\frac{x}{v_1}+\frac{\overline{BC}}{v_2}=12\text{ min}.$$

Задача 1.9. Тенка, вертикално поставена прачка AB, со должина l = 1 m почнува да се движи во вертикална рамнина, така што со крајот A секогаш ја допира хоризонталната подлога, а со крајот B вертикалниот ѕид (сл. 1.9.1). Крајот A се движи рамномерно праволиниски со брзина v_0 = 0,2 m/s. Да се најде брзината и забрзувањето на крајот B по време t = 1,5 s од почетокот на движењето. Триењето на краевите A и B со подлогата да се занемари.

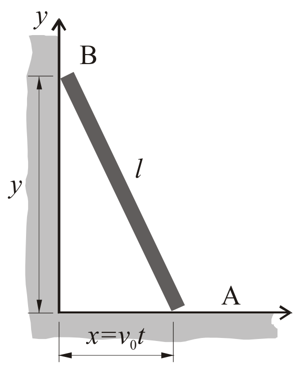


Сл. 1.9.1

Решение:

Ако движењето на прачката AB од сл. 1.9.2 се претстави во правоаголен координатен систем xy, тогаш патот што го поминува крајот B по оската y е даден со равенката:

$$y = \sqrt{l^2 - (v_0 t)^2}\ .$$



Сл. 1.9.2

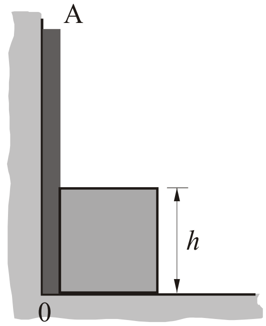
По дефиниција, моменталната брзина v и забрзувањето a на крајот B можат да се пресметаат како:

$$v = \frac{dy}{dt} = -\frac{v_0^2 t}{\sqrt{l^2 - (v_0 t)^2}} \approx -0{,}063\ \text{m/s}\,,$$

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0^2 l^2}{\left[l^2 - (v_0 t)^2\right]^{3/2}} = -0{,}046\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ .$$

Негативната вредност на брзината и забрзувањето се однесува на насоката на движење на крајот B, т.е. покажува дека со зголемување на времето t вредноста на координатата y се намалува до моментот $t = \frac{l}{v_0} = 5\ \text{s}$, кога прачката AB ќе се најде во хоризонтална положба, а $y = 0$.

Задача 1.10. Тенка прачка AO, која може без триење да ротира во вертикална рамнина околу оска O, е допрена до тело со висина h = 50 cm (сл. 1.10.1). Ако телото се движи рамномерно праволиниски во хоризонтален правец со брзина v_0 = 0,2 m/s, да се пресметаат аголната брзина и забрзувањето што ќе ги има која било точка од прачката по време t = 2,5 s.

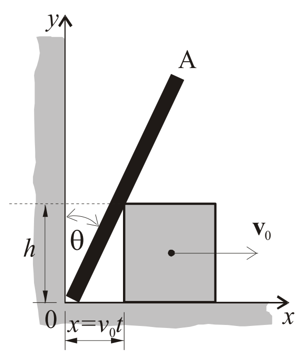


Сл. 1.10.1

Решение:

По време t телото ќе помине пат $x = v_0t$, а прачката AO аголно поместување θ, па од сл. 1.10.2 се гледа дека:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0 t}{h} \quad \text{или} \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v_0 t}{h}\right).$$



Сл. 1.10.2

По дефиниција, аголната брзина ω и аголното забрзување α на прачката АО можат да се пресметаат како:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0 h}{h^2 + (v_0 t)^2} = 0{,}2 \text{ rad/s}.$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2v_0^3 ht}{\left[h^2 + (v_0 t)^2\right]^2} = -0{,}08\ \mathrm{rad/s^2}\ .$$

Задача 1.11. Од почетокот на коса рамнина се исфрла нагоре едно тело, без триење. Низ една точка, која е на растојание $l = 30$ cm од почетокот на рамнината, топчето поминува два пати: по време $t_1 = 1$s и $t_2 = 2$s од почетокот на движењето. Да се одреди аголот на косата рамнина.

Решение:

Кога тело се движи по коса рамнина без триење, тогаш тоа се движи забавено со $a = g\ \sin\alpha$. Низ една иста точка телото поминува 2 пати: кога се искачува нагоре и кога по достигнување на максималната висина се движи надолу. За двата случаја важи:

$$l = v_0 t_1 - \frac{a t_1^2}{2},$$

$$l = v_0 t_2 - \frac{a t_2^2}{2}.$$

Со елиминирање на v_0 од горните равенки се добива:

$$a = \frac{2l}{t_1 t_2} = 30\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s^2}}\ ,$$

што значи:

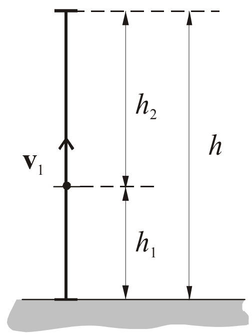
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{g}\right) = 1{,}75^\circ\ .$$

Задача 1.12. Ракета е исфрлена вертикално нагоре. Моторите и соопштуваат забрзување $a = 40$ m/s^2. Колкава максимална висина достигнува ракетата ако нејзиното гориво согорува за $t_1 = 2$ min? По колку време ракетата ќе падне на земја?

Решение:

Патот што го поминува ракетата за време t_1 додека има гориво е:

$$h_1 = (a - g)\frac{t_1^2}{2}\ ,$$



Сл. 1.12

а патот што таа го поминува од моментот t_1 додека не застане на висина h е:

$$h_2 = \frac{v_1^2}{2g},$$

каде што $v_1 = (a - g)t_1$ е брзината што ја има ракетата во моментот t_1.

Максималната висина што ја достигнува ракетата е:

$$h = h_1 + h_2 = \frac{1}{2} t_1^2 (a - g) \frac{a}{g} \approx 886 \text{ km}.$$

Времето за кое ја достигнува таа висина е $t' = t_1 + t_2$, ако t_2 е времето потребно да се помине патот h_2, т.е.

$$t_2 = \frac{v_1}{g} = \frac{a - g}{g} t_1,$$

од каде следува дека:

$$t' = t_1 \frac{a}{g}.$$

Вкупното време на движење на ракетата додека таа не падне на земјата е:

$$t = t' + t_3,$$

каде што $t_3 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ е времето за кое ракетата слободно паѓа од висина h.

$$t = \frac{t_1}{g}(a + \sqrt{a(a - g)}) = 914{,}4 \text{ s}.$$

Задача 1.13. Тело кое паѓа без почетна брзина за последната секунда од паѓањето поминува $\dfrac{1}{n}$ ти дел од целиот пат. Да се најде вкупното време на паѓање.

Решение:

Ако вкупното време на паѓање е t за кое телото поминува пат h, тогаш за време $(t-1)$ s ќе помине пат $h-\dfrac{1}{n}h$. Следува:

$$h=\frac{gt^2}{2} \tag{1}$$

$$\frac{n-1}{n}h=\frac{g\,(t-1)^2}{2} \tag{2}$$

Ако се поделат равенките (1) и (2), се добива:

$$\frac{n-1}{n}=\left(\frac{t-1}{t}\right)^2,$$

$$\frac{t-1}{t}=1-\frac{1}{t}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}},$$

$$\frac{1}{t}=1\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{n}[n\pm\sqrt{n(n-1)}],$$

$$t=\frac{n}{n\pm\sqrt{n(n-1)}}.$$

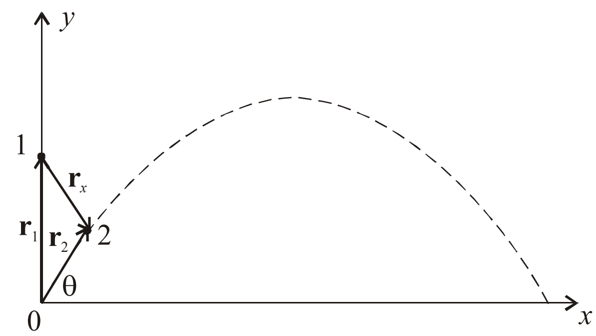
Задача 1.14. Две тела се фрлаат истовремено од една точка, едното вертикално нагоре, а другото под агол $\theta=45°$ во однос на хоризонтот. Почетните брзини на телата се еднакви и изнесуваат $v_0=30$ m/s. Да се определи растојанието меѓу телата по време $t=2$ s од моментот кога се фрлени.

Решение:

Првото тело се движи согласно со законот за вертикален истрел (сл. 1.14), така што неговата положба по време t од моментот на фрлање е определена со радиус-векторот :

$$\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j},$$

каде што: $x_1 = 0$; $y_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.



Сл. 1.14

Второто тело се движи согласно со законот за кос истрел:

$$\mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} ,$$

со почетни услови:

$$v_{0_x} = v_0 \cos\theta ; \; a_x = 0 ,$$

$$v_{0_y} = v_0 \sin\theta ; \; a_y = -g .$$

$$x_2 = v_{0_x} t + \frac{a_x t^2}{2} = v_0 t \cos\theta .$$

$$y_2 = v_{0_y} t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0 t \sin\theta - \frac{gt^2}{2} .$$

Растојанието меѓу двете тела по време t ќе се определи како разлика на радиус-векторите на двете тела:

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{r}_2 \text{ - } \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (x_1 - x_2)\,\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\,\mathbf{j}$$

$$|r_x|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 ,$$

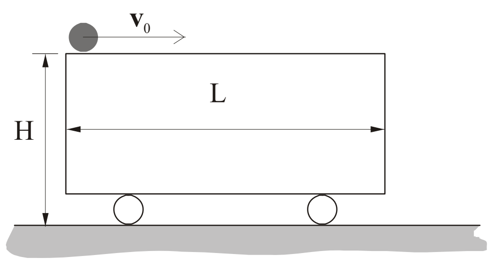
$$r_x = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} ,$$

$$r_x = \sqrt{(v_0 t\cos\theta)^2 + \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} - v_0 t\sin\theta + \frac{gt^2}{2}\right)^2}\ ,$$

$$r_x = v_0 t\sqrt{2 - 2\sin\theta}\ ,$$

$$r_x = 46\ \text{m}.$$

Задача 1.15. Мало тело се наоѓа на задниот крај на мазна хоризонтална платформа со висина H = 2 m и должина L = 5 m, која се движи рамномерно праволиниски со брзина v_0 = 10 m/s (сл. 1.15.1). Во моментот t = 0 платформата почнала рамномерно да забавува со забрзување a = –2,5 m/s^2. Под претпоставка дека не постои триење, да се најде времето за кое телото ќе излета од платформата. Колкаво е растојанието меѓу точката во која паднало телото и најблиската точка на платформата откако таа застанала?

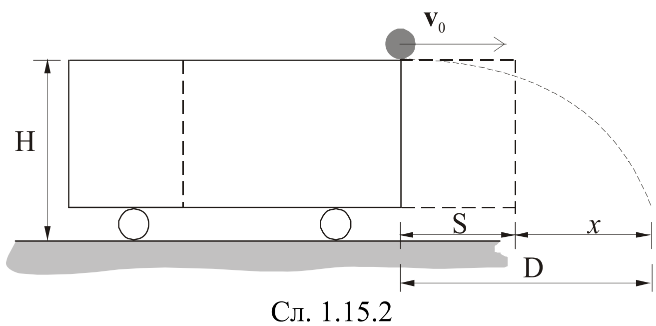


Сл. 1.15.1

Решение:

Телото во однос на платформата ќе се движи рамномерно забрзано и ќе ја помине за време t_1:

$$L = \frac{|a|\,t_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2L}{|a|}} = 2\ \text{s}\,.$$



Сл. 1.15.2

Потоа настанува хоризонтален истрел со брзина v_0 (сл. 1.15.2), со дострел:

$$D = v_0 t \,,$$

$$H = \frac{g\,t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\,H}{g}} \,,$$

$$D = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} = 6{,}4 \text{ m} \,.$$

Во моментот на одвојување на телото платформата има брзина:

$$v_1 = v_0 - a\,t_1 = 5 \text{ m/s} \,,$$

а кога ќе застане:

$$v_2 = v_1 - a\,t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_1}{a} = 2 \text{ s} \,.$$

За тоа време t_2 платформата поминува пат:

$$s = v_1 t_2 - \frac{a\,t_2^2}{2} = 5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad x = D - s = 1{,}4 \text{ m} \,.$$

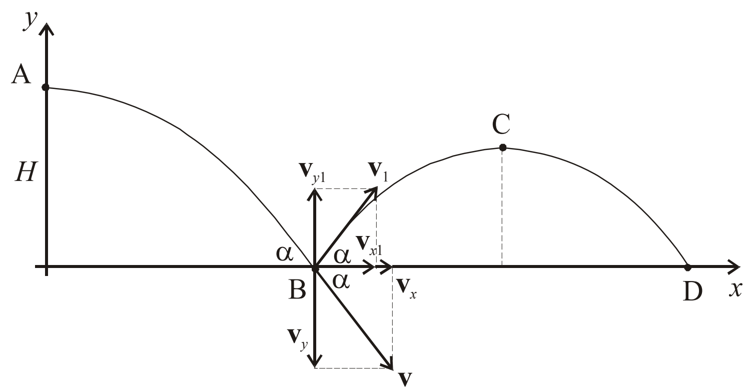
Задача 1.16. Од висина H = 10 m е фрлено топче во хоризонтална насока со брзина v_0 = 25 m/s. При паѓање на подлогата топчето се одбива од неа под ист агол под кој паднало, но притоа губи 60% од брзината со која паднало.

а) Да се пресмета максималната висина на која ќе се искачи топчето по одбивањето од подлогата.

б) Да се пресмета растојанието од првиот до вториот удар на подлогата.

Решение:

Топчето исфрлено во хоризонтална насока со почетна брзина v_0 се движи согласно со законот за хоризонатален истрел.



Сл. 1.16.1

Во точката B (сл. 1.16.1) телото удира со брзина:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\ ,$$

$$v=\sqrt{v_0^2+(g\,t)^2}\ .$$

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v}=\frac{v_0}{v}\ .$$

$$\sin\alpha=\frac{v_y}{v}=\frac{gt}{v}\cdot$$

$$y\equiv H=\frac{gt^2}{2}\ .$$

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g}}\ ,$$

каде што t е времето за кое топчето паѓа од A до B.

По одбивање од подлогата во точката B топчето изведува движење по законот за кос истрел.

Почетната брзина за косиот истрел е:

$$v_1=0{,}4\ v.$$

Компонентите на брзината при косиот истрел се:

$$v_{x_1} = v_1 \cos\alpha \text{ ; } v_{x_1} = 0{,}4v\frac{v_0}{v} = 0{,}4v_0 \text{ ,}$$

$$v_{y_1} = v_1 \sin\alpha - g\,t_1 \text{ ; } v_{y_1} = 0{,}4v\frac{g\,t}{v} - g\,t_1 \text{ ,}$$

$$v_{y_1} = 0{,}4g\sqrt{\frac{2H}{g}} - g\,t_1 \text{ .}$$

а) Во точката C:

$$v_{y_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}4\sqrt{\frac{2H}{g}} \text{ ,}$$

$$y_{\max} = \frac{1}{2}gt_1^2 \text{ ,}$$

$$y_{\max} = \frac{1}{2}g\cdot(0{,}4)^2\,\frac{2H}{g} = (0{,}4)^2\,H \text{ ,}$$

$$y_{\max} = 1{,}6 \text{ m.}$$

б) Во точката D:

$$x_{\max} = v_{x_1}\cdot 2t_1 \text{ ,}$$

$$x_{\max} = 0{,}4v_0\cdot 2\cdot 0{,}4\sqrt{\frac{2H}{g}} \text{ ,}$$

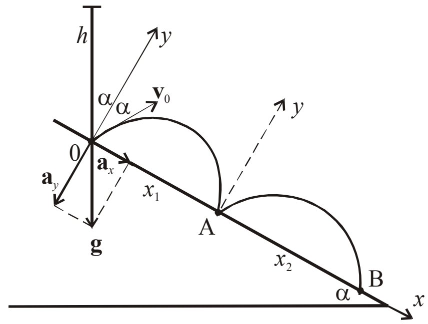
$$x_{\max} = 11{,}42 \text{ m.}$$

Задача 1.17. Тело паѓа од висина h на коса рамнина со агол на наклон α и еластично се одбива од неа. Да се определат растојанијата x_1, x_2, …, x_n во кои телото последователно удира на косата рамнина.

Решение:

Телото кое паѓа од висина h удира на подлогата со брзина

$$v_0 = \sqrt{2gh} \text{ .} \qquad (1)$$



Сл.1.17

Почетната брзина на телото по одбивањето од рамнината има иста вредност (бидејќи телото еластично се одбива) и во однос на оската y се одбива под ист агол α (сл. 1.17).

$$x = x_0 + v_{0_x} t + \frac{a_x t^2}{2} \, .$$

$$y = y_0 + v_{0_y} t + \frac{a_y t^2}{2} \, .$$

Компонентите на почетната брзина во однос на поставениот координатен систем на косата рамнина во точката (0, 0) се $x_0 = y_0 = 0$:

$$v_{0_x} = v_0 \sin\alpha \qquad a_x = g\sin\alpha$$

$$v_{0_y} = v_0 \cos\alpha \qquad a_y = -g\cos\alpha$$

Во точката A (x_1, 0):

$$x_1 = 0 + v_0 t \sin\alpha + \frac{t^2 g \sin\alpha}{2} \, . \qquad (2)$$

$$0 = 0 + v_0 t \cos\alpha - \frac{t^2 g \cos\alpha}{2} \, . \qquad (3)$$

Времето добиено според равенката (3):

$$t = \frac{2v_0}{g} \, ,$$

се заменува во равенката (2):

$$x_1 = v_0 \frac{2v_0}{g}\sin\alpha + \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 ,$$

$$x_1 = \frac{4v_0^2 \sin\alpha}{g} .$$

Од равенката (1) следува:

$$x_1 = 8h\sin\alpha .$$

Во точката B (x_2, 0):

$$v_x = v_{0_x} + a_x t \, , v_x = v_0 \sin\alpha + g\,t\sin\alpha ,$$

$$v_y = v_{0_y} + a_y t \, , v_y = v_0 \cos\alpha - g\,t\cos\alpha ,$$

за $$t = \frac{2v_0}{g} \Rightarrow v_x = v_0 \sin\alpha + g\frac{2v_0}{g}\sin\alpha = 3v_0 \sin\alpha ,$$

$$v_y = v_0 \cos\alpha - g\frac{2v_0}{g}\cos\alpha = -v_0 \cos\alpha .$$

Бидејќи v_x расте рамномерно со бројот на ударите, следува:

$$0A \neq AB; AB > 0A$$

Почетната брзина во точката A има компоненти:

$$v_{A_x} = 3v_0 \sin\alpha \quad \text{и} \quad v_{A_y} = v_0 \cos\alpha$$

$$x_2 = v_{A_x} t + \frac{a_x t^2}{2} = 3v_0 t\sin\alpha + \frac{g\,t^2 \sin\alpha}{2} . \tag{4}$$

$$y_2 = v_{A_y} t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0 \cos\alpha - \frac{g\,t^2 \cos\alpha}{2} . \tag{5}$$

За $y_2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0}{g}$, што е време од еден до друг последователен удар.

Со замена во равенката (4) се добива:

$$x_2 = 3v_0 \frac{2v_0}{g} \sin\alpha + \frac{g \sin\alpha}{2} \left(\frac{2v_0}{g} \right)^2 ,$$

$$x_2 = \frac{8v_0^2 \sin\alpha}{g} ,$$

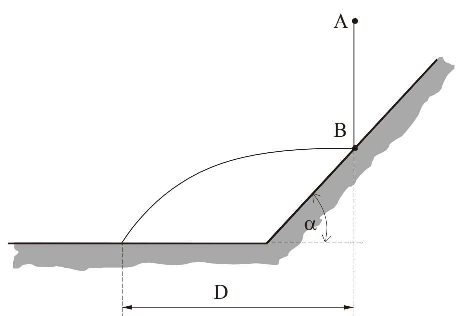
од равенката (1) следува:

$$x_2 = \frac{82h_g \sin\alpha}{g} = 2(8\,h \sin\alpha) .$$

Ако се спроведе истата анализа за n удари, следува:

$$x_n = n(8\,h \sin\alpha) .$$

Задача 1.18. Од точка A, која се наоѓа на висина H = 12,5 m од хоризонталната површина (сл. 1.18.1), слободно паѓа тело без почетна брзина. Телото удира во точката B на косата рамнина од која се одбива под истиот агол под кој паднало, при што губи 20% од својата брзина. Аголот на косата рамнина е α = 45°, а растојанието $\overline{AB} = H/2$. Да се пресмета дострелот D на телото и аголот под кој телото паѓа во однос на хоризонталата.



Сл. 1.18.1

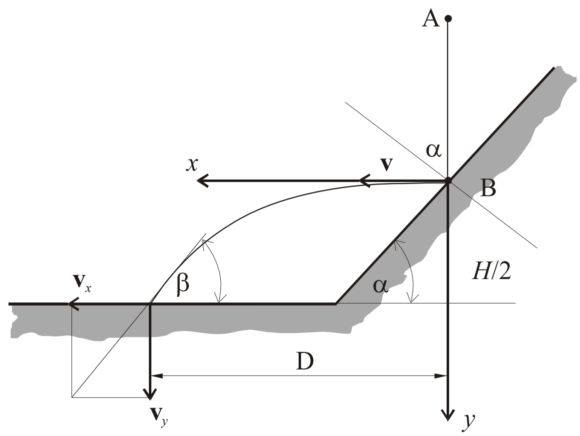
Решение:

Интензитетот на брзината $\mathbf{v}$ што ја има телото по ударот на косата рамнина може да се определи од интензитетот на брзината $\mathbf{v}_1$ со која телото удира на рамнината (сл. 1.18.2) преку равенката:

$$v = 0{,}8v_1 ,$$

каде што:

$$v_1 = \sqrt{2g\frac{H}{2}} = \sqrt{gH}\ .$$



Сл. 1.18.2

Ако движењето на телото по ударот се претстави во правоаголен координатен систем xy како на сликата, тогаш неговите компоненти по оските x и y се:

$$x = v \cdot t\ ,\ \ y = \frac{gt^2}{2}\ .$$

Во моментот t кога телото паѓа на хоризонталната подлога:

$$y = \frac{H}{2}\ ,\ \text{ а времето, }\ \ t = \sqrt{\frac{H}{g}}\ .$$

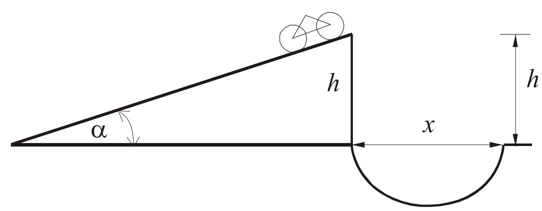
Со замена на t во равенката за координатата x на движењето, за дострелот се добива равенката:

$$D = v\sqrt{\frac{H}{g}} = 0{,}8H = 10\ \mathrm{m}.$$

Од сл. 1.18.2 се определува аголот β како:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v} = \frac{1}{0{,}8}\ ,\ \text{ односно, }\ \beta = 51{,}3^\circ\ .$$

Задача 1.19. Мотоциклист излетува на брег на чиј врв се наоѓа канал (сл. 1.19.1). Колкава минимална брзина v_0 треба да има мотоциклистот во највисоката точка од косата рамнина за да го прескокне каналот со широчина x и висина h во однос на оската x. Аголот на наклонот на брегот е α.

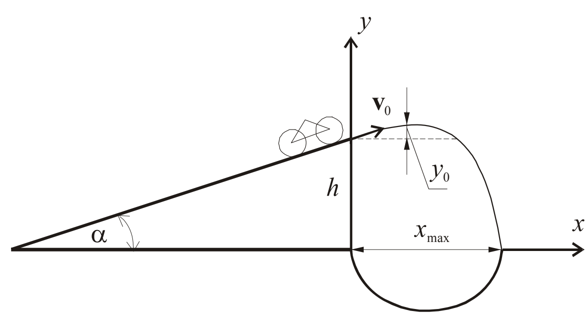


Сл. 1.19.1

Решение:

Траекторијата на движење на мотоциклистот по излетувањето е траекторија на кос истрел чија равенка гласи:

$$y_0 = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,.$$



Сл. 1.19.2

Во дадениов случај: $y = h + y_0 = h + x\,\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,.$

За $y = 0$, $x = x_{\max}$ следува:

$$-h = x_{\max}\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx_{\max}^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,;\quad v_0 = \frac{x_{\max}\sqrt{g}}{\cos\alpha\sqrt{2(h + x_{\max}\,\mathrm{tg}\alpha)}}\,.$$

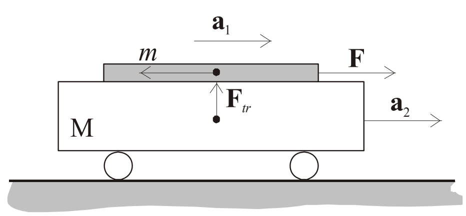
2. Динамика

Задача 2.1. Врз количка со маса M = 20 kg, која може слободно да се движи по хоризонтална рамнина, лежи штица со маса m = 4 kg. Коефициентот на триење меѓу штицата и количката е $\mu = 0{,}2$. На штицата дејствува хоризонтална сила F. Да се определи забрзувањето на штицата во случај кога: а) F = 5,9 N; б) F = 19,6 N.

Решение:

Њутновите равенки за двете тела според сл. 2.1 ќе гласат:

$$\begin{aligned} ma_1 &= F - F_{tr} \\ Ma_2 &= F_{tr} \end{aligned} \qquad (1)$$



Сл. 2.1

Ако штицата се движи во однос на количката, тогаш нејзиното релативно забрзување ќе биде:

$$a' = a_1 - a_2 > 0\,. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2):

$$a' = \frac{F - F_{tr}\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)}{m}\,.$$

Ако штицата мирува во однос на количката, $a_1 = a_2$, т.е. $a` = 0$, за:

$$F_{gr} = F_{tr}\left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

каде што F_{gr} е гранична вредност на силата F при која штицата мирува.

$$F_{gr} = \mu mg\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 9{,}4\ \mathrm{N}\,.$$

а) $F < F_{gr}$ значи дека штицата не се движи во однос на количката, т.е. $a_1 = a_2 = a$. Во тој случај штицата и количката ќе се движат со исто забрзување a, па равенките (1) ќе гласат

$$ma = F - F_{tr} .$$

$$Ma = F_{tr} .$$

$$a = \frac{F}{m+M} = 0{,}246 \text{ m/s}^2 .$$

$$F_{tr} = \frac{MF}{m+M} = 4{,}9 \text{ N} ,$$

каде што F_{tr} е сила на триење при мирување.

б) $F > F_{gr}$, $a_1 \neq a_2$, $F_{tr} = \mu mg$ = 7,84 N ќе биде сила на триење при лизгање.

$$ma_1 = F - \mu mg .$$

$$Ma_2 = \mu mg .$$

$$a_1 = \frac{F - \mu mg}{m} = 2{,}9 \text{ m/s}^2 .$$

$$a_2 = \mu \frac{m}{M} g = 0{,}392 \text{ m/s}^2 .$$

Задача 2.2. На коса рамнина со агол при основата α лежат 2 греди со маси m_1 и m_2. Коефициентот на триење меѓу гредите е μ_2, а меѓу гредите и рамнината е μ_1. Определете го карактерот на движењето на двете греди.

Решение:

Од сл. 2.2 следува:

F_{tr1} – триење меѓу гредите и косата рамнина

F_{tr2} – триење меѓу гредите

F_2 – реакција на силата на триење меѓу гредите

Q_1 – реакција на силата со која двете тела притискаат на рамнината

Q_2 – сила со која телото 2 притиска на телото 1

Q_r – реакција на Q_2.

Според II Њутнов закон применет за првото тело по оската x се добива:

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha + F_2 - F_{tr1} , \qquad (1)$$

а по оската y:

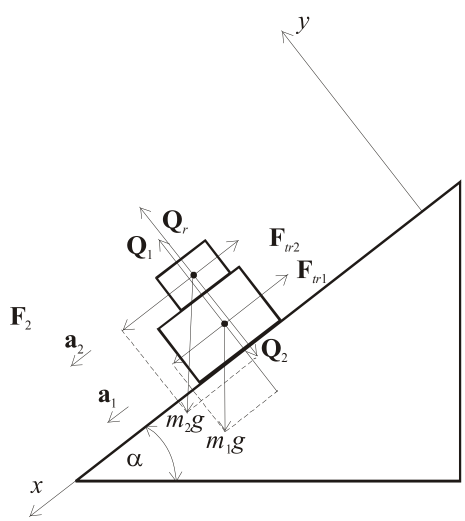
$$0 = Q_1 - Q_2 - m_1 g \cos\alpha \ . \qquad (2)$$

За второто тело по оската x:

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin\alpha - F_{tr2} \, , \qquad (3)$$

а по оската y:

$$0 = Q_r - m_2 g \cos\alpha \ . \qquad (4)$$



Сл.2.2

Од равенка (4) $\Rightarrow \quad Q_r = m_2 g \cos\alpha = Q_2$,

од равенка (2) $\Rightarrow \quad Q_1 = m_2 g \cos\alpha + m_1 g \cos\alpha = (m_1 + m_2)\, g \cos\alpha$.

Во првиот случај: $a_1 = a_2 = 0$ – нема движење:

од равенка (3) $\Rightarrow \quad F_{tr2} = m_2 g \sin\alpha = F_2$,

од равенка (1) $\Rightarrow \quad F_{tr1} = m_1 g \sin\alpha + F_2 = m_1 g \sin\alpha + m_2 g \sin\alpha$,

$$F_{tr1} = (m_1 + m_2)\, g \sin\alpha \; .$$

Условот да нема движење гласи:

$$F_{tr} < \mu Q \; ,$$

$$F_{tr1} < \mu_1 Q_1 ,$$

$$F_{tr2} < \mu_2 Q_2 .$$

$$(m_1 + m_2)\, g \sin\alpha < \mu_1 (m_1 + m_2)\, g \cos\alpha \; ,$$

$$m_2 g \sin\alpha < \mu_2 m_2 g \cos\alpha \; ,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha < \mu_1 ; \;\; \mathrm{tg}\,\alpha < \mu_2 \;\; .$$

Во вториот случај: $a_1 > a_2 > 0.$

$$F_{tr1} = \mu_1 Q_1 = \mu_1 (m_1 + m_2) g \cos\alpha \; ,$$

$$F_{tr2} = \mu_2 Q_2 = \mu_2 m_2 g \cos\alpha \; .$$

Од равенката (3) $\Rightarrow$ $m_2 a_2 = m_2 g \sin\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\alpha \; ,$

$$a_2 = g\,(\sin\alpha - \mu_2 \cos\alpha)\, .$$

Од равенката (1) $\Rightarrow$

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha + \mu_2 m_2 g \cos\alpha - \mu_1 (m_1 + m_2) g \cos\alpha \qquad /: m_1$$

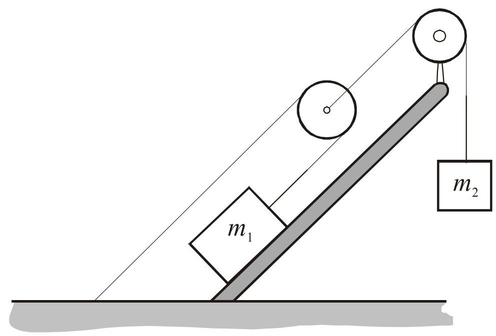
$$a_1 = g \sin\alpha + \mu_2 \frac{m_2}{m_1} g \cos\alpha - \mu_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) g \cos\alpha \; .$$

Задача 2.3. Тело со маса m_1 е поставено на коса рамнина со агол на наклон α, како што е прикажано на сл. 2.3.1. Ако коефициентот на триење меѓу телото и косата рамнина е μ, да се определи:

а) односот на масите на телата при кои телото со маса m_1 ќе се движи нагоре по косата рамнина,

б) силата на затегнување на конецот.

Масите на макарите да се занемарат.



Сл. 2.3.1

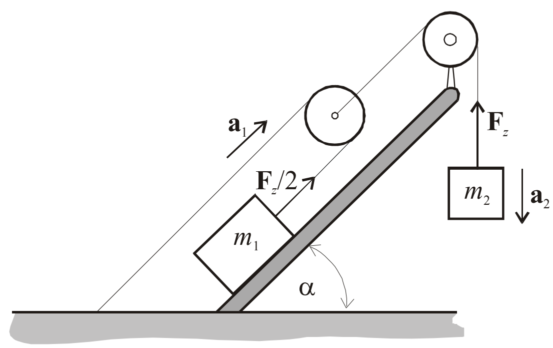
Решение:

Според II Њутнов закон за движење на телата од сл. 2.3.2 следуваат равенките:

$$m_2 a_2 = m_2 g - F_z \,, \tag{1}$$

$$m_1 a_1 = \frac{F_z}{2} - m_1 g \sin\alpha - \mu\, m_1 g \cos\alpha \,, \tag{2}$$

$$a_1 = 2\, a_2 \,. \tag{3}$$



Сл. 2.3.2

Од равенката (2) $\Rightarrow 2\, m_1 a_1 = F_z - 2\, m_1 g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

Од равенката (1) $\Rightarrow m_2 \dfrac{a_1}{2} = m_2 g - F_z$.

Ако се соберат последните две равенки, се добива:

$$\left(2m_1+\frac{m_2}{2}\right)a_1=m_2g-2\,m_1g\,(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\,,$$

$$a_1=\frac{m_2-2\,m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{2\,m_1+\dfrac{m_2}{2}}\,g\,.$$

а) Ако телото со маса m_1 се движи нагоре, значи:

$$a_1>0\;\Rightarrow\qquad m_2-2\,m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)>0\,,$$

$$\frac{m_2}{m_1}>2\,(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\,.$$

б) Од равенката (1) $\Rightarrow\qquad F_z=m_2g-m_2\,\dfrac{a_1}{2}\,,$

$$F_z=m_2g-\frac{m_2}{2}\cdot\frac{m_2-2m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{4m_1+m_2}\cdot2\,g\,,$$

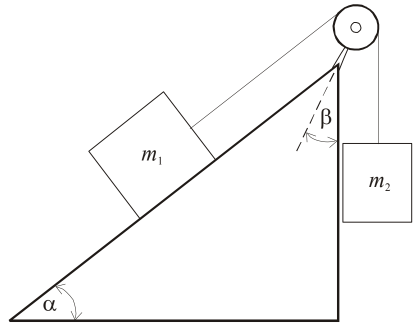
$$F_z=m_2g\cdot\frac{4m_1+m_2-m_2+2m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{4m_1+m_2}\,,$$

$$F_z=2m_1m_2g\cdot\frac{(2+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{4m_1+m_2}\,.$$

Задача 2.4. На коса рамнина со агол на наклон α се наоѓа тело со маса m_1 кое е поврзано со телото со маса m_2 преку нерастеглив конец префрлен преку макара, како што е прикажано на сл. 2.4.1. Коефициентот на триење меѓу телото и косата рамнина е μ.

а) Колкав треба да биде односот на масите на телата за телото m_2 да се движи надолу?

б) Колкава е силата на реакција во потпорната точка на макарата во тој случај?



Сл. 2.4.1

Решение:

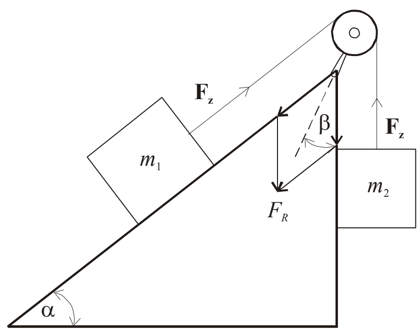
Од II Њутнов закон за движење на телата според сл. 2.4.2 следуваат равенките:

$$m_2 a = m_2 g - F_z\,,$$

$$m_1 a = F_z - m_1 g \sin\alpha - \mu\, m_1 g \cos\alpha\,,$$

$$(m_1 + m_2)\,a = m_2 g - m_1 g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,,$$

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}\,.$$



Сл. 2.4.2

а) $a > 0 \Rightarrow \quad m_2 g > m_1\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,g\,,$

$$\frac{m_2}{m_1} > \sin\alpha + \mu\cos\alpha\,.$$

б) $F_R = F_z \cos\beta + F_z \cos\beta = 2F_z \cos\beta\,,$

$$F_R = 2F_z \cos\left(\frac{90-\alpha}{2}\right).$$

$$F_z = m_2 g - m_2 a\,,$$

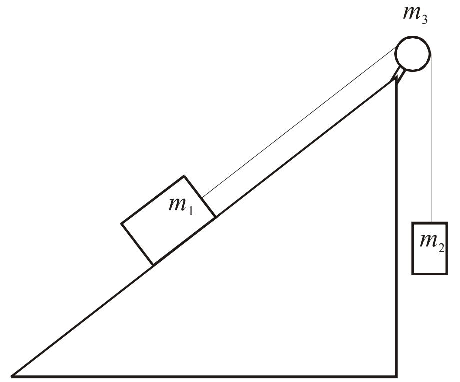
$$F_z = m_2 g - m_2 \cdot \frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}\, g\,,$$

$$F_z = m_2 g\,\frac{\left[m_1 + m_2 - m_2 + m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\right]}{m_1 + m_2}\,,$$

$$F_z = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$F_R = \frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\cos\beta\,.$$

Задача 2.5. Да се пресмета забрзувањето на системот прикажан на сл. 2.5.1. Косата рамнина е фиксирана за подлога, а коефициентот на триење меѓу телото и рамнината е μ. Масата на цилиндричната макара е m_3. Кој е условот за придвижување на телото со маса m_1 надолу по рамнината? Колкаво е забрзувањето на системот во тој случај? Лизгањето на конецот по макарата да се занемари.



