Соња Геговска-Зајкова, Катерина Хаџи-Велкова Санева

Елементи од векторска алгебра и аналитичка геометрија во простор

Скопје, 2011 год.

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е наменета за студентите од Факултетот за електротехника и информациски технологии во Скопје, но можат да ја користат и студенти од другите технички и природно-математички факултети, како и инженери и средношколци кои имаат потреба и интерес од изучување на материјата која се обработува во неа.

Книгата е поделена во три глави. Првата глава “Елементи од линеарна алгебра” се однесува на детерминантите од втор и трет ред. Дефинирани се детерминантите од втор и трет ред, дадени се начини за нивно пресметување, наведени се свнивните својства и примената за решавање системи линеарни равенки.

Во втората глава е обработен голем дел од векторската алгебра. Воведени се поимите просторен вектор и Декартов правоаголен координатен систем во простор, а покрај операциите собирање вектори и множење вектор со број, обработени се и операциите скаларен, векторски и мешан производ на вектори.

Во третата глава “Аналитичка геометрија во простор” се обработуваат трите важни геометриски поими: точка, права и рамнина во простор. Притоа се дефинирани повеќе видови равенки на права и рамнина и се разгледани заемните односи на две точки во простор, однос на точка и рамнина, точка и права, две прави, права и рамнина, две рамнини и однос на три рамнини.

При подготовка на учебникот, се обидовме материјата да ја изложиме детално и методолошки, што ќе овозможи секој читател да ја совлада истата без поголеми тешкотии.

Со цел да се олесни изучувањето на оваа материја, книгата содржи голем број решени примери. Крајот на решението на секој пример е означен со знакот ▲. Дадени се и 39 слики преку кои се илустрираат воведените поими или доказите на некои особини и тврдења. Со цел особините и тврдењата визуелно да се одделат од останатиот текст, тие се ставени во рамка. Од истите причини, дефинициите се ставени во двојна рамка. Најголем дел од тврдењата и особините се докажани, а крајот на доказите е означен со знакот ■.

Им благодариме на рецензентите проф. д-р Боро Пиперевски и проф. д-р Марија Кујумџиева-Николовска кои со своите добронамерни сугестии и забелешки помогнаа во подобрувањето на овој учебник.

Однапред им благодариме на сите читатели кои со свои коментари, сугестии и посочување на евентуалните грешки ќе придонесат за подобрување на овој учебник при неговото преиздавање.

Скопје, октомври 2011 година　　　　Авторите

СОДРЖИНА

1. Елементи од линеарна алгебра

1.1. Дефиниција на детерминанта од втор и трет ред

Ако $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ се реални или комплексни броеви, тогаш бројот

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

се нарекува **детерминанта од втор ред**.

Вообичаено е детерминантата да се обележува на следниов начин:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1)$$

Ако $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ се реални или комплексни броеви, тогаш бројот

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

се нарекува **детерминанта од трет ред**.

Таа се обележува на следниов начин:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array} \qquad (1.2)$$

Броевите a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ во детерминантите (1.1) и (1.2) се викаат **елементи** на детерминантата, при што индексот i ја означува **редицата**, а индексот j ја означува **колоната** во која се наоѓа елементот a_{ij}. Така на пример, елементите a_{21}, a_{22} и a_{23} се елементи од втората редица (првиот индекс на овие елементи е 2), а елементите a_{13}, a_{23} и a_{33} се елементи од третата колона на детерминантата од трет ред (вториот индекс на овие елементи е 3).

III колона

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

II редица

Елементите a_{ij} за кои $i=j,\ i\in\{1,2,3\}$, односно елементите $a_{ii},\ i\in\{1,2,3\}$, ја формираат **главната дијагонала** на детерминантата од трет ред, а елементите a_{ij} за кои $i+j=4,\ \ i,j\in\{1,2,3\}$, ја формираат **споредната дијагонала** на детерминантата од трет ред.

главна дијагонала

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

споредна дијагонала

1.2. Пресметување детерминанта од втор и трет ред

Детерминантата од втор ред се пресметува според дефиницијата, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 1. Да се пресметаат следниве детерминанти од втор ред:

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - (-\sin\alpha) \cdot \sin\alpha =$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

б) $\begin{vmatrix} \log_3 9 & \log_2 8 \\ \log_8 2 & \log_9 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1/3 & 1/2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0.$ ▲

Детерминантата од трет ред може да се пресмета на еден од следниве начини:

1. Правило на триаголници

Детерминантата од трет ред е број кој се добива како збир од производите од три елементи на детерминантата, така што од секоја редица и секоја колона се зема само по еден елемент. Притоа, со знак „+” е производот од елементите на главната дијагонала и двата производи од елементите кои се темиња на триаголниците чија основа е паралелна со главната дијагонала (на шемата овие триаголници се претставени со полна линија). Со знак „–” е производот од елементите на споредната дијагонала и двата производи од елементите кои се темиња на триаголниците чија основа е паралелна со споредната дијагонала (на шемата овие триаголници се претставени со испрекината линија).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

2. Развивање на детерминанта по елементите од една редица или колона

Детерминантата од втор ред, која се добива со изоставување на i-тата редица и j-тата колона од детерминантата од трет ред D, се нарекува **субдетерминанта** или **минор** на детерминантата D за елементот a_{ij} и се означува со D_{ij}.

Бројот $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ се нарекува **кофактор од втор ред** или **алгебарски комплемент** на детерминантата D во однос на елементот a_{ij}.

На пример,

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Од тоа што,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

следува дека детерминантата од трет ред D е еднаква на збирот од производите на елементите од првата редица со нивните соодветни алгебарски комплементи.

Аналогна особина важи и за елементите од произволна редица или колона, т.е. детерминантата D е еднаква на збирот од производите на елементите од една редица или колона со нивните соодветни алгебарски комплементи. Така, ако развивањето го направиме по елементите од i-тата редица, $i \in \{1,2,3\}$, детерминантата D ќе ја пресметаме на следниов начин:

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}. \tag{1.3}$$

Ако пак, развивањето го направиме по елементите од j-тата колона, $j \in \{1,2,3\}$, детерминантата D ќе ја пресметаме на следниов начин:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}. \tag{1.4}$$

3 . Сарусово правило

Детерминантата од трет ред D може да се пресмета на еден од следниве начини:

1. На десната страна покрај детерминантата се додаваат елементите од првите две колони. Потоа се сумираат производите од трите елементи кои лежат на главната дијагонала и двете дијагонални паралели десно од неа (на шемата прикажани со полна линија). Од оваа сума се одземаат производите од трите елементи кои лежат на споредната дијагонала и двете дијагонални паралели десно од неа (на шемата прикажани со испрекината линија).

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right. & & & \hspace{-4em}\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right. & \\ & & + & + & + \end{array} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$

2. Правилото може да се примени и на тој начин што под детерминантата ќе се додадат елементите од првите две редици. Потоа се сумираат производите од трите елементи кои лежат на главната дијагонала и двете дијагонални паралели под неа (на шемата прикажани со полна линија). Од оваа сума се одземаат производите од трите елементи кои лежат на споредната дијагонала и двете дијагонални паралели под неа (на шемата прикажани со испрекината линија).

$$\begin{array}{r|ccc|l} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ - & a_{31} & a_{32} & a_{33} & + \\ \multicolumn{1}{r}{-} & \multicolumn{1}{c}{a_{11}} & a_{12} & \multicolumn{1}{c}{a_{13}} & + \\ \multicolumn{1}{r}{-} & \multicolumn{1}{c}{a_{21}} & a_{22} & \multicolumn{1}{c}{a_{23}} & + \end{array} \quad \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array}$$

Пример 2. Да се пресмета детерминантата

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

а) користејќи правило на триаголници,

б) со разложување на детерминантата по елементите од некоја редица или колона,

в) користејќи го Сарусовото правило.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2+8\cdot0\cdot1+2\cdot(-1)\cdot1-1\cdot5\cdot1-3\cdot0\cdot(-1)-$
$-8\cdot2\cdot2=-9.$

б) Детерминантата може да се разложи по елементите на која било редица или колона, но за да имаме најмалку пресметки ќе ја разложиме по елементите на онаа редица или колона која содржи најмногу нули, на пример, по елементите од третата колона.

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 - 2 = -9.$$

в) $$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{matrix} = \begin{matrix} 3\cdot5\cdot2 + 8\cdot0\cdot1 + 1\cdot2\cdot(-1) - \\ -1\cdot5\cdot1 - 3\cdot0\cdot(-1) - 8\cdot2\cdot2 = -9. \end{matrix}$$

▲

1.3. Својства на детерминантите од втор и трет ред

1^0 Детерминантата не ја менува вредноста ако во неа редиците ги заменат местата со соодветните колони.

Детерминантата која се добива ако редиците ги заменат местата со соодветните колони се нарекува **транспонирана детерминанта** и се означува со Δ^T, односно D^T.

Навистина, нека $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Тогаш

$$\Delta^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Ако пак, $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, тогаш

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}= \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ & -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}=D. \end{aligned}$$

> **2^0** Ако две редици или колони во детерминантата си ги заменат местата, тогаш детерминантата го менува знакот.

Навистина, ако двете редици во детерминантата од втор ред $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ си ги заменат местата, тогаш се добива детерминантата

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}=-\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=-\Delta.$$

Аналогно се покажува и случајот ако двете колони во детерминантата од втор ред си ги заменат местата, како и случајот кога две редици или колони си ги заменат местата во детерминантата од трет ред.