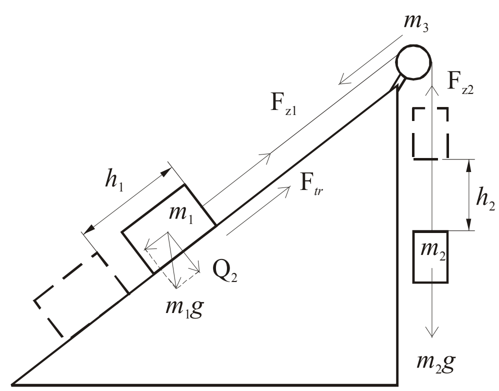
Сл. 2.5.1

Решение:

Услов за придвижување надолу е:

$$m_1 g\sin\alpha > \mu\, m_1 g\cos\alpha + m_2 g\ ,$$

$$m_1 > \frac{m_2}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}\,.$$



Сл. 2.5.2

Њутновите равенки за движење на двете тела ќе гласат:

$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g \sin\alpha - \mu\, m_1 g \cos\alpha - F_{z1} \\ m_2 a &= F_{z2} - m_2 g \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

каде што Fz_1 и Fz_2 се силите на затегнување на конците, кои ќе предизвикаат ротација на макарата,

$$(F_{z1} - F_{z2})R = I\,\alpha = \frac{m_3 R^2}{2} \cdot \frac{a}{R},$$

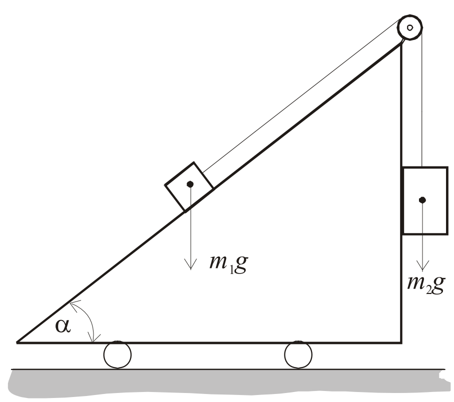
каде што R е радиус на макарата.

$$F_{z1} - F_{z2} = \frac{m_3 a}{2}. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) $\Rightarrow$ $a = \dfrac{m_1 g \sin\alpha - (\mu\, m_1 g \cos\alpha + m_2 g)}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_3}{2}}$.

Задачата да се реши и преку законот за запазување на енергијата.

Задача 2.6. На коса рамнина со агол $\alpha = 30°$, која се движи рамномерно забрзано со забрзување $a = 4$ m/s^2 во насоката прикажана на сл. 2.6.1, се наоѓа тело со маса $m_1 = 10$ g. Тоа е поврзано со друго тело со маса $m_2 = 50$ g со тенок конец префрлен преку бестежинска макара. Коефициентот на триење меѓу телото и подлогата е $\mu = 0{,}2$. Колкаво време е потребно за телото со маса m_2 да помине пат со должина $h = 42{,}9$ cm, ако во моментот $t = 0$ имало брзина $v_0 = 4$ m/s во однос на косата рамнина.



Сл.2.6.1

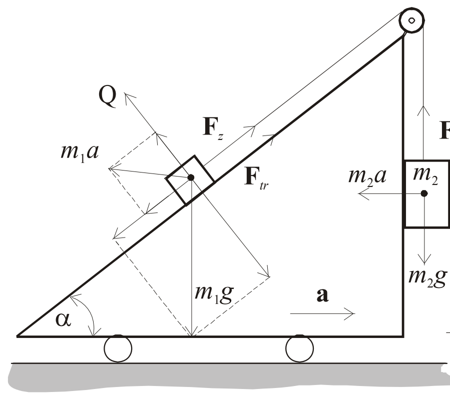
Решение:

Бидејќи количката е неинерцијален систем (сл. 2.6.2), врз телата со маси m_1 и m_2 ќе дејствуваат инерцијалните сили m_1a и m_2a, така што Њутновите равенки за движење за двете тела ќе гласат:

$$m_2 a' = m_2 g - F_z - \mu m_2 a\ , \tag{1}$$

$$m_1 a' = F_z - m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 a \cos\alpha + \mu m_1 a \sin\alpha\ . \tag{2}$$

$$F_{tr} = \mu Q = \mu(m_1 g \cos\alpha - m_1 a \sin\alpha)\,.$$



Сл.2.6.2

Од равеките (1) и (2) $\Rightarrow$

$$a' = \frac{m_2(g - \mu a) - m_1\left[g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) + a(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)\right]}{m_1 + m_2}\,,$$

$$a' = 5{,}89\ \mathrm{m/s^2} \approx 6\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Бидејќи телото m_2 се движи со почетна брзина v_0, поминатиот пат ќе биде:

$$h = v_0 t + \frac{a' t^2}{2} \Rightarrow \frac{a' t^2}{2} + v_0 t - h = 0,$$

$$t_{1/2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2a' h}}{a'}\,,$$

$$t = \frac{1}{a'}\left(\sqrt{v_0^2 + 2a' h} - v_0\right) = 0{,}1\ \mathrm{s}.$$

Задача 2.7. Да се најде силата на затегнување на системот прикажан на сл. 2.7, ако $m_1 = 0{,}1$ kg, $m_2 = 0{,}3$ kg. Масата на макарите да се занемари, а конецот да се смета нерастеглив.

Решение:

Бидејќи $m_1 < m_2$, макарата со телото со маса m_2 се спушта надолу (сл. 2.7), па Њутновите равенки за двете тела ќе гласат:

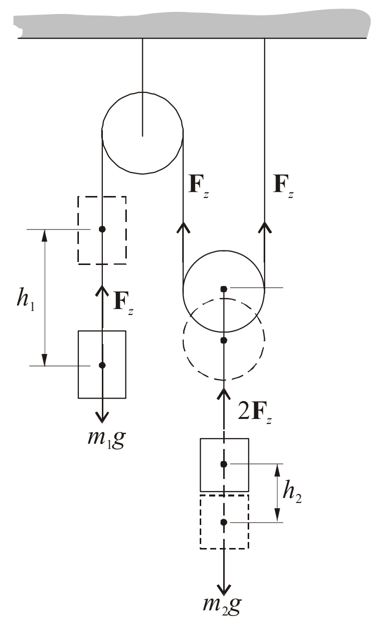
$$m_1 a_1 = F_z - m_1 g,$$
$$m_2 a_2 = m_2 g - 2F_z. \qquad (1)$$

Од конструкцијата на системот се гледа дека при поместување на оската на подвижната макара за h_2 надолу телото со маса m_1 ќе се подигне за $h_1 = 2h_2$, од каде што следува:

$$a_1 = 2a_2. \qquad (2)$$

Со замена на равенката (2) во (1) се добива:

$$2m_1 a_2 = F_z - m_1 g \quad /\cdot m_2$$
$$m_2 a_2 = m_2 g - 2F_z \quad /\cdot 2m_1$$



Сл. 2.7

$$2m_1 m_2 a_2 = m_2 F_z - m_1 m_2 g$$
$$2m_1 m_2 a_2 = 2m_1 m_2 g - 4m_1 F_z$$

$$3m_1 m_2 g = F_z (m_2 + 4m_1).$$

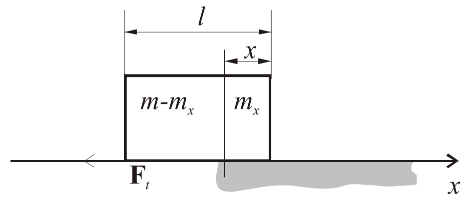
$$\Rightarrow F_z = \frac{3m_1 m_2 g}{m_2 + 4m_1} = 1{,}26 \text{ N}.$$

Задача 2.8. Тело се лизга по мазна хоризонтална површина со брзина v, а потоа налетува на рапава површина со коефициент на триење μ. Колкава треба да биде неговата максимална должина за, кога ќе застане, еден негов дел да се наоѓа на мазната површина?

Решение:

Кинетичката енергија на телото се троши за совладување на силата на триење, при што се врши негативна работа (сл. 2.8):

$$\frac{mv^2}{2} = A_t .$$



Сл. 2.8

Силата на триење ќе зависи од делот x (т.е. m_x) кој се наоѓа на рапавата површина, т.е.:

$$F_t = \mu m_x g,$$

$$\frac{m_x}{m} = \frac{x}{l} \Rightarrow m_x = m\frac{x}{l} \Rightarrow F_t = \mu mg\frac{x}{l}.$$

При поместување на целото тело работата потрошена за совладување на силата на триење е:

$$A_t = \int_0^l F_t dx = \frac{\mu mg}{l}\int_0^l x dx = \frac{\mu mg}{l}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_o^l ,$$

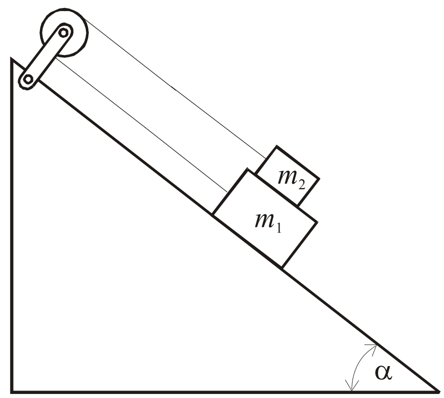
$$A_t = \frac{\mu mgl}{2}.$$

Вкупна кинетичка енергија на телото што се движи со брзина v се троши за вршење на работа A_t:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\mu mgl}{2} \Rightarrow$$

$$l = \frac{v^2}{\mu g}.$$

Задача 2.9. Две тела се поврзани се нерастеглив конец префрлен преку макара. Телата се наоѓаат на коса рамнина со агол α = 45°. Коефициентот на триење меѓу долното тело и косата рамнина е $\mu_1 = 0{,}2$, а меѓу двете тела $\mu_2 = 0{,}12$. Колкав треба да биде односот на масите на двете тела за да може долното тело да се движи забрзано надолу? Масите на макарата и на конецот се занемаруваат.



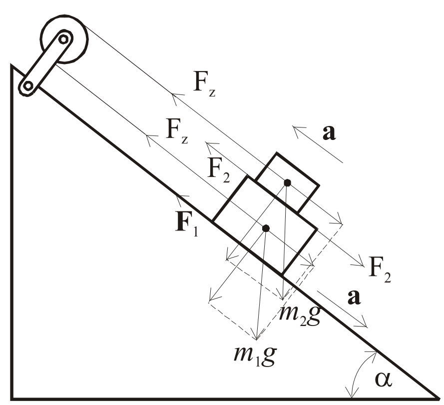
Сл. 2.9.1

Решение:

За телото со маса m_1 (сл. 2.9.2) да се движи надолу, резултантната сила треба да биде поголема од нула:

$$m_1 g \sin\alpha - F_1 - F_z - F_r > 0\,, \qquad (1)$$

каде што $F_r = F_2$ е реакција на силата на триење F_2.



Сл. 2.9.2

Кога телото со маса m_1 се движи забрзано надолу, телото со маса m_2 ќе се движи забрзано нагоре со истото забрзување, затоа што двете тела се поврзани со нерастеглив конец.

Значи, резултантната сила на горното тело треба да биде насочена нагоре:

$$F_z - m_2 g \sin\alpha - F_2 > 0 . \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Од равенката (1)} \Rightarrow m_1 g \sin\alpha - F_1 - F_r > F_z \\ \text{Од равенката (2)} \Rightarrow F_z > m_2 g \sin\alpha + F_2\end{array}\right\} \Rightarrow ,$$

$$m_1 g \sin\alpha - F_1 - F_2 > m_2 g \sin\alpha + F_2 ,$$

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\alpha - F_1 - 2F_2 > 0 ,$$

$$F_1 = \mu_1 Q_1 = \mu_1 (m_1 + m_2) g \cos\alpha .$$

$$F_2 = \mu_2 Q_2 = \mu_2 m_2 g \cos\alpha .$$

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\alpha - \mu_1 (m_1 + m_2) g \cos\alpha - 2\mu_2 m_2 g \cos\alpha > 0 \ \ / : m_2 g \cos\alpha$$

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\mu_1 + 2\mu_2}{tg\alpha - \mu_1} ,$$

$$\frac{m_1}{m_2} > 1{,}8 .$$

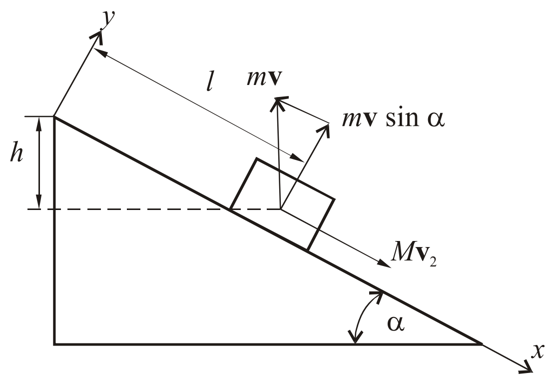
Задача 2.10. По коса рамнина со агол на наклон $\alpha = 30°$ се спушта скијач со маса $M = 60$ kg. По поминување на пат $l = 10$ m од врвот на косата рамнина, тој исфрла во височина сигнална ракета со маса $m = 30$ g и почетна брзина $v = 100$ m/s. Да се определи брзината на скијачот по исфрлањето на ракетата. Времето на исфрлање на ракетата е занемарливо мало. Триењето да се занемари.

Решение:

Законот за запазување на импулсот во мометот на исфрлањето на сигналната ракета од сл. 2.10 гласи:

$$(M + m) v_1 = (M v_2 - m v \sin\alpha) ,$$

каде што импулсот на скијачот со ракетата вдолж оската x во моментот на исфрлањето на ракетата е $(M + m)v_1$, а по исфрлањето $Mv_2 - mv\sin\alpha$. Брзината v_1 е брзина на скијачот непосредно пред испалувањето, а брзината v_2 е брзина на скијачот по нејзиното исфрлање.



Сл. 2.10

Во истиот момент од законот за запазување на енергијата следува:

$$\frac{v_1^2}{2} = gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh},$$

$$h = l\sin\alpha.$$

$$v_1 = \sqrt{2gl\sin\alpha}.$$

$$v_2 = \frac{M+m}{M}v_1 + \frac{mv}{M}\sin\alpha\,,$$

$$v_2 = \frac{M+m}{M}\sqrt{2gl\sin\alpha} + \frac{mv}{M}\sin\alpha = \sqrt{2gl\sin\alpha}\left(\frac{M+m}{M} + \frac{mv}{M}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{2gl}}\right).$$

Задача 2.11. Тело со маса M се лизга без триење по коса рамнина, чиј агол на наклонот е α. Откако телото поминало пат l, со него нееластично се судира мало топче со маса m кое лета хоризонтално. Со која брзина v_1 треба да удри топчето во телото за тие по судирот да останат неподвижни?

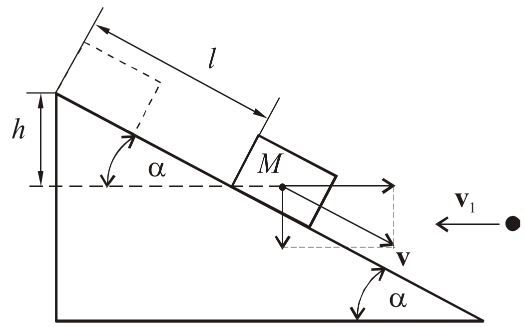
Решение:

Брзината на телото на крајот на патот е:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl\sin\alpha}\,,$$

а нејзината хоризонтална компонента е:

$$v_x = v\cos\alpha = \sqrt{2gl\sin\alpha}\,\cos\alpha\ .$$



Сл. 2.11

Бидејќи по судирот двете тела ќе застанат, од законот за запазување на импулсот следува:

$$Mv - mv_1\cos\alpha = 0,$$
$$Mv = mv_1\cos\alpha.$$

од каде што следува:

$$v_1 = \frac{M\sqrt{2gl\sin\alpha}\,\cos\alpha}{m}\ .$$

Задача 2.12. Мало тело се лизга по коса рамнина чија висина е $H = 2R$, каде што R е радиус на кругот во кој преминува косата рамнина. На која висина телото ќе се откине од кругот, а од која висина H_1 треба да се пушти за да го продолжи патот по кругот без да испадне? Триењето да се занемари.

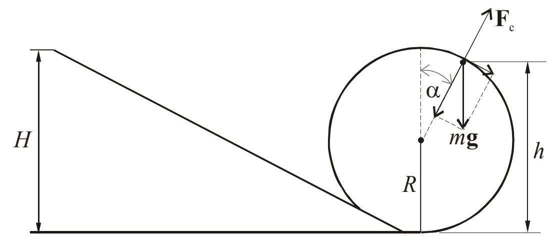
Решение:

За телото да испадне на висина h потребно е да биде исполнет условот, центрифугалната сила да е еднаква на нормалната компонента од тежината (сл. 2.12)

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha,$$
$$v^2 = Rg\cos\alpha,$$

а за да не се одвои, потребно е:

$$F_c > mg\cos\alpha .$$



Сл.2.12

Од законот за запазување на енергијата следува:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh . \qquad (1)$$

Висината h може да се определи како:

$$h = R + R\cos\alpha,$$

$$mgH = \frac{m}{2} Rg\cos\alpha + mgR(1+\cos\alpha),$$

$$2R - R = \frac{3}{2} R\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow h = \frac{5}{3} R .$$

Граничниот услов телото да нема да испадне дури и кога ја постигнува максималната висина на кругот е даден со изразот:

$$\frac{mv^2}{R} = mg.$$

Ако изразот за v^2 добиен од оваа равенка се замени во равенката (1) за законот за запазување на енергијата, се добива:

$$mgH_1 = mg\frac{R}{2} + 2mgR \Rightarrow H_1 = \frac{5}{2} R.$$

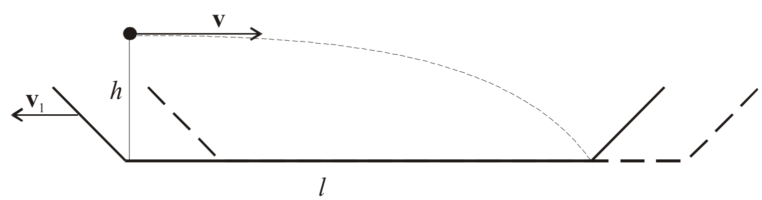
Значи, телото треба да се пушти од поголема висина за да има поголема енергија и брзина.

Задача 2.13. На едниот крај од чамец со должина l стои човек. Масата на чамецот заедно со човекот е M. Човекот држи предмет со маса m на висина h. Со која брзина треба човекот да го фрли предметот во хоризонтален правец за тој да падне на другиот крај од чамецот.

Решение:

Времето на летање на предметот од сл. 2.13 е:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \,.$$



Сл.2.13

Патот што ќе го помине предметот:

$$l = (v_1 + v)t \,.$$

Од законот за запазување на импулсот следува:

$$Mv_1 = mv.$$

$$v_1 = \frac{m}{M} v.$$

$$l = v(1 + \frac{m}{M})\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

$$v = \frac{l}{(1 + \frac{m}{M})\sqrt{\frac{2h}{g}}}.$$

Задача 2.14. Тело се движи по патека дадена на сл. 2.14. Радиусот на закривеноста на патеката и во двата дела е R. Телото почнува да се движи од точката A. Оддалеченоста меѓу положбите AB и BC е еднаква. Колкава треба да биде висинската разлика h за телото да се одвои од патеката во точката C? Да се определи точната положба на точката C. Триењето да се занемари.

Решение:

Услов телото да се одвои од патеката во точката C од сл. 2.14 е:

$$F_c \geq mg\cos\varphi \, .$$

Или граничен услов:

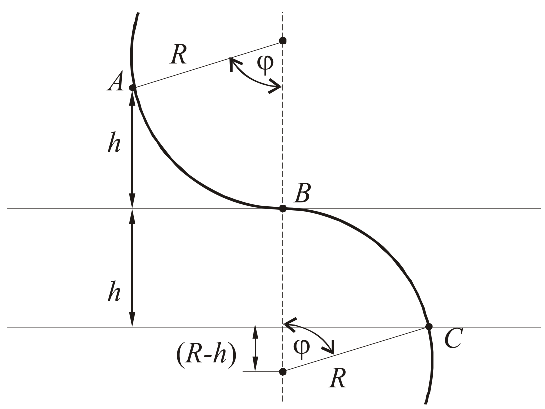
$$\frac{mv_c^2}{R} = mg\cos\varphi \, ,$$

$$v_c^2 = gR\cos\varphi \, . \qquad (1)$$

Од законот за запазување на енергијата следува:

$$mg2h = \frac{mv_c^2}{2} \, ,$$

$$v_c^2 = 4gh \, . \qquad (2)$$



Сл.2.14

Од равенките (1) и (2) $\Rightarrow$ $gR\cos\varphi = 4gh$

$$h = \frac{R}{4}\cos\varphi,$$

$$h = \frac{R}{4}(1 - \frac{h}{R}),$$

$$h = \frac{R}{5}.$$

Од сл. 2.14 се гледа дека:

$$\frac{R-h}{R} = \cos\varphi\ ,\ \cos\varphi = 1 - \frac{h}{R},$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{R/5}{R} = 1 - \frac{1}{5},$$

$$\cos\varphi = \frac{4}{5}.$$

Задача 2.15. На тело со маса m, кое е обесено на конец и изведено од рамнотежната точка за α = 60°, му е соопштена брзина v_0 која е нормална на конецот и насочена надолу. Ако должината на конецот е l = 1 m, да се определи најмалата брзина $v_{0\min}$ при која телото ќе врши кружно движење. Која е најголемата брзина $v_{0\max}$ ако конецот може да издржи сила која е 8 пати поголема од тежината на телото, т.е. $F_z = 8mg$?

Решение:

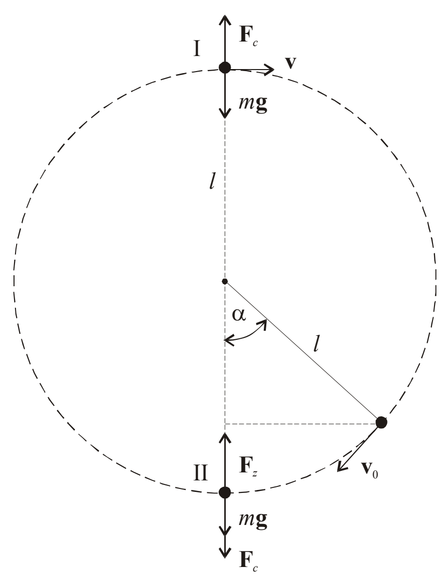
Прв случај:

Кога телото се наоѓа во највисоката точка I, треба да биде задоволен условот за рамнотежа на центрифугалната сила со силата на Земјината тежа. Од законот за запазување на енергијата во почетната положба на телото и во положбата I следува:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh,$$

а од условот за рамнотежа на силите:

$$\frac{mv^2}{l} = mg.$$



Сл. 2.15

Во оваа положба висинската разлика која ќе ја помине телото е:

$$h = l + l\cos\alpha ,$$

а брзината е:

$$v_0 = \sqrt{gl(3 + 2\cos\alpha)} = 6{,}26\ \text{m/s}.$$

Втор случај:

Најголемо оптоварување телото има во положба II:

$$F_z = \frac{mv_1^2}{l} + mg,$$

$$8mg = \frac{mv_1^2}{l} + mg,$$

$$7g = \frac{v_1^2}{l} \Rightarrow v_1^2 = 7gl.$$

Го поставуваме законот за запазување на енергијата на телото во почетната положба и во положбата II:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2},$$

$$v_{0\max}^2 + 2gh = v_1^2.$$

Во положба II висинската разлика која ќе ја помине телото е:

$$h = l - l\cos\alpha$$

$$v_{0\max}^2 = v_1^2 - 2g(l - l\cos\alpha),$$

$$v_{0\max}^2 = 7gl - 2gl + 2gl\cos\alpha,$$

$$v_{0\max} = \sqrt{gl(5 + 2\cos\alpha)},$$

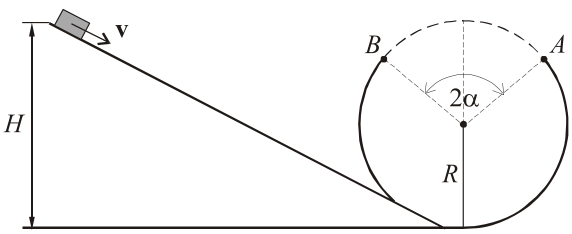
$$v_{0\max} = 7{,}67\ \text{m/s}.$$

Задача 2.16. Мало тело се лизга по коса рамнина со висина H, која поминува во „мртва петелка“ со радиус $R = 2/5H$. Да се определи аголот 2α (сл. 2.16) за телото да „прелета“ од точката A во точката B низ воздух и да продолжи да се движи по петелката. Триењето и отпорот на воздухот да се занемарат.

Решение:

Брзината во точката A може да се определи од законот за запазување на енергијата (сл. 2.16):

$$mgH = \frac{mv_A^2}{2} + mgR(1+\cos\alpha)\,. \qquad (1)$$



Сл. 2.16

Од точката A до точката B телото изведува кос истрел, па неговиот дострел $\overline{\mathrm{AB}}$ изнесува:

$$\overline{\mathrm{AB}} = \frac{v_A^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2v_A^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g},$$

$$\overline{\mathrm{AB}} = 2R\sin\alpha,$$

$$2R\sin\alpha = \frac{2v_A^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

$$v_A^2 = \frac{Rg}{\cos\alpha}\,. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) $\Rightarrow$

$$2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 = 0,$$

$$\cos\alpha = \frac{3\pm 1}{4},$$

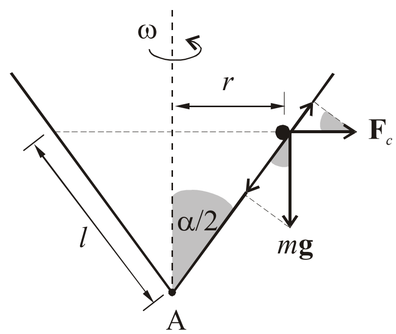
$$\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 60^\circ \Rightarrow 2\alpha = 120^\circ\,.$$

Задача 2.17. Сад со облик на конус ротира околу вертикална оска со аголна брзина $\omega = 5$ rad/s. На кое место l од темето на конусот се наоѓа тело кое е во рамнотежа, ако аголот на конусот е $\alpha = 100°$? Триењето да се занемари.

Решение:

При ротација на садот со константна аголна брзина ω телото во рамнотежа ќе се движи по кружна патека со радиус r (сл. 2.17).



Сл. 2.17

За да биде задоволен условот за рамнотежа, потребно е проекциите на тежината на телото mg и центрифугалната сила F_c врз правецот на движење на телото (ѕидот од садот) да бидат еднакви:

$$mg\cos\frac{\alpha}{2} = F_c\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$mg\cos\frac{\alpha}{2} = m\omega^2 r\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$r = l\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$\omega^2 l\sin^2\frac{\alpha}{2} = g\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$l = \frac{g\cos\frac{\alpha}{2}}{\omega^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 2.18. Тело со маса m = 1 kg почнува да се лизга од врвот на коса рамнина со висина l = 51 cm и агол на наклон $\alpha = 45°$. На крајот од рамнината телото се забива во количка со песок со маса M = 20 kg, а потоа продолжуваат заедно да се движат по хоризонтална рамнина. Да се определи патот што ќе го помине количката. Коефициентот на триење меѓу телото и косата рамнина е $\mu_1 = 0{,}1$, а помеѓу количката и хоризонталната рамнина $\mu_2 = 0{,}05$.

Решение:

Од законот за запазување на енергијата следи (сл. 2.18):

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \mu_1 mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha},$$

каде што v е брзината што ја има телото пред да падне во количката:

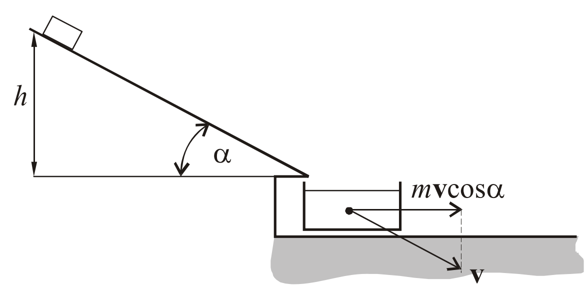
$$v^2 = 2gh(1-\mu_1\mathrm{ctg}\alpha) = 9 \Rightarrow v = 3\,\mathrm{m/s}.$$

Од законот за запазување на импулсот во моментот кога телото паѓа во количката следува:

$$mv\cos\alpha = (m+M)v_0,$$

каде што v_0 е брзина на телото и количката по судирот.

$$v_0 = \frac{m}{m+M}v\cos\alpha \approx 0{,}1\,\mathrm{m/s}.$$



Сл.2.18

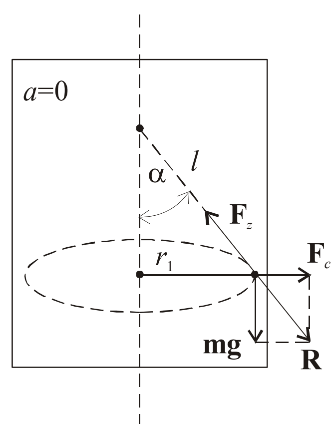
Кинетичката енергија што ја имаат телото и количката се троши на совладување на силата на триење помеѓу количката и подлогата:

$$\frac{(m+M)v_0^2}{2} = \mu_2(m+M)gs,$$

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu_2 g} = \frac{m^2 v^2 \cos^2\alpha}{(m+M)^2 2\mu_2 g},$$

$$s = \frac{m^2(1-\mu_1 \mathrm{ctg}\alpha)\cos^2\alpha}{(m+M)^2 \mu_2} h.$$

Задача 2.19. Дете се наоѓа во лифт и во раката држи јаже на кое е прикачено метално топче. Детето го врти топчето во хоризонтална рамнина со константна аголна брзина ω. Јажето зафаќа агол α = 30° со оската на ротација 0 – 0’. Потоа лифтот почнува да се движи рамно-мерно забрзано надолу, при што аголот меѓу јажето и оската на ротација останува 45°. Да се определи забрзувањето на лифтот! (Да се занемарат масата на јажето и силата на триење)



Сл. 2.19.1

Решение:

Прв случај:

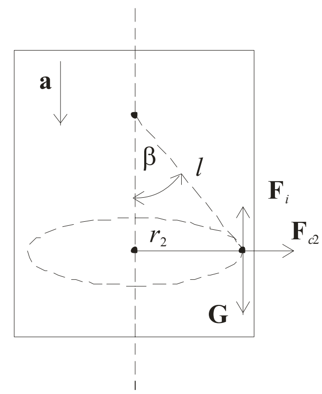
Кога лифтот не се движи на топчето дејствува силата на тежината G и центрипеталната сила F_c, чија резултанта е во рамнотежа со силата на затегнување на јажето F_z.

$$\frac{F_c}{mg} = \mathrm{tg}\alpha \ .$$

$$\frac{mr_1\omega^2}{mg} = \mathrm{tg}\alpha \ .$$

$$\frac{l \cdot \sin\alpha \cdot \omega^2}{g} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\omega^2 l = \frac{g}{\cos\alpha} \ .$$



Сл. 2.19.2

Втор случај:

Кога лифтот се движи со забрзување a надолу, се менува аголот на јажето во однос на 0-0'. Во тој случај на топчето дејствуваат центрипетална сила F_{c2}, силата на тежината G и инерцијалната сила F_i спротивно од насоката на движењето на лифтот.

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{F_{c2}}{mg - F_i},$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{mr_2\omega^2}{mg - ma},$$

$$r^2 = l \cdot \sin\beta \Rightarrow \mathrm{tg}\beta = \frac{l \sin\beta \cdot \omega^2}{g - a},$$

$$\omega^2 l = \frac{g - a}{\cos\beta} \ .$$

Со изедначување на двете страни од релациите (1) и (2) се добива:

$$\frac{g}{\cos\alpha} = \frac{g - a}{\cos\beta},$$

$$a = g(1 - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}),$$

$$a = 1{,}8 \mathrm{m/s^2} \ .$$

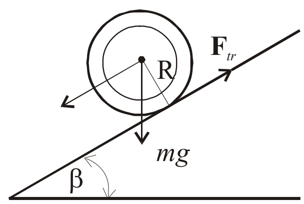
3. Динамика на кружно движење

Задача 3.1. Да се определи граничниот агол на коса рамнина (сл.3.1.1), при кој се тркала обрач без лизгање. Коефициентот на триење меѓу обрачот и косата рамнина е $\mu = 0{,}233$.

Решение:

Равенката на транслаторното движење на обрачот гласи:

$$ma = mg\sin\beta - F_{tr}\,. \qquad (1)$$



Сл. 3.1.1

Обрачот врши ротација под дејство на моментот на силата на триење околу сопствената оска на ротација:

$$M = F_{tr}\cdot R = I\alpha\,, \qquad (2)$$

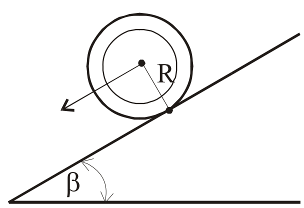
$$I = mR^2; \qquad \alpha = \frac{a}{R}\,. \qquad (3)$$

Бидеќи нема лизгање од (2) и (3) $\Rightarrow \quad F_{tr} = ma$.

Со замена во (1) $ma = mg\sin\beta - ma \Rightarrow a = \frac{1}{2}g\sin\beta$.

Значи, забрзувањето на обрачот при тркалање е 1/2 од забрзувањето без тркалање.

За да се тркала обрачот без лизгање, мора $F_{tr} \le F_{trs}$ (статичка сила на триење), т.е.



Сл. 3.1.2

$$\frac{1}{2}mg\sin\beta \le \mu mg\cos\beta,$$

$$\text{tg}\beta \le 2\mu,$$

$$\beta = 25^\circ.$$

Значи, ако $\mu > 0{,}223$ и $\beta > 25^\circ$, постои лизгање, ако $\mu < 0{,}223$ и $\beta < 25^\circ$, не постои лизгање при тркалањето.

Задачата може да се реши и ако се разгледа ротацијата околу моменталната оска на ротација од сл. 3.1.2.

Во тој случај вртлив момент ќе предизвика активната компонента од тежината на обрачот $mg\sin\alpha \cdot R = I\alpha$, т.е.:

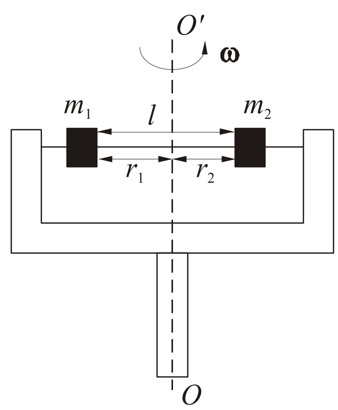
$$mg\sin\beta \cdot R = I\alpha\,,$$

каде што $I = mR^2 + mR^2$, според Штајнеровата теорема, односно:

$$mg\sin\beta \cdot R = 2mR^2\,\frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{1}{2}g\sin\beta\,.$$

Обидете се задачата да ја решите и преку законот за запазување на енергијата.

Задача 3.2. Хоризонтален стап, по кој можат слободно да се лизгаат два мали тега, ротира околу вертикална оска OO’ како на сл. 3.2. Теговите со маси m_1 = 15 g и m_2 = 25 g меѓусебе се поврзани со конец со должина l = 15 cm. При ротација на системот со аголна брзина ω = 10 π rad/s, теговите се наоѓаат на растојание r_1 и r_2 во однос на оската OO’. Да се определат силата на затегнување во конецот и кинетичката енергија на теговите.



Сл. 3.2

Решение:

Силата на затегнување на конецот е еднаква на центрипеталната сила:

$$F_z = m_1\omega^2 r_1,$$

$$F_z = m_2\omega^2 r_2.$$

Според условот за статичка рамнотежа, вкупниот момент на сила во однос на оската *OO*' треба да е еднаков на 0, односно:

$$m_1 g r_1 = m_2 g r_2.$$

Бидејќи $l = r_1 + r_2$ следува:

$$m_1(l - r_2) = m_2 r_2,$$

$$r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2},$$

или $m_1 r_1 = m_2(l - r_1) \Rightarrow$

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2},$$

$$F_z = m_1\omega^2 \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = 1{,}39\ \text{N}.$$

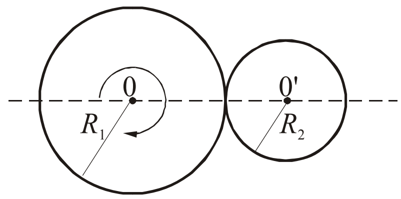
Вкупната кинетичка енергија на теговите е збир од нивните кинетички енергии на ротација околу оската *OO*':

$$E_k = \frac{I_1\omega^2}{2} + \frac{I_2\omega^2}{2} = \frac{m_1 r_1^2\omega^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2\omega^2}{2},$$

$$E_k = \frac{m_1\omega^2}{2}\left(\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{m_2\omega^2}{2}\left(\frac{m_1 l}{m_1 + m_2}\right)^2,$$

$$E_k = 0{,}104\ \text{J}.$$

Задача 3.3. Два шупливи цилиндра со различни радиуси кои се допираат можат да се вртат околу паралелни оски O и O' како на сл 3.3. На почетокот цилиндарот со радиус R_1 = 20 cm ротира со аголна брзина ω_{01} = 20 rad/s, а другиот мирува поради постоење на лизгање. По некое време, поради триењето и двата цилиндра почнуваат да ротираат без лизгање така да изведуваат забрзано кружно движење. Да се најде колкаво количество енергија при тоа ќе се претвори во топлина. Масите на цилиндрите се $m_1 = 80$ kg и $m_2 = 60$ kg.



Сл. 3.3

Решение:

Аголната брзина на првиот цилиндар по некое време t ќе биде:

$$\omega_1 = \omega_{01} - \alpha_1 t \,.$$

Оттука се добива

$$\alpha_1 = \frac{\omega_{01} - \omega_1}{t} \,.$$

Во истиот временски момент t, вториот цилиндар ќе ротира со аголна брзина $\omega_2 = \alpha_2 t$, бидејќи во почетниот момент мирувал и аголната брзина $\omega_{02} = 0$. За аголното забрзување α_2 се добива $\alpha_2 = \dfrac{\omega_2}{t}$.

Моментот на сила поради кој настанува ротација на првиот и вториот цилиндар, под дејство на силата на триење, се дефинира со изразите:

$$F_t R_1 = I_1 \alpha_1 \quad \text{т.е.} \quad F_t R_1 = m_1 R_1^2 \frac{\omega_{01} - \omega_1}{t} \,, \qquad (1)$$

$$F_t R_2 = I_2 \alpha_2 \quad \text{т.е.} \quad F_t R_2 = m_2 R_2^2 \frac{\omega_2}{t} \,. \qquad (2)$$

Со замена $\omega = \dfrac{v}{R}$ во соодветните изрази и со средување на равенките од равенката (1) се добива:

$$F_t = m_1 \frac{v_{01} - v}{t} \,,$$

а од равенката (2):

$$F_t = m_2 \frac{v}{t}.$$

Се изедначуваат десните страни на последните две равенки за да се добие брзината со која се движат цилиндрите во момент од времето t :

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{01}. \tag{3}$$

Кинетичката енергија на системот во почетниот момент е еднаква на кинетичката енергија E_0 на првиот цилиндар:

$$E_0 = \frac{I_1 \omega_{01}^2}{2} = \frac{m_1 v_{01}^2}{2}.$$

По време t системот ќе има вкупна кинетичка енергија:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2},$$

$$E = \frac{m_1 R_1^2 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2 \omega_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Со замена на изразот за брзина од равенката (3) се добива:

$$E = \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_{01}^2.$$

Разликата во кинетичките енергии на системот во почетниот момент и во моментот на времето t го дава количеството топлина што при тоа се ослободува:

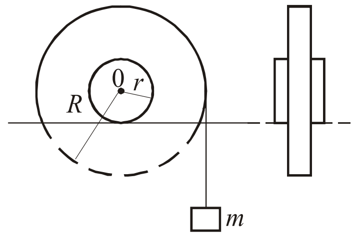
$$Q = E_0 - E,$$

$$Q = \frac{m_1 v_{01}^2}{2} - \frac{m_1^2 v_{01}^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_{01}^2,$$

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} R_1^2 \omega_{01}^2,$$

$$Q = 274 \text{ J}.$$

Задача 3.4. На масивен цилиндар со маса M и радиус R се прицврстуваат држачи со радиус $r = R/2$, со занемарлива маса. Цилиндарот е поставен на хоризонтална шина и на него се намотува јаже. На крајот на јажето се става тег со маса $m = M/4$, при што цилиндарот почнува да се движи. Колку време е потребно за цилиндарот да помине пат l ?



Сл. 3.4.1

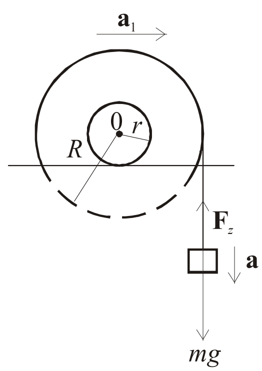
Решение:

Бидејќи цилиндарот се движи по хоризонтална шина со забрзување a_1, времето за кое цилиндарот ќе помине пат l може да се определи како:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_1}}\,, \tag{1}$$

при што

$$a_1 = \alpha\, r = \alpha \frac{R}{2}\,.$$



Сл. 3.4.2

Применувајќи го II Њутнов закон за овој систем од сл. 3.4.2, се добива:

$$ma = mg - F_z\,, \tag{2}$$

$$F_z R = I\alpha \tag{3}$$

и $a = \alpha\, R,$

каде што

$$I = \frac{MR^2}{2} + Mr^2$$

е инерцијален момент на цилиндарот, α е негово аголно забрзување.

Ако равенката за инерцијален момент се замени во равенката (3), за силата на затегнување во конецот F_z се добива:

$$F_z = \frac{3}{4}\alpha\, MR\,. \tag{4}$$

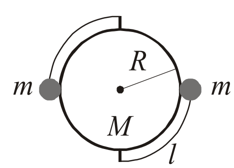
Од равенките (2) и (4) може да се определи аголното забрзување на цилиндарот:

$$\alpha = \frac{m}{m + \frac{3}{4}M} \cdot \frac{g}{R}\,. \tag{5}$$

Ако равенката (5) се замени во (1), за времето се добива:

$$t = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Задача 3.5. Кружен цилиндар со радиус R и маса M може слободно да ротира во хоризонтална рамнина околу оска О во неговиот центар. На ѕидот на цилиндарот се прицврстени две мали топчиња со маса m. Со цилиндарот ги соединуваат две нишки со должина l по периферијата на цилиндарот. Во еден момент топчињата се одлепуваат од ѕидот, при што нишките се радијално поставени. Да се најде должината на нишките l, ако аголната брзина се намали n-пати при радијалното поставување на топчињата.



Сл.3.5.1

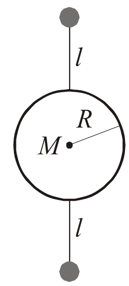
Решение:

Со радијално поставување на топчињата расте инерцијалниот момент на системот, т.е. $I_1 > I_0$, а $\omega_1 < \omega_0$ (сл.3.5.2). Од законот за запазување на импулсот следува:

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1 .$$

$$\left(\frac{MR^2}{2} + 2mR^2\right)\omega_0 = \left[\frac{MR^2}{2} + 2m(R+l)^2\right]\omega_1 ,$$

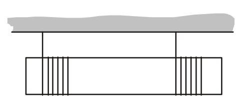
$$l = \sqrt{\frac{n}{4m}\left[MR^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + 4mR^2\right]} - R .$$



Сл. 3.5.2

Пример: Човек седи на столче, а во рацете држи тегови така што прво рацете се припиени до телото, а потоа ги раширува.

Задача 3.6. Хомоген цилиндар со маса m = 5 kg и радиус R = 0,2 m во момент t = 0 почнува да се спушта под дејство на силата на Земјината тежа (сл. 3.6.1). Колкава е силата на затегнување во јажињата? Да се најде аголното забрзување на цилиндарот.



Сл.3.6.1

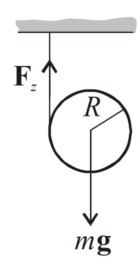
Решение:

Од II Њутнов закон според сл. 3.6.2 следува:

$$ma = mg - 2F_z . \qquad (1)$$

$$I\alpha = 2F_z \cdot R . \qquad (2)$$

$$I = \frac{mR^2}{2} . \qquad (3)$$



Сл.3.6.2

Од равенките (2) и (3) за забрзувањата на системот се добива:

$$a = \frac{4F_z}{m} \,. \qquad (4)$$

Со замена на равенката (4) во (1) може да се определи силата на затегнување во конците:

$$F_z = \frac{mg}{6} = 8{,}15 \text{ N} \,.$$

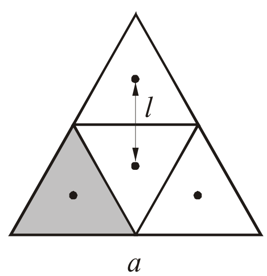
Аголното забрзување на системот е:

$$\alpha = \frac{a}{R} \,.$$

Ако во оваа равенка се замени (3), се добива:

$$\alpha = \frac{2}{3}\frac{g}{R} = 32{,}7 \text{ rad/s}^2 \,.$$

Задача 3.7. Да се определи моментот на инерција на тенка хомогена правилна призма (сл. 3.7) со основа *a* и маса *m* во однос на оска која поминува низ тежиштето на основата и е нормална на неа.



Сл. 3.7

Решение:

По дефиниција инерцијалниот момент зависи правопропорционално од масата и квадратот од една димензија (пример, должина на страната *a*) на телото:

$$I = k \cdot m \cdot a^2 \,, \qquad (1)$$

каде што *k* е коефициент на пропорционалност.

Ако призмата се подели на четири еднакви рамнострани триаголници, моментот на инерција на секој од нив околу сопствената оска на ротација е:

$$I_1 = k \cdot \frac{m}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 . \qquad (2)$$

Вкупниот момент на инерција на призмата околу оската што поминува низ нејзиното тежиште е збир од мометите на инерција на секој дел одделно во однос на истата оска:

$$I = 3\left(I_1 + \frac{m}{4}l^2\right) + I_1 , \qquad (3)$$

т.е. со споредба на равенките (1) и (3) се добива:

$$k\,ma^2 = 4I_1 + 3\frac{m}{4}l^2 ,$$

каде што $l = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

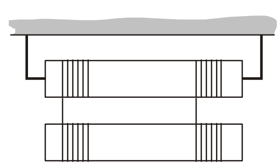
па коефициентот на пропорционалност е определен со:

$$k = \frac{1}{12} .$$

Од добиената вредност за коефициентот на пропорционалност може да се определи моментот на инерција од равенката (1) како:

$$I = \frac{1}{12}ma^2 .$$

Задача 3.8. Два цилиндра со еднакви маси m и радиуси R се поврзани преку јаже со занемарлива маса, како што е прикажано на сл. 3.8.1. Да се пресмета силата на затегнување на јажињата кога ќе се придвижи долниот цилиндар.



Сл. 3.8.1

Решение:

Од II Њутнов закон според сл 3.8.2 следува:

$$ma = mg - 2F_z\,, \qquad (1)$$

$$2F_z R = I\alpha\,, \qquad (2)$$

каде што $I = \dfrac{mR^2}{2}$.

Патот што го поминува долниот цилиндар е еднаков на должината на одмотаниот дел од конецот, т.е.:

$$\frac{1}{2}at^2 = R\varphi = R\omega t = R\alpha t^2\,,$$

$$\Rightarrow \quad a = 2R\alpha\,, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{a}{2R}. \qquad (3)$$

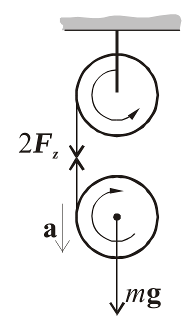
Со замена на равенката (3) во (2) се добива:

$$\frac{mR^2}{2}\frac{a}{2R} = 2F_z R \quad \Rightarrow$$

$$ma = 8F_z,$$

$$8F_z = mg - 2F_z,$$

$$F_z = \frac{mg}{10}.$$



Сл. 3.8.2

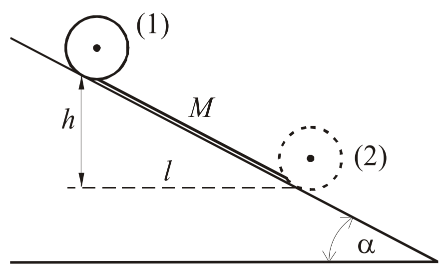
Задача 3.9. Шуплив цилиндар со маса m и полупречник r почнува да се движи низ стрмна рамнина со агол на наклон α и притоа намотува на себе тенко јаже со маса M и должина l, кое дотогаш лежело одмотано на стрмната рамнина. Колкава брзина ќе има центарот на масата на цилиндарот заедно со намотаното јаже во моментот кога ќе се намота целото јаже ($2\pi r << l$).

Решение:

Според законот за запазување на енергијата вкупната енергија на системот во почетниот момент (положба 1) треба да биде еднаква на вкупната енергијата на системот во моментот кога целото јаже е намотано на цилиндарот (положба 2). Бидејќи во почетокот системот мирува, неговата енергија е еднаква на потенцијалната енергија на цилиндарот и јажето:

$$E_1 = E_{Pc} + E_{Pj} = mgh + (Mg\frac{h}{2})\,.^{*)}$$

Потенцијалната енергија на јажето се пресметува како средна вредност на потенцијалната енергија на едниот и другиот крај на јажето, т.е.: $E_{pj} = \dfrac{Mgh + 0}{2} = \dfrac{Mgh}{2}$, каде што положбата 2 е земена за референтно ниво.



Сл. 3.9

Вкупната енергија на системот во положбата 2 е сума на кинетичката енергија на транслаторното и ротационото движење на системот:

$$E_2 = E_{Kt} + E_{Kr} = \frac{(m+M)v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}\,.$$

Инерцијалниот момент на шуплив цилиндар е $I_1 = mr^2$, а на јажето $I_2 = Mr^2$. Значи:

$$I = (m+M)r^2\,,\ \text{а}\ \ \omega = \frac{v}{r}\,.$$

Од законот за запазување на енергијата $E_1 = E_2$ може да се изрази брзината v на цинидарот со јажето во положбата 2.

$$mgh + Mg\frac{h}{2} = \frac{(m+M)v^2}{2} + \frac{(m+M)r^2}{2}\cdot\frac{v^2}{r^2}\,.$$

Од сл. 3.9 може да се види дека $h = l\sin\alpha$. Со средување на изразот за енергиите се добива израз за брзината v:

$$v = \sqrt{\frac{(2m+M)gl\sin\alpha}{2(m+M)}}\,.$$

Задача 3.10. Метална топка со радиус R = 10 cm и маса m = 100 g е врзана за еден крај на конец со должина l_1 = 1 m, додека другиот крај на конецот е фиксиран во точката 0. Овој систем ротира во хоризонтална рамнина, околу оска 0 поставена нормално на рамнината со n_1 = 5 vrt/min. При ротацијата конецот се намотува околу оската и се скратува на должина l_2 = 30 cm. Да се одреди:

а) аголната брзина на топката и бројот на вртежи во минута по скратувањето на конецот до должина l_2,

б) промената на кинетичката енергија на топката.

Решение:

а) За овој систем се применува законот за запазување на моментот на импулсот

$$\mathbf{L} = const.\text{, т.е:}$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 . \qquad (1)$$

Инерцијалните моменти на топката во почетниот момент и по скратувањето на конецот се дадени со равенките:

$$I_1 = \frac{2}{5}mR^2 + ml_1^2 ; \qquad I_2 = \frac{2}{5}mR^2 + ml_2^2 ,$$

а аголните брзини во првиот и вториот случај се:

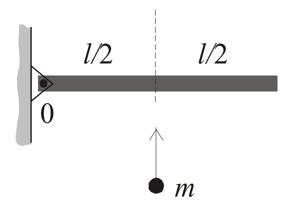
$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} \text{ и } \omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} .$$

Од равенката (1) се добива:

$$n_2 = n_1 \frac{\frac{2}{5}mR^2 + ml_1^2}{\frac{2}{5}mR^2 + ml_2^2} ; \qquad n_2 = 53{,}4 \text{ vrt/min} \Rightarrow \omega_2 = 5{,}6 \text{ rad/s} .$$

б) $\Delta E_k = \dfrac{I_2\omega_2^2}{2} - \dfrac{I_1\omega_1^2}{2}$; $\qquad \Delta E_k = 0{,}134\ J$.

Задача 3.11. Куршум со маса m = 10 g удира во тежиштето на една прачка со маса M = 1 kg и должина l = 0,5 m, која се наоѓа во хоризонтална положба (сл. 3.11.1). Ако патеката на куршумот е вертикална и нормална на прачката, а судирот пластичен, колкава треба да биде брзината на куршумот за прачката да дојде во вертикална положба?



Сл. 3.11.1

Решение:

Од законот за запазување на моментот на импулс следува:

$$L_1 = L_2 , \qquad (1)$$

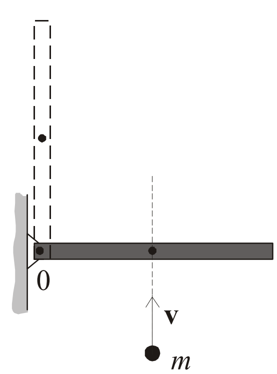
каде што L_1 е момент на импулсот на куршумот и прачката пред судирот во однос на оската 0, а L_2 е момент на нивниот импулс по судирот.

$$L_1 = mv\frac{l}{2}, \quad L_2 = (I_1 + I_2)\omega .$$

каде што v е брзина со која куршумот удира во прачката, а:

$$I_1 = \frac{ml^2}{4} \text{ и } I_2 = \frac{Ml^2}{3}$$

се инерцијални моменти на прачката и куршумот, соодветно, во однос на оската 0, ω е аголна брзина на системот прачка и куршум по судирот.



Сл. 3.11.2

Од равенката (1) со замена на горенаведените величини се добива:

$$\left(\frac{ml^2}{4}+\frac{Ml^2}{3}\right)\omega = mv\frac{l}{2}\,,$$

$$\omega = \frac{6mv}{4Ml+3ml}\,,$$

додека пак од законот за запазување на енергијата во моментот кога куршумот удира во прачката и кога таа застанува вертикално следува:

$$\frac{(I_1+I_2)\omega^2}{2} = (M+m)g\cdot\frac{l}{2}\,,$$

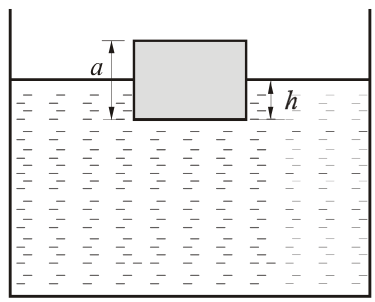
од каде за брзината се добива:

$$v = \frac{1}{m\sqrt{3}}\sqrt{(4M+3m)(M+m)gl}\,,$$

$$v = 357{,}1\,\mathrm{m/s}\,.$$

4. Еластичност, осцилации и бранови

Задача 4.1. Коцка со раб a = 10 cm и густина на материјалот од кој е направена ρ = 700 kg/m^3 плива во еден сад со вода (сл. 4.1). По изведување од рамнотежната положба коцката почнува да врши хармонични осцилации. Да се определи периодот на осцилирање на коцката. Отпорот на средината да се занемари. Густината на водата е $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3.



Сл. 4.1

Решение:

Во почетокот, кога коцката плива во водата, нејзината тежина е во рамнотежа со Архимедовата потисна сила:

$$G = F_A ,$$

$$\rho g \cdot a^3 = \rho_0 g \cdot a^2 h, \qquad (1)$$

каде што a^2h е оној дел од волуменот на коцката што е потопен во водата.

Со примена на надворешна сила F коцката се изведува од рамнотежна положба, така што за силата F може да се напише:

$$F = F_A' - G ,$$

$$F = \rho_0 g a^2 (h + x) - \rho g a^3 =$$

$$F = \rho_0 g a^2 h + \rho_0 g a^2 x - \rho g a^3 .$$

Со замена од равенката (1) се добива:

$$F = \rho g a^3 + \rho_0 g a^2 x - \rho g a^3 ,$$

$$F = \rho_0 g\, a^2 x .$$

Споредувајќи го овој израз со дефиницијата за еластична сила што предизвикува осцилаторно движење $F = kx$, се добива:

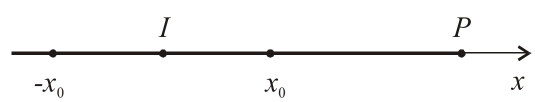
$$k = \rho_0 g\, a^2 .$$

Периодот на хармониско осцилаторно движење се дефинира како

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho\, a^3}{\rho_0 g\, a^2}} ,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho \cdot a}{\rho_0 \cdot g}} , \quad T = 0{,}53 \text{ s} .$$

Задача 4.2. На оската x се наоѓа неподвижен приемник и извор на звучни бранови со фреквенција $\nu = 2000$ Hz (сл. 4.2). Изворот врши хармониско осцилаторно движење вдолж оската x со кружна фреквенција ω и амплитуда x_0 = 50 cm. За кои вредности на ω ширината на фреквенцискиот интервал што го прима приемникот е 200 Hz? Брзината на звукот е c = 340 m/s.



Сл. 4.2

Решение:

Изворот I врши хармонични осцилации по законот:

$$x = x_0 \sin(\omega t - \varphi) ,$$

со брзина:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0 \omega \cos(\omega t - \varphi) .$$

Кога минува низ рамнотежната положба I, тој има максимална брзина:

$$v_m = x_0 \omega .$$

Поради осцилирањето на изворот, т.е. неговото постојано приближување и оддалечување од приемникот P, според Доплеровиот ефект доаѓа до промена на фреквенцијата што ја регистрира набљудувачот. Во случај кога изворот се движи кон x_0 (се приближува кон P), набљудувачот во P ќе регистрира фреквенција:

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{c}{c - v_m}.$$

Приемникот е неподвижен, па неговата брзина $v_P = 0$, а кога се движи кон $-x_0$ (се оддалечува од P) , фреквенцијата ќе биде:

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{c}{c + v_m}.$$

Разликата на овие фреквенции го дава фреквенцискиот интервал $\Delta\nu$ што го регистрира приемникот P:

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \nu_0 \cdot c \frac{2v_m}{c^2 - v_m^2},$$

$$\Delta\nu = \nu_0 \cdot c \frac{2x_0 \cdot \omega}{c^2 - x_0^2\omega^2}.$$

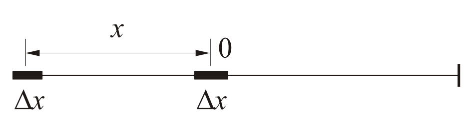
Од оваа равенка се определува кружната фрекфенција ω :

$$\omega^2 + \frac{2c\nu_0}{x_0\Delta\nu}\omega - \left(\frac{c}{x_0}\right)^2 = 0,$$

$$\omega = \frac{c \cdot \nu_0}{x_0\Delta\nu}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2} - 1\right),$$

$$\omega = 33{,}9\ \text{rad/s}.$$

Задача 4.3. Едно тело врши хармониски осцилации со амплитуда x_0, без почетна фаза (сл. 4.3). Да се определи колку пати е поголемо времето за кое телото минува елементарен дел од патот Δx на растојание x од рамнотежната положба, во однос на времето потребно да го мине истиот пат Δx околу рамнотежната положба.



Сл. 4.3

Решение:

Бидејќи станува збор за елементарен дел од патот Δx, со голема точност може да се земе дека телото на тој дел од патот има константна брзина (сл. 4.3). Според тоа, може да се напише равенка за рамномерно движење:

$$\Delta x = v_1 \cdot \Delta t_1 ,$$

каде што со v_1 е означена брзината на телото кога тоа се наоѓа на растојание x од рамнотежната положба, а Δt_1 е време потребно да го измине патот Δx.

Од равенката за хармонични осцилации следува:

$$x = x_0 \sin \omega t \,. \tag{1}$$

$$v_1 = x_0 \omega \cos \omega t ,$$

па со замена во Δx добиваме:

$$\Delta x = x_0 \omega \, \Delta t_1 \cos \omega t \,. \tag{2}$$

Кога минува низ рамнотежната положба, телото има максимална брзинна (кога $\cos \omega t = 1$):

$$\Delta x = v_2 \cdot \Delta t_2 ,$$

$$\Delta x = x_0 \cdot \omega \cdot \Delta t_2 \,. \tag{3}$$

Со делење на равенките (2) и (3) за односот на времињата се добива изразот:

$$\frac{\Delta x}{\Delta x} = \frac{x_0 \omega \, \Delta t_1 \cos \omega t}{x_0 \omega \, \Delta t_2} \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{\cos \omega t} \,.$$

Од равенката (1) следува:

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}} ,$$

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2-x^2}{x_0^2}}}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2-x^2}}\ .$$

Задача 4.4. Материјална честичка со маса 1 g хармониски осцилира со амплитуда 1 m. Во еден момент елонгацијата на честичката е 0,4 m, а нејзината брзина е 0,5 m/s. Колкава сила дејствува на честичката во моментот кога нејзината кинетичка енергија е двојно помала од потенцијалната?

Решение:

Од законот за запазување на енергијата во даден момент на времето t следува:

$$\frac{1}{2}k\,x_0^2=\frac{1}{2}k\,x^2+\frac{1}{2}mv^2\ .$$

Равенката се средува по k и се добива:

$$k=\frac{mv^2}{x_0^2-x^2}\ , \qquad (1)$$

каде што k е коефициент на еластичност.

Во друг временски момент, според условот во задачата, треба да биде задоволено:

$$E_k=\frac{1}{2}E_p\,,$$

каде што потенцијалната енергија е дефинирана како:

$$E_p=\frac{1}{2}k\,x_1^2\ .$$

Со x_1 е означена елонгацијата во временскиот момент t_1. Понатаму следува:

$$E_k=\frac{1}{4}k\,x_1^2\ .$$

Со замена на овој израз во законот за запазување на енергијата добиваме:

$$\frac{1}{2}k\,x_0^2 = \frac{1}{2}k\,x_1^2 + \frac{1}{4}k\,x_1^2 \,.$$

Оттука следува:

$$x_0^2 = \frac{3}{2}x_1^2 \,,$$

$$x_1 = x_0\sqrt{\frac{2}{3}} \,. \qquad (2)$$

Силата на ова хармониско осцилаторно движење во временскиот момент t_1 е дадена со изразот:

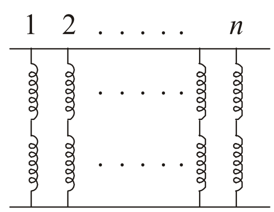
$$F = k\,x_1 \,.$$

Со замена на k и x_1 од равенките (1) и (2) се добива:

$$F = \frac{mv^2}{x_0^2 - x^2}\cdot x_0\sqrt{\frac{2}{3}} \,,$$

$$F = 2{,}4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{N} \,.$$

Задача 4.5. Во системот од пружини претставен на сл. 4.5 секоја пружина има иста константа на еластичност k = 10 N/m. Кога на овој систем ќе се прикачи тег со тежина 100 N, системот се издолжува за 10 cm. Колкав е бројот на пружини во овој систем?



Сл. 4.5

Решение:

Еластичната сила е дадена со равенката:

$$F = k\cdot\Delta x \,.$$

За еден пар сериски врзани пружини:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 ,$$

$$\frac{F}{k_0} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} .$$

За паралелно врзани 2 пружини:

$$F_p = F_1 + F_2 ,$$

$$k_p \Delta x = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x ,$$

$$k_p = k_1 + k_2 .$$

Оттука:

$$k_1 = k_2 = \dots k_n \Rightarrow k_s' = \frac{k^2}{2k} = \frac{k}{2} .$$

За систем од n паралелно врзани пружини, со коефициент на еластичност k_s', секоја од нив има коефициент на еластичност:

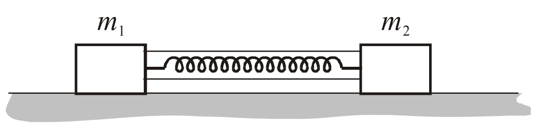
$$k_p' = n\frac{k}{2} ,$$

$$F = k_p' \Delta x = n\frac{k}{2}\Delta x ,$$

$$n = \frac{2F}{k\,\Delta x} \;\Rightarrow\; n = 200 ,$$

$$n' = 2n = 400 .$$

Задача 4.6. Два тега со маси m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$), врзани со пружина, лежат на идеално глатка подлога. Коефициентот на еластичност на пружината е k. Пружината е собрана со два конца како на сл. 4.6.1. Да се најде периодот на осцилирање на телата кога конците ќе се скинат.



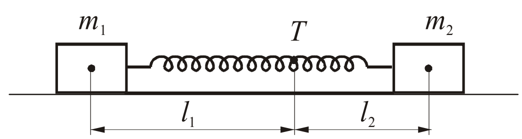
Сл. 4.6.1

Решение:

Од законот за запазување на импулсот кога пружината е во недеформирана (сл.4.6.2) положба следува:

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \quad , \qquad (1)$$

каде што l_1 и l_2 се растојанијата од тежиштето на теговите до тежиштето на целиот систем соодветно.



Сл. 4.6.2

Кога пружината е во деформирана положба (збиена) (сл.4.6.3), тогаш законот за запазување на количеството движење гласи:

$$m_1 (l_1 - x_1) = m_2 (l_2 - x_2)\,, \tag{2}$$

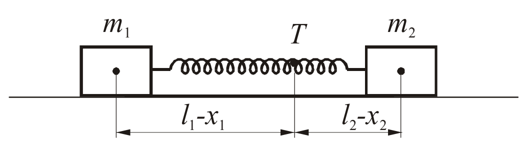
при што еластичната сила ќе биде:

$$F = k(x_1 + x_2)\,. \tag{3}$$

Од равенките (2) и (3) следува:

$$F = k\,x_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

$$F = k\,\frac{m_1 + m_2}{m_2}\,x_1\,.$$



Сл. 4.6.3

Ако оваа равенка се спореди со равенката од дефиницијата за еластична сила:

$$F = k_1 x_1\,,$$

следува дека коефициентот на еластичност на овој систем ќе биде:

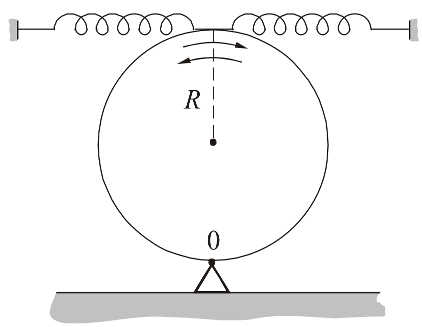
$$k_1 = k\,\frac{m_1 + m_2}{m_2}\,.$$

Тогаш периодот на осцилирање на системот може да се определи како:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k\,(m_1 + m_2)}}\;.$$

Истиот резултат се добива ако анализата се спроведе во однос на телото со маса m_2.

Задача 4.7. Тенок хомоген диск со маса m = 2 kg (сл. 4.7.1) осцилира под дејство на две еднакви пружини со константа на еластичност k = 37,5 N/m. Колкав е периодот на малите осцилации на овој систем, ако дискот осцилира во хоризонтална рамнина?



Сл. 4.7.1

Решение:

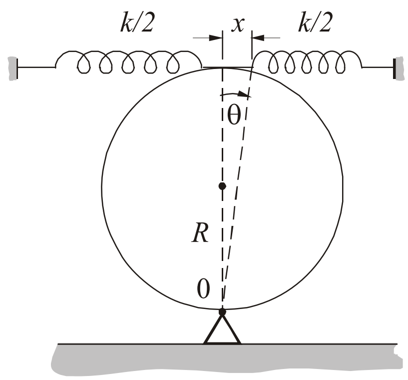
Ако системот се изведе од рамнотежна положба за некое мало растојание x (сл. 4.7.2), на дискот ќе почнат да дејствуваат еластичните сили на пружините $F_e = -\frac{k}{2}x$, кои се стремат да го вратат во рамнотежната положба.

Според II Њутнов закон добиваме:

$$M = I\alpha = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,,$$

каде што M е момент на еластични сили во однос на оската 0:

$$M = \frac{k}{2}x \cdot 2R + \frac{k}{2}x \cdot 2R.$$



Сл. 4.7.2

Од сл. 4.7.2 може да се определи x како $x = 2R\mathrm{tg}\theta$ и при тоа да се направи апроксимација за мали агли $\mathrm{tg}\theta \approx \theta$.

За моментот се добива:

$$M = k2R\theta \cdot 2R = 4R^2 k\theta ,$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + M = 0 .$$

Инерцијалниот момент на дискот се определува според Штајнеровата теорема:

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 ,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4R^2k}{\frac{3}{2}mR^2}\theta = 0 ,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{8k}{3m}\theta = 0 .$$

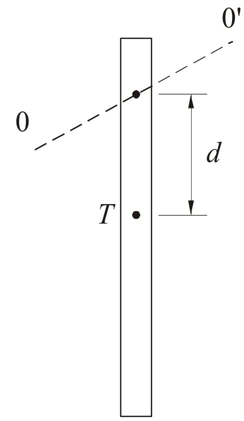
Диференцијалната равенка го опишува осцилирањето на дискот, при што кружната фреквенција на осцилирање е:

$$\omega^2 = \frac{8k}{3m} ,$$

од што се определува периодот на осцилирање на дискот:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{8k}}\ ,$$
$$T = 0{,}9\ s\ .$$

Задача 4.8. Физичко нишало во форма на прачка има должина l = 1 m и осцилира околу хоризонтална оска, нормална на главната оска на прачката (сл. 4.8). За кое растојание од тежиштето до оската на осцилирање периодот на осцилирање ќе биде минимален?



Сл. 4.8

Решение:

Периодот на осцилирање на физичко нишало во форма на прачка е:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\ , \qquad (1)$$

каде што инерцијалниот момент на прачката во однос на оската OO' е:

$$I = I_0 + md^2 = \frac{ml^2}{12} + md^2\ . \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) се добива:

$$I = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 12d^2}{12\,gd}}\ .$$

Од условот за минимум $\frac{dI}{dd} = 0$ за растојанието од оската до тежиштето се добива:

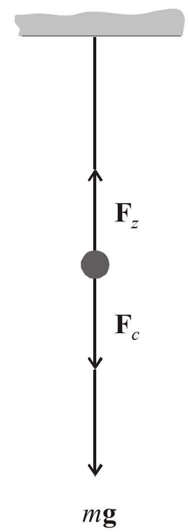
$$d = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 0{,}28\ \text{m}\ .$$

Задача 4.9. Математичко нишало (сл. 4.9) со маса m = 100 g и должина l = 1 m осцилира по законот $\theta = 0{,}25\sin\omega t$, каде што θ е агол меѓу конецот на нишалото и вертикалата. Да се најде силата на затегнување на конецот во моментот $t = \frac{T}{2}$. За осцилациите да бидат хармониски, аголот θ кај математичкото нишало треба да биде помал од 7 $^{\circ}$.

Решение:

Кружната фреквенција за математичкото нишало е:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\ .$$



Сл. 4.9

За време $t = \frac{T}{2}\ \Rightarrow\ \theta = 0{,}25\sin\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} = 0$.

$$\omega_c = \frac{d\theta}{dt} = 0{,}25\,\omega\cos\omega t\ .$$

За време $t = \frac{T}{2}$ аголната брзина е:

$$\omega_c = \frac{d\theta}{dt} = 0{,}25\omega\cos\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} = -0{,}25\omega\ .$$

Во моментот $t = T/2$ центрифугалната сила што дејствува на нишалото е:

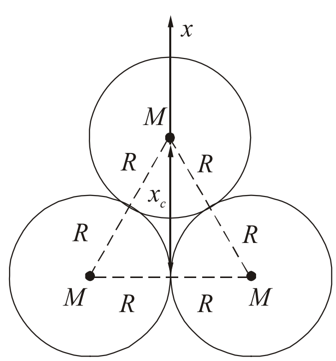
$$F_c = m\omega_c^2 l\ .$$

$$F_z = mg + m\omega_c^2 l\ ,$$

$$F_z = mg + m(\frac{d\theta}{dt})^2 l = mg + m0{,}25^2\cdot\omega^2 l\ ,$$

$$F_z = mg + m0{,}25^2\,\frac{g}{l}\,l = mg\,(1 + 0{,}25^2)\ .$$

Задача 4.10. Топка и два диска, сите со маси M и радиуси R, осцилираат околу центарот на топката (сл. 4.10.1). Да се определи периодот на осцилирање на системот.

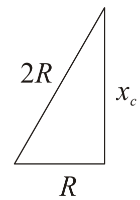


Сл. 4.10.1

Решение:

Системот од сл. 4.10.2 претставува физичко нишало со период на осцилирање:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}}\,,$$



Сл. 4.10.2

каде што $m = 3M$.

Вкупниот момент на инерција на системот е:

$$I = I_T + 2I_D\,,$$

$$I_T = \frac{2}{5}MR^2\,.$$

Моментот на инерција на дискот според Штајнеровата теорема е:

$$I_D = \frac{MR^2}{2} + M\,(2R)^2\,,$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2 + 2\left(\frac{MR^2}{2} + 4MR^2\right) = \frac{47}{5}MR^2\,.$$

Растојанието s од тежиштето на системот до оската на осцилирање може да се пресмета со релација за центар на маса:

$$s = \frac{MR + 2MR\sqrt{3}}{3M} = \frac{1+2\sqrt{3}}{3}R\,.$$

Растојанието на тежиштето x_c на двата диска од оската на осцилирање се добива од сл. 4.10.2:

$$x_c^2 = (2R)^2 - R^2,\ \text{каде што}\ x_c = R\sqrt{3}.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{47}{5}MR^2}{3M\,g\cdot\frac{1+2\sqrt{3}}{3}R}} = 2\pi\sqrt{\frac{47}{5+10\sqrt{3}}\cdot\frac{R}{g}}\,.$$

Задача 4.11. Колкав е периодот на осцилирање на нишало кое се состои од тенок конец со должина l и топка со радиус R закачена на неговиот крај, доколку тоа се разгледува како: а) математичко; б) физичко. Колкава е релативната грешка меѓу овие два случаја ако $R = l/20$.

Решение:

а) Ако се занемарат димензиите на топката сметајќи дека целата маса е сконцентрирана во нејзиното тежиште, периодот на математичкото нишало е:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

б) Периодот на физичкото нишало е:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\,x_c}}\ ,$$

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + m(l+R)^2\ ,$$

$$x_c = l + R\ .$$

Со замена на претходната равенка во релацијата за периодот T_2 се добива:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2R^2 + 5(l+R)^2}{5g(l+R)}}\ .$$

За да се најде релативната грешка, прво треба да се пресмета периодот T_2 во случај кога R е еднакво на $l/20$:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{441{,}4}{420}\frac{l}{g}}\ ,$$

$$T_2 = T_1\sqrt{\frac{441{,}4}{420}}\ .$$

За релативната грешка се добива:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 2{,}4\%\ .$$

Задача 4.12. Извор на звучни бранови со фреквенција ν_0 = 1700 Hz и приемник се наоѓаат во иста точка. Во моментот t = 0 изворот почнува да се оддалечува со постојано забрзување a = 10 m/s^2. Сметајќи дека брзината на звукот е 340 m/s, да се најде фреквенцијата на осцилациите што ги прима неподвижниот приемник во моментот t = 10 s.