> **3^0** Ако две редици или колони во детерминантата се еднакви, тогаш детерминантата е еднаква на нула.

Навистина, ако двете колони во детерминантата од втор ред се еднакви, тогаш

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}= a_{11}a_{21}-a_{11}a_{21}=0.$$

Ако на пример втората и третата редица во детерминантата од трет ред се еднакви, тогаш

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{22} - \\ -a_{13}a_{22}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{23} = 0. \end{array}$$

4^0 Детерминанта се множи со број така што се множат со тој број сите елементи од која било редица или колона во детерминантата.
Важи и обратното, ако сите членови на една редица или колона имаат заеднички множител, тогаш тој множител може да се извлече пред детерминантата.

Лесно се покажува дека за детерминанта од втор ред важат следниве равенства:

$$\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix},$$

каде што λ е реален или комплексен број.

Аналогни равенства важат и кај детерминанта од трет ред.

5^0 Ако елементите од една редица (колона) во детерминантата се пропорционални со соодветните елементи од друга редица (колона), тогаш детерминантата е еднаква на нула.

Навистина,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

каде што λ е реален или комплексен број.

Аналогно се покажува дека оваа особина важи и за детерминанта од трет ред.

6^0 Детерминантата не ја менува вредноста ако на елементите од една редица (колона) се додадат соодветните елементи од друга редица (колона) помножени со некој број.

Навистина, ако на елементите од првата редица на детерминанта од втор ред се додадат соодветните елементи од втората редица помножени со бројот λ, тогаш

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+\lambda a_{21})a_{22} - (a_{12}+\lambda a_{22})a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Аналогно се покажува дека својството важи и за детерминанта од трет ред.

7^0 Збирот од производите на елементите од една редица (колона) на детерминанта од трет ред со алгебарските комплементи од соодветните елементи на друга редица (колона) е еднаков на нула.

На пример, збирот од производите на елементите од втората редица со кофакторите од втор ред од третата редица е:

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} =$$

$$= a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{11}a_{23} + a_{22}a_{21}a_{13} + a_{23}a_{11}a_{22} - a_{23}a_{12}a_{21} = 0.$$

Според тоа, од особина 7^0, согласно (1.3) следува дека

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = \delta_{ik}D, \tag{1.5}$$

каде што $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$, $i, k \in \{1, 2, 3\}$, додека од особина 7^0 и особина (1.4) следува

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + a_{3j}A_{3k} = \delta_{jk}D, \tag{1.6}$$

каде што $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Забелешка. Користејќи ги својствата на детерминантите, секоја детерминанта од трет ред може да се доведе во еден од следниве триаголни облици:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Овие триаголни детерминанти лесно се пресметуваат:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ова е уште еден начин за пресметување детерминанта од трет ред.

Пример. Да се пресмета детерминантата $D = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ со нејзино доведување во некој триаголен облик.

Решение. Детерминантата ќе ја доведеме во следниов триаголен облик:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ако ги промениме местата на првата и третата редица, од втората особина добиваме:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

Користејќи ја особината 6^0, на елементите од втората редица ги додаваме соодветните елементи од првата редица помножени со -2, а на елементите од третата редица ги додаваме соодветните елементи од првата редица помножени со -3, при што добиваме:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2-2 & 5+2 & 0-4 \\ 3-3 & 8+3 & 1-6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 11 & -5 \end{vmatrix}.$$

Потоа, извлекуваме заеднички множител 7 од елементите од втората редица, па од особината 4^0 имаме:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 11 & -5 \end{vmatrix} = (-7)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 11 & -5 \end{vmatrix}.$$

Користејќи ја повторно шестата особина, на елементите од третата редица ги додаваме соодветните елементи од втората редица помножени со -11 и добиваме:

$$D=(-7)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{4}{7}\\ 0 & 11 & -5\end{vmatrix}=(-7)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{4}{7}\\ 0 & 11-11 & -5+\frac{44}{7}\end{vmatrix}=$$

$$=(-7)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{4}{7}\\ 0 & 0 & \frac{9}{7}\end{vmatrix}=(-7)\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{9}{7}=-9.$$

▲

1.4. Примена на детерминантите од втор и трет ред за решавање системи линеарни равенки

При решавање линеарна равенка со една непозната x

$$ax+b=0,\ a,b\in\mathbb{R}$$

можни се следниве случаи:

1) Ако $a\neq 0$, тогаш равенката има единствено решение $x=-\frac{b}{a}$.

2) Ако $a=b=0$, тогаш равенката има бесконечно многу решенија, бидејќи за секое $x\in\mathbb{R}$ важи $0\cdot x=0$. Во овој случај велиме дека равенката е неопределена.

3) Ако $a=0$ и $b\neq 0$, тогаш равенката нема решение, бидејќи не постои $x\in\mathbb{R}$ така што $0\cdot x=b$. Во овој случај велиме дека равенката е противречна.

1.4.1. Систем од две линеарни равенки со две непознати

Даден е системот од две линеарни равенки со две непознати

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}, \quad a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}. \qquad (1.7)$$

Решение на системот е секоја подредена двојка реални броеви (x, y) која ги задоволува двете равенки.

Во дадениот систем, a_{11} и a_{21} се коефициенти пред непознатата *x*, a_{12} и a_{22} се коефициенти пред непознатата *y*, а b_1 и b_2 се слободни членови.

За да го најдеме решението на системот, ја множиме првата равенка со a_{22}, а втората равенка со $-a_{12}$:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y = -b_2a_{12} \end{cases}.$$

Собирајќи ги двете равенки на новодобиениот систем, ја добиваме равенката:

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)x = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \qquad (1.8)$$

Слично, ако првата равенка помножена со $-a_{21}$ ја додадеме на втората равенка помножена со a_{11}, добиваме:

$$\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)y = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \qquad (1.9)$$

Воведувајќи ги следниве ознаки:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

равенките (1.8) и (1.9) ги запишуваме во облик $D\cdot x = D_x$ и $D\cdot y = D_y$, соодветно. Почетниот систем (1.7) е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} D\cdot x = D_x \\ D\cdot y = D_y \end{cases}. \tag{1.10}$$

Детерминантата D се нарекува **детерминанта на системот** и таа е формирана од коефициентите пред непознатите x и y, а детерминантите D_x и D_y се нарекуваат **детерминанти на непознатите *x* и *y***, соодветно.

Детерминантата D_x е формирана така што првата колона од детерминантата на системот D се заменува со колоната на слободните членови. Аналогно детерминантата D_y е формирана така што втората колона од детерминантата на системот D се заменува со колоната на слободните членови.

Можни се три случаи за системот (1.10):

1) Ако детерминантата на системот $D \neq 0$, тогаш линеарните равенки $D\cdot x = D_x$ и $D\cdot y = D_y$ имаат единствено решение, т.е. системот има единствено решение кое се определува со формулите

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

Овие формули се познати како Крамерови формули за решавање систем од две линеарни равенки со две непознати.

2) Ако $D = D_x = D_y = 0$, тогаш линеарните равенки $D\cdot x = D_x$ и $D\cdot y = D_y$ имаат бесконечно многу решенија. Значи, системот има бесконечно многу решенија и велиме дека е неопределен.

До овој заклучок може да се дојде и на следниов начин. Од тоа што

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad D_x = b_1a_{22} - b_2a_{12} = 0, \quad D_y = b_2a_{11} - b_1a_{21} = 0,$$

добиваме дека $\dfrac{a_{11}}{a_{21}} = \dfrac{a_{12}}{a_{22}} = \dfrac{b_1}{b_2} = k,$ т.е.

$$a_{11} = ka_{21}, \quad a_{12} = ka_{22}, \quad b_1 = kb_2, \; k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Така, системот (1.7) се трансформира во облик

$$\begin{cases} ka_{21}x + ka_{22}y = kb_2 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

Бидејќи двете равенки на горниот систем се еквивалентни, следува дека системот има бесконечно многу решенија, т.е. е неопределен.

3) Ако $D = 0$ и барем една од детерминантите D_x и D_y е различна од нула, тогаш барем една од линеарните равенки $D \cdot x = D_x$ и $D \cdot y = D_y$ нема решение. Значи, системот (1.7) нема решение и велиме дека е противречен.

Ако за коефициентите на десната страна од системот (1.7) важи $b_1 = b_2 = 0$, тогаш системот е **хомоген**. Очигледно е дека $x = 0, \; y = 0$ е решение на хомогениот систем кое се нарекува **нулто** или **тривијално** решение.

Бидејќи $D_x = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = 0$ и $D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0$ следува дека хомогениот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} D \cdot x = 0 \\ D \cdot y = 0 \end{cases}$, од каде заклучуваме дека:

1) Ако $D = 0$, тогаш хомогениот систем има бесконечно многу решенија.

2) Ако $D \neq 0$, тогаш хомогениот систем има само тривијално решение.

Пример 1. Користејќи детерминанти, да се решат следниве системи линеарни равенки:

а) $\begin{cases} 7x-6y=11 \\ 5x+2y=33 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 6x-9y=12 \end{cases}$, в) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=7 \end{cases}$.