Решение:

Вкупното време на движење е дадено со:

$$t = t_1 + t_2 ,$$

каде што t_1 е времето за кое изворот ќе помине пат s, а t_2 е времето за кое звукот се враќа во P.

Брзината на изворот е:

$$v = at_1 ,$$

а патот што изворот ќе го помине:

$$s = \frac{at_1^2}{2} ,$$

$$ct_2 = \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{at_1^2}{2c} ,$$

каде што c е брзината на звукот.

$$t = t_1 + \frac{at_1^2}{2c} ,$$

$$2ct - 2t_1c - at_1^2 = 0 ,$$

$$t_1^2 + \frac{2c}{a}t_1 - \frac{2c}{a}t = 0 ,$$

$$t_{1(1/2)} = -\frac{c}{a} \pm \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - \frac{2c}{a}t} ,$$

$$t_1 = 8{,}85\text{s} .$$

$$v = at_1 ,$$
$$v = 88{,}5 \text{ m/s}.$$

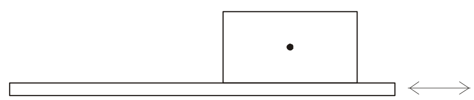
Според Доплеровиот ефект фреквенцијата на звукот кога изворот и приемникот се движат е дадена со:

$$\nu = \nu_0 \frac{c \pm v_p}{c \mp v_i} .$$

Ако брзината на приемникот е $v_p = 0$ и изворот се оддалечува, фреквенцијата може да се определи како:

$$\nu = \nu_0 \frac{c}{c + v_i} = 1348{,}89\,\mathrm{Hz}\,.$$

Задача 4.13. Хоризонтална штица врши хармониски осцилации со амплитуда $x_0 = 2$ cm во хоризонатлна рамнина (сл. 4.13). На штицата е поставено тело. Колкав е коефициентот на триење меѓу штицата и телото ако телото почнува да се лизга по штицата кога фреквенцијата на осцилирање изнесува $\nu = 3$ Hz.



Сл. 4.13

Решение:

Штицата осцилира по законот:

$$x = x_0 \sin \omega\, t\,,$$

$$a = -x_0 \omega^2 \sin \omega\, t\,.$$

Максималното забрзување на штицата е:

$$a = x_0 \omega^2 = x_0\, 4\pi^2 \nu^2\,.$$

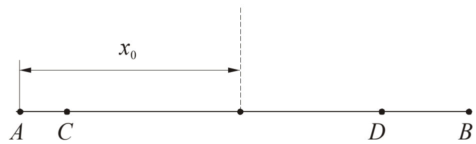
Како резултат на хармониското осцилаторно движење што го врши штицата, на телото дејствува инерцијална сила $F_i = ma_{\max}$, која го придвижува. За да настане движење, т.е. лизгање на телото по штицата, треба да е задоволен условот:

$$F_{tr} \le F_i\,,$$

$$\mu m g \le m a_{\max} = m x_0\, 4\pi^2 \nu^2 \;\Rightarrow$$

$$\mu \le \frac{x_0\, 4\pi^2 \nu^2}{g} = 0{,}72\,.$$

Задача 4.14. Честичка, која може хармонски да осцилира во некоја реална еластична средина, се изведува од рамнотежна положба за $x_0 =$ 2 cm и се пушта слободно да осцилира (сл. 4.14). Колкав пат ќе помине оваа честичка додека да застане, ако логаритамскиот декремент на придушените осцилации е $\delta = 4\cdot 10^{-3}$?



Сл. 4.14

Решение:

Равенката на движење на честичката која осцилира придушено е:

$$x = x_0 e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi) .$$

Во овој случај $\varphi = \pi/2$ rad $\Rightarrow$

$$x = x_0 e^{-bt} \cos \omega t .$$

Во точката A: $x_A = x_0$.

Во точката B: $x_B = x_0 e^{-bT/2} \cos(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}) = -x_0 e^{-\delta/2}$.

Знакот минус пред x_0 не се зема предвид поради физичкото третирање на проблемот.

$$S_{AB} = x_A + x_B ,$$

$$S_{AB} = x_0 + x_0 e^{-\delta/2} = x_0 (1 + e^{-\delta/2}) .$$

Во точката C:

$$x_C = x_0 e^{-bT} \cos\frac{2\pi}{T} \cdot T = x_0 e^{-\delta} ,$$

$$S_{BC} = x_B + x_C = x_0 e^{-\delta/2} + x_0 e^{-\delta} = x_0 e^{-\delta/2} (1 + e^{-\delta/2}) .$$

Во точката D:

$$x_D = x_0 e^{-b3T/2} \cos\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{2} = x_0 e^{-\frac{3}{2}\delta} \cos(3\pi) = x_0 e^{-\frac{3}{2}\delta} ,$$

$$S_{CD} = x_C + x_D = x_0 e^{-\delta} + x_0 e^{-\frac{3}{2}\delta} = x_0 e^{-\delta} (1 + e^{-\delta/2}) .$$

Вкупниот пат може да се пресмета како:

$$S = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + ... ,$$

$$S = S_{AB}[1 + e^{-\delta/2} + e^{-\delta} + ...] = S_{AB}[1 + e^{-\delta/2} + (e^{-\delta/2})^2 + ...] ,$$

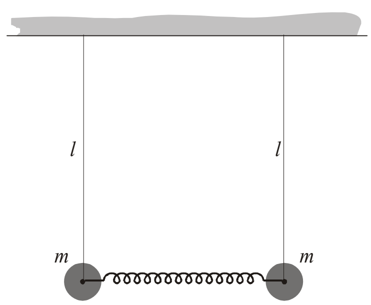
$$q = e^{-\delta/2} ,$$

$$S = \frac{S_{AB}}{1-q} = x_0 \frac{1+e^{-\delta/2}}{1-e^{-\delta/2}} = 20 \text{ m}.$$

Задача 4.15. Две математички нишала со должина l се споени преку лесна пружина со коефициент на еластичност k (сл.4.15.1). Да се најде фреквенцијата на малите осцилации на овој систем ако нишалата се отклонат од рамнотежната положба за ист агол:

а) во иста насока;

б) во спротивни насоки.



Сл. 4.15.1

Решение:

а) Кога нишалата осцилираат во иста насока, се однесуваат исто како едно математичко нишало:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} .$$

б) Кога осцилираат во спротивни насоки, на секое нишало дејствува дополнително и еластичната сила F_e, т.е. резултантната сила F ќе биде сума од компонентите на нивната тежина и еластичната сила (сл. 4.15.2):

$$F = mg\sin\varphi + F_e\cos\varphi$$

$$F_e = 2kx = 2kl\sin\varphi ,$$

$$F = mg\sin\varphi + 2kl\sin\varphi\cos\varphi ,$$

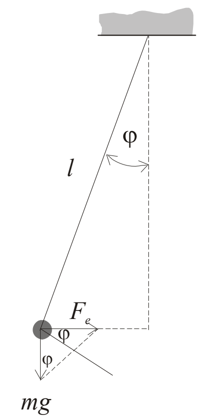
за мали агли $\cos\varphi \approx 1 \Rightarrow$

$$F = (mg + 2kl)\sin\varphi ,$$

$$F = m(g + \frac{2kl}{m})\sin\varphi = mg'\sin\varphi ,$$

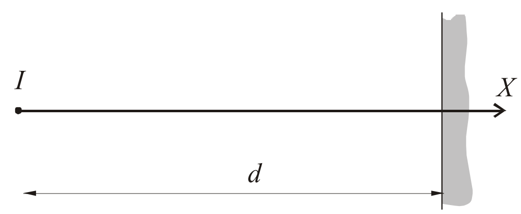
па затоа фреквенцијата ν_2 ќе биде:

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g'}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg + 2kl}{ml}} .$$



Сл. 4.15.2

Задача 4.16. Извор на рамни бранови со ν = 440 Hz се наоѓа на растојание d = 4 m од карпа, нормална на правецот на ширење на брановите (сл. 4.16.1). Да се определи растојанието од изворот до точките во кои се наоѓаат првите 3 јазли и 3 мева на стојните бранови, кои се формираат како резултат на сложување на бранот што се шири од изворот и рефлектираниот бран од карпата.

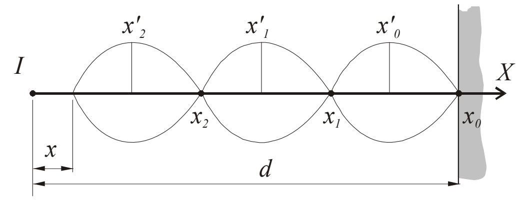


Сл. 4.16.1

Решение:

Бранот се шири во насока на оската x. Равенката на прогресивниот бран е:

$$u_1 = u_0 \sin(\omega t - kx) .$$



Сл. 4.16.2

По рефлексија од карпата (сл. 4.16.2), како средина со поголема густина, бранот ја променува фазата за π и поминува пат $d-x$, па равенката на рефлектираниот бран може да се напише во облик:

$$u_2 = u_0 \sin\{\omega t - k[x + 2(d - x)] + \pi\} = -u_0 \sin\{\omega t - k[x + 2(d - x)]\} =$$
$$= -u_0 \sin[\omega t - k(2d - x)].$$

Равенката на добиениот стоен бран, користејќи ја тригонометриската релација $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, ќе биде:

$$u = u_1 + u_2 = u_0 \sin(\omega t - kx) - u_0 \sin[\omega t - k(2d - x)] =$$
$$= 2u_0 \cos(\omega t - kd)\sin[k(d - x)].$$

Бидејќи изразот $2u_0 \sin k(d - x)$ не зависи од времето, може да се смета како амплитуда на стојните бранови.

Координатите на јазлите ќе ги најдеме од условот амплитудата во тие точки да е еднаква на нула:

$$2u_0 \sin k(d - x) = 0 .$$

Тоа ќе биде исполнето ако:

$$k(d - x) = n\pi, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi\nu}{c},$$
$$2\pi\nu(d - x_n) = nc\pi, \qquad x_n = d - \frac{nc}{2\nu},$$
$$x_0 = 4 \text{ m}, x_1 = 3{,}61 \text{ m}, x_2 = 3{,}23 \text{ m}.$$

Координатите на мевовите се добиваат од условот амплитудата во тие точки да биде минимална:

$$2u_0 \sin k(d - x) = 2u_0 ,$$

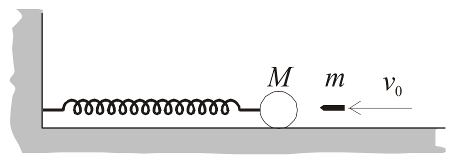
$$\sin k(d - x) = \pm 1,$$

$$k(d - x_n') = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \qquad (n = 0, 1, 2, 3.....).$$

$$x'_n = d - (2n+1)\frac{c}{4\nu}\,.$$

$$x'_0 = 3{,}81\ \text{m},\ x'_1 = 3{,}42\ \text{m},\ x'_2 = 3{,}04\ \text{m}.$$

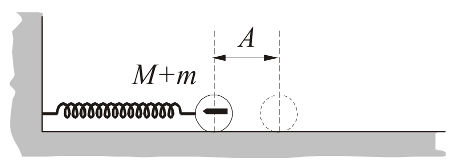
Задача 4.17. На рамна хоризонтална површина (сл. 4.17.1) лежи топка со маса m = 5 kg, прицврстена на пружина со коефициент на еластичност k = 10 N/m. Во топката удира куршум со маса m = 10 g и брзина v_0 = 200 m/s вдолж оската на пружината. Сметајќи го судирот апсолутно нееластичен, да се определат амплитудата и периодот на осцилациите на топката. Отпорот на воздухот и масата на пружината да се занемарат.



Сл. 4.17.1

Решение:

Во моментот на судирот куршумот на топката и предава кинетичка енергија, поради што таа почнува да ја собира пружината сѐ додека кинетичката енергија не се претвори во потенцијална енергија на еластично деформираната пружина, при што оддалеченоста на топката од рамнотежната положба е максимална, т.е. A (сл. 4.17.2).



Сл. 4.17.2

Во почетокот на движењето енергијата на системот E_1 ќе биде:

$$E_1 = E_T + E_K + E_{pr}\,,$$

при што:

$$E_{pr} = 0\,;\ \ E_1 = E_T + E_K\,,$$

или

$$E_1 = \frac{(m+M)v_1^2}{2},$$

каде што v_1 е почетна брзина на топката со куршумот.

Кога пружината е максимално собрана, кинетичката енергија е еднаква на потенцијалната енергија на пружината:

$$E_2 = \frac{kA^2}{2}.$$

Од законот за запазување на енергијата следува:

$$E_1 = E_2,$$

$$\frac{(m+M)v_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \qquad (1)$$

каде што v_1 се определува од законот за запазување на импулсот:

$$mv_0 = (m+M)v_1,$$

$$v_1 = \frac{mv_0}{m+M}. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) за A се добива:

$$A = mv_0\sqrt{\frac{1}{k(m+M)}} = 0{,}28.$$

Топката со куршумот ќе осцилира под дејство на повратната сила на еластичност:

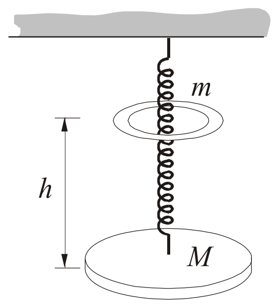
$$F = -kx = -(m+M)\omega^2 x,$$

или

$$k = (m+M)\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}(m+M),$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} = 4{,}45 \text{ s}.$$

Задача 4.18. Диск со маса M е закачен на пружина со коефициент на еластичност k. Ако врз дискот падне прстен со маса m од висина h, при што судирот е апсолутно нееластичен, дискот и прстенот почнуваат да осцилираат хармониски. Да се определи амплитудата на тие осцилации. Масата на пружината да се занемари.



Сл. 4.18

Решение:

Кога прстенот од висина h паѓа слободно, удира со брзина v:

$$v = \sqrt{2gh}\ .$$

Бидејќи судирот е апсолутно нееластичен, прстенот останува на дискот и тие во почетниот момент имаат брзина v_1, која може да се определи од законот за запазување на импулсот:

$$mv = (m+M)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m\sqrt{2gh}}{(m+M)}. \quad (1)$$

Пред паѓањето на прстенот пружината под дејство на тежината на дискот Mg е растегната до положба x_0, па таа се јавува како почетна положба на осцилаторниот систем. По паѓањето на прстенот системот врши хармониски осцилации во однос на рамнотежната положба x, така што:

$$kx_0 = Mg\ ;\ \ kx = (m+M)g\ . \quad (2)$$

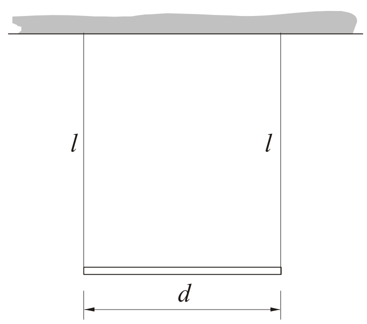
Системот диск–прстен ќе ја растегнува пружината сè додека неговата вкупна енергија не помине во потенцијална енергија на еластично деформирана пружина. Според тоа законот за запазување на енергија ќе гласи:

$$\frac{(M+m)v_1^2}{2} + \frac{k(x-x_0)^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \quad (3)$$

Определувајќи ги v_1, x_0 и x од равенките (1) и (2) за амплитудата од законот за запазување на енергијата, се добива:

$$A = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 gh}{k(M+m)}}\ .$$

Задача 4.19. Хомогена прачка (сл. 4.19.1) со должина d е обесена на два паралелни конца со должина l = 2 m. Да се определи периодот на осцилациите ако прачката се заврти за мал агол φ околу вертикалната оска која што поминува низ тежиштето на прачката.



Сл. 4.19.1

Решение:

При завртување на прачката за мал агол околу вертикалната оска (сл. 4.19.2) се создава вртлив момент од хоризонталните компоненти на силите на затегнување: $F_1 = F_Z \sin\alpha$. Тело кое може да осцилира врз основа на спрегата настаната поради торзија се вика торзионо нишало. Спрегата е дадена со:

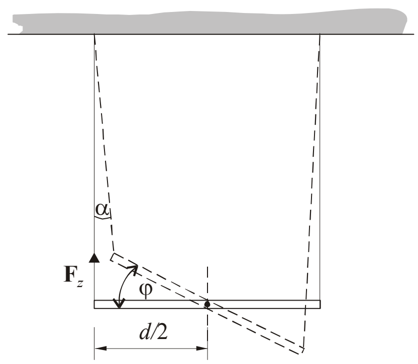
$$M = 2M_1 = 2F_1 \frac{d}{2} = 2F_z \sin\alpha \frac{d}{2}.$$

Вертикалните компоненти на двете сили на затегнување се урамнотежени со тежината на прачката:

$$2F_z \cos\alpha = mg\ .$$

Аголот на отклонување на конците α од вертикалата со аголот φ е поврзан со релацијата:

$$\alpha\, l = \varphi \frac{d}{2}\ .$$



Сл. 4.19.2

Бидејќи аголот φ е многу мал, следува дека и аголот α е многу мал, затоа може да се замени:

$$\sin\alpha \approx \alpha; \qquad \cos\alpha \approx 1,$$

$$M = 2F_z\frac{d}{2}\alpha = 2F_z\frac{d^2}{4l}\varphi,$$

$$2F_z = mg,$$

$$M = mg\frac{d^2}{4l}\varphi.$$

Периодот на торзиното нишало е:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{J\varphi}{M}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}},$$

$$J = \frac{md^2}{12},$$

$$T = 1{,}6\ \mathrm{s}.$$

5. Хидромеханика

Задача 5.1. Масивно хомогено тело во форма на коцка плива во вода ($\rho_0 = 10^3$ kg/m^3) така што под вода се наоѓа 3/4 од неговиот волумен. Ако со тенок конец се врзе центарот на горната површина на коцката за едниот крај на двокрак лост со должина l_1 = 8 cm и се урамнотежи со тег со маса m_1 = 32 g кој е прицврстен на другиот крак од лостот со должина l_2 = 4 cm, тогаш само 2/3 од волуменот на коцката ќе бидат потопени во вода. Да се најде густината на телото и колкава е страната на коцката.

Решение:

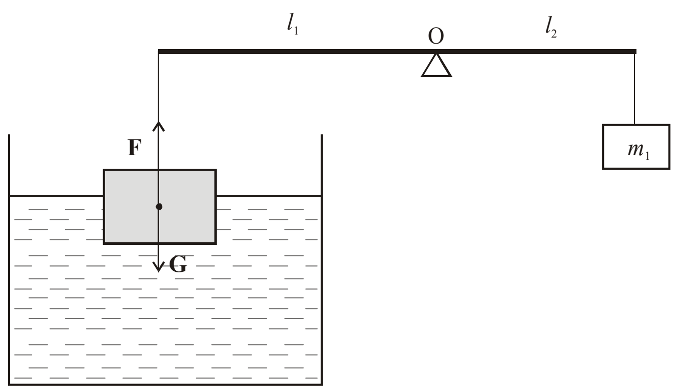
Во почетокот, кога коцката слободно плива во водата (сл. 5.1), задоволен е условот за рамнотежа на нејзината тежина со Архимедовата потисна сила.

$$G = F'_A ,$$

$$mg = \rho_0 V' g ,$$

$$\rho \cdot V \cdot g = \rho_0 \cdot \frac{3}{4} V \cdot g ,$$

$$\rho = \frac{3}{4} \rho_0 . \qquad (1)$$



Сл. 5.1

Во вториот случај, кога коцката е поврзана преку лостот со тегот m_1 постои статичка рамнотежа, т.е. треба да е задоволен условот за еднаквост на моментите на сили кои дејствуваат од двете страни на оската O. Во овој случај потисната сила F_A, што дејствува на коцката, е помала од силата на тежината G, така што моментот на сила се определува преку нивната разлика:

$$(G - F_A) \cdot l_1 = m_1 g \cdot l_2 \,,$$

$$(\rho \cdot V\, g - \rho_0 \frac{2}{3} V\, g) \cdot l_1 = m_1 g \cdot l_2 \,.$$

Густината ρ од равенката (1) се заменува во овој израз и се решава по a, за да се најде страната на коцката.

$$\left(\frac{3}{4}\rho_0 \cdot a^3 - \frac{2}{3}\rho_0 \cdot a^3\right) l_1 = m_1 l_2 \,,$$

$$\frac{1}{12}\rho_0 \cdot a^3 l_1 = m_1 l_2 \,,$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{12\, m_1 l_2}{\rho_0 l_1}} \,,$$

$$a = 5{,}77 \text{ cm} \,.$$

Задача 5.2. Тенка хомогена прачка со густина ρ = 850 kg/m^3 со едниот крај е прицврстена на ѕидот на садот, а со другиот крај е потопена во вода, како што е прикажано на сл. 5.2. Прачката може слободно да ротира во вертикална рамнина околу точката A, која се наоѓа над нивото на водата. Да се пресмета колкав дел од должината на прачката се наоѓа над нивото на водата. (ρ_0 = 10^3 kg/m^3).

Решение:

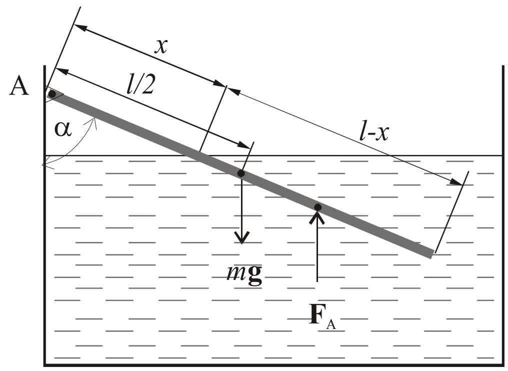
Прачката, чиј еден дел е потопен во вода, се наоѓа во статичка рамнотежа, т.е. сите моменти на сила кои дејствуваат на неа се урамнотежени, па може да се напише:

$$\sum_i \mathbf{M}_i = 0 \,.$$

Бидејќи силата на тежина дејствува секогаш во центарот на маса на прачката, проекцијата на нејзиното растојание до потпорната точка е $\frac{l}{2}\sin\alpha$.

Архимедовата потисна сила дејствува на оној дел од прачката што е потопен во водата, точно во неговата средина, па соодветното растојание на оваа сила до потпорната точка A може да се определи како:

$$\frac{l-x}{2}+x=\frac{l+x}{2}.$$



Сл. 5.2

Заменувајќи во равенката за моменти на сила добиваме:

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha=F_A\frac{l+x}{2}\sin\alpha\,. \qquad (1)$$

Тежината и Архимедовата потисна сила можеме да ги изразиме вака:

$$mg=\rho Vg\text{ , т.е. } mg=\rho Slg\,,$$

каде што S е напречниот пресек на прачката.

$$F_A=\rho_0 V_0 g\text{ , т.е. } F_A=\rho_0 S(l-x)\,g\,.$$

Со замена во (1) и соодветно математичко изразување на односот $\frac{x}{l}$ што треба да се најде во задачата, се добива:

$$\rho slg\frac{l}{2}=\rho_0 S(l-x)\,g\frac{l+x}{2}\,,$$

$$\frac{x}{l}=\sqrt{1-\frac{\rho}{\rho_0}}\,,$$

$$\frac{x}{l}=0{,}387\,.$$

Задача 5.3. Цилиндричен сад со висина h и површина на напречниот пресек S е наполнет до врвот со вода. На дното има отвор со површина $S_0 \ll S$. Занемарувајќи ја вискозноста на водата и контракцијата на млазот, да се определи:

а) колку време е потребно целата вода да истече од садот,

б) за колку време би истекло истото количество вода ако нивото на водата во садот се одржува на постојана висина h со дотурање вода.

Решение:

Бернулиевата равенка за напречните пресеци 1 и 2 низ кои поминува водата во однос на дното на садот (сл. 5.3) е:

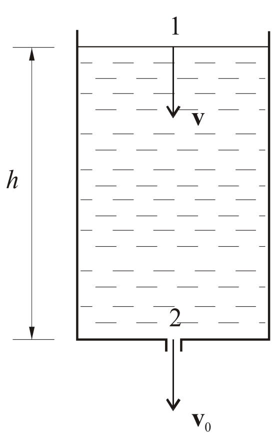
$$p_a + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = p_a + \rho \frac{v_0^2}{2}, \qquad (1)$$

додека пак волуменскиот проток на водата Q може да се напише како:

$$Q = Sv = S_0 v_0. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) следува дека брзината со која се спушта нивото во садот е:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{S^2}{S_0^2} - 1}}. \qquad (3)$$



Сл. 5.3

а) Времето за кое ќе истече целата вода од садот ќе се пресмета како:

$$t = \int_o^h \frac{dh}{v},$$

т.е. $$t = \sqrt{\frac{S^2}{S_0^2} - 1} \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{2gh}},$$

$$t = \sqrt{\frac{S^2}{S_0^2} - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

кога $S >> S_0$, следува $\sqrt{\frac{S^2}{S_0^2} - 1} \to \frac{S}{S_0}$, па за времето t се добива:

$$t = \frac{S}{S_0}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{4}$$

б) Кога во садот се дотура вода, брзината со која се спушта нивото на течноста е константна:

$$v = \frac{h}{t_0}, \tag{5}$$

каде што t_0 е времето потребно најгорното ниво на течност во садот да помине пат h:

$$t_0 = \frac{h}{\sqrt{\dfrac{2gh}{\dfrac{S^2}{S_0^2} - 1}}} = \frac{S}{S_0}\sqrt{\frac{h}{2g}}. \tag{6}$$

Ако се споредат равенките (4) и (6), се добива:

$$\frac{t}{t_0} = 2,$$

што значи дека во вториот случај водата од садот ќе истече два пати побргу.

Задача 5.4. Шуплива топка со внатрешен радиус r_1 = 9 cm и надворешен r_2 = 10 cm плива во течност со густина ρ_0 = 800 kg/m^3, при што половина од топката се наоѓа над површината на водата.

а) Колкава е густината ρ на материјалот од кој е изработена топката?

б) Колкава треба да биде густината ρ_1 на течноста за топката да плива во неа?

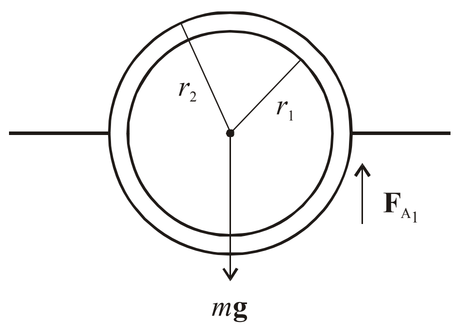
Решение:

а) Во рамнотежа силата на потисокот $\mathbf{F}_{A_1}$ е еднаква со тежината на топката:

$$mg = F_{A_1}\ , \text{ т.е., } \rho V g = \rho_0 g \frac{V_0}{2}\ ,$$

каде што:

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(r_2^3 - r_1^3)\ , \text{ додека, } V_0 = \frac{4}{3} r_2^3 \pi\ .$$



Сл. 5.4

За густината ρ на материјалот од кој е изработена топката се добива:

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}\frac{1}{1-\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^3} = 1476\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\ .$$

б) Кога топката плива во течност со густина ρ_1, Архимедовиот закон гласи:

$$mg = F_{A_2}\text{, т.е., } \rho V g = \rho_1 g V_0\,,$$

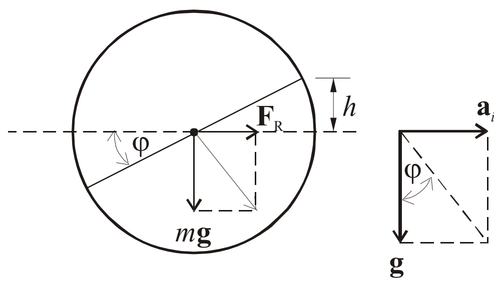
од каде за густината ρ_1 се добива:

$$\rho_1 = \rho\frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{2} = 400\,\mathrm{kg/m^3}\,.$$

Задача 5.5. Цистерна со дијаметар D = 2 m е наполнета до половина со вода. На цистерната се наоѓа отвор на висина h = D/4 од нивото на водата. Со која максимална брзина може да се движи цистерната по кривина со радиус R за водата да не истече од цистерната.

Решение:

Во моментот кога цистерната влегува во кривината со радиус R, на водата во неа дејствува реакциска сила на центрифугалната сила што се јавува како резултат на кружното движење на цистерната.



Сл. 5.5

Од дијаграмот на забрзувањата (сл. 5.5) може да се определи:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a_c}{g} = \frac{v^2}{g\,R}\,. \tag{1}$$

Аголот φ исто така може да се одреди како:

$$\sin\varphi = \frac{h}{R} = \frac{1}{2}\,. \tag{2}$$

Од равенките (1) и (2) следува дека максимална брзина со која може да се движи цистерната е:

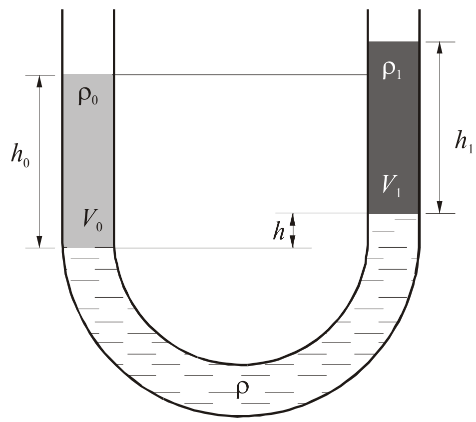
$$v^2 = \frac{gR}{\sqrt{3}} = 5{,}66\,\mathrm{m/s}\,.$$

Задача 5.6. Во U-цевка (сл. 5.6) со пресек S = 100 cm^2, во која се наоѓа глицерин со густина ρ = 1250 kg/m^3, се долева во едниот крак еден литар вода, а во другиот m_1 = 0,5 kg алкохол со густина ρ_1 = 800 kg/m^3. Да се одреди висинската разлика меѓу течностите во двата крака на цевката.
Решение:

$$V_0 = S \cdot h_0 ,$$

$$h_0 = \frac{V_0}{S} = 10\,\text{cm} ,$$

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{m_1}{\rho_1 S} = 6{,}25\,\text{cm} .$$



Сл. 5.6

Од рамнотежата на притисоците во двата крака следува:

$$\rho_0 g h_0 = \rho g h + \rho_1 g h_1 .$$

$$h = \frac{\rho_0 \dfrac{V_0}{S} - \rho_1 \dfrac{m_1}{\rho_1 S}}{\rho} = \frac{\rho_0 V_0 - m_1}{\rho \cdot S} = 4\,\text{cm}.$$

$$\Delta h = h_1 + h - h_0 = 0{,}25\ \text{cm}.$$

Задача 5.7. На хоризонтална подлога се наоѓа сад со вода. Висината на водата во садот е h, а масата на садот заедно со водата е M. На едната страна од садот близу до дното се наоѓа отвор со напречен пресек S, кој е многу помал од напречниот пресек на садот. При која вредност на коефициентот на триење меѓу подлогата и садот, садот ќе се придвижи?

Решение:

Брзината со која истекува течноста од садот на сл. 5.7 низ отворот е:

$$v = \sqrt{2gh}\ .$$

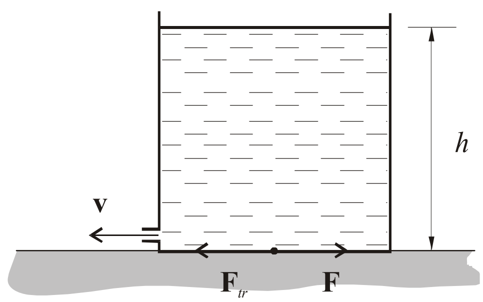
Промената на импулсот на елементарно количество течност со маса Δm што протекува низ цевката за време Δt е еднаква со импулсот на силата F:

$$\Delta mv = F\ \Delta t,$$

или

$$\rho \Delta V v = F \Delta t\ ,$$

каде што ρ е густина на водата, а ΔV е волуменот на течноста што за време Δt истекува од отворот.



Сл. 5.7

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} v = F\ .$$

Силата со која водата ќе го движи садот е:

$$F = \rho Q v\ ,$$

$$Q = Sv \quad \Rightarrow \quad F = \rho S v^2\ .$$

За да се придвижи садот, силата F треба да биде поголема од силата на триење помеѓу садот и подлогата:

$$F \geq \mu Mg\ ,$$

$$\mu \leq \frac{F}{Mg} = \frac{\rho S v^2}{Mg} = \frac{2\rho Sgh}{Mg} .$$

Задача 5.8. Вода струи во U-цевка со напречен пресек $S = 2 \cdot 10^{-4}$ m^2 со брзина $v = 3$ m/s. Колкава треба да биде минималната вредност на силата F за цевката да не се движи во спротивен правец од дејството на силата F ? Густината на водата е $\rho = 10^3$ kg/m^3.

Решение:

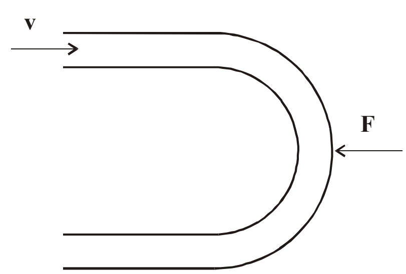
Промената на импулсот на елементарно количество течност со маса Δm што протекува низ цевката за време Δt е еднаква со импулсот на силата F:

$$2\Delta m v = F\,\Delta t ,$$

или

$$2 \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot v = F \cdot \Delta t ,$$

каде што ρ е густина на водата, а ΔV е волуменот на течноста што за време Δt протекува низ цевката.



Сл. 5.8

$$2 \cdot \rho \cdot Q v = F ,$$

а бидејќи $\frac{\Delta V}{\Delta t} = Q = Sv$, за силата се добива:

$$F = 2\,\rho \cdot S \cdot v^2 ,$$

$$F = 3{,}6\,\mathrm{N} .$$

6. Топлина

Задача 6.1. Железнички шини со должина l_1 = 25 m имаат на краевите плочи за составување со површина S = 80 cm^2. При составувањето меѓу плочите е оставен простор од Δl = 10 mm на температура t_1 = 20°C.

а) На која температура плочите ќе се допрат?

б) Ако температурата се зголеми за уште 20°C, колкава е силата на термичкото напрегање меѓу плочите ако коефициентот на линеарно ширење на материјалот од кој се направени шините е $\alpha = 10^{-5}$ °C^{-1}, а Јунговиот модул на еластичност $E_y = 2 \cdot 10^8$ Nm^{-2}.

Решение:

а) Должината на шините на температура t_1 може да се определи како

$$l_1 = l_0(1+\alpha t_1)\,, \qquad (1)$$

каде што l_0 е должина на шините на 0°C. На температура t_2, на која тие ќе се допрат, нивната должина ќе изнесува $l_2 = l_1(1+\alpha\,\Delta t)$, па:

$$l_2 = l_0(1+\alpha t_2)\,. \qquad (2)$$

Од равенките (1) и (2) за $\alpha t_1 \ll 1$ се добива равенката:

$$\Delta l \approx l_1\,\alpha\,\Delta t\,, \qquad (3)$$

каде што $\Delta t = t_2 - t_1$ = 40°C, а температурата на која шините ќе се допрат е:

$$t_2 = 60°\text{C}.$$

б) Од законот за еластична должинска деформација на шините следува:

$$\frac{F}{S} = E_y\,\frac{\Delta l}{l_2}\,,$$

каде што F е силата на термичкото напрегање кога температурата ќе се зголеми за уште Δt = 20°C. Тогаш α $\Delta l = l_2\, a\Delta t$ и за силата се добива:

$$F = S\,E_y \cdot \alpha\,\Delta t = 1{,}15\ \text{N}\,.$$

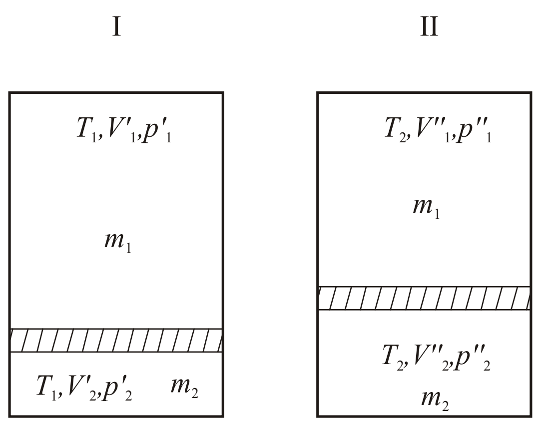
Задача 6.2. Во вертикален цилиндар затворен од двете страни се наоѓа подвижен клип, а над и под клипот се наоѓа ист идеален гас на температура T_1 = 300 K. Тежината на клипот е урамнотежена со разликата од силата на притисоците на гасот кога волуменот на долниот дел од цилиндарот е три пати помал од горниот дел. Ако температурата се зголеми за 200 K, тогаш клипот ќе биде урамнотежен кога волуменот на долниот дел на цилиндарот е два пати помал од волуменот на горниот дел. Да се најде односот на масите на гасот во двата дела на цилиндарот.