Решение. а) За детерминантата на системот добиваме

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 44 \neq 0,$$

од каде што следува дека системот има единствено решение.
За детерминантите D_x и D_y добиваме:

$$D_x = \begin{vmatrix} 11 & -6 \\ 33 & 2 \end{vmatrix} = 220 \text{ и } D_y = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 33 \end{vmatrix} = 176,$$

па според Крамеровите формули имаме

$$x = \frac{D_x}{D} = 5, \quad y = \frac{D_y}{D} = 4.$$

Значи, множеството решенија на системот е $M = \{(5,4)\}$.

б) Бидејќи $D = D_x = D_y = 0$, следува дека системот има бесконечно многу решенија. До овој заклучок се доаѓа и директно ако забележиме дека првата и втората равенка се еквивалентни (ако првата равенка се помножи со 3 се добива втората равенка на системот).

Обликот на решенијата се добива ако една од непознатите се изрази преку другата непозната, на пример, ако од која било равенка ја изразиме непознатата y, добиваме $y = \dfrac{2x-4}{3}$.

Значи множеството решенија на системот е

$$M=\left\{\left(x,\frac{2x-4}{3}\right):\ x\in\mathbb{R}\right\}.$$

в) Бидејќи $D=0$, но $D_x=3\neq 0$, заклучуваме дека системот нема решение. До овој заклучок се доаѓа и директно, ако забележиме дека првата и втората равенка се противречни (ако првата равенка се помножи со 2 се добива равенката $4x+2y=10$ која е противречна на втората равенка $4x+2y=7$). ▲

Пример 2. Користејќи детерминанти, да се решат следниве хомогени системи линеарни равенки:

а) $\begin{cases}2x+3y=0\\4x+6y=0\end{cases}$, б) $\begin{cases}x-y=0\\5x+y=0\end{cases}$.

Решение. а) Бидејќи $D=0$, следува дека системот има бесконечно многу решенија (забележуваме дека двете равенки се еквивалентни). Множеството решенија на системот е

$$M=\left\{\left(-\frac{3y}{2},y\right):\ y\in\mathbb{R}\right\}.$$

б) Бидејќи $D=6\neq 0$, следува дека системот има само тривијално решение. ▲

1.4.2. Систем од три линеарни равенки со три непознати

Даден е системот од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases},\qquad(1.11)$$

каде што $a_{i,j},\ b_i\in\mathbb{R},\ i,j\in\{1,2,3\}$.

Решение на системот е секоја подредена тројка реални броеви (x, y, z) која ги задоволува трите равенки.

Притоа, a_{11}, a_{21} и a_{31} се коефициенти пред непознатата *x*, a_{12}, a_{22} и a_{32} се коефициенти пред непознатата *y*, a_{13}, a_{23} и a_{33} се коефициенти пред непознатата *z*, а b_1, b_2 и b_3 се слободни членови.

Детерминантата $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ се нарекува **детерминанта на системот** (1.11), а детерминантите

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ и } D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

се **детерминанти на непознатите *x*, *y* и *z*,** соодветно.

Со цел да го добиеме решението на системот, првата равенка ја множиме со кофакторот од втор ред A_{11}, втората со A_{21}, а третата со A_{31} и трите равенки ги собираме:

$$\begin{aligned} &\left(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}\right)x + \left(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}\right)y + \\ &+\left(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}\right)z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \end{aligned}$$

Согласно особината (1.6), важат равенствата

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} &= D, \\ a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} &= 0, \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} &= 0. \end{aligned}$$

Бидејќи

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D_x, \qquad (1.12)$$

горната равенка можеме да ја запишеме во облик

$$D\cdot x=D_x.$$

Слично, множејќи ја првата равенка со кофакторот од втор ред A_{12}, втората со A_{22}, а третата со A_{32} и собирајќи ги трите равенки добиваме равенка од облик $D\cdot y=D_y$, а множејќи ја првата равенка со кофакторот од втор ред A_{13}, втората со A_{23}, а третата со A_{33} и собирајќи ги трите равенки добиваме равенка од облик $D\cdot z=D_z$.

На тој начин почетниот систем (1.11) го трансформиравме во еквивалентниот систем

$$\begin{cases} D\cdot x=D_x \\ D\cdot y=D_y \\ D\cdot z=D_z \end{cases}.$$

Можни се следниве случаи:

1) Ако детерминантата на системот $D\neq 0$, тогаш линеарните равенки $D\cdot x=D_x$, $D\cdot y=D_y$ и $D\cdot z=D_z$ имаат единствено решение, т.е. системот има единствено решение кое се определува со формулите

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}.$$

Овие формули се познати како формули на Крамер за решавање систем од три линеарни равенки со три непознати.

2) Ако $D=D_x=D_y=D_z=0$ и барем еден кофактор од втор ред на детерминантата D е различен од нула, тогаш една равенка

од системот е последица од другите две, па системот има бесконечно многу решенија и велиме дека е неопределен.

Навистина, нека $D = D_x = D_y = D_z = 0$ и $A_{11} \neq 0$. Втората равенка ја множиме со кофакторот од втор ред A_{21}, третата со A_{31} и потоа двете равенки ги собираме:

$$\left(a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}\right)x + \left(a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}\right)y +$$
$$+\left(a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}\right)z = b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Добиената равенка е еквивалентна со равенката:

$$\begin{aligned}&\left(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} - a_{11}A_{11}\right)x + \left(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} +\right.\\&\left.+a_{32}A_{31} - a_{12}A_{11}\right)y + \left(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} - a_{13}A_{11}\right)z =\\&= b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} - b_1A_{11}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Согласно особината (1.6), важат равенствата:

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = D,$$
$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0 \text{ и}$$
$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0,$$

а од (1.12) следува $b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = D_x$, па равенката (1.13) го добива обликот

$$\left(D - a_{11}A_{11}\right)x - a_{12}A_{11}y - a_{13}A_{11}z = D_x - b_1A_{11}.$$

Бидејќи $D \cdot x = D_x$ се добива равенката

$$a_{11}A_{11}x + a_{12}A_{11}y + a_{13}A_{11}z = b_1A_{11}.$$

Ако оваа равенка се подели со $A_{11} \neq 0$ се добива првата равенка од системот $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$. Заклучуваме дека првата равенка од системот е последица од втората и третата равенка, односно системот (1.11) се сведува на систем од две равенки со три непознати. Според тоа, системот има бесконечно многу решенија.

3) Ако $D = D_x = D_y = D_z = 0$ и сите кофактори од втор ред на детерминантата D се еднакви на нула, тогаш се можни следниве два случаи:

3.1. Две равенки од системот се последица од третата, па системот има бесконечно многу решенија, т.е. системот е неопределен.
3.2. Системот нема решение, т.е. системот е противречен.

Навистина, нека претпоставиме дека $a_{11} \neq 0$ и

$$a_{21} = \alpha a_{11} \text{ и } a_{31} = \beta a_{11},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Од условот сите кофактори од втор ред на детерминантата D да се еднакви на нула, следува дека

$$a_{22} = \alpha a_{12},\ a_{23} = \alpha a_{13} \text{ и } a_{32} = \beta a_{12},\ a_{33} = \beta a_{13},$$

т.е. важи

$$a_{11} : a_{21} = a_{12} : a_{22} = a_{13} : a_{23} = 1 : \alpha \text{ и}$$

$$a_{11} : a_{31} = a_{12} : a_{32} = a_{13} : a_{33} = 1 : \beta .$$

Оттука

$$a_{11} : a_{21} : a_{31} = a_{12} : a_{22} : a_{32} = a_{13} : a_{23} : a_{33}.$$

Ако $b_2 = \alpha b_1$ и $b_3 = \beta b_1$, тогаш важат равенствата

$$a_{11} : a_{21} = a_{12} : a_{22} = a_{13} : a_{23} = b_1 : b_2 = 1 : \alpha \text{ и}$$
$$a_{11} : a_{31} = a_{12} : a_{32} = a_{13} : a_{33} = b_1 : b_3 = 1 : \beta ,$$

односно

$$a_{11} : a_{21} : a_{31} = a_{12} : a_{22} : a_{32} = a_{13} : a_{23} : a_{33} = b_1 : b_2 : b_3 .$$

Значи, ако првата равенка се помножи со α, се добива втората равенка, а ако првата равенка се помножи со β, се добива третата равенка од системот, т.е. втората и третата равенка се последица од првата, па системот (1.11) има бесконечно многу решенија.

Ако пак е исполнето барем едно од неравенствата $b_2 \neq \alpha b_1$ и $b_3 \neq \beta b_1$, тогаш втората или третата равенка се противречни со првата равенка, па системот (1.11) нема решение, односно е противречен.

4) Ако $D=0$ и барем една од детерминантите D_x, D_y и D_z е различна од нула, тогаш барем една од линеарните равенки $D\cdot x = D_x$, $D\cdot y = D_y$ и $D\cdot z = D_z$ нема решение. Значи, системот (1.11) нема решение.

Ако за коефициентите на десната страна од системот (1.11) важи $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, тогаш системот е **хомоген**.

Очигледно е дека $x=0,\ y=0,\ z=0$ е решение на хомогениот систем кое се нарекува **нулто** или **тривијално** решение.

Бидејќи

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,\quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = 0,\quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

хомогениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} D\cdot x = 0 \\ D\cdot y = 0 \\ D\cdot z = 0 \end{cases},$$

од каде заклучуваме дека:

1) Ако $D=0$ и барем еден кофактор од втор ред на детерминантата D е различен од нула, тогаш една равенка од системот е последица од другите две, па хомогениот систем има бесконечно многу решенија.

2) Ако $D=0$ и сите кофактори од втор ред на детерминантата D се еднакви на нула, тогаш две равенки од системот се последица од третата, па хомогениот систем има бесконечно многу решенија.

3) Ако $D\neq 0$, тогаш хомогениот систем има само тривијално решение.

Пример 1. Користејќи детерминанти, да се решат следниве системи линеарни равенки:

$$\text{а) } \begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ x+2y-z=2 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1 \\ x-y-z=-2 \end{cases}, \quad \text{в) } \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=5 \\ 6x+3y+3z=10 \end{cases},$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=8 \\ 6x+3y+3z=12 \end{cases}, \quad \text{д) } \begin{cases} 2x-y+2z=5 \\ 2x-y-z=2 \\ 4x-2y-2z=-3 \end{cases}.$$

Решение. а) За детерминантата на системот добиваме

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3\neq 0,$$

од каде што следува дека системот има единствено решение. За детерминантите D_x, D_y и D_z имаме:

$$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3,\ D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=6,\ D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=9,$$

па според формулите на Крамер добиваме:

$$x=\frac{D_x}{D}=1,\quad y=\frac{D_y}{D}=2,\ \ z=\frac{D_z}{D}=3.$$

Значи, множеството решенија на системот е $M=\{(1,2,3)\}$.

б) Бидејќи $D=D_x=D_y=D_z=0$ и $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3\neq 0$, следува дека системот има бесконечно многу решенија. Една равенка е последица од другите две равенки. На пример, ако се соберат првата и третата равенка, се добива втората равенка на системот. Со тоа системот се сведува на систем од две равенки со три непознати

$$\begin{cases} x+2y-4z=1\\ x-y-z=-2\end{cases}.$$

Оттука две од непознатите можат да се изразат преку третата непозната, на пример $x=2z-1$ и $y=z+1$.

Значи множеството решенија на системот е

$$M=\left\{\left(2z-1,z+1,z\right):\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$

в) Бидејќи $D=D_x=D_y=D_z=0$ и $2:4:6=1:2:3\neq 4:5:10$, следува дека системот нема решение, т.е. е противречен.

До овој заклучок се доаѓа и директно ако забележиме дека првата и втората равенка на дадениот систем се противречни.

г) Бидејќи $D=D_x=D_y=D_z=0$ и $2:4:6=1:2:3=4:8:12$, следува дека системот има бесконечно многу решенија (две равенки се последица од другите две).

До овој заклучок се доаѓа и директно ако забележиме дека првата равенка на системот помножена со 2 ја дава втората равенка, а првата равенка помножена со 3 ја дава третата равенка. Со тоа системот се сведува на една равенка со три непознати $2x+y+z=4$, од каде една од непознатите може да се изрази преку другите две непознати, на пример $x=2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}$.

Значи множеството решенија на системот е

$$M=\left\{\left(2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2},y,z\right):\ y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

д) Бидејќи $D=0$, но $D_x=-21\neq 0$, следува дека системот нема решение. ▲

Пример 2. Користејќи детерминанти, да се решат следниве хомогени системи:

а) $\begin{cases}3x+2y+z=0\\2x+5y+3z=0\\3x+4y+2z=0\end{cases}$, б) $\begin{cases}x+y+z=0\\3x-y+2z=0\\x-3y=0\end{cases}$, в) $\begin{cases}x+2y-z=0\\3x+6y-3z=0\\-x-2y+z=0\end{cases}$.

Решение. а) Бидејќи $D=-3\neq 0$, следува дека системот има само тривијално решение $x=y=z=0$.

б) Од тоа што $D=0$ и $A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\-3 & 0\end{vmatrix}=6\neq 0$, заклучуваме дека системот има бесконечно многу решенија (една равенка е последица од другите две). Системот се сведува на систем од две равенки со три непознати

$$\begin{cases}x+y+z=0\\3x-y+2z=0\end{cases},$$

од каде што добиваме дека $x=-\frac{3}{4}z$ и $y=-\frac{1}{4}z$.

Значи множеството решенија на системот е

$$M=\left\{\left(-\frac{3}{4}z,-\frac{1}{4}z,z\right):\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$

в) Бидејќи $D=0$ и $A_{ij}=0$, $\forall i,j\in\{1,2,3\}$ следува дека системот има бесконечно многу решенија (две равенки се последица од третата). Системот се сведува на една равенка со три непознати $x+2y-z=0$, од каде $x=-2y+z$.

Значи множеството решенија на системот е

$$M=\{(-2y+z,y,z):\ y,z\in\mathbb{R}\}.$$ ▲

2. Векторска алгебра

За определување голем број величини што се користат во применетите науки, доволно е да се знае само еден реален број кој покажува каков е односот на таа величина со соодветна прифатена единична мерка. Овие величини се нарекуваат **скаларни величини** или **скалари**. Такви се, на пример, температура, должина, плоштина, волумен и сл.

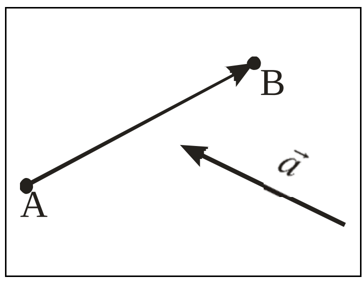
Величините кои не можат да се определат само со еден реален број, туку е потребно да се знаат и нивниот правец и насока, како на пример сила, брзина, забрзување, се нарекуваат **векторски величини** или **вектори**.

Математичката дисциплина која ги изучува векторите и алгебарските операции со нив се нарекува **векторска алгебра**.

2.1. Дефиниција на вектор

> Величините определени со број (должина), правец и насока се наречени **векторски величини** или **вектори**.

Геометриски векторите претставуваат ориентирани отсечки, т.е. отсечки за кои се знае која точка е почетна, а која е крајна.
Векторите ги означуваме со малите букви од латиницата: $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \ldots$



Слика 2.1

Ако се знае дека точката A е почетна, а точката B е крајна, тогаш векторот го означуваме со $\overrightarrow{AB}$.

1) Должината на отсечката $\overline{AB}$ се нарекува **должина** (**интензитет** или **модул**) на векторот $\overrightarrow{AB}$ и се означува со $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
2) **Правецот** на векторот $\overrightarrow{AB}$ е определен со правата која минува низ точките A и B и се нарекува **носач** на векторот $\overrightarrow{AB}$.
3) **Насоката** на векторот $\overrightarrow{AB}$ е од точката A кон точката B и е означена со стрелката поставена во крајната точка B.

Понатаму, ќе сметаме дека два вектори имаат ист правец ако имаат ист носач или ако носачите им се паралелни, т.е. ако лежат на иста или на паралелни прави.

Слободен вектор е оној вектор кој може да се поместува, при што не се менуваат неговата должина, правец и насока. Ваквото поместување се нарекува транслација или транслаторно поместување.

Ако векторот може транслаторно да се поместува само по должината на правата на којашто лежи, тогаш тој се нарекува **вектор врзан за права**.

Понатаму, ќе сметаме дека векторите кои ги разгледуваме се слободни.

Векторот со интензитет 1 се нарекува **единичен вектор** или **орт**, а векторот со интензитет 0 се нарекува **нулти вектор**. Насоката и правецот на нултиот вектор се произволни.

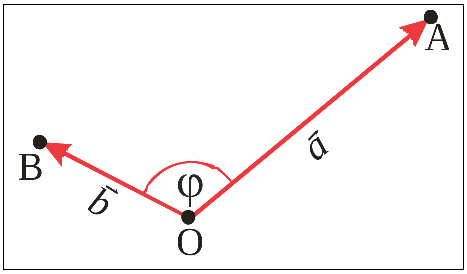
Два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се **еднакви** ако имаат еднаква должина, правец и насока и пишуваме $\vec{a}=\vec{b}$.

Два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се **спротивни** ако имаат еднаква должина и правец, а спротивна насока и пишуваме $\vec{a}=-\vec{b}$ или $\vec{b}=-\vec{a}$.

Два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се **колинеарни** ако имаат ист правец, т.е. ако лежат на иста или на паралелни прави.

Два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се **компланарни** ако лежат во иста или во паралелни рамнини.

Нека се дадени два ненулти вектори $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ со заеднички почеток O.



Слика 2.2

Агол меѓу два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е помалиот агол φ што го зафаќаат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

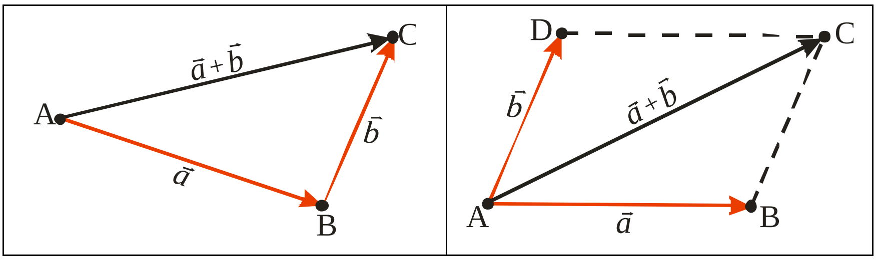
Значи, $0 \le \varphi \le \pi$. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни вектори и имаат иста насока, тогаш аголот меѓу нив е 0, а ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни вектори и имаат спротивна насока, тогаш аголот меѓу нив е π.