Решение:

Користејќи ја равенката за состојба на идеален гас, за двете состојби (I и II) од сл. 6.2 се добива:

$$p_1'V_1' = \frac{m_1}{M}RT_1\,,\quad p_2'V_2' = \frac{m_2}{M}RT_1\,,\quad V_1' = 3V_2'\,;$$

$$p_1''V_1'' = \frac{m_1}{M}RT_2\,,\quad p_2''V_2'' = \frac{m_2}{M}RT_2\,,\quad V_1'' = 2V_2''\,;$$



Сл. 6.2

$$\frac{p_1'\cdot 3}{p_2'} = \frac{m_1}{m_2}\,,\quad p_2' = \frac{m_2}{m_1}\cdot 3\,p_1' = k\cdot 3\,p_1'\,,\quad p_2'' = k\,2\,p_1''\,,\ \frac{p_1'V_1'}{p_1''V_1''} = \frac{T_1}{T_2}\,;$$

$$V_1' + V_2' = V_1'' + V_2'' \quad\Rightarrow\quad V_1'' = \frac{8}{9}V_1'\,,$$

$$p_2' - p_1' = p_2'' - p_1'' \quad\Rightarrow\quad p_1'' = \frac{3k-1}{2k-1}p_1'\,,$$

$$k = \frac{7}{6}\,.$$

Задача 6.3. Балон со волумен V_1 = 20 литри е наполнет со компримиран воздух на температура t_1 = 20°C, а манометарот покажува притисок $p_1 = 120 \cdot 10^5$ Pa. Колкав волумен вода може да се истисне од цистерната на една подморница со помош на овој балон, ако истиснувањето се врши на длабочина h = 30 m и температура t_2 = 5°C?

Решение:

Од законот за гасна на состојба следува:

$$p_1 V_1 = n R T_1 ,$$

$$p_2 V_2 = n R T_2 .$$

Притисокот p_2 на длабочина h ќе изнесува:

$$p_2 = p_0 + \rho g h .$$

Волуменот на цистерната изнесува:

$$V_2 = V_1 + \Delta V ,$$

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{p_2 T_1} = V_1 + \Delta V .$$

Волуменот на истиснатата вода од цистерната е еднаков на:

$$\Delta V = \left[\frac{p_1 T_2}{(p_0 + \rho g h) T_1} - 1 \right] = 558 \text{ литри.}$$

Задача 6.4. На висина H = 0,2 m се наоѓа затворен сад на кој од едната страна во близина на дното има мал отвор. Во садот има вода до висина h = 0,15 m, а заробениот гас од 2 мола има волумен V = 47,5 литри и температура T = 300 K. Да се пресмета досегот на млазот вода што истекува низ отворот ако атмосферскиот притисок е $p_0 = 10^5$ Pa.

Решение:

Бернулиевата равенка за отворите 1 и 2 од сл. 6.4 низ кои поминува водата во однос на дното на садот е:

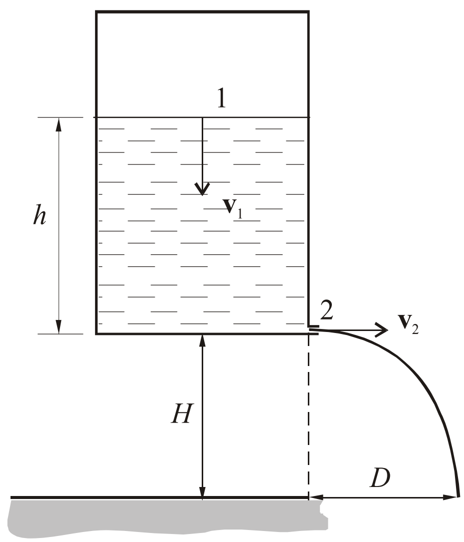
$$p + \rho g h + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2} , \qquad (1)$$

каде што p е притисокот на гасот заробен во садот над нивото на водата, а v_1 и v_2 се соодветните брзини на истекување на течноста низ пресеците 1 и 2. Ако се земе предвид дека напречниот пресек 1 е многу поголем од 2, тогаш брзината v_1 може да се занемари во однос на v_2 и за брзината v_2 се добива:

$$v_2 = \sqrt{2gh + \frac{2(p - p_0)}{\rho}}\ , \tag{2}$$

т.е.

$$v_2 = \sqrt{2gh + \frac{2\left[\frac{nRT}{V} - p_0\right]}{\rho}}\ . \tag{3}$$



Сл. 6.4

Досегот на млазот вода, ако тој се разгледува како хоризонтален истрел, може да се определи како:

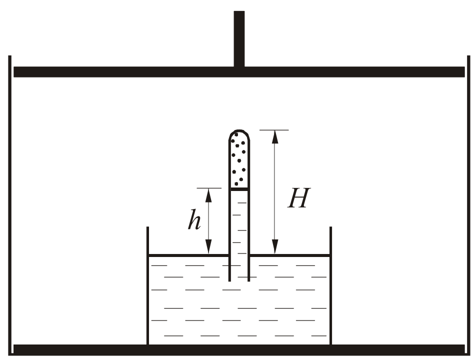
$$D = v_2\sqrt{\frac{2H}{g}}\ . \tag{4}$$

Од равенките (3) и (4) следува:

$$D=\sqrt{\frac{2H}{g}}\cdot\sqrt{2gh+\frac{2\left[\frac{nRT}{V}-p_0\right]}{\rho}}\ ,$$

$$D = 3{,}8\ \text{m}.$$

Задача 6.5. Торичелиева апаратура (сл. 6.5) е сместена во цилиндар со клип чија површина е S. Над живата има водород, а во цилиндарот воздух. Во почетната состојба 1 висината на столбот на жива е h_1 = 0,7 m, притисокот на воздухот p_1 = 133,4 kPa, а системот е на температура T_0 = 273 K. Клипот се повлекува бавно нагоре додека висината на живиниот столб не стане h_2 = 0,4 m, а притисокот на воздухот p_2 = 80 kPa (состојба 2). Понатаму волуменот се држи константен, а се зголемува температурата на T_3 и живиниот столб е h_3 = 0,5 m (состојба 3). Конечно во состојбата 4 температурата е T_4, живиниот столб h_4 = 0,45 m, а притисокот во цилиндарот останува непроменет. Да се најде притисокот и температурата на водородот во конечната состојба. Густината на живата е $\rho = 13{,}6\cdot10^3$ kg/m^3.



Сл. 6.5

Решение:

– Изотермен процес (премин од состојба 1 во 2).

Равенката за состојбата на водородот во цевката е:

$$\frac{p_1'V_1'}{T_1}=\frac{p_2'V_2'}{T_2}\ , \tag{1}$$

$$T_1 = T_2 = T_{0,} \tag{2}$$

каде што: $$p_1' = p_1 - \rho g h_1 ;$$

$$V_1' = S(H - h_1) ,$$

$$p_2' = p_2 - \rho g h_2 ;\; V_2' = S(H - h_2) , \qquad (3)$$

каде што p_1' и p_2' се соодветните притисоци на водородот во цевката при изотермниот процес, а V_1' и V_2' неговите волумени во состојбите 1 и 2, соодветно.

Од равенките (1), (2) и (3) следува:

$$(p_1 - \rho g h_1) S(H - h_1) = (p_2 - \rho g h_2) S(H - h_2) ,$$

т.е. $$H = \frac{p_1 h_1 - p_2 h_2 + \rho g (h_1^2 - h_2^2)}{p_1 - p_2 - \rho g (h_1 - h_2)} = 1{,}3 \text{ m} .$$

– Изохорен процес (премин од состојба 2 во 3).

Равенката за состојбата на воздухот во цилиндарот е:

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} , \qquad (4)$$

а на водородот: $$\frac{p_3' V_3'}{T_3} = \frac{p_2' V_2'}{T_2} , \qquad (5)$$

каде што:

$$\begin{aligned} p_2' &= p_2 - \rho g h_2 \qquad V_2' = S(H - h_2), \\ p_3' &= p_3 - \rho g h_3 \qquad V_3' = S(H - h_3). \end{aligned} \qquad (6)$$

Од равенките (5) и (6) следува:

$$T = \frac{(p_3 - \rho g h_3)(H - h_3) T_2}{(p_2 - \rho g h_2)(H - h_2)} , \qquad (7)$$

а од равенките (4) и (7) се добива:

p_3 = 106,8 kPa и T_3 = 364,4 K.

– Изобарен процес (премин од состојба 3 во 4).

$$\frac{p_3' V_3'}{T_3} = \frac{p_4' V_4'}{T_4} ,$$

$$T_4 = \frac{(p_3 - \rho g h_4)(H - h_4)}{(p_3 - \rho g h_3)(H - h_3)} T_3 = 452\,\mathrm{K}\,,$$

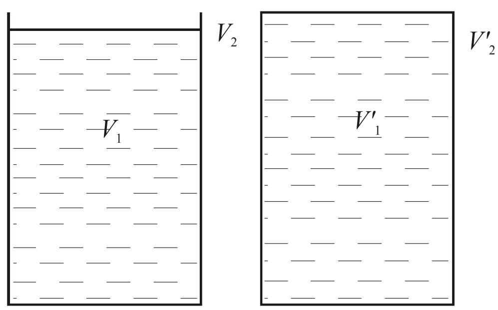
$$p'_4 = p_3 - \rho g h_4 = 46{,}8\,\mathrm{kPa}\,.$$

Задача 6.6. Челична цилиндрична цистерна со дијаметар 1 m и висина h_1 = 8 m се полни со нафта на температура 20°C. До која висина h_2 може да се наполни цистерната за нафтата да не истече од неа кога температурата ќе се качи на 40°C. Термичкиот коефициент на волуменското ширење на челикот е $\gamma_1 = 11 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}, а на нафтата $\gamma_2 = 9 \cdot 10^{-4}$ °C^{-1}.

Решение:

Волуменот на челичната цистерна V_1' на температура t_2 (сл. 6.6) треба да биде поголем или еднаков на волуменот на нафтата V_2' на истата температура.

$$V'_1 = V'_2\,.$$



Сл. 6.6

Од законот за волуменско ширење следува:

$$V'_1 = V_1(1 + \gamma_1\,\Delta t)\,,\;\; V'_2 = V_2(1 + \gamma_2\,\Delta t)\,,$$

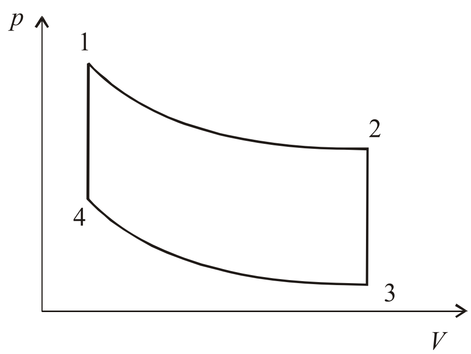
$$\frac{\pi d^2}{4} h_1(1 + \gamma_1\,\Delta t) = \frac{\pi d^2}{4} h_2(1 + \gamma_2\,\Delta t)\,,\quad h_2 = h_1 \frac{1 + \gamma_1\,\Delta t}{1 + \gamma_2\,\Delta t} = 7{,}86\ \mathrm{m}\,.$$

7. Термодинамика

Задача 7.1. Клапејроновиот циклус (сл. 7.1.1) се состои од две изотерми и две изохори, при што $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \tau$ и $\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = a$.

а) Да се определи степенот на корисно дејство на идеална топлинска машина чија работа се засновува врз овој циклус ако работниот гас е двоатомен.

б) Да се спореди добиената релација со онаа за степенот на корисно дејство за топлинска машина што се заснова врз Карноовиот циклус за ист однос на температури.



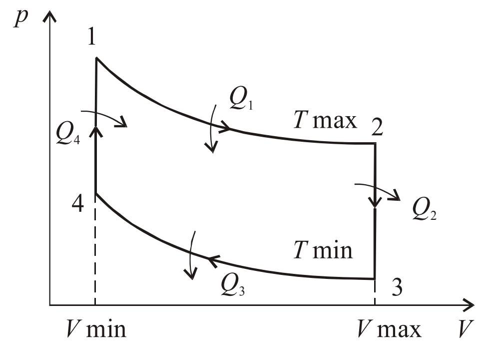
Сл. 7.1.1

Решение:

а) Коефициентот на корисно дејство изразен преку количеството топлина што го прима и испушта работниот гас според сл. 7.1.2 е даден со равенката:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2 + Q_3}{Q_1 + Q_4},$$

или:
$$\eta = 1 - \frac{nC_V (T_2 - T_3) + nRT_3 \ln \frac{V_3}{V_4}}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + nC_V (T_1 - T_4)},$$



Сл. 7.1.2

$$\eta = 1 - \frac{C_V(T_{\max} - T_{\min}) + RT_{\min}\ln\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}}}{RT_{\max}\ln\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} + C_V(T_{\max} - T_{\min})}.$$

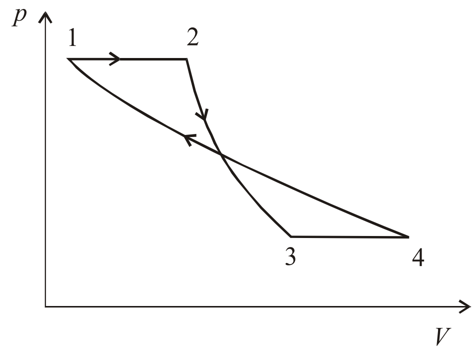
Ако во горната равенка се замени $C_V = \dfrac{5}{2}R$, за двоатомен гас се добива:

$$\eta = 1 - \frac{5(\tau - 1) + 2\ln a}{2\tau\ln a + 5(\tau - 1)}.$$

б) При Карнооовиот кружен циклус степенот на корисно дејство се определува како:

$$\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{1}{\tau}.$$

Задача 7.2. Колкав е коефициентот на корисно дејство на идеална топлинска машина чија работа се заснова на циклус составен од изобара, адијабата, изобара и изотерма (сл 7.2.1). Работниот гас е двоатомен, а $\dfrac{p_{\max}}{p_{\min}} = a$ и $\dfrac{V_1}{V_2} = b$.



Сл. 7.2.1

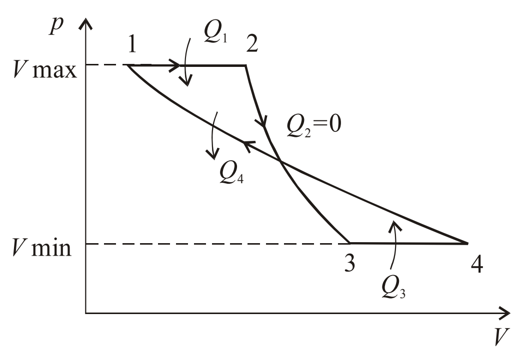
Решение:

Коефициентот на корисно дејство изразен преку количеството топлина што го испушта работниот гас, според сл 7.2.2, е даден со равенката:

$$\eta = 1 - \frac{Q_4}{Q_1 + Q_3},$$

или

$$\eta = 1 - \frac{nRT_4 \ln\frac{V_4}{V_1}}{nC_p(T_2 - T_1) + nC_p(T_4 - T_3)}, \qquad (1)$$



Сл. 7.2.2

$$1 \to 2 \qquad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \text{т.е.} \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} = b, \qquad (2)$$

$2 \to 3$ $$T_3 p_{\max}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_2 p_{\min}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

$$\text{т.е. } T_3 = T_2 a^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}. \tag{3}$$

$4 \to 1$ $$p_{\max} V_1 = p_{\min} V_4,$$

$$\text{т.е. } \frac{V_4}{V_1} = \frac{p_{\max}}{p_{\min}} = a. \tag{4}$$

Ако равенките (2), (3) и (4) се заменат во (1), се добива:

$$\eta = 1 - \frac{Rb \ln a}{C_p \left(1 - a^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\right)}.$$

Од равенките $R = C_p - C_V$ и $\dfrac{C_p}{C_V} = \kappa$ се добива:

$$\frac{R}{C_p} = \frac{C_p - C_V}{C_p} = \frac{\kappa - 1}{\kappa},$$

или $$\eta = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{b \ln a}{1 - a^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}}.$$

Задача 7.3. Површината на напречниот пресек на цилиндар од мотор со внатрешно согорување е S = 0,03 m^2. При адијабатска компресија од притисок $p_1 = 10^5$ Pa до притисок $p_2 = 10^6$ Pa се врши работа A = 250 J. Да се најде одот на клипот и степенот на компресија ако почетната температура е T_1 = 400 K (κ = 1,4).

Решение:

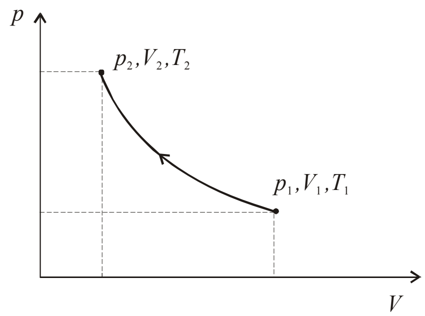
Од зависноста меѓу притисокот и температурата при адијабатска промена на гасот, дадена на сл 7.3:

$$T_1 p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = T_2 p_2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}},$$

следува:

$$T_2 = T_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 772\,\mathrm{K}\,.$$

Од равенката за состојба на идеален гас може да се најде бројот на молови n на гасот во цилиндарот, т.е. nR:



Сл. 7.3

$$p_1V_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad nR = \frac{p_1V_1}{T_1}\,.$$

Според првиот закон на термодинамиката работата при адијабатскиот процес ќе биде дадена со равенката:

$$|\,A\,| = -\Delta U = nC_V\,\Delta T = n\frac{j}{2}R\,(T_2 - T_1)\,,$$

$$A = \frac{j}{2}\frac{p_1V_1}{T_1}(T_2 - T_1)\,,$$

$$V_1 = \frac{2\,AT_1}{j\,p_1(T_2 - T_1)} = 1{,}075\,\mathrm{dm}^3\,.$$

$$p_1V_1^{\kappa} = p_2V_2^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}}\cdot V_1 = 0{,}207\,\mathrm{dm}^3\,,$$

$$\kappa = \frac{V_2}{V_1} = 0{,}19\,,$$

$$h = \frac{V_1 - V_2}{S} = 2{,}9\,\mathrm{cm}.$$

Задача 7.4. Еден мол идеален гас се загрева за 100 K, при што температурата се менува пропорционално со квадратот на притисокот. Колкава работа врши гасот?

Решение:

$$T = a\,p^2\,,$$

каде што a е коефициент на пропорционалност.

Од законот за гасна состојба следува:

$$pV = nRT = nR\,a\,p^2\,,$$

$$p = \frac{V}{nR\,a}\,,$$

$$V_1 = nR\,a\sqrt{\frac{T_1}{a}}\,,$$

$$V_2 = nR\,a\sqrt{\frac{T_2}{a}}\,.$$

Работата што ја врши гасот при кој било процес е дадена со релацијата:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \frac{1}{nR\,a}\int_{V_1}^{V_2} V\,dV = \frac{1}{2nR\,a}(V_2^2 - V_1^2)\,,$$

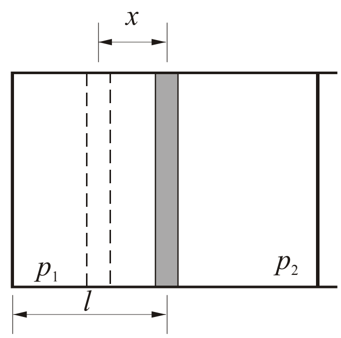
$$A = \frac{nR}{2}\Delta T = 415{,}7\ \mathrm{J}\,,\ \text{каде што}\ n = 1\mathrm{mol}.$$

Задача 7.5. Во хоризонтален цилиндричен сад полн со воздух се наоѓа клип кој го дели садот на два еднакви дела. Притисокот на воздухот во двата дела изнесува p_0. Клипот се отклонува од рамнотежната положба за мало растојание и почнува да осцилира. Да се најде периодот на осцилации ако масата на клипот е m, растојанието од клипот до основата е l, а површината изнесува S. Триењето да се занемари, а процесот е адијабатски. Упатство: $(1+q)^{-n} \approx 1 - nq$, за $q \ll 1$.

Решение:

Клипот (сл. 7.5) осцилира под дејство на силата:

$$F = (p_2 - p_1)S\ .$$



Сл. 7.5

Од равенката за адијабатски процес се добива:

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_1 (V_0 - xS)^{\kappa}\ ,$$

$$p_0 V_0^{\kappa} = p_2 (V_0 + xS)^{\kappa}\ ,$$

$$F = p_0 V_0^{\kappa}\left[(V_0 + xS)^{-\kappa} - (V_0 - xS)^{-\kappa}\right]S\ ,$$

$$F = p_0 V_0^{\kappa}\left[V_0^{-\kappa}\left(1 + \frac{xS}{V_0}\right)^{-\kappa} - V_0^{-\kappa}\left(1 - \frac{xS}{V_0}\right)^{-\kappa}\right]S\ .$$

Бидејќи x е многу мало, т .е. x<<1, следува:

$$\left(1 + \frac{xS}{V_0}\right)^{-\kappa} \approx 1 - \kappa\frac{xS}{V_0}\ ,$$

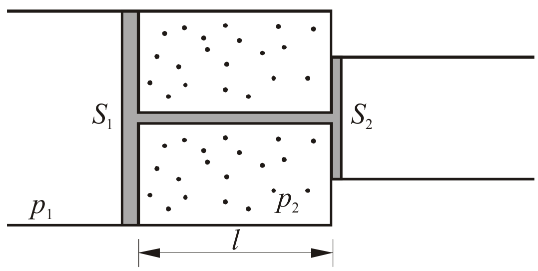
$$\left(1 - \frac{xS}{V_0}\right)^{-\kappa} \approx 1 + \kappa\frac{xS}{V_0}\ ,$$

$$F = p_0 S\left[1 - \frac{\kappa S x}{V_0} - 1 - \frac{\kappa S x}{V_0}\right],$$

$$F = -\frac{2p_0 S^2 \kappa}{V_0} x = -kx ,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2p_0 S k}} .$$

Задача 7.6. Извесно количество двоатомен гас е затворено во сад со напречен пресек како на сл. 7.6, помеѓу два цврсто поврзани клипа. Почетниот волумен е $V_1 = 100\ \mathrm{cm}^3$. Ако клиповите брзо се поместат надесно за растојание x, температурата ќе се зголеми за 25%. Колкаво е растојанието x? Разликата на површините на двата напречни пресека е $\Delta S = S_1 - S_2 = 10\ \mathrm{cm}^2$.



Сл.7.6

Решение:

Од сл. 7.6 се гледа дека:

$$V_1 = S_1 l ,$$

$$V_2 = S_1(l - x) + S_2 x ,$$

$$V_2 = S_1 l - (S_1 - S_2)\, x ,$$

$$V_2 = V_1 - \Delta S x .$$

Бидејќи клиповите брзо се поместуваат, процесот е адијабатски; за што важи равенството:

$$TV^{\kappa-1} = \mathrm{const}.,$$

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} ,$$

$$T_1 + \Delta T = T_2\,,$$

$$\Delta T = 0{,}25 T_1\,.$$

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = (T_1 + \Delta T) V_2^{\kappa-1}\,,$$

$$T_1 (S_1 \cdot l)^{\kappa-1} = (T_1 + \Delta T)(V_1 - \Delta S \cdot x)^{\kappa-1}\,,$$

$$1 - \frac{\Delta S \cdot x}{V_1} = \left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-\kappa}}\,,$$

$$x = \frac{V_1}{\Delta S}\left[1 - \left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-\kappa}}\right] = \frac{V_1}{\Delta S}\left[1 - (1{,}25)^{\frac{1}{1-\kappa}}\right],$$

$$x = 4{,}3 \text{ cm}.$$

Задача 7.7. Цилиндар затворен од сите страни е ставен во хоризонтална положба. Во внатрешноста гасот е поделен на n делови со n–1 клипови. Во секој дел на почетокот се познати притисокот p_1, p_2, ..., p_n и волуменот V_1, V_2, ... , V_n. Ако клиповите се ослободат да се движат без триење, по извесно време ќе се воспостави рамнотежа, при што во секој дел од цилиндарот ќе има нова состојба на гасот. Да се пресметаат параметрите на состојбите во секој дел од цилиндарот ако температурата во сите делови пред и по процесот останува иста. Масата на клиповите може да се занемари.

Решение:

Бидејќи цилиндарот се наоѓа на константна температура, законот за состојба на гасот во секоја од преградите е:

$$p_i V_i = p_i' V_i' \;\; (i = 1, \ldots, n)\,, \qquad (1)$$

каде што
$$p_1' = p_2' = \ldots\ldots = p_n' = p\,. \qquad (2)$$

$$V_1' + V_2' + \ldots\ldots + V_n' = V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_n\,. \qquad (3)$$

Од равенките (1) и (2) $\Rightarrow$ $p_i V_i = p V_i'$,

$$V_i' = \frac{p_i V_i}{p}\,.$$

Од равенката (3) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} V_i^{'}$,

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i V_i}{p},$$

при што:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}, \qquad V_i^{'} = \frac{p_i V_i}{p} = \frac{p_i V_i \sum_{i=1}^{n} V_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i V_i}.$$

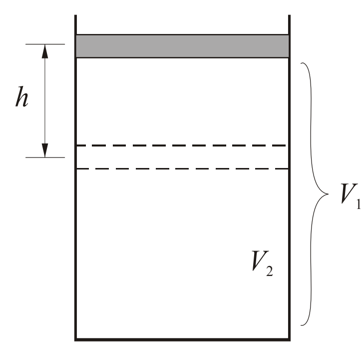
Задача 7.8. Дијаметарот на цилиндар за внатрешно согорување изнесува 0,1 m, а одот на клипот 0,11 m. Колкав волумен треба да има комората при компресија ако е познато дека почетниот притисок на гасот изнесува $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, почетната температура 127 °C, а конечниот притисок по компресијата е $1{,}01 \cdot 10^6$ Pa. Да се најде работата извршена при адијабатска компресија за $\kappa = 1{,}3$.

Решение:

За адијабатски процес од сл. 7.8 важи релацијата:

$$V_1^{\kappa} p_1 = V_2^{\kappa} p_2,$$

$$V_1 - V_2 = Sh.$$



Сл.7.8

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = \frac{p_2}{p_1},$$

$$V_2^{\kappa} = \frac{p_1}{p_2} V_1^{\kappa} = \frac{p_1}{p_2} (Sh + V_2)^{\kappa},$$

$$V_2 = \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}} (Sh + V_2) = (\frac{p_1}{p_2})^{\frac{1}{\kappa}} (Sh + V_2),$$

$$V_2 = \frac{\sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}} Sh}{(1 - \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}})} = 1{,}76 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3,$$

$$V_1 = Sh + V_2 = 1{,}06 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3.$$

Врската меѓу притисокот и температурата при адијабатски процес е дадена со изразот:

$$T_1 p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = T_2 p_2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}},$$

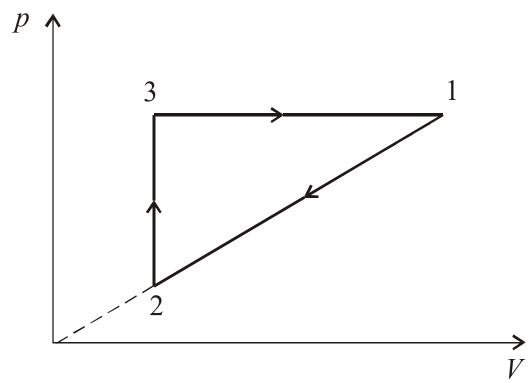
од каде:

$$T_2 = T_1 (\frac{p_1}{p_2})^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}.$$

Работата извршената при адијабатската компресија е:

$$A = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1} = 243\,\mathrm{J}.$$

Задача 7.9. Топлинска машина работи според циклусот прикажан на сл. 7.9.1. Да се определи степенот на корисно дејство η во зависност од максималната температура во циклусот ако работното тело е 1 mol идеален гас со Поасонов коефициент κ.



Сл. 7.9.1

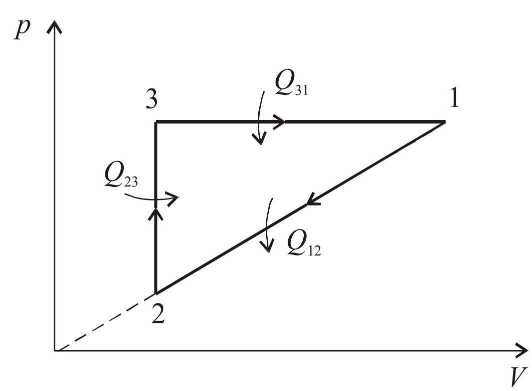
Решение:

Од процесот прикажан на сл. 7.9.2 следува:

$$T_1 = T_{\max}, \qquad T_2 = T_{\min}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1},$$

каде што Q_1 е вкупно количество на топлината што ја прима гасот, а Q_2 е вкупно количество на топлината што ја дава.



Сл. 7.9.2

$$Q_1 = Q_{23} + Q_{31} = nC_v(T_3 - T_2) + nC_p(T_1 - T_3),$$

$$A = \frac{1}{2}\Delta p \Delta V = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)(V_1 - V_2).$$

За одделните процеси ќе важат равенствата:

3→1 $$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_1}{T_1}; \quad V_2 = V_3.$$

2→3 $$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}; \quad p_3 = p_1.$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_3}{T_1} \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_3}. \qquad (1)$$

1→2 $$p_1 = kV_1,$$

$$p_2 = kV_2.$$

$$p_1V_1 = nRT_1$$
$$p_2V_2 = nRT_2$$

Со замена на равенките за p_1 и p_2 во равенката за состојбата на гасот, се добива:

$$\left.\begin{aligned} kV_1^2 &= nRT_1 \\ kV_2^2 &= nRT_2 \end{aligned}\right\} :$$

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Со замена на последната равенка во (1) се добива:

$$\frac{T_3^2}{T_1^2} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_3 = \sqrt{T_1T_2},$$

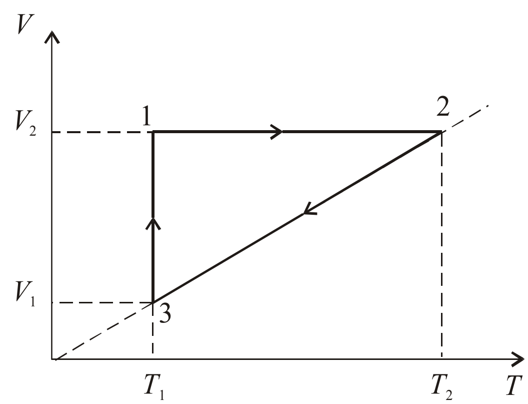
$$A = \frac{1}{2}(kV_1 - kV_2)(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}k(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}kV_1^2(1 - \frac{T_3}{T_1})^2,$$

$$A = \frac{1}{2}k\frac{nRT_1}{k}(1 - \frac{T_3}{T_1})^2 = \frac{1}{2}nRT_1(1 - \frac{T_3}{T_1})^2.$$

Со замена на изразите за A и Q_1 во изразот за коефициент на корисно дејство η се добива:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} nRT_1 (1 - \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{T_1})^2}{nC_v (\sqrt{T_1 T_2} - T_2) + nC_p (T_1 - \sqrt{T_1 T_2})} .$$

Задача 7.10. На сл.7.10 е претставен кружен процес во VT – дијаграм. Да се определи коефициент на корисно дејство. $V_1 = 0{,}01$ m^3, $V_2 = 0{,}03$ m^3, $T_1 = 300$ K, $T_2 = 900$ K. Процесот се однесува на еден мол двоатомен гас. Универзалната гасна константа изнесува $R = 8{,}31$ J/(K mol).



Сл. 7.10

Решение:

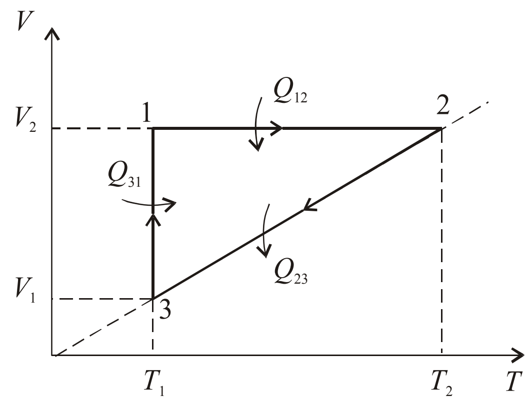
Коефициентот на корисно дејство на циклусот се пресметува според формулата:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} , \tag{1}$$

или

$$\eta = \frac{A}{Q_1} , \tag{2}$$

каде што Q_2 е количество топлина што во еден циклус му се предава на ладилникот, а Q_1 е количество топлина примена од загревачот. A е извршена работа на гасот во еден циклус.



Сл. 7.10

Според Клајпероновата равенка:

$$PV = nRT \ . \qquad (3)$$

Кога V и T се намалуваат линеарно, притисокот P останува постојан. Линеарноста е забележлива од сл. 7.10. При промена на состојбата на гасот од состојбата 3 во состојба 1 гасот прима топлина Q_{31}. Од сл. 7.10 се гледа дека делот 31 е изотермен процес проследен со зголемување на волуменот, т.е., со намалување на притисокот. Соодветните величини Q_{12}, Q_{23} и Q_{31} се:

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{31} \, ,$$

$$Q_2 = Q_{23} \, ,$$

$$Q_{12} = nC_V (T_2 - T_1) \, , \qquad (4)$$

$$Q_{23} = nC_P (T_2 - T_1) \, , \qquad (5)$$

$$Q_{31} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \, , \quad n=1. \qquad (6)$$

Моларните топлински капацитети на гасот при постојан волумен и притисок изнесуваат:

$$C_V = \frac{5}{2} R = 20{,}775 \text{ J/(K mol) и } C_P = \frac{7}{2} R = 29{,}085 \text{ J/(K mol)},$$

$$Q_{12} = C_V(T_2 - T_1) = 12465 \text{ J}.$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 13\,\%.$$

Задача 7.11. Во цилиндар со подвижен клип со занемрлива тежина и напречен пресек $S = 100\ \text{mm}^2$ се наоѓа вода со маса $m = 1$ kg на температура од $t_0 = 0°$ C. Во водата се наоѓа грејач со моќност $P = 500$ W. Колкаво време треба да е вклучен грејачот за клипот под дејство на водната пареа да се подигне за $h = 1$ m? Атмосферскиот притисок p = 101,3 kPa, топлината на испарување на водата $Q_i = 2{,}26$ MJ/kg, $c_V = 4{,}19\cdot 10^3$ J/kg K. Сите загуби на топлинска енергија да се занемарат. Моларната маса на водата е $M = 18$ g/mol.

Решение:
Од количеството топлина Q што ќе го ослободи грејачот за време t еден дел ќе се потроши за загревање на водата од 0° до 100°C, дел за испарување на водата со маса m', а еден дел за вршење работа на клипот при подигањето. Од законот за запазување на енергијата следува:

$$Q = mC_V\Delta t + m'Q_i + p\Delta V.$$

Од равенката за состојбата на гасот следува:

$$p\Delta V = nRT = \frac{m'}{M}RT \Rightarrow m' = \frac{p\Delta VM}{RT},$$

што претставува испарено количество вода:

$$m' = \frac{phSM}{RT} = 5{,}9\cdot 10^{-3}\,\text{kg}.$$

Од равенката за моќност следува:

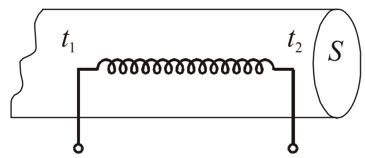
$$t = \frac{Q}{P} = \frac{mc_V\Delta t + m'Q_i + p\Delta V}{P} = 867\ \text{s} = 14{,}4\ \text{min}.$$

Задача 7.12. Во хоризонтална цевка (сл. 7.12) со пресек $S = 10^{-3}\ \text{m}^2$ е поставен грејач со моќност $P = 0{,}8$ kW. Кога низ цевката протекува воздух со притисок 10^6 Pa, тој се загрева од 25° C на 27° C . Да се определат:

а) маса на воздухот која протекува низ цевката во единица време,

б) брзина на воздухот низ излезот од цевката.

Воздухот е двоатомен гас со моларна маса M = 29 g/mol. Топлинските загуби да се занемарат.



Сл. 7.12

Решение:

а) $$P = \frac{Q}{t},$$

каде што Q е топлина која се троши за загревање на маса m од темпартура t_1 до t_2:

$$Q = m \cdot c_P (t_2 - t_1),$$
$$Pt = m \cdot c_P (t_2 - t_1),$$
$$\frac{m}{t} = \frac{P}{c_P (t_2 - t_1)}.$$

Специфичниот топлински капацитет при константен притисок може да се изрази како:

$$c_P = \frac{C_P}{M} = \frac{(\frac{j+2}{2})R}{M} = \frac{(j/2+1)R}{M},$$

каде што C_p е моларен капацитет при константен притисок, j = 5 е број на степени на слобода на воздухот, а R е универзална гасна константа.

$$\frac{m}{t} = \frac{PM}{R(j/2+1)(t_2 - t_1)}.$$

Значи, масата на воздух која протекува низ цевката во единица време е:

$$Q_m = \frac{m}{t} = 0{,}41 \text{kg/s}.$$

б) $$Q_m = \frac{\rho V}{t} = \frac{\rho l S}{t} = \rho v S\ .$$

Од Клајпероновата равенка за гасна состојба на излезот на цевката, следува:

$$pV = nRT_2 = \frac{m}{M} RT_2\ ,$$

каде што $m = \rho V$,

$$p = \frac{\rho}{M} RT_2 \Rightarrow \rho = \frac{Mp}{RT_2}\ ,$$

$$v = \frac{Q_m}{\rho S},$$

$$v = \frac{Q_m RT_2}{MpS} = 3{,}5 \text{ m/s}.$$

Задача 7.13. Да се најде адијабатската константа $\kappa = c_P / c_V$ за смеса од гасови која се состои од $m_1 = 20$ g хелиум (He) и $m_2 = 9$ g водород (H_2).

Решение:

Количеството топлина неопходно за загревање на масата m_1 при постојан волумен е:

$$\Delta Q_1 = c_{V1} m_1 \Delta t\ .$$

Количеството топлина неопходно за загревање на масата m_2 при постојан волумен е:

$$\Delta Q_2 = c_{V2} m_2 \Delta t\ .$$

Количеството топлина неопходно за загревање на смесата е:

$$\Delta Q_V = c_V m_V \Delta t\ ,$$

каде што c_V е специфичен топлински капацитет на смесата при постојан волумен, а $m_V = m_1 + m_2$ е маса на смесата.

Од законот за запазување на енергијата следува:

$$\Delta Q_V = \Delta Q_1 + \Delta Q_2\ ,$$

$$c_V (m_1 + m_2) \Delta t = c_{V1} m_1 \Delta t + c_{V2} m_2 \Delta t,$$

$$c_V = \frac{c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2}{m_1 + m_2}.$$

По аналогно размислување истите равенки можат да се напишат и при постојан притисок:

$$c_P(m_1+m_2)\Delta t = c_{P1}m_1\Delta t + c_{P2}m_2\Delta t,$$

$$c_p = \frac{c_{P1}m_1 + c_{P2}m_2}{m_1+m_2},$$

$$\frac{c_P}{c_V} = \frac{c_{P1}m_1 + c_{P2}m_2}{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}.$$

Специфичниот и моларниот топлински капацитет се поврзани со релацијата:

$$c_P = \frac{C_P}{M};\ \ c_V = \frac{C_V}{M},$$

каде што M е моларна маса, а моларните топлински капацитети при постојан притисок и постојан волумен се дадени со равенките:

$$C_P = \frac{j+2}{2}R;\ \ C_V = \frac{j}{2}R.$$

За He (едноатомен гас) $j_1 = 3$.

За H_2 (двоатомен гас) $j_2 = 5$.

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{(j_1+2)\dfrac{m_1}{M_1} + (j_2+2)\dfrac{m_2}{M_2}}{\dfrac{j_1m_1}{M_1} + \dfrac{j_2m_2}{M_2}} = \frac{(j_1+2)M_2m_1 + (j_2+2)M_1m_2}{j_1m_1M_2 + j_2m_2M_1} = 1{,}51.$$

Задача 7.14. Цилиндар е поделен на два дела со клип. Во едниот дел од цилиндарот се наоѓа воздух со маса m = 10 g на температура t_1 = 20° C. Другиот дел од цилиндарот е вакуум и на таа страна вдолж оската на цилиндарот е поставена пружина која во нерастегната положба има должина колку и цилиндарот. Ако воздухот се загрее до температура од t_2 = 100° C, да се пресмета количеството топлина што се доведува за ова загревање. (R = 8,3 J/mol K, κ = 1,4, M = 29 g/mol).

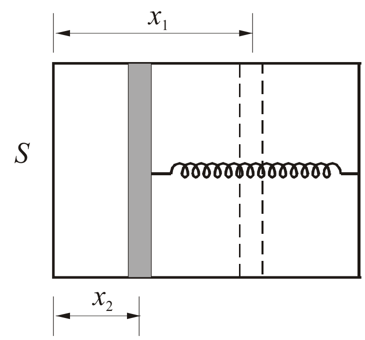
Решение:

Услов за рамнотежа е внатрешните сили (сл.7.14) да бидат еднакви на еластичните сили:

$$p_1S = kx_1,$$

$$p_2S = kx_2,$$

$$p_1 S x_1 = p_1 V_1 = k x_1^2,$$
$$p_2 S x_2 = p_2 V_2 = k x_2^2.$$



Сл. 7.14

За потиснување на пружината од x_1 до x_2 се врши работа A која е еднаква на разликата во потенцијалната енергија на еластично деформираната пружина, т.е. тоа е работата што ја врши гасот:

$$A = \frac{\kappa(x_2^2 - x_1^2)}{2},$$
$$p_1 V_1 = nRT_1,$$
$$p_2 V_2 = nRT_2.$$

Од овие равенки се добива дека извршената работа е:

$$A = \frac{n}{2} R\Delta T\ ,$$
$$Q = \Delta U + A = nC_V \Delta T + \frac{n}{2} R\Delta T = \frac{n}{2} R\Delta T(\frac{2C_V}{R} + 1),$$
$$Q = nR\Delta T(j+1) = 3R\Delta T \frac{m}{M} = 2172{,}4\ \text{J}.$$

Задача 7.15. На сл. 7.15 е прикажан цилиндар со преграден ѕид на средината и со подвижен клип. Вентилот на преградниот ѕид се отвора кога притисокот во десниот дел е поголем од притисокот во левиот дел. На почетокот има m_1 = 12 g хелиум (He) во левиот дел и m_2 = 2 g хелиум

(He) во десниот дел, на температура од t_0 = 10 °C, а целиот систем е топлински изолиран. Клипот брзо се турка кон преградниот сид сѐ додека не се отвори вентилот. Да се пресмета T на гасот по отворањето на вентилот.

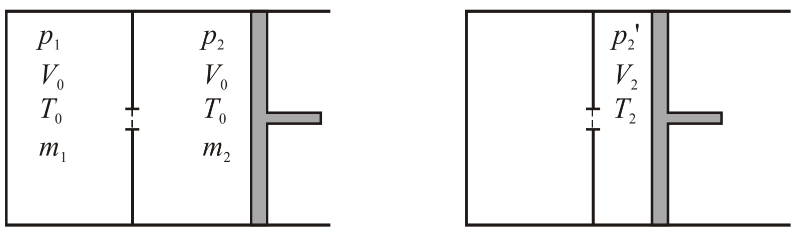
Решение:

На почетокот во цилиндарот (сл. 7.15):

$$p_1 > p_2,$$

каде што

$$p_1 = \frac{m_1}{M} \cdot \frac{RT_0}{V_0}; \quad p_2 = \frac{m_2}{M} \cdot \frac{RT_0}{V_0}.$$



Сл. 7.15

Со адијабатска компресија:

$$p_2 \to p'_2,$$

$$V_0 \to V_2,$$

$$p_2 V_0^{\kappa} = p'_2 V_2^{\kappa}.$$

Во граничниот случај $p'_2 = p_1$.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_2}{V_0}\right)^{\kappa} = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\kappa} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/\kappa}.$$

Бидејќи системот е топлински изолиран, $Q_1 = Q_2$.

$$c_V m_1 (T - T_0) = c_V m_2 (T_2 - T),$$

$$T = \frac{m_1 T_0 + m_2 T_2}{m_1 + m_2},$$

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_0 [1 + (\frac{m_2}{m_1})^{1/\kappa}].$$

$$p'_2 V_2 = nRT_2,$$

$$nR = \frac{p_2 V_0}{T_0},$$

$$T_2 = \frac{p'_2 V_2}{p_2 V_0} T_0 = (\frac{m_1}{m_2})(\frac{m_2}{m_1})^{1/\kappa} T_0 = (\frac{m_2}{m_1})^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} T_0,$$

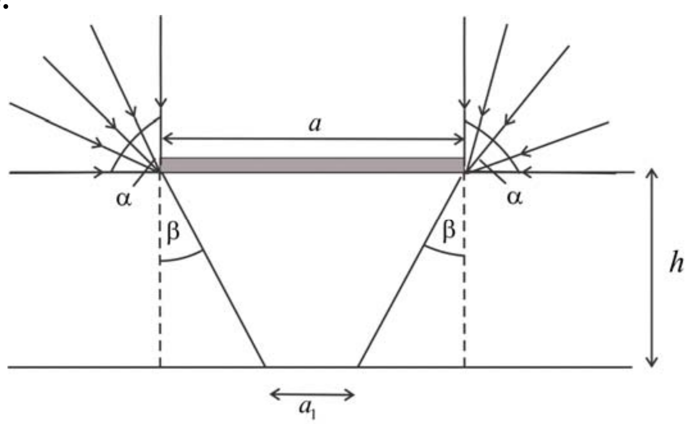
каде што $\kappa = \frac{j+2}{j} = 1{,}67$ е Поасоновата константа за хелиум (j = 3).

$$T_2 = 580 \text{ K}.$$

8. Геометриска оптика

Задача 8.1. На површината на река се наоѓа сплав со должина a = 8,0 m и ширина b = 6,0 m. Да се најде големината на сенката од сплавот на дното на реката при осветлување на површината на водата со расеана светлина. Длабочината на реката е h = 2,0 m.

Решение:



Сл. 8.1

Од Сл. 8.1 гледаме дека важи $a_1 = a - 2h\ \mathrm{tg}\beta$. Од законот за прекршување следува:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

а бидејќи $\sin\alpha = 1$, добиваме $\sin\beta = \dfrac{1}{n}$, т.е.:

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right).$$

Сенката на сплавот ќе биде со димензии:

$$a_1 = a - 2h\ \mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right) = 3{,}41\ \mathrm{m}\ \text{и}$$

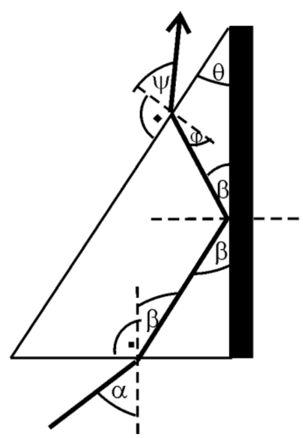
$$b_1 = b - 2h\ \mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{1}{n}\right) = 1{,}4\ \mathrm{m}.$$

Задача 8.2. Светлински зрак паѓа на долната страна на правоаголна стаклена призма со θ = 30° и n = 1,3. Призмата со едната страна е допрена до рамно огледало.

а) Ако упадниот зрак паѓа под агол $\alpha = 45°$, определете го аголот под кој зракот ќе ја напушти призмата.

б) Колкава е најмалата вредност на упадниот агол при кој светлосниот зрак се уште ќе излегува од призмата?

Решение:



Сл. 8.2

а) На граничната површина помеѓу воздухот и призмата настанува прекршување на светлинскиот зрак, според Снелиусовиот закон:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \text{, т.е. } \beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right).$$

Од Сл 8.2 гледаме дека зракот кој ќе се движи низ призмата се рефлектира од рамното огледало, под истиот упаден агол 90° - β, во однос на нормалата на огледалото.

На втората гранична површина зракот паѓа под агол φ, а излегува од призмата под агол ψ, за кои исто важи законот за прекршување:

$$n\sin\varphi = \sin\psi \ .$$

Од Сл. 8.2 се заклучува дека $\theta + \beta + (\varphi + 90°) = 180°$, односно $\varphi = 90° - (\theta + \beta)$. За аголот под кој светлинскиот зрак ја напушта призмата се добива:

$$\psi = \arcsin(n \cdot \sin\varphi) = \arcsin[n \cdot \sin(90° - (\theta + \beta))] = 64{,}31° .$$

б) За да се уште излегува од призмата, зракот треба да се лизга по нејзината гранична површина, т.е. ψ = 90°. Од овој услов и законот за прекршување добиваме:

$$n \sin\varphi = \sin 90° = 1 \text{, т.е. } \varphi = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Од овде ќе го определиме аголот β според:

$$\beta = 90° - (\theta + \varphi) = 90° - \left(\theta + \arcsin\frac{1}{n}\right) = 9{,}72° .$$

На крајот за минималниот упаден агол за кој зракот ја напушта призмата се добива:

$$\alpha_{\min} = \arcsin(n \cdot \sin\beta) = 12{,}67° .$$

Задача 8.3. Во кои граници може да се менува аголот на девијација кај стаклена призма со агол при врвот θ = 60° и индекс на прекршување n = 1,52?

Решение:

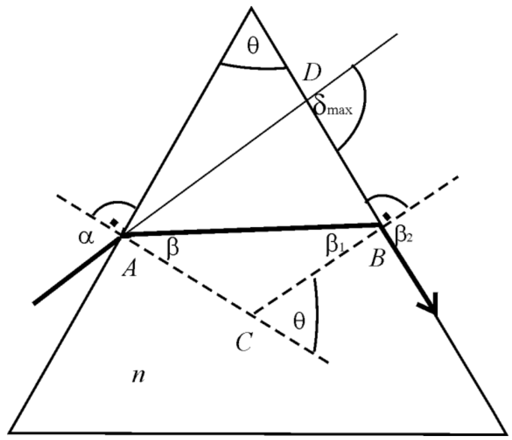
Аголот под кој светлинскиот зрак ја напушта стаклената призма може да се менува во границите од 90°, кога тој се лизга по граничната површина на призмата, до вредноста γ, кога зракот во призмата се простира по правец паралелен со основата (Сл. 8.3.2).

Аголот на девијација (отстапување) од правецот на простирање на упадниот зрак ќе биде најголем во случај кога излезниот зрак се лизга по граничната површина (Сл. 8.3.1). Тогаш за збирот на аглите во четириаголникот ABCD важи:

$$\alpha + (180° - \theta) + 90° + (180° - \delta_{\max}) = 360° ,$$

т.е.:

$$\alpha - \theta - \delta_{\max} = -90° \qquad (1)$$



Сл. 8.3.1

Од законот за прекршување на втората гранична површина, на која β_2 = 90°, добиваме:

$$n\sin\beta_1 = \sin\beta_2 = \sin 90° = 1$$

$$\beta_1 = \arcsin\frac{1}{n} = 41{,}14°$$

Аголот под кој се прекршува светлинскиот зрак на првата гранична површина ќе го добиеме од триаголникот ABC за кој важи:

$$\beta + \beta_1 + (180° - \theta) = 180°$$

$$\beta = \theta - \beta_1 = 18{,}86°$$

Конечно за упадниот агол ќе важи релацијата:

$$\sin\alpha = n\sin\beta$$

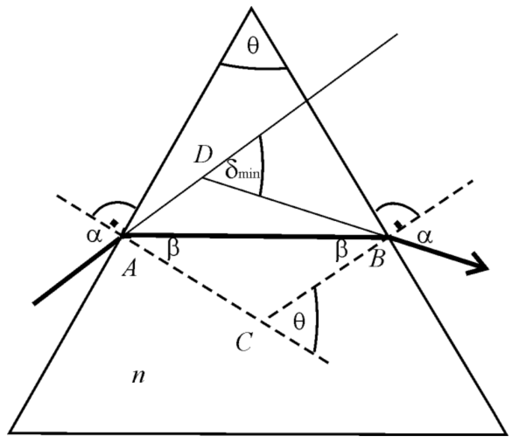
т.е.:

$$\alpha = \arcsin(n\sin\beta) = 29{,}43° \,.$$

Ако оваа вредност ја замениме во изразот (1), за максималниот агол на девијација ќе добиеме:

$$\delta_{\max} = \alpha - \theta + 90° = 59{,}43° \,.$$

За да го определиме минималниот агол на девијација, ќе земеме дека во тој случај зракот во призмата се простира по правец паралелен со основата (Сл.8.3.2). Тогаш важи дека $2\cdot\beta = \theta$, т.е. $\beta = \frac{\theta}{2} = 30°$ и $\beta + \gamma = \alpha$.



Сл. 8.3.2

Од законот за прекршување на првата гранична површина следува:

$$\sin\alpha = n\sin\beta = n\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

т.е. $\alpha = 49{,}46°$. За аголот γ добиваме $\gamma = \alpha - \beta = 19{,}46°$.

Вредноста на минималниот агол на девијација ќе го определиме како надворешен агол во рамнокракиот триаголникот чии агли при основата се аглите γ, односно важи:

$$2\gamma + \left(180° - \delta_{\min}\right) = 180°,$$

$$\delta_{\min} = 2\gamma = 38{,}92° .$$

Задача 8.4. Две стаклени правоаголни призми со еднакви димензии и индекси на прекршување n_1 = 1,6 и n_2 = 1,5 се прилепени една до друга и формираат рамнострана призма ABC. На страната AB паѓа монохроматски зрак под агол α = 70º. За колку степени ќе скршне тој зрак при поминувањето низ призмата ABC? Призмата се наоѓа во вода (n = 1,33).

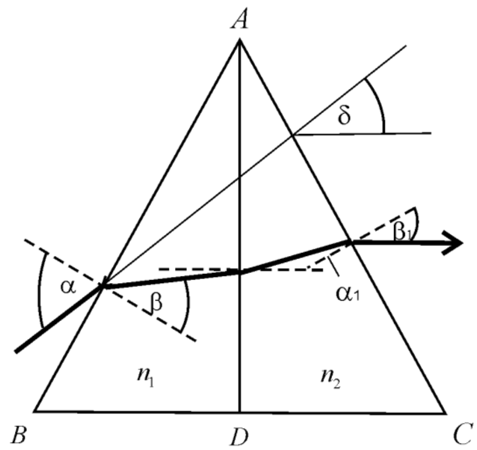
Решение:

Од законот за прекршување на првата гранична површина (сл. 8.4) добиваме:

$$n\sin\alpha = n_1\sin\beta ,$$

од каде се пресметува аголот β:

$$\sin\beta = \frac{n}{n_1}\sin\alpha = 51{,}36° .$$



Сл. 8.4

Бидејќи двете споени призми формираат рамнострана призма, аглите при темињата А, В и С ќе бидат еднакви на 60°.

На втората гранична површина, помеѓу двете призми, упадниот агол и аголот на прекршување се γ и γ_1, соодветно, за кои важи:

$$\beta + 60° + (90° - \gamma) = 180° \text{, т.е. } \gamma = \beta - 30° = 21{,}36° \text{ и}$$

$$n_1 \sin\gamma = n_2 \sin\gamma_1 \text{, т.е. } \gamma_1 = 22{,}86°.$$

На третата гранична површина, упадниот агол и аголот на прекршување се α_1 и β_1, соодветно, за кои важи:

$$\gamma_1 + \alpha_1 = 30° \text{, т.е. } \alpha_1 = 7{,}14° \text{ и}$$

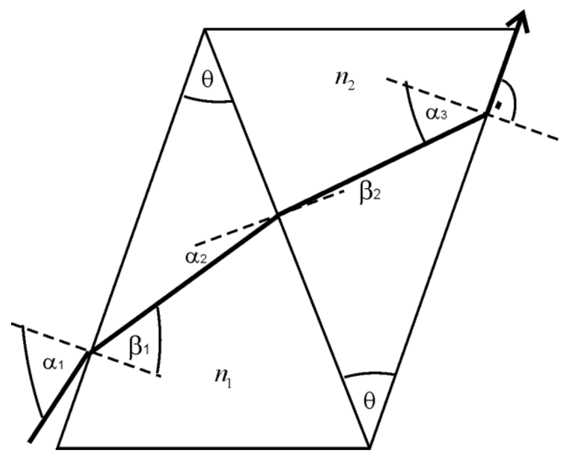
$$n_2 \sin\alpha_1 = n \sin\beta_1 \text{, т.е. } \beta_1 = 8{,}05°.$$

Конечно за аголот на скршнување на светлинскиот зрак се добива:

$$\delta = (\alpha - \beta) - (\gamma_1 - \gamma) + (\beta_1 - \alpha_1) \text{, односно } \delta = 18°.$$

Задача 8.5. Две правоаголни призми со агол при врвот $\theta = 30°$ и индекс на прекршување $n_1 = 1,5$ и $n_2 = 1,6$ се споени така да образуваат призма со основа паралелопипед. Под кој агол треба да падне светлински зрак на призмата со n_1 за да тој поради тотална рефлексија не може да излезе од призмата со n_2. Колкав е аголот на девијација во тој случај?

Решение:



Сл. 8.5

Од законот за прекршување, како и во претходната задача, добиваме:

$$n_2 \sin\alpha_3 = \sin\beta_3 = 1$$

$$\alpha_3 = \arcsin \frac{\sin\beta_3}{n_2} = 38,7°.$$

За големините на аглите важи:

$$\alpha_3 = \theta + \beta_2 \Rightarrow \beta_2 = 8.7°,$$

а за прекршувањето помеѓу двете призми:

$$n_1 \sin\alpha_2 = n_2 \sin\beta_2,$$

од каде добиваме $\alpha_2 = \text{arc}\sin n_2 \dfrac{\sin\beta_2}{n_1} = 9,3°$. Од триаголниците на Сл. 8.5 се гледа дека важи:

$$\beta_1 = \theta + \alpha_2 = 39{,}3°.$$

Конечно, големината на упадниот агол треба да биде помала од:

$$\sin\alpha_1 = n_1 \sin\beta_1$$

$$\alpha_1 = \arcsin(n_1 \sin\beta_1) = 71{,}8°.$$

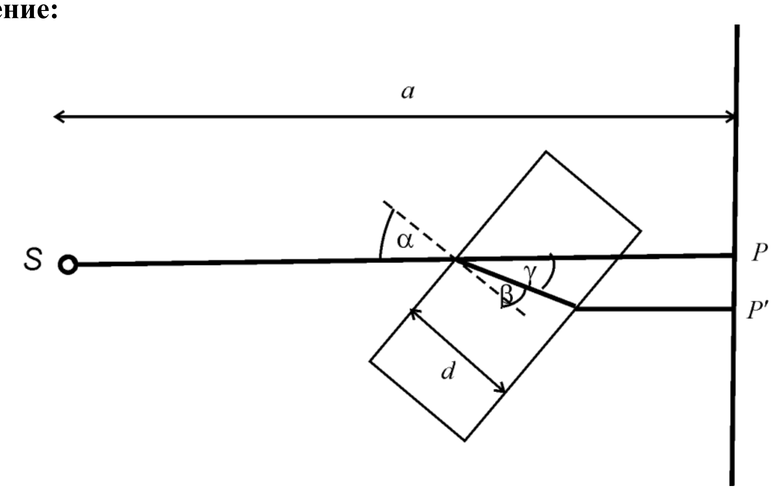
Аголот на девијација во тој случај е $\delta + \alpha_1 = 90° \Rightarrow \delta = 18{,}2°$.

Задача 8.6. Светлосен извор S кој се наоѓа на растојание a = 1 m од екран, испраќа светлосен зрак нормално на екранот. Зракот паѓа во точката P. На патот на зракот се поместува план – паралелна плоча со дебелина d = 0,2 m и n = 1,5, така што правецот на простирање на зракот во плочата зафаќа агол $\gamma = 30°$ со првобитниот правец.

а) Да се најде поместувањето $\overline{PP'}$.

б) Да се најде релативната промена на времето во однос на времето за кое зракот го поминува патот $\overline{SP'}$.

Решение:



Сл. 8.6

а) Според сл. 8.6 следува $\alpha = \beta + \gamma = \beta + 30°$, а од законот на прекршување:

$$\sin\alpha = n \sin\beta$$

$$\sin(\beta + 30^{\circ}) = n \sin\beta \text{, т.е. } \beta = 38{,}26^{\circ}$$

Поместувањето ќе биде еднакво на $\overline{PP'} = \dfrac{d}{\cos\beta}\sin 30^{\circ} = 0{,}127 \text{ m}$.

б) Релативната промена на времето за кое светлинскиот зрак стигнува до екранот во двата случаи е:

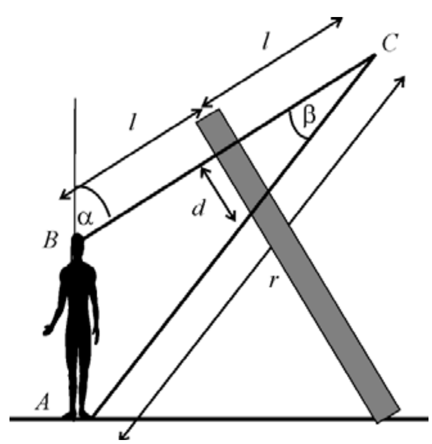
$$\varepsilon = \frac{\Delta t}{t} = \frac{t' - t}{t},$$

каде $t = \dfrac{a}{c}$ и $t' = \dfrac{a - \dfrac{d}{\cos\beta}\cos 30^{\circ}}{c} + \dfrac{\dfrac{d}{\cos\beta}}{c/n}$.

За релативната промена се добива $\varepsilon \approx 15\%$.

Задача 8.7. Човек со висина 1,8 m се огледува во огледало кое е наведнато кон него под агол од 60º кон хоризонтот. Ако очите на човекот се на растојание l = 3m од огледалото, да се одреди најкратката должина на огледалото за да човекот се види цел во него.

Решение:



Сл. 8.7

Според Сл. 8.7 аголот ABC = 180º - α, па користејќи ја косинусната теорема добиваме:

$$r^2 = h^2 + (2l)^2 - 4lh\cos(180° - \alpha)$$
$$r^2 = h^2 + 4l^2 + 4lh\cos\alpha$$
$$r = 7\ \text{m}.$$

Понатаму со користење на синусната теорема од ΔABC, добиваме:

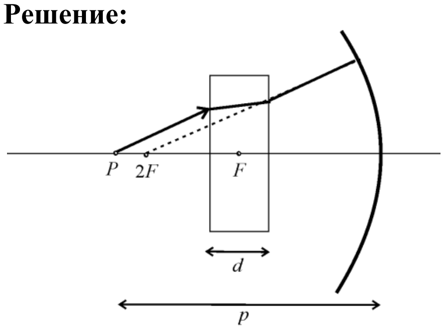
$$\frac{\sin\beta}{h} = \frac{\sin(180° - \alpha)}{r},\ \text{т.е. } \beta = 12{,}86°.$$

Минималната големина на огледалото треба да биде:

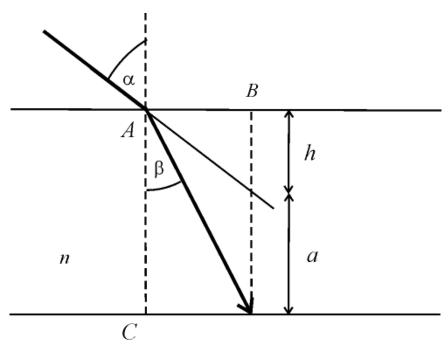
$$d = l\,\text{tg}\beta = 3\cdot 0{,}228 = 0{,}68\ \text{m}.$$

Задача 8.8. Помеѓу конкавно сферно огледало (J = 1 m^{-1}) и предмет – точкест извор на светлина кој се наоѓа на растојание p = 210 cm од темето на огледалото се поставува планпаралелна стаклена плочка. Колкав треба да биде индексот на прекршување на планпаралелната плочка со дебелина d = 30 cm, за да положбите на предметот и ликот се поклопат? (Отворот на огледалото е доволно мал, така да односот на тангесите на упадниот и аголот на прекршување низ планпаралелната плочка, може да се замени со односот на синусите од тие агли).

Решение:



Сл. 8.8.1



Сл. 8.8.2

Положбите на ликот и предметот може да се совпаднат ако тие се на растојание двојно поголемо од фокусното. Значи треба плоча со таков n и d да продолжението на зраците поминува низ центарот на кривината на огледалото:

$$f = \frac{1}{J} = 1\ \text{m}.$$

Поместувањето на предметот поради прекршувањето на зраците низ планпаралелната плочка е $a = \overline{PP'} = p - 2f$, каде дебелината на плочката е $d = a + h$, (Сл. 8.8.2).

Од законот за прекршување и од податокот дека $\overline{AB} = \overline{CD}$, следува:

$$\sin\alpha = n\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \quad \text{и}$$

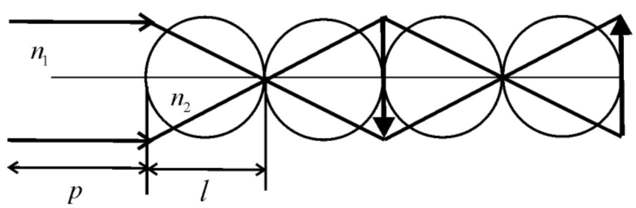
$$h\,\mathrm{tg}\alpha = d\,\mathrm{tg}\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{d}{h}\,.$$

Од последниве две равенки следува:

$$n = \frac{d}{h} = \frac{d}{d-a} = \frac{d}{d-(p-2f)} = 1{,}5\,.$$

Задача 8.9. Во картонска цевка има четири проѕирни топки наредени една до друга при што кога ќе се погледне низ средината, сликата како да се гледа низ обично дебело стакло. Ако пак се погледне низ една топка во далечина се гледа матно и нејасно. Ако пак ставиме две топки една до друга низ нив се гледа превртена слика ни зголемена, ни намалена. Да се пресмета индексот на прекршување на материјалот од кој се направени топките.

Решение:



Сл. 8.9

За прекршувањето низ овој оптички систем ќе важи скицата дадена на Сл. 8.9. На неа се гледа правецот на простирање на светлинските зраци опишан во условот на задачата.

Равенката за прекршување на светлината низ сферна површина е:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{l} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

и таа ќе важи за прекршувањето кога набљудуваме низ една топка, кога набљудувањето е од далечина т.е. $p = \infty$, а ликот е матен и нејасен т.е. се добива на самата површина од топката на растојание $l = 2R$, односно:

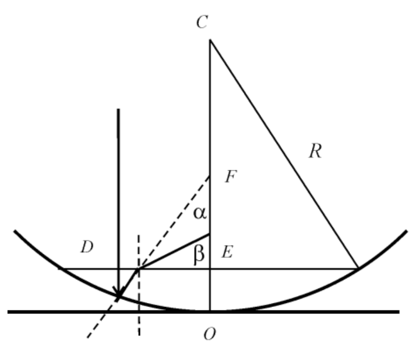
$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{2R} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$n_2 = 2n_1 .$$

Бидејќи светлинските зраци доаѓаат од воздух $n_1 = 1$, се добива дека индексот на прекршување на стаклото од кое се направени топките е $n_2 = 2$.

Задача 8.10. Во хоризонтално поставено конкавно огледало се става многу тенок слој вода со индекс на прекршување $n = 1{,}33$. Радиусот на кривината на огледалото е $R = 16$ cm. Да се определи фокусното растојание на системот огледало – вода?

Решение:



Сл. 8.10

Фокусното растојание на огледалото е $f = \dfrac{R}{2}$.

Законот за прекршување на граничната површина воздух-вода е $n \sin\alpha = \sin\beta$,

каде α - агол на паѓање на зраците од вода во воздух, а β - агол на прекршување.

Тогаш, од условот дека слојот вода е многу тенок следува:

$$\overline{DE} = \overline{EF} \mathrm{tg}\alpha \text{ и}$$

$$\overline{DE} = \overline{EF_1}\,\mathrm{tg}\beta\ ,$$

при што важи дека $\overline{EF} \approx \overline{OF}$; $\overline{EF_1} \approx \overline{OF_1}$ од каде следува:

$$\overline{OF}\mathrm{tg}\alpha = \overline{OF_1}\mathrm{tg}\beta\text{ , т.е. } f\mathrm{tg}\alpha = f_1\mathrm{tg}\beta\ ,$$

каде f_1 е фокусно растојание на огледалото со слојот вода.

За мали агли $\mathrm{tg}\alpha \approx \sin\alpha$; $\mathrm{tg}\beta \approx \sin\beta$, па добиваме:

$$f_1 = f\,\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta} = f\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{R}{2}\frac{1}{n} = 6\ \mathrm{cm}\ .$$

Задачата може и поедноставно да се реши ако огледалото – слој вода се разгледува како оптички систем од огледало и водена леќа, чија јачина е:

$$J = J_1 + 2J_2,$$

бидејќи низ водената леќа зраците поминуваат двапати, т.е.:

$$J = \frac{2}{R} + 2(n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{2n}{R}\ .$$

$$f = \frac{1}{J} = 6\ \mathrm{cm}\ .$$

Задача 8.11. Испакнато – вдлабната (конвексно – конкавна) леќа со радиуси R и $-3R$, соодветно е посребрена од испакнатата страна. Ако индексот на прекршување на стаклото на леќата е n = 1,5, да се определи еквивалентното фокусно растојание на системот.

Решение:

Фокусното растојание на системот леќа-огледало, ќе го пресметаме земајќи предвид дека светлинските зраци најпрвин ќе се прекршат низ леќата, па ќе се одбијат од огледалото и на крајот повторно ќе се прекршат низ оптичката леќа, односно:

$$J = 2J_1 + J_2.$$

Оптичките јачини на секој од одделните оптички елементи се:

$$J_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{2}{3R}(n-1),$$

$$\text{и } J_2 = \frac{2}{R}.$$

Вкупната оптичка јачина е:

$$J = 2\frac{2}{3R}(n-1) + \frac{2}{R} = \frac{2}{3R}(2n+1),$$

$$\text{или } f = \frac{1}{J} = \frac{3R}{2(2n+1)} = \frac{3}{8}R.$$

Задача 8.12. Од растојание p = 100 m се фотографира дрво. Висината на дрвото на негативот е 1 mm. Да се определи:

а) вистинската висина на дрвото;

б) длабочината на камерата,

ако оптичката јачина на камерата е J = 25 D.

Ако од истата далечина со истиот фотографски апарат снимаме автомобилски трки, дали времето на експонирање од $\frac{1}{250}$ s е доволно за да снимката биде остра (снимката е остра ако ликот не се помести повеќе од 0,1 mm). Автомобилите се движат со брзина од 250 km/h.

Решение:

Фокусното растојание на леќата на објективот е:

$$f = \frac{1}{J} = 0{,}04 \text{ m}.$$

Бидејќи предметното растојание е многу поголемо од фокусното растојание ($p << f$), ликот ќе се добие во фокусот, т.е. на растојание $l = f$ = 0,04 m.

а) За да ја определиме вистинската висина на дрвото (предметот) ќе ја искористиме равенката за оптичко зголемување:

$$z = \frac{P}{L} = \frac{p}{l},$$

од каде следува дека дрвото е високо $P = L\frac{p}{l} = 2{,}5 \text{ m}$.

б) Длабочината на камерата е еднаква на растојанието помеќу објективот и филмот, т.е. ликовното растојание 0,04 m.

При снимање на автомобилски трки, поместувањето на автомобилот кој се снима (поместувањето на предметот) ќе биде:

$$S = v \cdot t = 200\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{250}\,\text{s} = 0{,}22\ \text{m}\,.$$

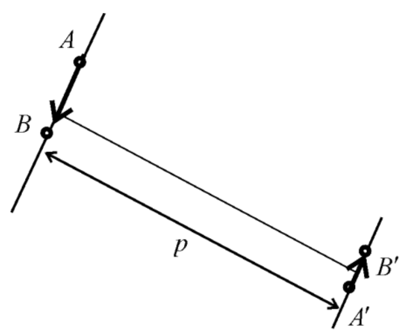
Користејќи ја повторно равенката за оптичко зголемување, за поместувањето на ликот се добива:

$$\frac{S}{s} = \frac{p}{l}\text{, т.е. } s = S\,\frac{l}{p} = 0{,}088\ \text{mm}\,.$$

Значи снимката ќе биде чиста.

Задача 8.13. Да се одреди максималното време на експонирање на филмот во фотоапарат, за да се добие јасна снимка на автомобил кој се движи со брзина v = 72 km/h на растојание p = 20 m од фотографот, нормално на оптичката оска на апаратот. За време на снимањето поместувањето на ликот не треба да е поголемо од a = 0,1 mm. Фокусното растојание на објективот на апаратот f = 2 cm.

Решение:



Сл. 8.13

За времето на експонирањето t, произволна точка A доаѓа во положбата B, т.е.:

$$\overline{AB} = v \cdot t$$

Ликот на поместувањето $\overline{AB}$ врз филмот е $\overline{A'B'}$, т.е. $\overline{AB} = P$ и $\overline{A'B'} = L$. Од равенката за оптичко зголемување следува:

$$u = \frac{l}{p} = \frac{L}{P}\text{, т.е. } L = P\,\frac{l}{p}\,,$$

а од равенка на леќа $\frac{1}{p}+\frac{1}{l}=\frac{1}{f}$, кога $f << p$ земаме дека ликот се добива во фокусната рамнина $f = l$. Оттука, за големината на ликот $\overline{A'B'}$ добиваме:

$$L = P\frac{l}{p} = v \cdot t\frac{f}{p}.$$

Оваа големина не треба да ја надмине вредноста a = 0,1 mm за да се добие јасна слика, па затоа максималното време на експозиција треба да биде:

$$t_{\max} = \frac{ap}{vf} = 5\ \text{ms}.$$

Задача 8.14. На растојание p = 75 cm пред симетрична двојно испакната леќа се наоѓа предмет со големина P = 20 cm нормално на оптичката оска на леќата, чиј лик на екранот е со големина L = 5 cm. На растојание d = 32,5 cm од леќата, се става симетрична двојно вдлабната леќа со f_1 = 15 cm. Да се најде на кое растојание од втората леќа треба да се постави екранот за да на него се добие јасен лик и колкав е тој лик?