2.2. Операции со вектори

а) Собирање вектори

За два вектори велиме дека се **надоврзани** ако крајот на едниот е почеток на другиот вектор.

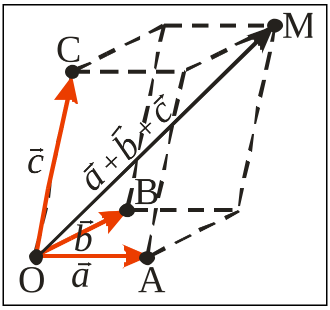
Нека се дадени два надоврзани вектори $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Векторот $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ се вика **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и пишуваме $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Оваа дефиниција за собирање вектори се вика **правило на триаголник** (сл. 2.3 лево).



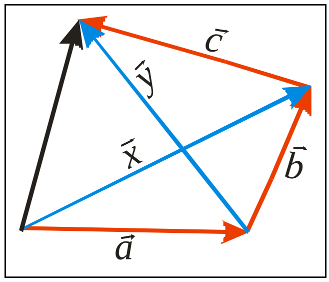
Слика 2.3

Нека се дадени два вектори $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ со заеднички почеток. Векторот $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, каде што C е теме на паралелограмот ABCD се вика **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и пишуваме $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Оваа дефиниција за собирање вектори се вика **правило на паралелограм** (сл. 2.3 десно).

Нека $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ се три вектори со заеднички почеток кои не се компланарни. Збир на овие вектори е векторот $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ со почеток во точката O, кој лежи на просторната дијагонала на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, како што е прикажано на сл. 2.4.



Слика 2.4



Слика 2.5

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се произволни вектори. Важат следниве особини за операцијата собирање вектори:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,	собирањето вектори е комутативно,
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,	собирањето вектори е асоцијативно,
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$,	$\vec{0}$ е неутрален елемент за собирањето вектори,
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.	

Ќе ги покажеме горните особини.

1) Особината комутативност следува од правилото на паралелограм за собирање вектори. Од паралелограмот ABCD следува:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b} \text{ и } \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

2) Нека $\vec{a}+\vec{b}=\vec{x}$ и $\vec{b}+\vec{c}=\vec{y}$. Од сл. 2.5 заклучуваме дека

$$\vec{x}+\vec{c}=\vec{a}+\vec{y}, \text{ т.е. } (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

3) Нека $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Тогаш

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a} \text{ и}$$

$$\vec{0}+\vec{a}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}.$$

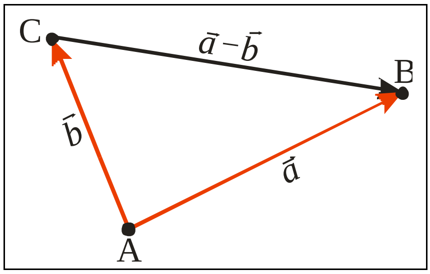
4) Нека $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Тогаш $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, па

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0} \text{ и } (-\vec{a})+\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}. \quad ■$$

б) Одземање вектори

Разлика на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е збирот на векторот $\vec{a}$ со спротивниот вектор на векторот $\vec{b}$, т.е.

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



Слика 2.6

в) Множење вектор со скалар

Производ на скаларот $\alpha\in\mathbb{R}$ со векторот $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ е вектор $\vec{b}$ кој има:

1) интензитет $\left|\vec{b}\right|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$,
2) ист правец со векторот $\vec{a}$,
3) иста насока со векторот $\vec{a}$ ако $\alpha>0$, а спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a}$ ако $\alpha<0$.

Означуваме $\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}=\alpha\vec{a}$ или $\vec{b}=\vec{a}\cdot\alpha$.

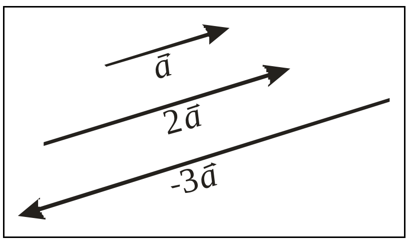
Бидејќи нултиот вектор $\vec{0}$ има произволен правец и насока, согласно горната дефиниција заклучуваме дека $0\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 0=\vec{0}$.

Исто така, од дефиницијата за производ на вектор со скалар следува дека:

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a},$$

$$(-1)\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(-1)=-\vec{a},$$

$$\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\alpha=\vec{0}.$$



Слика 2.7

Количникот на векторот $\vec{a}$ со скаларот $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ се означува $\dfrac{\vec{a}}{\alpha}$ и е производ на векторот $\vec{a}$ со скаларот $\dfrac{1}{\alpha}$, т.е $\dfrac{\vec{a}}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \vec{a}$.

Единичниот вектор кој има ист правец и насока со ненултиот векторот $\vec{a}$ се нарекува **единичен вектор на векторот** $\vec{a}$ и се означува со $\vec{a}_0$.

Јасно е дека $\vec{a} = \alpha \cdot \overrightarrow{a_0}$, $\alpha > 0$, од каде следува дека $|\vec{a}| = \alpha \cdot \left|\overrightarrow{a_0}\right| = \alpha \cdot 1 = \alpha$. Значи $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a_0}$, од каде $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се произволни вектори и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогаш важат следниве особини за множење вектор со скалар:

1) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) = \beta(\alpha\vec{a})$,	множењето вектор со скалар е асоцијативно,
2) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,	множењето вектор со скалар е дистрибутивно во однос на собирањето скалари,
3) $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,	множењето вектор со скалар е дистрибутивно во однос на собирањето вектори.

Ќе ја покажеме само третата особина. Останатите две особини се покажуваат слично.

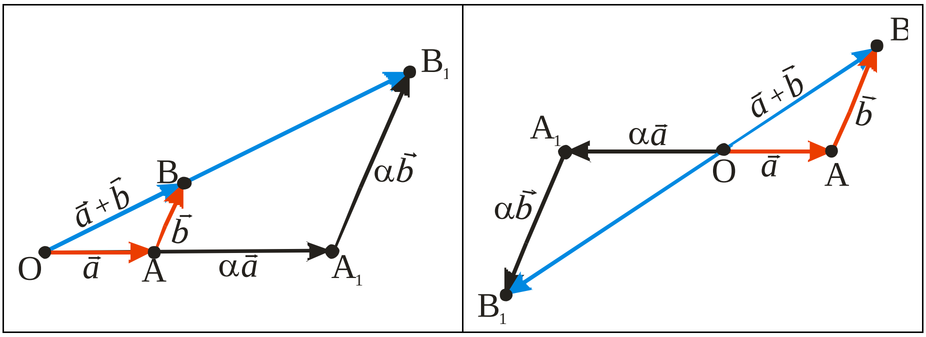
Нека $\alpha > 0$. Ги разгледуваме векторите $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (сл. 2.8 лево). Тогаш

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \text{и} \quad \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OB_1}}.$$

Триаголниците OAB и $\mathrm{OA_1B_1}$ се слични бидејќи важи

$$\overline{\mathrm{OA_1}} = \alpha\overline{\mathrm{OA}},\ \overline{\mathrm{A_1B_1}} = \alpha\overline{\mathrm{AB}} \text{ и } \measuredangle\mathrm{OAB} = \measuredangle\mathrm{OA_1B_1},$$

па следува дека $\overline{\mathrm{OB_1}} = \alpha\overline{\mathrm{OB}}$.



Слика 2.8

Од еднаквоста на аглите $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle A_1OB_1$ следува дека точките O, B и B_1 лежат на иста права, т.е. векторите $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ имаат ист правец и насока. Заклучуваме дека $\overrightarrow{OB_1} = \alpha\overrightarrow{OB}$, т.е. $\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$.

Во случај кога $\alpha < 0$ се користи сличноста на триаголниците OAB и OA_1B_1 (сл. 2.8 десно), од каде се заклучува дека $\overrightarrow{OB_1} = \alpha\overrightarrow{OB}$. ■

Ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни ако и само ако постои скалар $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ таков што $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.

Навистина, нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. Тогаш и векторите $\overrightarrow{a_0}$ и $\overrightarrow{b_0}$ се колинеарни, па важи

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a_0} = \pm |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{b_0}$$

(знакот „+” важи во случај кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста насока, а знакот „–” кога векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се со спротивна насока). Од тоа што $\overrightarrow{b_0} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ добиваме:

$$\vec{a} = \pm |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{b_0} = \pm |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}.$$

Значи постои ненулти скалар $\alpha = \pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ таков што $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.

Обратно, нека постои ненулти скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ таков што $\vec{a} = \alpha\vec{b}$. Векторот $\alpha\vec{b}$ е колинеарен со векторот $\vec{b}$, од каде што следува дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. ■

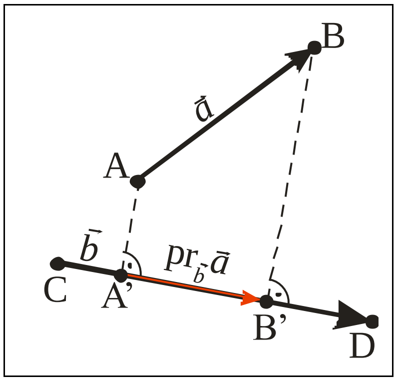
2.3. Проекција на вектор врз вектор

Нека $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ се компланарни ненулти вектори.

Проекција на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ врз векторот $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ е векторот $\overrightarrow{A'B'}$, при што точките A' и B' се ортогоналните проекции на точките A и B врз векторот $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.

Пишуваме

$$\overrightarrow{A'B'} = \mathrm{pr}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB} = \mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}.$$



Слика 2.9

Притоа важат следниве особини:

1) $\left|\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}\right| = |\vec{a}|\cdot|\cos\alpha|$, каде што α е аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(0 \le \alpha \le \pi)$.

Навистина, претпоставуваме дека векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ имаат заеднички почеток.

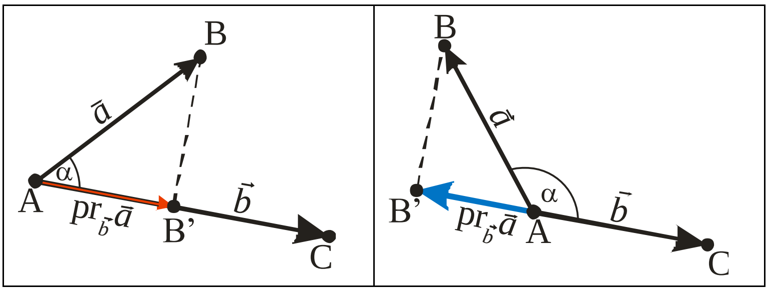
Нека α е остар агол (сл. 2.10 лево). Од правоаголниот триаголник AB'B заклучуваме дека $\frac{\left|\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = \cos\alpha$. Бидејќи аголот

α е остар, следува дека $\cos\alpha > 0$, па $\cos\alpha = |\cos\alpha|$. Значи

$$\frac{|\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}|}{|\vec{a}|} = |\cos\alpha|.$$

Ако пак, α е тап агол (сл. 2.10 десно), тогаш $\cos\alpha < 0$ и $-\cos\alpha = |\cos\alpha|$. Од правоаголниот триаголник ABB' следува

$$\frac{|\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha = |\cos\alpha|.$$



Слика 2.10

Во случај кога $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, важи $|\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}| = |\overrightarrow{AA}| = |\vec{0}| = 0 = |\vec{a}|\cos\dfrac{\pi}{2}$. ■

Забелешка. Бројот $\pm|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}| = \pm|\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}|$ се нарекува **скаларна проекција** или **алгебарска проекција** на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ врз векторот $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, при што знакот „+" се зема во случај кога α е остар агол (сл. 2.10 лево), а знакот „–" се зема во случај кога α е тап агол (сл. 2.10 десно).

2) $\mathrm{pr}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{pr}_{\vec{c}}\vec{a} + \mathrm{pr}_{\vec{c}}\vec{b}$

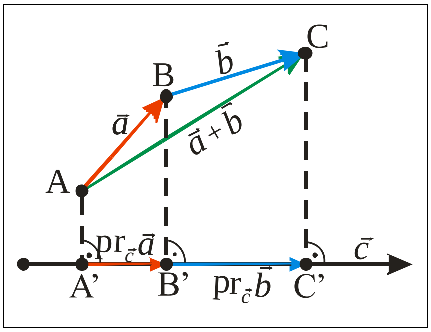
Навистина, нека векторите $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ се распоредени како на сл. 2.11. Тогаш

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

За проекциите на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаме:

$$\mathrm{pr}_{\vec{c}}\vec{a}=\overrightarrow{A'B'},\ \mathrm{pr}_{\vec{c}}\vec{b}=\overrightarrow{B'C'},$$

па за проекцијата на векторот $\vec{a}+\vec{b}$ добиваме:



Слика 2.11

$$\mathrm{pr}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{pr}_{\vec{c}}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\mathrm{pr}_{\vec{c}}\vec{a}+\mathrm{pr}_{\vec{c}}\vec{b}.$$

На ист начин се докажува точноста на тврдењето и за сите други распореди на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ■

Особината 2 важи и за конечен број вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, т.е. важи равенството

$$\mathrm{pr}_{\vec{c}}\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}\right)=\mathrm{pr}_{\vec{c}}\overrightarrow{a_1}+\mathrm{pr}_{\vec{c}}\overrightarrow{a_2}+\ldots+\mathrm{pr}_{\vec{c}}\overrightarrow{a_n}.$$

3) $\mathrm{pr}_{\vec{b}}\ \alpha\vec{a}=\alpha\ \mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}$, каде што $\alpha\in\mathbb{R}$.

2.4. Линеарна комбинација на вектори

Нека се дадени векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ и скаларите $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Збирот $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$ се нарекува **линеарна комбинација** на векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Ако даден вектор $\vec{a}$ може да се запише во облик

$$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n},$$

тогаш велиме дека тој е линеарна комбинација од векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, или дека векторот $\vec{a}$ е линеарно изразен со помош на векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

Векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ се **линеарно зависни** ако постојат скалари $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ од кои барем еден е различен од нула, така што важи

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}.$$

Ако равенството $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ важи само во случај кога сите скалари се еднакви на нула, тогаш велиме дека векторите се **линеарно независни.**

Лесно се покажува дека векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ се линеарно зависни ако и само ако еден од нив може да се претстави како линеарна комбинација од останатите вектори.

Навистина, нека $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ се линеарно зависни. Тогаш постојат скалари $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ од кои барем еден е различен од нула, така што важи

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}.$$

Нека $\alpha_1 \neq 0$. Тогаш $\overrightarrow{a_1}=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{a_2}-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\overrightarrow{a_3}-\cdots-\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}\overrightarrow{a_n}$.

Обратно, нека векторот $\overrightarrow{a_1}$ може да се претстави како линеарна комбинација од векторите $\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, т.е. важи

$$\overrightarrow{a_1}=\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{a_n}.$$

Оттука се добива $\overrightarrow{a_1}-\alpha_2\overrightarrow{a_2}-\alpha_3\overrightarrow{a_3}-\cdots-\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}$. Коефициентот пред $\overrightarrow{a_1}$ е различен од нула, па заклучуваме дека векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ се линеарно зависни. ■

Ќе наведиме неколку критериуми со кои се утврдува линеарната зависност на векторите.

1⁰	Два вектори се линеарно зависни ако и само ако се колинеарни.

Навистина, нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни вектори, т.е.

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0},$$

при што барем еден од скаларите α и β е различен од нула. Нека $\alpha \neq 0$. Тогаш

$$\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}=\gamma\vec{b}.$$

Од дефиницијата за множење вектор со скалар следува дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни.

Обратно, нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни вектори. Тогаш постои скалар $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ таков што $\vec{a}=\alpha\vec{b}$, па заклучуваме дека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеарно зависни. ■

$\mathbf{2^0}$ Три вектори се линеарно зависни ако и само ако се компланарни.

Навистина, нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни вектори, т.е.

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0},$$

при што барем еден од скаларите α, β и γ е различен од нула. Нека $\alpha \neq 0$. Тогаш

$$\vec{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\vec{b}-\frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}=\mu\vec{b}+\nu\vec{c}.$$

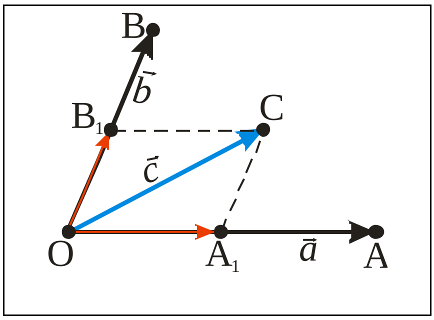
Ако векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ги доведеме до заеднички почеток и низ нив повлечеме рамнина, тогаш и векторите $\mu\vec{b}$ и $\nu\vec{c}$ лежат во таа рамнина, па и нивниот збир (векторот $\vec{a}$) е вектор кој лежи во истата рамнина. Значи, векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни.

Обратно, нека $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ се компланарни вектори кои ги доведуваме до заеднички почеток O. Значи, тие лежат во една рамнина.

Нека два по два од трите вектори не се колинеарни. Од сл. 2.12 гледаме дека

$$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},$$

каде што $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Оттука следува дека векторите се линеарно зависни.



Слика 2.12

Ако пак два од трите вектори се колинеарни, на пример векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогаш постои скалар $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ таков што $\vec{a}=\alpha\vec{b}$, т.е. $\vec{a}=\alpha\vec{b}+0\cdot\vec{c}$, па и во овој случај трите вектори се линеарно зависни. ■

$\mathbf{3^0}$ Четири или повеќе вектори во просторот се секогаш линеарно зависни.

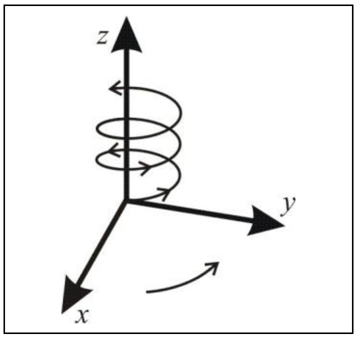
2.5. Декартов правоаголен координатен систем во простор. Правоаголни координати на вектор

Правата за која можеме да утврдиме која од две нејзини точки е претходна, а која наредна се вика **ориентирана права** или **оска.**

Декартовиот правоаголен координатен систем во простор се состои од три заемно нормални оски со заеднички почеток О. Заедничкиот почеток О на трите оски се нарекува **координатен почеток**. Оските се означуваат со x-оска (**апсцисна оска)**, y-оска (**ординатна оска)**, и z-оска (**апликатна оска)** и се наречени **координатни оски**. Насоките на x-оската, y-оската и z-оската се определени со единечните вектори или ортови $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, соодветно.