Решение:

Од податоците за големина на ликот и предметот при прекршувањето низ двојно испакнатата леќа, се добива фокусното растојание на леќата:

$$l = p\frac{L}{P} = 18{,}75\ \text{cm},$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{l}=\frac{1}{f},\quad f = 15\ \text{cm}.$$

Ако пред оваа леќа на растојание d = 32,5 cm се постави двојно вдлабната леќа (растурна), ликот ќе се добие на растојание:

$$l_1 = \frac{1}{\frac{1}{(p-d)}+\frac{1}{f_1}} = 11{,}08\ \text{cm}$$

Треба да се нагласи дека тој е имагинарен и се наоѓа од иста страна на растурната леќа како и предметот. Тој лик ќе биде виртуелен предмет за собирната леќа и растојанието од него до собирната леќа ќе биде:

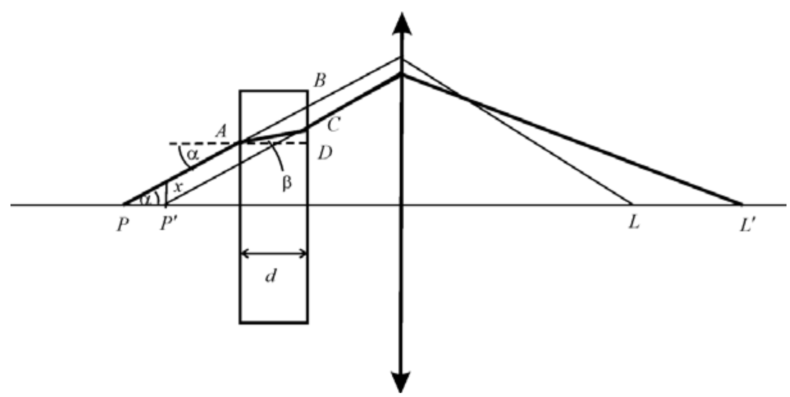
$$p' = l_1 + d = 43{,}58\ \text{cm}.$$

Равенката за собирната леќа ќе гласи:

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{f}\text{, т.е. } l'=22{,}87\ \mathrm{cm}.$$

Значи екранот треба да се оддалечи за $l'-l=4{,}12\ \mathrm{cm}$ за да се добие јасен лик.

Задача 8.15. Точкаст извор на светлина се поставува на растојание 30 cm од собирна леќа со фокусно растојание $f = 20$ cm . За колку ќе се помести ликот на изворот, ако меѓу изворот и леќата се стави планпаралелна транспарентна плочка со дебелина $d = 15$ cm и индекс на прекршување $n = 1{,}58$?



Сл. 8.15

Решение:

Од равенката за тенка леќа може да се пресмета ликовното растојание:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{l}=\frac{1}{f} \quad \text{т.е.} \quad l=\frac{p\cdot f}{p-f}=60\ \mathrm{cm}.$$

После поставувањето на планпаралелната плочка, како последица на прекршувањето на светлината низ неа, предметот виртуелно се поместува, поради што се менуваат и предметното и ликовното растојание:

$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{f} \quad \text{т.е.} \quad l'=\frac{p'\cdot f}{p'-f}$$

Од цртежот 8.15 може да забележиме дека за растојанието помеѓу правецот на првобитното простирање на зракот и правецот на зракот после поставувањето на плочката, важи релацијата:

$$p - p' = \frac{x}{\mathrm{tg}\alpha}$$

додека за растојанието x може да запишеме:

$$x = \overline{BC} = \overline{BD} - \overline{CD}$$

$$x = d \cdot \mathrm{tg}\alpha - d \cdot \mathrm{tg}\beta$$

Овде ќе ја искористиме тригонометриската трансформација дека за мали агли важи sin $\alpha \approx$ tg $\alpha \approx \alpha$. Користејќи го законот за прекршување и претходната замена, добиваме:

$$\sin\alpha = n \sin\beta \text{ т.е. } \alpha \approx n\beta\,.$$

За поместувањето на предметот важи:

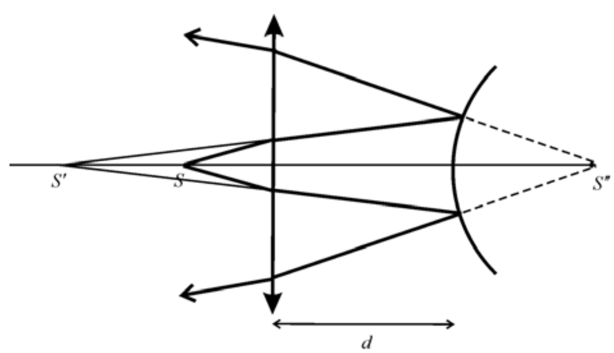
$$p - p' = d\,\frac{n\beta - \beta}{n\beta} = d\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

од каде за новите положби на предметот и ликот се добиваат растојанијата $p' = 25$ cm и $l' = 100$ cm , а за поместувањето на ликот:

$$\Delta l = l' - l = 40\,\mathrm{cm}\,.$$

Задача 8.16. Пред испакнато сферно огледало на растојание $d = 3$ cm од темето на огледалото, нормално на неговата оптичка оска, е поставена собирна леќа со фокусно растојание $f = 12$ cm. Ако на растојание $p = 10$ cm од леќата се постави точкаст светлински извор, конечниот светлински сноп што се формира по минувањето на светлината низ системот е паралелен. Да се пресмета радиусот R на огледалото.

Решение:



Сл. 8.16

При минувањето низ овој оптички систем светлинските зраци најпрво минуваат низ леќата чија равенка е:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}=\frac{1}{f}$$

од каде се добива ликовното растојание $l_1=-60\text{ cm}$. Тоа значи дека ликот се добива пред леќата. Овој лик е сега предмет за рефлексијата на зраците од сферното огледало, за кое важи равенката на сферно огледало:

$$\frac{1}{|l_1|+d}+\frac{1}{l_2}=-\frac{2}{R},$$

од каде за ликовното растојание се добива $l_2=-\dfrac{1}{\dfrac{1}{|l_1|+d}+\dfrac{2}{R}}$.

За да при повторното прекршување на светлинските зраци низ леќата се добие паралелен сноп, треба ликот од сферното огледало да биде во фокусот на леќата, т.е.:

$$|l_2|+d=f.$$

Од овде за радиусот на сферното огледало се добива $R=21\text{ cm}$.

Задача 8.17. Едната страна на двојновдлабната симетрична леќа е посребрена. Индексот на прекршување на стаклото е $n = 1{,}6$, а радиусот на кривината на леќата $R = 20$ mm. На растојание $p_1 = 50$ cm од леќата се наоѓа предмет со висина $h = 6$ cm. Да се определи големината на ликот добиен од двата оптички системи.

Решение:

Оптичкиот систем во оваа задача се состои од оптичка леќа и сферно огледало допрено до леќата. Тогаш конечниот лик ќе се добие после прекршување низ леќата, одбивање од огледалото и повторно прекршување низ оптичката леќа.

Зголемувањето на конечниот лик ќе зависи од зголемувањата на секој од елементите на оптичкиот систем, т.е.:

$$u = u_1 u_2 u_3 = \frac{l_1}{p_1}\frac{l_2}{p_2}\frac{l_3}{p_3} \qquad (1)$$

Растојанијата p_1, l_1, p_2, l_2, p_3 и l_3 може да се определат од равенките на леќа и огледало:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}=\frac{1}{f_1},$$

каде $\frac{1}{f_1}=(n-1)\left(-\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\right)$ е фокусното растојание на леќата. Од претходниве равенки за ликовното растојание се добива l_1 = 12,46 cm. Овој лик претставува предмет за сферното огледало, т.е. $l_1 = p_2$.
Равенката на сферно огледало гласи:

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{l_2}=\frac{1}{f_2}=\frac{2}{R}.$$

За ликовото растојание l_2 се добива l_2 = 5,55 cm. Добиениот лик претставува предмет за конечното прекршување низ леќата, при што $l_2 = p_3$.
Равенката на леќа во овој случај ќе биде:

$$\frac{1}{p_3}+\frac{1}{l_3}=\frac{1}{f_1},$$

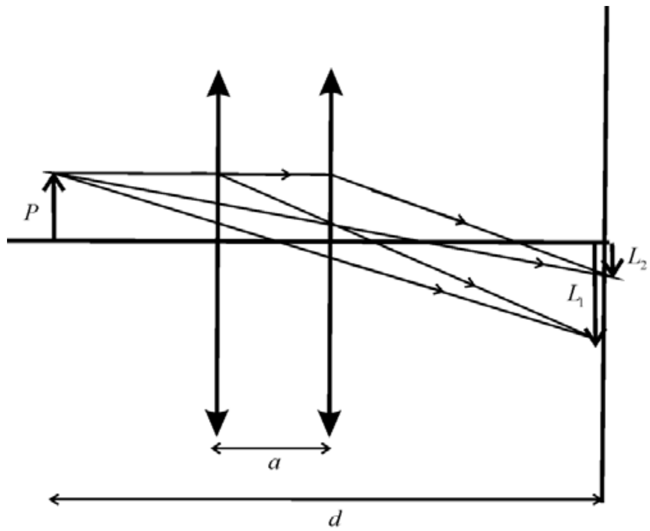
од каде за ликовото растојание се добива l_3 = 4,16 cm.

На крајот добиените вредности за растојанијата p_1, l_1, p_2, l_2, p_3 и l_3 ги заменуваме во равенка (1), при што се добива:

$$u = u_1 u_2 u_3 = \frac{l_1}{p_1}\frac{l_2}{p_2}\frac{l_3}{p_3} = 0{,}08\,.$$

Бидејќи за зголемувањето важи дека $u = u_1 u_2 u_3 = \frac{L_1}{P_1}\frac{L_2}{P_2}\frac{L_3}{P_3} = \frac{L_3}{P_1}$, за големината на конечниот лик добиваме $L_3 = u \cdot P_1 = 0{,}5\ \text{cm}$.

Задача 8.18. Меѓу предмет и екран е поставена леќа. Ако екранот е фиксен, а леќата се поместува кон него, тогаш јасен лик ќе се добие при две положби на леќата, прво зголемен, а потоа намален. Ако растојанието меѓу предметот и екранот е *d,* а помеѓу првата и втората положба на леќата *a,* да се покаже дека фокусното растојание изнесува $f = \left(d - \frac{a^2}{d}\right)$.



Сл. 8.18

Решение:

За двете положби на леќата ќе ги запишеме равенките на тенка леќа, соодветно:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{l_1}=\frac{1}{f} \text{ и } \frac{1}{p_2}+\frac{1}{l_2}=\frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Од условот на задачата $l_1 = d - p_1$, а останатите растојанија изразени преку предметното растојание p_1 се:

$$p_2 = p_1 + a \text{ и } l_2 = d - p_2 = d - p_1 - a.$$

Ако сега ги замениме овие растојанија во равенките (1), добиваме систем од две равенки, кој го решаваме по непознатата p_1:

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{d-p_1}=\frac{1}{f},$$

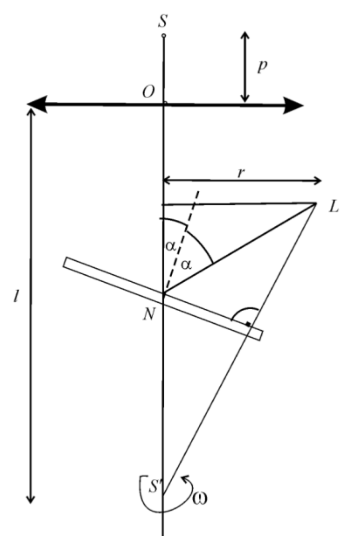
$$\frac{1}{p_1+a}+\frac{1}{d-p_1-a}=\frac{1}{f}.$$

Решението на системот е $p_1 = \dfrac{d-a}{2}$. Со замена во $l_1 = d - p_1$ за ликовното растојание се добива $l_1 = \dfrac{d+a}{2}$, што го заменуваме во равенката на леќа (1) за првата положба, од каде за фокусното растојание се добива изразот:

$$f = \frac{p_1 \cdot l_1}{p_1 + l} = \frac{\dfrac{d-a}{2} \cdot \dfrac{d+a}{2}}{\dfrac{d-a}{2} + \dfrac{d+a}{2}} = \frac{1}{4}\left(d - \frac{a^2}{d}\right).$$

Задача 8.19. Точкаст светлински извор S се наоѓа на главната оптичка оска на една леќа со фокусно растојание f = 0,5 m. Зад леќата има огледало (рамно) чија нормала со оптичката оска зафаќа агол α = 15°. Огледалото рамномерно ротира околу главната оптичка оска и при тоа ликот на изворот се движи по кружна патека со брзина v = 0,31 m/s. Да се пресмета периодот на ротација на огледалото. $\overline{SO} = 0{,}6\,\mathrm{m}$ и $\overline{ON} = 1\,\mathrm{m}$.

Решение:



Сл. 8.19

Брзината на ротирање на ликот е дадена со релацијата за брзина на кружно движење:

$$v = r\omega.$$

Ако овде го замениме изразот за кружна фреквенција $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, се добива:

$$v = r\frac{2\pi}{T}\ . \qquad (1)$$

Од равенката за тенка леќа, се пресметува ликовното растојание, т.е. растојанието $\overline{SS'}$ (слика 8.19), кое ќе биде еднакво на:

$$l = \frac{p \cdot f}{p - f} = 3\ \mathrm{m}$$

За да го определиме периодот на ротација според равенката (1), треба да се најде најпрвин радиусот на кружната патека т.е. $r = \overline{NL} \cdot \sin 2\alpha$, каде што $\overline{NL} = l - \overline{ON} = 2\ \mathrm{m}$.

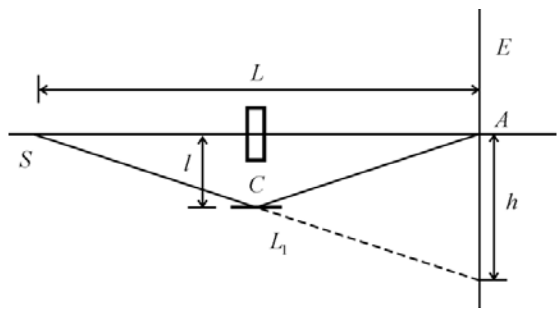
На крајот за периодот на ротација се добива:

$$T = 2\pi\frac{r}{v} = 2\pi\frac{\left(l - \overline{ON}\right)\sin 2\alpha}{v} = 20\ \mathrm{s}\ .$$

9. Физичка оптика

Задача 9.1. Во точката А на екран поставен на растојание L = 1 m од светлинскиот извор паѓаат два зрака монохроматска светлина со бранова должина λ = 0,5 μm. Зракот SA поаѓајќи од изворот поминува низ стаклена плочка (n = 1,5) со дебелина d = 12 μm, а зракот SCA е рефлектиран од рамно огледало C, кое се наоѓа на нормално растојание l = 5 mm од правецот на зракот SA. Да се одреди резултатот на интерференција во точката А.

Решение:



Сл. 9.1

Оптичката патна разлика која го вклучува и додавањето на рефлексијата на светлината од оптички погуста средина во точката C е:

$$\delta = L_1 - \left[L - d + nd\right] + \frac{\lambda}{2}.$$

Со пресликување на точката S во однос на правата која минува низ C може да се добие:

$$L_1 = \sqrt{L^2 + h^2} = L\sqrt{\left(\frac{h}{L}\right)^2 + 1}.$$

Со користење на $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$, кој важи за мали вредности на x се добива:

$$L_1 \approx L\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{L}\right)^2\right],$$

односно:

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{h^2}{L} - d(n-1) + \frac{\lambda}{2}.$$

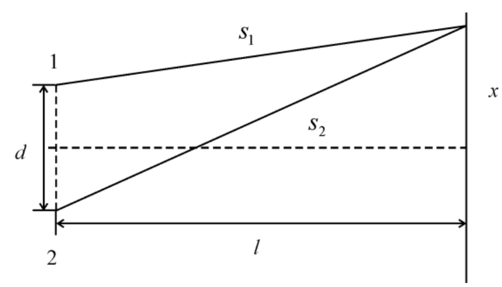
Условите за интерферентен максимум и минимум се $\delta = k\lambda$ - max и $\delta = (2k+1)\lambda/2$ - min. Бидејќи:

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{(2l)^2}{L} - d(n-1) + \frac{\lambda}{2} = 88{,}5\lambda,$$

во точката A има интерферентен минимум.

Задача 9.2. Рамен монохроматски бран паѓа нормално на дијафрагма со два тесни процепи меѓу кои растојанието d = 2,5 mm. На екранот поставен на l = 100 cm зад дијафрагмата се образува систем интерферентни ленти. За колку и во која насока ќе се поместат овие ленти, ако едниот од процепите се покрие со стаклена плочка со дебелина h = 10 μm и индекс на прекршување n = 1,5.

Решение:



Сл. 9.2

Од сликата 9.2 се гледа дека за патиштата кои ги минуваат двата зрака кои интерферираат важи:

$$s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2; \qquad s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2,$$

од каде се добива:

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = 2xd.$$

За големи растојанија $l >> x$, важи $s_2 + s_1 \approx 2l$, од каде:

$$s_2 - s_1 = \frac{xd}{l}.$$

Ако отворот 1 е покриен со стакло, тогаш оптичкиот пат на зракот 1 ќе се зголеми за $(n - 1)h$, што значи за толку ќе се намали оптичката патна разлика. Таа промена ќе се одрази во промена на x:

$$(n-1)h = \frac{\Delta x d}{l},$$

од каде:

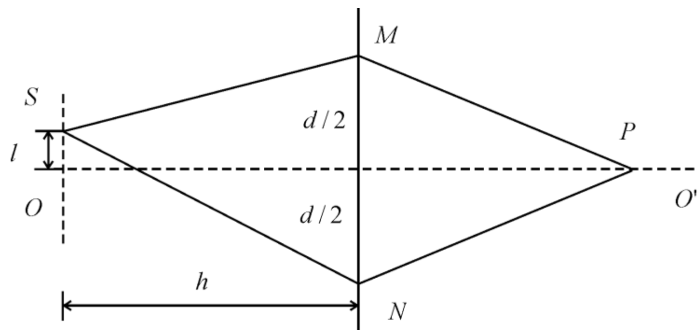
$$\Delta x = \frac{l(n-1)h}{d} = 2\text{mm}.$$

Сликата е поместена кон покриениот процеп.

Задача 9.3. Точкаст извор на светлина со $\lambda = 600$ nm се движи рамномерно паралелно со препрека на која има два мали отвори поставени на меѓусебно растојание $d = 2$ mm. Растојанието меѓу правецот на движење и препреката е $h = 1$ m. Приемник на светлина P кој е поставен на оската на системот OO' регистрира периодична промена на интензитетот на светлина. Да се одреди брзината на движење на изворот, ако фреквенцијата со која се менува интензитетот на светлина во P изнесува f. Се претпоставува дека изворот се движи во близина на оската OO'.

Решение:

Нека во почетниот момент S се наоѓа на OO' и тогаш интензитетот во P е максимален. После време $t = 1/f$, изворот ќе биде на растојание $l = vt$ од оската, а интензитетот пак ќе биде максимален. На сликата 9.4.1 растојанијата $\overline{MP}$ и $\overline{NP}$ се еднакви и не влијаат врз интерференцијата.



Сл. 9.3

Условот за максимум е $\overline{SN} - \overline{SM} = k\lambda.$ Од сликата 9.3 се гледа дека:

$$\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2} + l\right)^2} - \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2} - l\right)^2} = k\lambda,$$

односно:

$$h\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{d}{2} + l\right)^2}{h^2}} - h\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{d}{2} - l\right)^2}{h^2}} = k\lambda \cdot$$

Ако се употребат апроксимативните изрази:

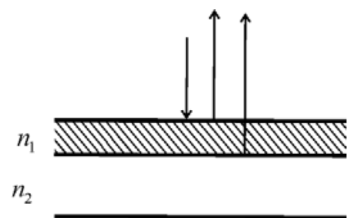
$$\begin{cases} h >> l + \dfrac{d}{2} \\ h >> l - \dfrac{d}{2} \end{cases} \Rightarrow h\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\left(l + \frac{d}{2}\right)^2}{h^2}\right] - h\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\left(l - \frac{d}{2}\right)^2}{h^2}\right] = \lambda,$$

ќе се добие $dl = h\lambda$. Конечно:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{hf\lambda}{d} = 4{,}5\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Задача 9.4. Заради намалување на загубите поради рефлексија од површината на стаклото на еден рамен колектор со n_2 = 1,6, истото се покрива со слој од материјал со индекс на прекршување на n_1 = 1,26. За која најмала дебелина на тој слој рефлектирачката способност на тој слој ќе биде еднаква на нула за светлина со бранова должина λ = 580 μm.

Решение:



Сл. 9.4

За да се намали рефлексијата потребно е да се јави интерферентен минимум во рефлектирана светлина. Двата зрака кои интерферираат се одбиваат од оптички погуста средина (едниот се движи низ воздух и се одбива од слојот со n_1, а вториот низ средината со n_1 и се одбива од средината со n_2). Затоа условот за интерферентен максимум е:

$$2n_1 d = (2z+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Минимална дебелина се јавува за z = 0 и притоа:

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_1} = 115\text{nm}.$$

Задача 9.5. Да се определи најмалата дебелина на тенко ливче, ако се знае дека кога тоа ќе се осветли со монохроматска светлина со бранова должина λ_1 = 640 nm се набљудува максимум на интерференција, а кога ќе се осветли со λ_2 = 400 nm се добива минимум на интерферентната појава. И во двата случаја упадниот агол α = 30°, а интерферентната појава се набљудува во рефлектирачка светлина. Индексот на прекршување на тенкото ливче е n = 1,5.

Решение:

Во рефлектирачка светлина настанува една рефлексија од оптички погуста средина и тоа само зракот кој се одбива од ливчето. Затоа условите за максимум односно минимимум при соодветните бранови должини се:

$$2nd\cos\beta = (2k_1+1)\frac{\lambda_1}{2} \rightarrow \max$$

$$2nd\cos\beta = 2k_2\frac{\lambda_2}{2} \qquad \rightarrow \min$$

Ако се изедначат горните изрази се добива:

$$k_2\lambda_2 = (2k_1+1)\frac{\lambda_1}{2},$$

односно:

$$k_2 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}(2k_1+1) = 0{,}8(2k_1+1).$$

За да биде k_2 цел број треба $2k_1 + 1 = 5;\ 10;\ 15. . .$ Од друга страна, за да биде минимална дебелината треба $2k_1 + 1$ да биде минимално, што значи $k_1 = 2$. Тогаш се добива:

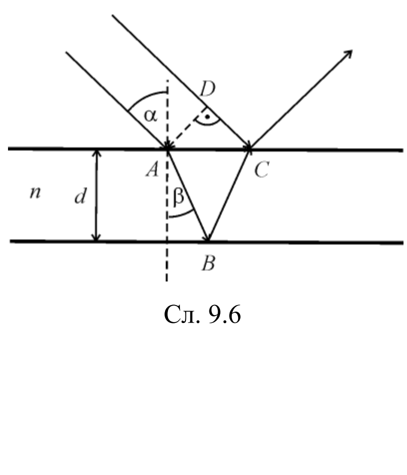
$$d_{\min} = \frac{(2k_1+1)\lambda_1}{4n\cos\beta} = \frac{5\lambda_1}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = 6{,}12\cdot10^{-5}\text{cm}.$$

Задача 9.6. Врз вода плива тенок слој од масло чија дебелина е $d = 2\mu$m и индекс на прекршување $n = 1{,}44$. Слојот се осветлува со монохроматска светлина, чија бранова должина е $\lambda = 600$ nm. Да се определат аглите под кои ќе се набљудува засилување на рефлектираната светлина.

Решение:

Патната разлика меѓу зраците кои интерферираат е $\overline{AB}+\overline{BC}-\overline{CD}$, односно од слика 9.6:

$$\delta = 2nd\cos\beta = 2nd\sqrt{1-\sin^2\beta}\ .$$



Сл. 9.6

Со користење на законот за прекршување на Снелиус и Декарт се добива

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \;\Rightarrow \delta = 2nd\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\cdot$$

Од двата зрака само еден се рефлектира од оптички погуста средина, при што доаѓа до промена на фазата за π, па условот за интерферентен максимум е $\delta = (2k+1)\lambda/2$, од каде следи:

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda,$$

$$\sin\alpha = \sqrt{n^2-\left[\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda}{2d}\right]^2}\,.$$

Поради симетрија на задачата, аголот е ограничен помеѓу 0 и $\pi/2$ и важи $0 \le \sin\alpha \le 1$, па со замена за синусот од последниот израз се добива условот:

$$\frac{2d\sqrt{n^2-1}}{\lambda} \le k + \frac{1}{2} \le \frac{2dn}{\lambda}$$

$$6{,}53 \le k \le 9{,}6.$$

За соодветните целобројни вредности на k се добиваат аглите:

$$\alpha_7 = 64{,}01^\circ;\quad \alpha_8 = 42{,}01^\circ;\quad \alpha_9 = 11{,}96^\circ.$$

Задача 9.7. Рамка од жица се потопува во вода со сапуница. На рамката настанува мембрана со димензии b = 0,02 m и h = 0,03 m. Во рефлектирана светлина со бранова должина λ = 500 nm, при упаден агол α = 30º, мембраната е светлозелена.

а) Да се одреди дали може да се измери масата на најтенката мембрана која ги задолува условите на задачата со лабараториска вага чија чувствителност е 0,1 mg.

б) Да се одреди бојата на најтенката мамбрана ако се гледа нормално. (n = 1,33 , ρ = 1000 kg/m³)

Решение:

а) Бојата на мембраната се должи на интеференција на светлината. Од условот за интерферентен максимум:

$$2nd\cos\beta = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = (2z+1)\frac{\lambda}{2},$$

минималната дебелина на мембраната се добива за $z = 0$:

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = 0{,}1\mu\text{m}.$$

Масата на мембраната е $m = \rho \cdot V = \rho \cdot b \cdot h \cdot d = 0{,}06$ mg, што значи дека со таа вага не може да се измери масата на мембраната.

б) За минималната дебелина при нормално паѓање на светлината од:

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2 0} = (2\cdot 0+1)\frac{\lambda}{2},$$

$\lambda = 532\mu$m, што одговара за жолтозелена боја.

Задача 9.9. Колкав е тапиот агол на френеловата би-призма, ако при растојание од изворот S до би-призмата еднакво на d, на екранот интерферентните линии на светлината со бранова должина λ се наоѓаат на растојание Δx. Индексот на прекршување на материјалот на призмата е n.

Решение:

Зраците кои потекнуваат од изворот се прекршуваат од призмата (од двата дела) и се простираат така што изгледа дека потекнуваат од два различни извори S_1 и S_2 (сл. 9.8). Оддалеченоста меѓу изворите може да се претстави едноставно ако се земе апроксимација на мали агли, која важи кога зраците кои потекнуваат од изворот се речиси паралелни на оската на системот и аголот на призмата α е мал. Тогаш горниот и долниот лик на изворот се оддалечени од оската за:

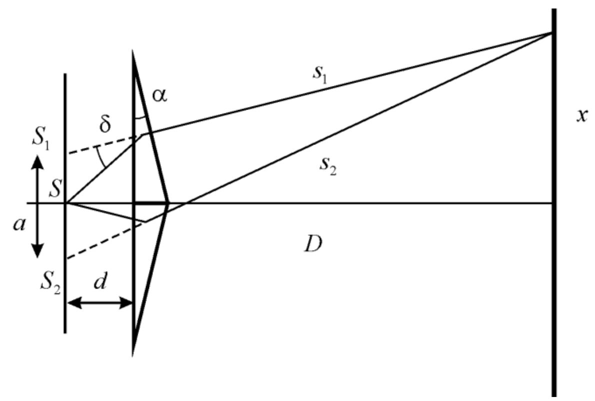
$$a/2 = d\delta = d(n-1)\alpha,$$

каде што $\delta = (n-1)\alpha$ е аголот на скршнување на зраците по поминување низ горниот или долниот дел од призмата. Тогаш растојанието меѓу изворите S_1 и S_2 е:

$$a = 2d(n-1)\alpha . \tag{1}$$

За патиштата кои ги поминуваат двата зрака кои интерферираат важи:

$$s_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2; \qquad s_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2,$$



Сл. 9.8

од каде се добива:

$$s_2^2 - s_1^2 = (s_2 + s_1)(s_2 - s_1) = 2x\,a.$$

За големи растојанија $D >> x$, важи $s_2 + s_1 \approx 2D$, од каде:

$$s_2 - s_1 = \frac{xa}{D}.$$

Интерферентен максимум се добива ако s_2 - s_1 = $k\lambda$, или за два соседни максимуми:

$$\Delta s = \lambda = \frac{\Delta x a}{D}.$$

Ако во последниот израз се употреби (1) аголот на призмата е:

$$\alpha = \frac{\lambda D}{2d(n-1)\Delta x}.$$

Задача 9.9. На стаклен клин, чиј индекс на прекршување се менува по законот

$$n(x) = n_0(1 + bx)$$

каде n_0 = 1,3 се набљудуваат два соседни максимуми на растојание x' = 50 mm и x'' = 51 mm. Да се определи константата b, ако брановата должина на употребената светлина е λ = 500 nm и аголот на клинот е $\alpha = 10^{-4}$ rad.

Решение:

Условите за интерферентен максимум (при една рефлексија од оптички погуста средина) за соседните положби се:

$$2n'd' = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda; \qquad 2n''d'' = \left(k + 1 + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

од каде следи:

$$2n''d'' - 2n'd' = \lambda. \tag{1}$$

За мали агли важи tg $\alpha \approx \alpha$, од каде што за клин се добива $d' = x'\text{tg}\alpha \approx x'\alpha$, односно $d'' \approx x''\alpha$. Ако ги употребиме апроксимациите за d' и d'', заедно со изразите за индексот на прекршување на клинот во соодветната положба во (1) ќе се добие:

$$2n_0(1 + bx'')\alpha x'' - 2n_0(1 + bx')\alpha x' = \lambda \,.$$

Со решавање на последната релација по непознатата b се добива:

$$b = \frac{\dfrac{\lambda}{2n_0} - \alpha(x'' + x')}{\alpha\left(x''^2 - x'^2\right)} = 9\text{m}^{-1}.$$

Задача 9.10. На сферната површина на планконвексна леќа постои зарамнет дел со полупречник r_0 = 3 mm со кој леќата лежи на рамна стаклена плоча. Полупречникот на кривина на леќата е R = 120 cm. Колкав е полупречникот на петтиот темен Њутнов прстен во рефлектирана светлина ако системот е осветлен со монохроматска светлина со $\lambda = 600$ μm.

Решение:

Од сликата 9.10 се гледа дека:

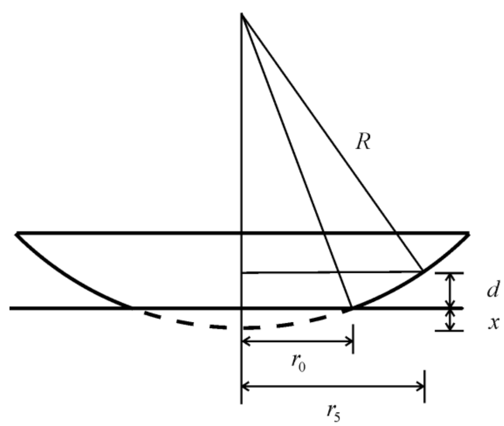
$$R^2 = r_0^2 + (R - x)^2 = r_5^2 + (R - x - d)^2.$$

Со занемарување на x^2 и d^2 во однос на останатите величини од последниот израз следи:

$$x = \frac{r_0^2}{2R}; \qquad x + d = \frac{r_5^2}{2R}.$$

Со одземање на последните два изрази се добива:

$$d = \left(r_5^2 - r_0^2\right)\frac{1}{2R}. \tag{1}$$



Сл. 9.10

Во рефлектирана светлина поради едно одбивање од оптички погуста средина (зракот кој се одбива од закривениот дел) условот за интерферентен максимум е:

$$2d = (2z + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{2}$$

Со комбинација на (1) и (2) се добива дека:

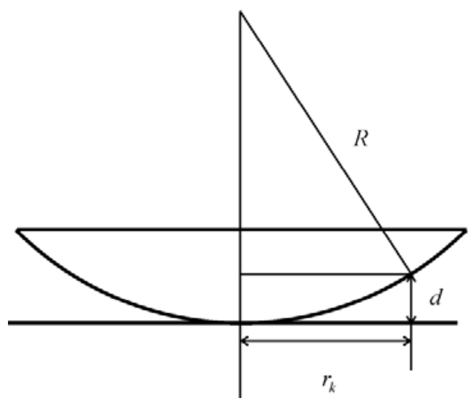
$$r_5 = \sqrt{r_0^2 + (2z+1)\frac{\lambda}{2}R} = 3{,}55\,\mathrm{mm}.$$

Задача 9.11. План-конвексна леќа со радиус на кривината R = 1 m и индекс на прекршување n_1 = 1,52 со сферната површина допира стаклена плочка со индекс на прекршување n_2 = 1,9. Просторот меѓу плочката и леќата е исполнет со течност чиј индекс на прекршување е непознат и треба да се одреди ако се знае дека радиусот на десеттиот светол Њутнов прстен во рефлектирана за светлина со бранова должина λ = 500 nm изнесува r_{10} = 1,90 mm.

Решение:

За радиусот на k – тиот Њутнов прстен важи релацијата (сл. 9.11)

$$R^2 = r_k^2 + (R-d)^2,$$



Сл. 9.11

од каде со апроксимирање се добива (спореди со задача 9.10):

$$d = \frac{r_k^2}{2R}.$$

Оптичката патна разлика која е последица на разликите во патиштата на двата зрака е:

$$2nd = 2n\frac{r_k^2}{2R}.$$

Фазната разлика која настанува поради рефлексија од оптички погуста средина зависи од индексите на прекршување на средината и стаклата. Притоа можни се следните три случаи кои треба да се испитаат посебно:

1. $n > n_1$; $n > n_2$ – промена за $\lambda / 2$ има на граничната површина леќа-средина
2. $n < n_1$; $n < n_2$ – промена за $\lambda / 2$ има на границата средина-плочка
3. $n_1 < n < n_2$ – и на двете гранични површини има промена за $\lambda / 2$.

За случаите 1 и 2 условот за k-ти интерферентен максимум е:

$$2nd - \frac{\lambda}{2} = 2n\frac{r_k^2}{2R} - \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2},$$

од каде:

$$n = \frac{(2k+1)R\lambda}{2r_k^2} = 1{,}45.$$

За случајот 3 условот за максимум е:

$$2nd = 2n\frac{r_k^2}{2R} = 2k\frac{\lambda}{2},$$

што значи дека:

$$n = \frac{kR\lambda}{r_k^2} = 1{,}38.$$

Според условите на задачата се гледа дека единствено решение е $n = 1{,}45$.

Задача 9.12. Со помош на системот прикажан на сликата 9.12.1 се набљудуваат Њутнови прстени од монохроматска светлина со бранова должина $\lambda = 694$ nm. Што ќе се набљудува во точката А ако $r = 1$ cm, $r_A = 2r / 3$, а $R = 8$ m?

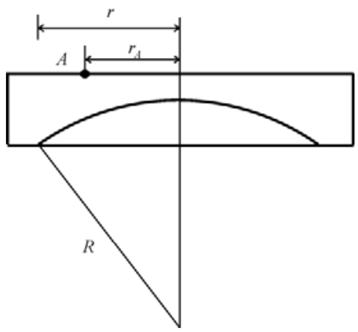
Решение:

Од сликата 9.12.2 се гледа дека за оптичката патна разлика важи:

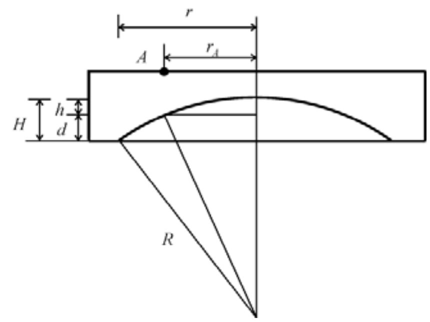
$$2d = 2(H - h). \qquad (1)$$

Ако се искористат апроксимациите од претходните две задачи се добива:

$$H = \frac{r^2}{2R}; \qquad h = \frac{r_A^2}{2R} = \frac{(2r/3)^2}{2R}. \qquad (2)$$



Сл. 9.12.1



Сл. 9.12.2

Со користење на (2) во (1) се добива:

$$d = \frac{r^2}{2R}\left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{r^2}{2R} \cdot \frac{5}{9}.$$

Оптичката патна разлика е:

$$\Delta = 2d = \frac{5r^2}{9\lambda} = 20\frac{\lambda}{2},$$

што претставува услов за интерферентен мимимум бидејќи зракот кој се рефлектира од закривената површина се рефлектира од оптички погуста средина.

Задача 9.13. Паралелен монохроматски сноп светлина со бранова должина λ паѓа на правоаголна призма со мал агол при врвот θ, чиј индекс на прекршување е n. Светлината поминува низ призмата, се прекршува, а потоа паѓа на дифракционата решетка со константа d. Да се определи аголот на првиот дифракционен максимум.

Решение:

Аголот на скршнување на снопот при поминување низ призмата, ако аголот при врвот е мал е $\alpha = (n - 1)\theta$, а условот за дифракционен максимум од прв ред:

$$d(\sin\alpha - \sin\varphi) = k\lambda = \lambda.$$

Со средување на последниот израз се добива:

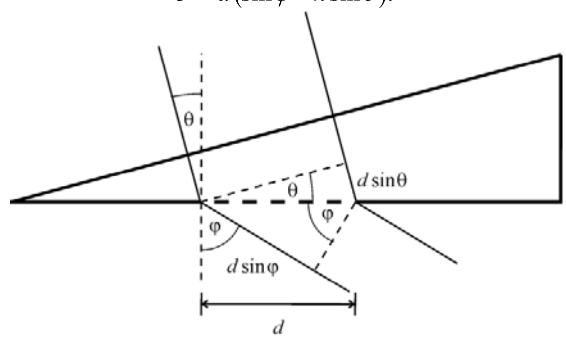
$$\sin\varphi = \sin[(n-1)\theta] - \frac{\lambda}{d}.$$

Задача 9.14. Врз пукнатина со ширина d е поставена призма со врвен агол θ. Нормално на површината на призмата паѓа монохроматска светлина со бранова должина λ. Да се определи правецот на нултиот максимум и правците на минимум на дифракција, ако индексот на прекршување на стаклото од кој е направена призмата е n.