Во зависност од редоследот на координатните оски, даден координатен систем може да биде десен или лев.

Кај десниот координатен систем при ротација околу z-оската позитивниот дел од x-оската најбргу ќе се совпадне со позитивниот дел од y-оската ако ротацијата е во насока спротивна од насоката на движење на стрелките на часовникот.



Слика 2.13

Десниот координатен систем може да се претстави со трите прсти од десната рака, при што палецот ја претставува x-оската, показалецот y-оската, а средниот прст z-оската.

Кај левиот координатен систем при ротација околу z-оската позитивниот дел од x-оската најбргу ќе се совпадне со позитивниот дел од y-оската, ако ротацијата е во насока на движење на стрелките на часовникот. Аналогно како кај десниот координатен систем, левиот координатен систем може да се претстави со трите прсти од левата рака.

Понатаму, ќе го користиме десниот координатен систем.

Две по две координатни оски ги определуваат трите **координатни рамнини**: $x\mathrm{O}y$, $x\mathrm{O}z$ и $y\mathrm{O}z$ рамнина. $x\mathrm{O}y$ рамнината го дели просторот на горен и долен полупростор, $y\mathrm{O}z$ рамнината на преден и заден полупростор, а $x\mathrm{O}z$ на лев и десен полупростор. Трите координатни рамнини го делат просторот на осум делови наречени **октанти**.

Нека $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ е произволен вектор во просторот во кој е зададен Декартов правоаголен координатен систем. Јасно е дека векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ не се компланарни, па од особината 2^0 од поглавје 2.4. следува дека тие се линеарно независни вектори. Од особината 3^0 од поглавје 2.4. следува дека четирите вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и $\vec{a}$ се линеарно зависни, па постојат скалари α_1, α_2, α_3 и α_4 од кои барем еден е различен од нула, така што важи

$$\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k} + \alpha_4\vec{a} = \vec{0}.$$

Јасно е дека $\alpha_4 \neq 0$, бидејќи во спротивен случај ќе важи равенството $\alpha_1\vec{i} + \alpha_2\vec{j} + \alpha_3\vec{k} = \vec{0}$, каде што барем еден од скаларите е различен од нула, што противречи на линеарната независност на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Заклучуваме дека векторот $\vec{a}$ може да се претстави како линеарна комбинација од векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Ќе покажеме дека ова претставување е единствено.

Навистина, нека претпоставиме дека $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ и $\vec{a} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Од еднаквоста на левите страни на овие две равенства следува еднаквост и на десните страни:

$$a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\text{, т.е.}$$

$$(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}+(a_3-b_3)\vec{k}=\vec{0}\,.$$

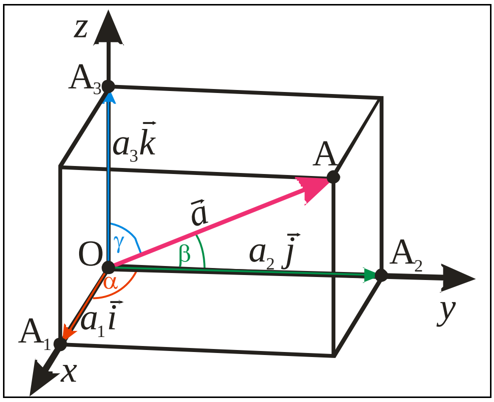
Бидејќи векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се линеарно независни, следува $a_1-b_1=a_2-b_2=a_3-b_3=0$, т.е.

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3\,.$$

Заклучуваме дека произволен вектор $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ на единствен начин може да се претстави како линеарна комбинација од векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\,.$$

Векторите $a_1\vec{i}$, $a_2\vec{j}$ и $a_3\vec{k}$ се проекции на векторот $\vec{a}$ врз векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, соодветно и се нарекуваат **компоненти на векторот** $\vec{a}$ во однос на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Велиме дека векторот $\vec{a}$ е разложен на компоненти по правците на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.



Слика 2.14

Скаларите a_1, a_2 и a_3 се нарекуваат **правоаголни координати** на векторот $\vec{a}$. Тие се единствени и наполно го определуваат векторот $\vec{a}$, т.е. го определуваат неговиот интензитет, правец и насока. Векторот $\vec{a}$ го означуваме на следниов начин:

$$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\,.$$

Јасно е дека координатите на ортовите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се:

$$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0)\ \text{и}\ \vec{k}=(0,0,1)\,.$$

Во случај кога е даден векторот $\vec{a}$, неговите правоаголни координати се добиваат со следниве формули:

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\alpha, \;\; a_2 = |\vec{a}|\cos\beta, \;\; a_3 = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

каде што α, β и γ се аглите кои векторот $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ги зафаќа со позитивниот дел од *x*-оската, *y*-оската и *z*-оската, соодветно (т.е. со векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, соодветно). Овие формули се добиваат од правоаголните триаголници $\mathrm{OAA_1}$, $\mathrm{OAA_2}$ и $\mathrm{OAA_3}$, соодветно (сл. 2.14).

Обратно, ако се дадени правоаголните координати a_1, a_2 и a_3 на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, тогаш неговиот интензитет (должина) се добива од формулата за должина на просторна дијагонала на паралелопипед (сл. 2.14):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,,$$

а насоката и правецот на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ се определени со косинусите од аглите кои векторот $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ги зафаќа со позитивниот дел од *x*-оската, *y*-оската и *z*-оската соодветно:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Последниве три равенства ги квадрираме, а потоа ги собираме, при што добиваме:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

За единичниот вектор на векторот $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ важи:

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(a_1,a_2,a_3)}{|\vec{a}|}=\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|},\frac{a_2}{|\vec{a}|},\frac{a_3}{|\vec{a}|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

Нека се дадени два вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Тогаш важи:

1) векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се еднакви ако и само ако нивните соодветни координати се еднакви, т.е. важи $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$.

2) $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,\ a_3\pm b_3)$ (собирање и одземање вектори)

3) $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3),\ \ \lambda\in\mathbb{R}$ (множење вектор со скалар)

Забелешка. Од претходна особина следува дека ненултите вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ се колинеарни ако и само ако постои скалар $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$ таков што $\vec{a}=\alpha\vec{b}$, т.е. важи $a_1=\alpha b_1,\ a_2=\alpha b_2,\ a_3=\alpha b_3$.

Заклучуваме дека ненултите вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ се колинеарни ако и само ако важи $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

Пример 1. Да се определи должината, правецот и насоката на векторот $\vec{a}=(2,-3,6)$. Потоа, да се определи единичен вектор кој има ист правец и насока со векторот $\vec{a}$. Кој единичен вектор има ист правец, а спротивна насока со векторот $\vec{a}$?

Решение. Прво го определуваме интензитетот на векторот $\vec{a}$:

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{49}=7.$$

Правецот и насоката на векторот $\vec{a}$ се определени со:

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{a}|}=\frac{2}{7},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{a}|}=-\frac{3}{7},\quad \cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{a}|}=\frac{6}{7}.$$

Единичниот вектор $\vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\dfrac{2}{7}, -\dfrac{3}{7}, \dfrac{6}{7}\right)$ има ист правец и насока со векторот $\vec{a}$, а единичниот вектор $-\vec{a}_0 = \left(-\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}, -\dfrac{6}{7}\right)$ има ист правец, но спротивна насока со векторот $\vec{a}$. ▲

Пример 2. Да се определи реалниот параметар m така што векторите $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{b} = m\vec{i} - \vec{j}$ да бидат колинеарни.

Решение. Од условот векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ да се колинеарни следува дека постои ненулти скалар α така што $\vec{a} = \alpha\vec{b}$. Оттука добиваме:

$$2\vec{i} + 3\vec{j} = \alpha(m\vec{i} - \vec{j}), \text{ т.е.}$$

$$(2 - m\alpha)\vec{i} + (3 + \alpha)\vec{j} = \vec{0}.$$

Бидејќи векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ се линеарно независни, важи:

$$\begin{cases} 2 - m\alpha = 0 \\ 3 + \alpha = 0 \end{cases}.$$

Со решавање на овој систем се добива $m = -\dfrac{2}{3}$ и $\alpha = -3$. ▲

Пример 3. Да се провери дали дадените вектори се компланарни:

а) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$,

б) $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Решение. а) Ќе покажеме дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно зависни, т.е. постојат скалари α и β така што $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$, од каде ќе следува дека векторите се компланарни. Од равенката $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ добиваме:

$$2\vec{i} - 3\vec{j} = \alpha(\vec{i} + 2\vec{j}) + \beta(\vec{i} - \vec{j}), \text{ т.е.}$$

$$(\alpha + \beta - 2)\vec{i} + (2\alpha - \beta + 3)\vec{j} = \vec{0}.$$

Бидејќи векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ се линеарно независни, следува дека важи

$$\begin{cases} \alpha+\beta-2=0 \\ 2\alpha-\beta+3=0 \end{cases}.$$

Со решавање на овој систем се добива $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ и $\beta=\dfrac{7}{3}$.