Решение:

Оптичката патна разлика меѓу двата кохерентни зрака кои паѓаат на краевите на пукнатината според сл. 9.14 изнесува:

$$\delta = d(\sin\varphi - n\sin\theta).$$



Сл. 9.14

Нултиот максимум се добива при:

$$\delta = 0 \Rightarrow \sin\varphi = n\sin\theta$$

т.е. $\varphi = \arcsin(n\sin\theta)$.

Минимумите се определени со:

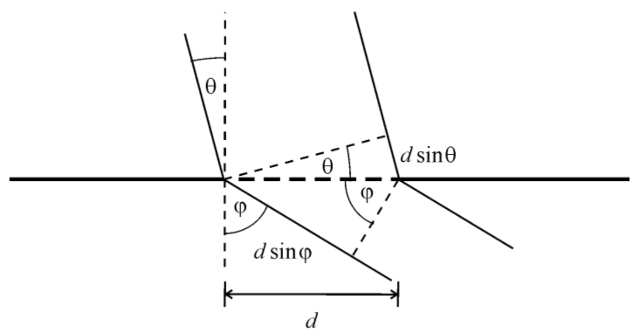
$$\min: \quad \delta = k\lambda \quad \Rightarrow \quad d(\sin\varphi - n\sin\theta) = k\lambda;$$

$$\sin\varphi = \frac{k\lambda}{d} + n\sin\theta;$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{k\lambda}{d} + n\sin\theta\right).$$

Задача 9.15. На дифракциона решетка со 500 процепи на 1 mm паѓа рамен монохроматски бран со $\lambda = 5{\cdot}10^5$ cm. Да се определи највисокиот ред на спектарот k кој може да се набљудува
а) при упаден агол 30º и б) при упаден агол од 0º
Решение:

Според сликата 9.15 оптичката патна разлика меѓу двата зрака кои интерферираат изнесува $\delta = d(\sin\varphi - \sin\theta)$. За максимум потребно е $\delta = k\lambda$.



Сл. 9.15

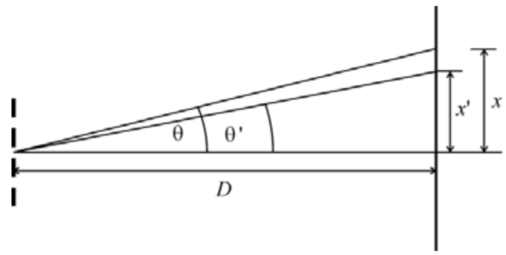
а) При упаден агол $\theta = 30º$; $k\lambda = d(\sin\varphi - ½)$. За највисокиот ред на максимум треба $\varphi = 90º$, од каде се добива $k = -6$, што значи дека максимумот се наоѓа лево од центарот.
б) За $\theta = 0º$; $k\lambda = d \sin \varphi$, од каде $k = 4$, т.е. максимумот е десно од центарот.

Задача 9.16. Рефлексивна оптичка решетка се добива со нанесување на темни прорези на метал. Ако металот е челична прачка со напречен пресек $s = 10{\times}10$ mm^2 и има 500 процепи на 1 mm, за колку ќе се помести на екранот max од прв ред, ако на прачката се дејствува со аксијална сила $F = 10$N ? На решетката нормално паѓа монохроматска светлина со бранова должина $\lambda = 632$ mm, а оддалеченоста на екранот од решетката е $D = 1$m. Модулот на еластичност на челикот е $E_y = 2.1{\times}10^{11}$ N/m^2.

Решение:

Од сликата 9.16 се гледа дека положбата на одреден максимум е определен со агол θ и важи:

$$x = D\,\mathrm{tg}\theta.$$



Сл. 9.16

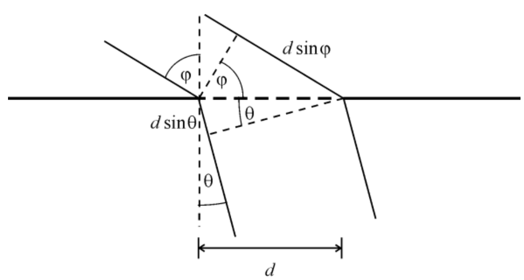
Условот за дифракционен максимум од прв ред е $d \sin\theta = z\lambda = \lambda$, од каде се добива $\sin\theta = \lambda / d$, или $\theta = 18{,}42^{\circ}$. Тогаш положбата на првиот максимум е $x = 333$ mm. Под дејство на силата F се менува константата на решетката d:

$$d' = d + \Delta d = d\left(1 + \frac{F}{SE_y}\right) = 2000{,}95\,\text{mm}.$$

Тогаш $x' = D\,\mathrm{tg}\theta'$, каде што $\theta' = \arcsin \lambda / d'$. Поместувањето на максимумот е $\Delta x = x - x' = 0{,}1$ mm.

Задача 9.17. Светлина со бранова должина $\lambda = 530$ nm паѓа на трансмисиона дифракциона решетка чија константа $d = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ m. Да се најде аголот на дифракциониот максимум од највисок ред ако светлината паѓа врз мрежичката под агол 60º во однос на нормалата. Од другата страна на решетката е провидна средина (вода) со $n = 1{,}33$.

Решение:



Сл. 9.17

Оптичката патна разлика на двата зрака според слика 9.17 е:

$$nd\sin\theta - d\sin\varphi = z\lambda. \tag{1}$$

Максимум од највисок ред се добива за агол $\theta = \pm 90^{o}$. Бидејќи $\varphi = 60^{o}$, редот ќе биде најголем за негативен агол. За $\theta = -90^{o}$:

$$z = \frac{d}{\lambda}\left(-n - \sin\varphi\right) = -6{,}215 \cdot$$

Најголемиот агол се добива од (1) за $z = -6$:

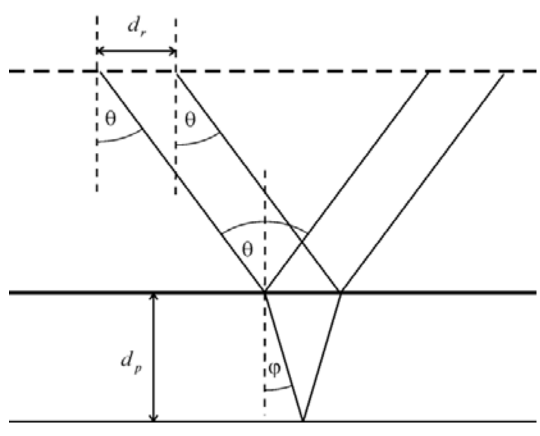
$$\theta = \arcsin\left[\frac{1}{nd}\left(d\sin\varphi - 6\lambda\right)\right] = 70^{\circ}.$$

Задача 9.19. Планпаралелна плоча со индекс на прекршување n = 1,6 е поставена паралелно зад дифракциона решетка со константа $d_r = 2\cdot 10^{-6}$ m. Нормално на решетката паѓа сноп монохроматска светлина, која по дифракцијата низ неа паѓа и ја осветлува планпаралелната плоча. Да се одреди минималната дебелина на плочата $d_{p,\min}$ при која доаѓа до максимално појачување на светлосните зраци во поминувачка светлина, кои потекнуваат од третиот дифракционен максимум на кој одговара агол $\theta = 30^{o}$. Системот е во воздух.

Решение:

Од условот за максимум кај дифракциона решетка $d_r\sin\theta = z\lambda$, се добива брановата должина на светлината:

$$\lambda = \frac{d_r \sin\theta}{z} = 333\,\mathrm{nm}.$$



Сл. 9.18

Максимално засилување при интерференција на светлината по поминување низ тенка плоча се добива при:

$$2nd_p \cos\varphi = 2d_p\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} = z\lambda.$$

Тогаш минималната дебелина се добива за $z = 1$:

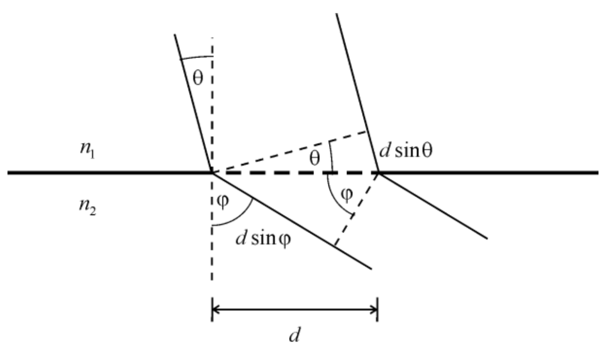
$$d_{p_{\min}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} = 110\,\text{nm}.$$

Задача 9.19. Две оптички средини со индекси n_1 и n_2 се граничат со дифракциона решетка чија константа е d. Да се докаже дека ако е точно неравенството

$$\lambda > (n_1 + n_2)d,$$

тогаш светлината поминува низ решетката исто како и низ мазна површина односно нема дифракција.

Решение:



Сл. 9.19

Условот за дифракционен максимум кога од двете страни на решетката има средини со индекси n_1 и n_2 гласи:

$$n_2 d\sin\varphi - n_1 d\sin\theta = m\lambda,$$

од каде:

$$|n_2 \sin\varphi - n_1 \sin\theta| = \left|\frac{m\lambda}{d}\right|. \tag{1}$$

Ако се употреби неравенството на триаголник $|a + b| \leq |a| + |b|$, се добива:

$$|n_2 \sin\varphi - n_1 \sin\theta| \leq |n_1 \sin\theta| + |n_2 \sin\varphi| \leq n_1 + n_2. \tag{2}$$

Со комбинација на релациите (1) и (2) се добива:

$$|m| \leq \frac{d}{\lambda}(n_1 + n_2).$$

Ако е исполнет условот на задачата ќе важи $|m| < 1$, т.е. $m = 0$. Но, во тој случај од (1) се добива законот за прекршување на светлината на Снелиус и Декарт, односно нема дифракција. Тогаш светлината се покорува само на законите на геометриската оптика.

10. Фотометрија

Задача 10.1. Колку пати е помала осветленоста при полна месечина од дневната осветленост? Аглите под кои се гледаат Сонцето и Месечината од Земјата се зема дека се еднакви и тие се рагледуваат како точкасти извори на светлина. Да се земе дека Месечината расејува 1/10-ти дел од светлината што паѓа на неа. Растојанието Земја – Месечина е $l = 4 \cdot 10^8$ m, а радиусот на Месечината е $r = 2 \cdot 10^6$ m. Растојанието Земја – Месечина е занемарливо во однос на растојанието Земја – Сонце.

Решение:

Сонцето го разгледуваме како точкаст светлински извор, па осветленоста од Сонцето е:

$$E_S = \frac{\Phi}{S} = \frac{I\Omega}{S} = \frac{I\dfrac{S}{R_{S-Z}^2}}{S} = \frac{I}{R_{S-Z}^2}.$$

Растојанието Сонце – Земја е приближно еднакво со растојанието Сонце – Месечина, па за осветленоста на Месечината се добива:

$$E = \frac{I}{R_{S-M}^2} = \frac{I}{R_{S-Z}^2}.$$

Според тоа, флуксот кој од Сонцето паѓа на Месечината е:

$$\Phi_{SM} = \frac{I}{R_{S-Z}^2} r^2 \pi,$$

бидејќи може да се смета дека Месечината како приемник за сончевите зраци има облик на диск со радиус r. Флуксот кој го зрачи Месечината е 1/10 од тој флукс и таа зрачи како полусфера. Затоа интензитетот на Месечината како светлински извор е:

$$I_M = \frac{0{,}1\Phi_{SM}}{2\pi}.$$

Од последните две релации се добива дека осветленоста на Земјата од Месечината е:

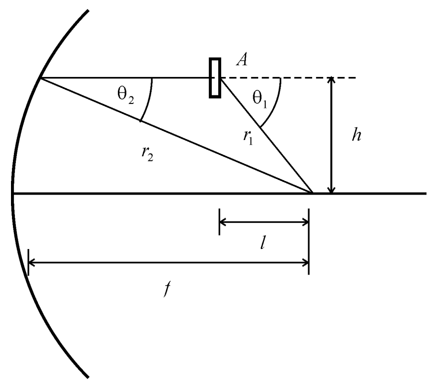
$$E_M = \frac{I_M}{R_{Z-M}^2} = 0,1\frac{Ir^2\pi}{2\pi R_{S-Z}^2 R_{Z-M}^2}.$$

Односот помеѓу осветленоста на Земјата при полна Месечина и дневната осветленост е:

$$\frac{E_M}{E_S} = 0,1\frac{Ir^2}{2R_{S-Z}^2 R_{Z-M}^2}\frac{R_{S-Z}^2}{I} = 0,1\frac{r^2}{2R_{Z-M}^2} = 1,25\cdot 10^{-6}.$$

Задача 10.2. Во фокусот на вдлабнато огледало со радиус *r* е поставен точкаст светлински извор со интензитет *I,* а на растојание *l* од изворот на висина *h* над оптичката оска се наоѓа мала плочка, нормална на оската на огледалото. Да се најде осветленоста од двете страни на плочката, при што треба да се земе дека рефлексијата од огледалото е потполна.

Решение:



Сл. 10.2

Осветленоста на плочката од едната страна (слика 10.2) е:

$$E_1 = \frac{I\cos\theta_1}{r_1^2};\ r_1^2 = l^2 + h^2$$

Од сликата може да се најде аголот θ, а потоа и осветленоста E_1:

$$\cos\theta_1 = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}; \qquad E_1 = \frac{Il}{\left(l^2 + h^2\right)^{3/2}}.$$

Осветленоста на плочката од другата страна е иста со осветленоста во точката A бидејќи рефлексијата од огледалото е потполна и зраците по одбивањето од огледалото се движат паралелно:

$$E_2 = \frac{I\cos\theta_2}{r_2^2}.$$

Бидејќи фокусното растојание на сферното огледало е половина од радиусот на закривеност на огледалото следува:

$$r_2^2 = f^2 + h^2 = \frac{r^2}{4} + h^2;$$
$$\cos\theta_2 = \frac{f}{r_2} = \frac{f}{\sqrt{r^2/4 + h^2}};$$
$$E_2 = \frac{Ir}{2\left(r^2/4 + h^2\right)^{3/2}}.$$

Задача 10.3. Сијалица со моќ 100 W и коефициент на корисно дејство од 3% се наоѓа во топка со дијаметар d = 30 cm. Материјалот од кој е направена топката е со коефициент на транспарентност k = 0,75. Да се пресмета сјајот на топката ако таа се смета за Ламбертов извор. Сијалицата да се разгледува како точкаст изотропен светлински извор и да се земе дека на 1 W енергија одговараат 683 lm.

Решение:

Сјајот на топката која зрачи како Ламбертов извор е поврзан со емитанцијата со:

$$L = \frac{M}{\pi}.$$

Топката пропушта k = 75% од осветленоста на нејзината внатрешност

$$M = kE.$$

Осветленоста на внатрешноста на топката од светилката е:

$$E = \frac{I\cos\theta}{(d/2)^2} = \frac{4I}{d^2}.$$

Јачината на светилката, која зрачи како точкаст извор е однос од светлинскиот флукс и просторниот агол:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}.$$

Коефициентот на корисно дејство е однос меѓу светлинскиот флукс и електричната моќност, па оттаму:

$$\Phi = \eta P.$$

Ако изведените изрази за M, E, I и Φ се заменат во изразот за сјај се добива:

$$L = \frac{4k\eta P}{4\pi^2 d^2} = 1730\,\mathrm{nt}.$$

Задача 10.4. Електрична светилка со моќност P = 100 W и коефициент на корисно дејство η = 4 % се наоѓа во топка што е направена од материјал со коефициент на транспарентност k = 0,75. Површината на топката ја расејува светлината дифузно. Да се одреди радиусот на топката ако нејзиниот сјај е L = 2127 cd/m^2. Светилката се разгледува како изотропен точкаст светлински извор (1 W = 683 lm).

Решение:

Само 4 % од електричната моќност на светилката се претвара во флукс на зрачење:

$$\Phi = \eta P.$$

Бидејќи светилката ја разгледуваме како точкаст светлински извор, интензитетот на светилката е еднаков на флуксот кој се зрачи во просторен агол:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{\eta P}{4\pi}.$$

Осветленоста на внатрешната страна од топката е:

$$E = \frac{I\cos\theta}{(d/2)^2} = \frac{4I}{d^2}.$$

Сјајот на топката која зрачи како Ламбертов извор е поврзан со емитанцијта:

$$L = \frac{M}{\pi}; \qquad M = kE; \qquad L = \frac{4k\eta P}{4\pi^2 d^2}.$$

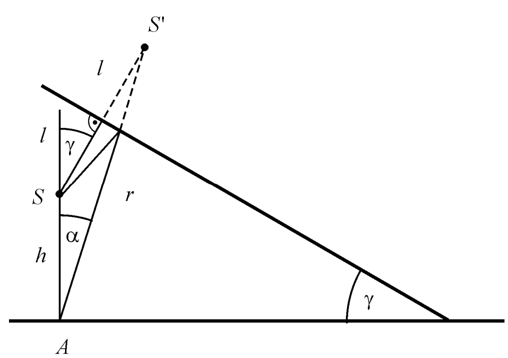
Од последниот израз може да се најде дијаметарот односно радиусот на топката:

$$d = \sqrt{\frac{k\eta P}{\pi^2 L}} = 31{,}2\,\mathrm{cm};$$

$$r = \frac{d}{2} = 15{,}6\,\mathrm{cm}.$$

Задача 10.5. Определете ја осветленоста која ја создава точкаст светлински извор во точката A на хоризонтална површина, која се наоѓа на растојание h од изворот, ако на растојание l од изворот се наоѓа рамно огледало, кое зафаќа агол γ со хоризонталната површина.

Решение:



Сл. 10.5

Осветленоста во точката A ќе ја создаваат изворот S и неговиот лик S'. Вкупната осветленост ќе биде:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I}{h^2} + \frac{I}{r^2}\cos\alpha.$$

Од косинусна теорема:

$$r^2 = h^2 + (2l)^2 - 2\cdot 2lh\cos(180^\circ - \gamma);$$
$$r^2 = h^2 + 4l^2 + 4lh\cos\gamma.$$

Од синусна теорема:

$$\frac{r}{\sin(180^\circ - \gamma)} = \frac{2l}{\sin\alpha};$$

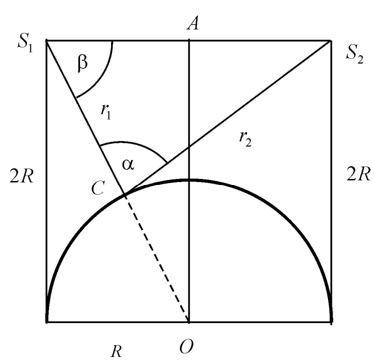
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4l^2\sin^2\gamma}{r^2}};$$

$$E = I\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{r^2}\sqrt{1-\frac{4l^2\sin^2\gamma}{r^2}}\right);$$

$$E = I\left(\frac{1}{h^2} + \frac{\sqrt{1-\left(4l^2\sin^2\gamma\right)/\left(h^2+4l^2+4lh\cos\gamma\right)}}{h^2+4l^2+4lh\cos\gamma}\right).$$

Задача 10.6. Полусфера со радиус е *R* осветлена од две еднакви светилки закачени на висина *2R* од површината на земјата, симетрично во однос на полусферата. Светилките се наоѓаат на растојание *2R* . Да се определи осветленоста на полусферата во точка која се наоѓа на минимално растојание од едниот извор, ако светлинскиот флукс на секоја светилка е *Φ*.

Решение:



Сл. 10.6

Осветленоста на точката која се наоѓа на минимално растојание од едниот извор (може да се разгледува во однос на било кој извор бидејќи изворите се идентични и поставени симетрично) е резултат на осветленоста од двата извори:

$$E = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I}{r_2^2}\cos\alpha .$$

Бидејќи интензитетот на светилките е:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi};$$

$$E = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\cos\alpha\right).$$

За да ги најдеме непознатите величини во последната равенка ја разгледуваме геометријата на проблемот (слика 10.6). Од триаголникот ΔS_1OA следува:

$$\overline{S_1O}^2 = (2R)^2 + R^2 = 5R^2;$$

$$r_1 = \overline{S_1O} - R = \sqrt{5}R - R = 1{,}24R,$$

а од ΔS_1CS_2:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4R^2 - 4r_1R\cos\beta .$$

Од триаголникот ΔS_1OA може да се најде аголот β:

$$\cos\beta = \frac{\overline{S_1A}}{\overline{S_1O}} = \frac{R}{\sqrt{5}R} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

што ќе доведе до:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4R^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}r_1R;$$

$$r_2^2 = (1{,}24R)^2 + 4R^2 - \frac{4\cdot 1{,}24}{\sqrt{5}}R^2 = 3{,}31R^2.$$

Од триаголникот ΔS_1CS_2 се добива:

$$4R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha,$$

од каде што за α следи:

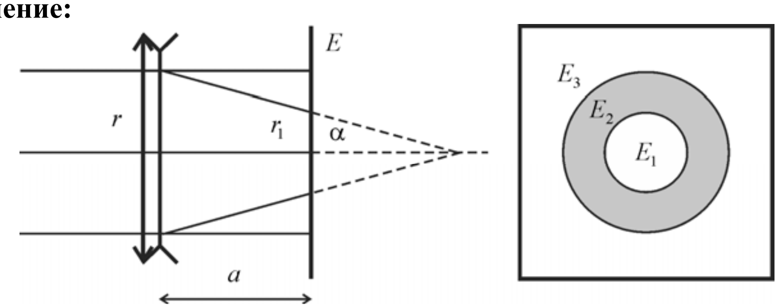
$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 4R^2}{2r_1r_2}.$$

Откако ќе се заменат сите променливи во изразот за осветленост се добива:

$$E = 0{,}7\frac{\Phi}{4\pi R^2}.$$

Задача 10.7. Сончеви зраци паѓаат нормално на екран и создаваат осветленост $E = 10^4$ lx. Пред екранот на растојание $a = 20$ cm од него се поставени две леќи, една до друга со оптички јачини $J_1 = -2$ D и $J_2 = 3$ D. Каква слика се добива на екранот? Пресметајте ги сите различни осветлености на екранот?

Решение:



Сл. 10.7

Оптичката јачина, односно фокусното растојание на системот леќи ќе биде:

$$J = J_1 + J_2 = 1\text{D};$$
$$f = \frac{1}{J} = 1\,\text{m}.$$

Од цртежот се гледа дека зраците ќе се фокусираат зад екранот што значи дека на екранот ќе се добие слика составена од концентрични кругови со различна осветленост. Осветленоста на екранот без леќите е:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Бидејќи нема загуба на флуксот во леќите, осветленоста на централниот круг ќе биде однос од упадниот флукс и површината на која тој паѓа:

$$E_1 = \frac{\Phi}{S_1} = E\frac{S}{S_1} = E\frac{\pi r^2}{\pi r_1^2}.$$

За да се најде односот меѓу радиусите на оптичкиот систем и осветлениот круг на екранот се користиме со цртежот:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{r}{f} = \frac{r_1}{f-a}.$$

Од тука можеме да заклучиме дека осветленоста на централниот круг на екранот е поголема од осветленоста на екранот без системот леќи:

$$E_1 = E\frac{f^2}{(f-a)^2} > E$$

$$E_1 = 1{,}56 \cdot 10^4 \text{ lx}.$$

Осветленоста меѓу централниот круг и надворешниот дел од екранот е нула, а на надворешниот дел од екранот каде што системот леќи не влијае врз осветленоста:

$$E_3 = 10^4 \text{ lx}.$$

Задача 10.8. Во еден сад со вода, на длабочина H под површината на водата е поставен точкаст светлински извор со јачина I. На висина H над површината на водата, на истата вертикала со изворот е поставена плочка со радиус $r \ll H$. Да се определи средната осветленост на плочката, занемарувајќи ги загубите на светлината заради апсорпција и рефлексија. Индексот на прекршување на водата е n.

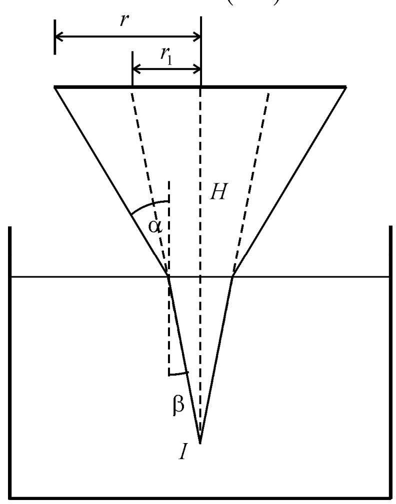
Решение:

Осветленоста на плочката е еднаква на односот меѓу флуксот кој паѓа на плочката и нејзината површина:

$$E = \frac{\Phi}{r^2\pi}.$$

Флуксот кој паѓа на плочката зависи од интензитетот на изворот и просторниот агол во кој се зрачи тој флукс:

$$\Phi = I\Omega = I\frac{r_1^2\pi}{(2H)^2}.$$



Сл. 10.8

Од слика 10.8 ги наоѓаме растојанијата r и r_1 при што земаме во предвид дека аглите α и β се многу мали поради тоа што $r << H$ и за мали агли важи $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$:

$$r_1 = 2H\mathrm{tg}\beta \approx 2H\beta;$$
$$r = H\mathrm{tg}\alpha + H\mathrm{tg}\beta \approx H(\alpha + \beta).$$

Ако го примениме законот за прекршување на светлината добиваме:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = n;$$

$$\frac{r_1}{r}=\frac{2H\beta}{H(\alpha+\beta)}=\frac{2}{\dfrac{\alpha}{\beta}+1}=\frac{2}{n+1}.$$

Ако се заменат променливите во равенката за осветленоста на плочката следи:

$$E=\frac{\Phi}{r^2\pi}=\frac{I\dfrac{r_1^2\pi}{(2H)^2}}{r^2\pi}=\frac{I}{H^2(n+1)^2}.$$

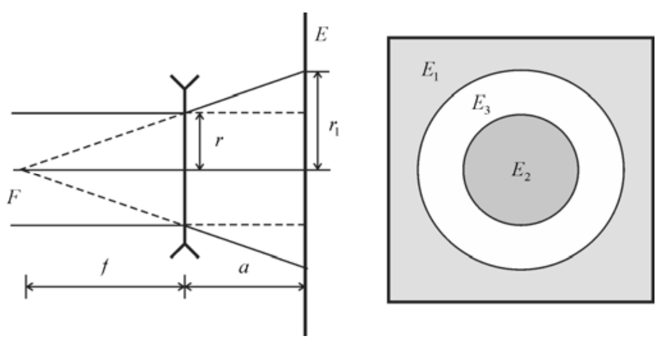
Задача 10.9. Сончеви зраци паѓаат нормално на екран и создаваат осветленост $E_1 = 10^4$ lx. Пред екранот на растојание a = 20 cm од него се поставува тенка леќа со оптичка јачина J = –2 D. Да се определи осветленоста на екранот во “сенката” на леќата и во светлиот круг околу “сенката”. Апсорпцијата на светлината во леќата може да се занемари.

Решение:

По прекршувањето низ леќата зраците се движат по правци кои се сечат во фокусот на леќата (слика 10.9). Осветленоста на леќата е иста со онаа на екранот E_1 во отсуство на леќата. Тогаш светлинскиот флукс што минува низ леќата е:

$$\Phi = E_1 r^2\pi,$$

каде што r е радиусот на леќата.



Сл. 10.9

Тој флукс на екранот ќе се распореди на површината од екранот ограничен со конусот од зраците кои излегуваат од леќата. Радиусот r_1 на тој круг може да се изрази преку радиусот r на леќата:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{f+a}{f}.$$

Осветленоста во сенката на леќата ќе биде:

$$E_2 = \frac{\Phi}{r_1^2 \pi} = \frac{\Phi f^2}{r^2 (f+a)^2 \pi} = E_1 \frac{f^2}{(f+a)^2} = 5{,}1 \cdot 10^3 \text{ lx}.$$

Околу сенката од леќата ќе имаме светол прстен каде придонес во осветленоста даваат и директните сончеви зраци, т.е.:

$$E_3 = E_2 + E_1 = 1{,}51 \cdot 10^4 \text{ lx}.$$

Задача 10.10. Вжарена плоча со сјај L = 10^6 nt, е поставена пред леќа чија површина е S_1 = 100 cm^2. Да се пресмета сјајот и осветленоста на ликот на плочата ако тој е на растојание l = 23 cm од леќата.

Решение:

Сјајот на плочата е:

$$L = \frac{I}{S \cos\theta}.$$

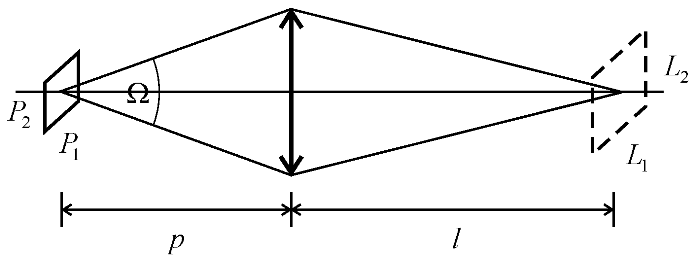
Бидејќи зраците од плочата паѓаат нормално на леќата $\theta = 0°$:

$$L = \frac{I}{S} = \frac{\Phi}{S\Omega}.$$

Флуксот кој што се зрачи од плочата е:

$$\Phi = LS\Omega = LP_1P_2 \frac{S_1}{p^2},$$

каде што P_1 и P_2 се димензиите на плочата, а p е растојанието од плочата до леќата (слика 10.10).



Сл. 10.10

Ако претпоставиме дека нема загуби во флуксот како резултат на поминување на светлината низ леќата, тогаш целокупниот флукс што паѓа на леќата ќе излегува од другата страна.

$$\Phi = \Phi';$$
$$LP_1P_2\frac{S_1}{p^2} = L'L_1L_2\frac{S_1}{l^2},$$

каде што L_1 и L_2 се димензиите на ликот на плочата, а l е растојанието од ликот до леќата. Од последниот израз се добива сјајот на ликот на плочата:

$$L' = L\frac{P_1P_2}{L_1L_2}\frac{l^2}{p^2}.$$

Од равенката за зголемување кај леќа важи:

$$\frac{P_1}{L_1} = \frac{p}{l} \text{ и } \frac{P_2}{L_2} = \frac{p}{l};$$

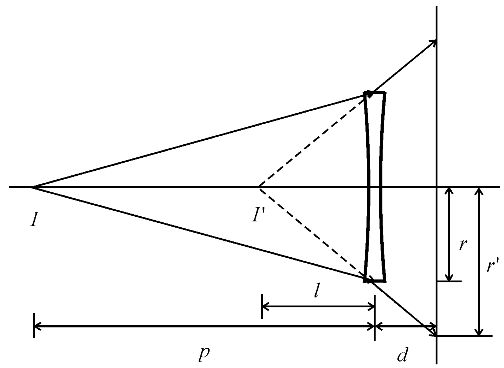
$$L' = L = 10^6 \text{ nt}.$$

Осветленоста на ликот на плочата ќе биде:

$$E = \frac{\Phi}{S'} = \frac{\Phi}{L_1L_2} = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ lx}.$$

Задача 10.11. Светлосен извор со јачина I = 10 cd е поставен пред растурна леќа на растојание p = 30 cm од неа. На екран поставен на растојание d = 5 cm зад леќата се добива светла површина со осветленост E = 40 lx. Да се определи фокусното растојание на леќата.

Решение:



Сл. 10.11

Според сликата 10.11 осветленоста на екранот ќе биде:

$$E = \frac{\Phi}{S'},$$

каде што *S'* е светлата површина. Флуксот кој потекнува од изворот и паѓа на површината на леќата *S* е:

$$\Phi = I\,\Omega = I\,\frac{S}{p^2}.$$

При поминувањето на светлинските зраци од изворот низ растурната леќа тие се расејуваат. Продолженијата на овие зраци се сечат во точка од оптичката оска на растурната леќа која е имагинарен лик на изворот на растојание *l* од леќата. Од сликата се гледа дека:

$$\frac{r}{l} = \frac{r'}{l+d} \Rightarrow \frac{S}{l^2} = \frac{S'}{(l+d)^2}.$$

Ако во равенката за осветленост на екранот ги замениме релациите за флуксот и површината *S'*, следува:

$$E = \frac{I}{p^2}\frac{S}{S'} = \frac{I}{p^2}\frac{l^2}{(l+d)^2}.$$

Со изразување на непознатата величина, за растојанието од ликот до леќата, се добива:

$$l = \frac{pd\sqrt{E/I}}{1 - p\sqrt{E/I}} = 0{,}075\,\mathrm{m}.$$

Фокусното растојание на леќата е:

$$f = \frac{lp}{p - l} = 0{,}10\,\mathrm{m}.$$

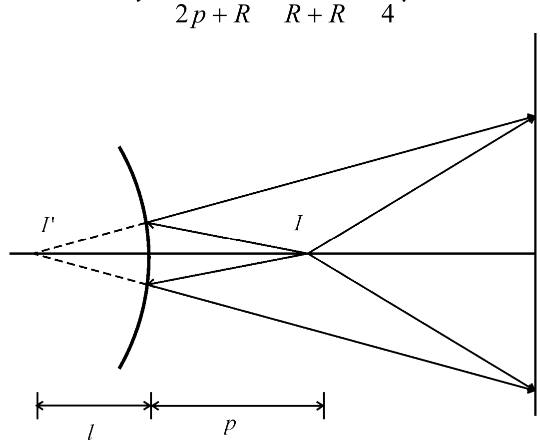
Задача 10.12. На оската на едно испакнато сферно огледало со радиус R се наоѓа точкаст светлински извор. Растојанието меѓу огледалото и изворот е $R/2$. Да се одреди осветленоста E_1 на површината која се наоѓа на растојание R од огледалото, ако осветленоста на површината која се наоѓа на растојание $2R$ од огледалото изнесува E_2.

Решение:

Кога светлински зраци паѓаат на испакнато огледало ликот што се добива ќе се наоѓа од другата страна на огледалото и ќе биде имагинарен (сл. 10.12). Од равенката за сферно огледало може да се добие растојанието меѓу огледалото и ликот на изворот:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{l} = -\frac{1}{f} = -\frac{2}{R};$$

$$l = \frac{pR}{2p + R} = \frac{\frac{R}{2}R}{R + R} = \frac{R}{4}.$$



Сл. 10.12

Ако претпоставиме дека нема загуби на флуксот при одбивање од огледалото $\Phi = \Phi'$, се добива:

$$I\frac{S}{p^2} = I'\frac{S}{l^2},$$

каде што I' е интензитетот на ликот на изворот. Од последниот израз следи:

$$I' = I\frac{l^2}{p^2} = \frac{1}{4}I.$$

Осветленоста на дадена површина ќе биде збир од осветленоста што ќе ја дава изворот и осветленоста од ликот. На растојание $2R$ од огледалото:

$$E_2 = \frac{I}{(2R-p)^2} + \frac{I'}{(2R+l)^2} = \frac{I}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2} + \frac{I}{4\left(\frac{9R}{4}\right)^2} = \frac{40I}{81R^2},$$

а на растојание R од огледалото осветленоста ќе биде:

$$E_1 = \frac{I}{(R-p)^2} + \frac{I'}{(R+l)^2} = \frac{I}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} + \frac{I}{4\left(\frac{5R}{4}\right)^2} = \frac{104I}{25R^2};$$

$$E_1 = \frac{104I}{25R^2} = \frac{104}{25}\frac{81}{40}E_2 = 8{,}424E_2.$$

ВРЕДНОСТИ НА НЕКОИ ФИЗИЧКИ КОНСТАНТИ

Име	Ознака	Вредност
Брзина на светлината во вакуум	c	299 792 485 m s^{-1}
Магнетна пермеабилност на вакуум	μ_0	$4\pi\cdot 10^{-7}$ H m^{-1}
Диелектрична константа на вакуум	e_0	$8{,}85\cdot 10^{-12}$ F m^{-1}
Гравитациона константа	g	$6{,}672\ 59\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Планкова константа	h	$6{,}626\ 075\ 5\cdot 10^{-34}$ J s
Авогадров број	N_A	$6{,}022\ 136\cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Елементарно количество електричество	e	$1{,}602\ 177\ 33\cdot 10^{-19}$ C
Атомска единица за маса	u	$1{,}660\ 540\ 2\cdot 10^{-27}$ kg
Притисок при нормални услови	p_0	101 325 Pa
Температура при нормални услови	T_0	273,15 K
Земјино забрзување	g	9,806 5 m s^{-2}
Маса на – електрон	m_c	$9{,}109\ 389\cdot 10^{-31}$ kg
– протон	m_p	$1{,}672\ 623\cdot 10^{-27}$ kg
– неутрон	m_n	$1{,}674\ 928\cdot 10^{-27}$ kg
Фарадеева константа	F	96 485,309 C mol^{-1}
Ридбергова константа	R	1,097 373 m^{-1}
Комптонова бранова должина на		
– електрон	Λ_e	$2{,}426\ 310\cdot 10^{-12}$ m
– протон	Λ_p	$1{,}321\ 410\cdot 10^{-15}$ m
– неутрон	Λ_n	$1{,}379\ 591\cdot 10^{-15}$ m
Моларен волумен на идеален гас при нормални услови	V_m	$22{,}414\cdot 10^{-3}$ m^3 mol^{-1}
Универзална гасна константа	R	8,314 510 J mol^{-1} K^{-1}
Болцманова константа	k	$1{,}380\ 658\cdot 10^{-23}$ J K^{-1}
Штефан – Болцманова константа	σ	$5{,}670\ 51\cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}
Винова константа	b	$2{,}897\ 756\cdot 10^{-3}$ m K
Густина на живата при нормални услови	ρ	13 594,04 kg m^{-3}