б) Ќе покажеме дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се линеарно независни, од каде ќе следува дека тие не се компланарни. Нека линеарната комбинација од овие три вектори е еднаква на нултиот вектор, т.е. важи $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$. Оттука се добива:

$$(-3\alpha+\beta+2\gamma)\vec{i}+(5\beta+3\gamma)\vec{j}+(2\alpha+\beta-2\gamma)\vec{k}=\vec{0}.$$

Бидејќи векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се линеарно независни, следува дека важи:

$$\begin{cases} -3\alpha+\beta+2\gamma=0 \\ \qquad 5\beta+3\gamma=0 \\ 2\alpha+\ \ \beta-2\gamma=0 \end{cases}.$$

Детерминантата на овој хомоген систем е:

$$D=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=25\neq 0,$$

па следува дека системот има само нулто решение $\alpha=\beta=\gamma=0$.

▲

2.6. Скаларен производ на два вектори

Видовме дека ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се вектори, а $\lambda \in \mathbb{R}$ скалар, тогаш збирот $\vec{a}+\vec{b}$, разликата $\vec{a}-\vec{b}$ и производот $\lambda\vec{a}$ се вектори. Ќе воведеме операција која применета на два вектори како резултат дава реален број.

Скаларен производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е скалар еднаков на производот од интензитетите на двата вектори и косинус од аголот φ меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а се обележува со $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Значи,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi .$$

Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ненулти вектори, тогаш користејќи ја дефиницијата на скаларен производ, може да се пресмета аголот φ што го зафаќаат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се вектори и $\lambda \in \mathbb{R}$ е скалар, тогаш важи:

1) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}| = |\vec{b}||\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}|$,

2) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$,

3) $\vec{0}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{0} = 0$,

4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, — за скаларниот производ важи комутативниот закон,

5) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$,
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$, — за скаларниот производ важи дистрибутивниот закон во однос на собирањето вектори,

6) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$.

Ќе ги покажеме особините 1, 2, 3, 4 и 6. Нека φ е аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) Од особина 1 од поглавје 2.3. следува дека $\left|\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}\right| = |\vec{a}| \cdot |\cos\varphi|$ и $\left|\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}\right| = |\vec{b}| \cdot |\cos\varphi|$. Тогаш

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\varphi| = |\vec{a}||\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}| = |\vec{b}||\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}| \cdot$$

2) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$.

3) Бидејќи $|\vec{0}| = 0$, од дефиницијата на скаларен производ следува

$$\vec{0}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{0} = 0.$$

4) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

6) Прво ќе го покажеме равенството $\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.

Ако $\lambda > 0$, тогаш аголот меѓу векторите $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ е исто така φ, па од дефиницијата на скаларен производ имаме:

$$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = \left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}.$$

Ако $\lambda < 0$, тогаш векторот $\lambda\vec{a}$ има спротивна насока од насоката на векторот $\vec{a}$, па аголот меѓу векторите $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ е $\pi - \varphi$. Од дефиницијата на скаларен производ имаме:

$$\begin{aligned}\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = -\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\left(-\cos\varphi\right) = \\ &= |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\pi-\varphi\right) = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos\measuredangle(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \\ &= \left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}.\end{aligned}$$

За $\lambda = 0$ се добива $0\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(0\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\left(0\cdot\vec{b}\right) = 0$.

Од особина 4 и претходно докажаното следува

$$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \lambda\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right) = \left(\lambda\vec{b}\right)\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right),$$

со што го покажавме и равенството $\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)$. ■

Скаларниот производ на два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ може да се искористи за наоѓање на проекцијата на едниот вектор врз другиот. Од особината $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{b}|=|\vec{b}||\operatorname{pr}_{\vec{b}}\vec{a}|$ се добива:

$$|\operatorname{pr}_{\vec{b}}\vec{a}|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|},\quad |\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{b}|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cdot$$

Според тоа,

$$\operatorname{pr}_{\vec{b}}\vec{a}=|\operatorname{pr}_{\vec{b}}\vec{a}|\ \overrightarrow{b_0}=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|^2}\ \vec{b},$$

$$\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{b}=|\operatorname{pr}_{\vec{a}}\vec{b}|\ \overrightarrow{a_0}=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|^2}\ \vec{a}.$$

Ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нормални еден на друг ако и само ако $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Навистина, нека ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нормални еден на друг. Тогаш аголот меѓу нив е $\varphi=\frac{\pi}{2}$, па

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Обратно, нека за ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Тогаш $\cos\varphi=0$, $0\le\varphi\le\pi$, од каде следува $\varphi=\frac{\pi}{2}$. ■

Од претходната особина и од особината $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ за скаларниот производ меѓу ортовите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се добива:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0.$$

Бидејќи за $\cos\alpha$ важи $|\cos\alpha| \leq 1$, следува дека

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| = \left||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\varphi| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \ .$$

Значи $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, т.е. $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \leq \vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Со тоа го покажавме следново тврдење:

> За произволни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи неравенството
>
> $$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Горното неравенство е познато како **неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц**. Се користи за докажување на следниот важен резултат, познат како **неравенство на триаголник**.

> За произволни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи неравенството
>
> $$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

Навистина, од особината $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ и од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \leq$$

$$\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = \left(|\vec{a}|+|\vec{b}|\right)^2 .$$

Коренувајќи го добиеното неравенство го добиваме бараното неравенство. ■

Геометриски, неравенството на триаголник значи дека должината на една страна од триаголникот не може да биде поголема од збирот на должините на останатите две негови страни.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ со своите координати:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ и } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

Тогаш за нивниот скаларен производ добиваме:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$
$$= a_1b_1(\vec{i}\cdot\vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}\cdot\vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}\cdot\vec{k}) + a_2b_1(\vec{j}\cdot\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}\cdot\vec{j}) +$$
$$+ a_2b_3(\vec{j}\cdot\vec{k}) + a_3b_1(\vec{k}\cdot\vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}\cdot\vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}\cdot\vec{k}) =$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Значи,

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.} \tag{2.1}$$

Пример 1. Да се определи скаларниот производ на векторите $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, каде што $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, а аголот меѓу векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ е $\pi/3$. Потоа да се определи аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. $\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\vec{p}+3\vec{q})\cdot(2\vec{p}-\vec{q}) = 4|\vec{p}|^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q} + 6\vec{q}\cdot\vec{p} - 3|\vec{q}|^2 =$

$$= 4|\vec{p}|^2 + 4\vec{p}\cdot\vec{q} - 3|\vec{q}|^2 = 4\cdot 4 + 4|\vec{p}||\vec{q}|\cos\frac{\pi}{3} - 3\cdot 9 =$$
$$= 16 + 4\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} - 27 = 1.$$

Аголот φ меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ќе го определиме со користење на формулата $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. За интензитетите на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ добиваме:

$$|\vec{a}|^2 = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{(2\vec{p}+3\vec{q})\cdot(2\vec{p}+3\vec{q})} = \sqrt{4|\vec{p}|^2 + 6\vec{p}\cdot\vec{q} + 6\vec{q}\cdot\vec{p} + 9|\vec{q}|^2} =$$
$$= \sqrt{4|\vec{p}|^2 + 12\vec{p}\cdot\vec{q} + 9|\vec{q}|^2} = \sqrt{4\cdot 4 + 12|\vec{p}||\vec{q}|\cos\frac{\pi}{3} + 9\cdot 9} =$$
$$= \sqrt{16 + 12\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + 81} = \sqrt{133}.$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{(2\vec{p}-\vec{q})\cdot(2\vec{p}-\vec{q})} = \sqrt{4\left|\vec{p}\right|^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{q} - 2\vec{q}\cdot\vec{p} + \left|\vec{q}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{4\left|\vec{p}\right|^2 - 4\vec{p}\cdot\vec{q} + \left|\vec{q}\right|^2} = \sqrt{4\cdot 4 - 4\left|\vec{p}\right|\left|\vec{q}\right|\cos\frac{\pi}{3} + 9} =$$

$$= \sqrt{16 - 4\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + 9} = \sqrt{13}.$$

Според тоа, $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}\,\sqrt{133}}$. ▲

Пример 2. Да се определи скаларниот производ на векторите $\vec{a} = (0,5,-4)$ и $\vec{b} = (-3,-6,6)$. Потоа, да се пресмета аголот φ меѓу нив и проекцијата на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{b}$.

Решение. За скаларниот производ на векторите добиваме:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\cdot(-3) + 5\cdot(-6) + (-4)\cdot 6 = -54\,.$$

Интензитетите на дадените вектори се $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{41}$ и $\left|\vec{b}\right| = 9$, па

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = -\frac{54}{9\sqrt{41}} = -\frac{6}{\sqrt{41}}.$$

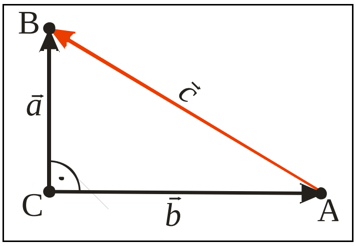
За проекцијата на векторот $\vec{a}$ врз векторот $\vec{b}$ добиваме:

$$\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a} = |\,\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}\,|\;\overrightarrow{b_0} = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}\,|}{|\vec{b}\,|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}\,|} = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}\,|}{|\vec{b}\,|^2}\,\vec{b} =$$

$$= \frac{54}{9^2}(-3,-6,6) = \frac{2}{3}(-3,-6,6) = (-2,-4,4).$$ ▲

Скаларниот производ има голема примена во геометрија при докажување разни тврдења.

Пример 3. Да се докаже Питагоровата теорема.



Слика 2.15

Нека ABC е правоаголен триаголник и $\overrightarrow{CB}=\vec{a},\ \overrightarrow{CA}=\vec{b},\ \overrightarrow{AB}=\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. Тогаш

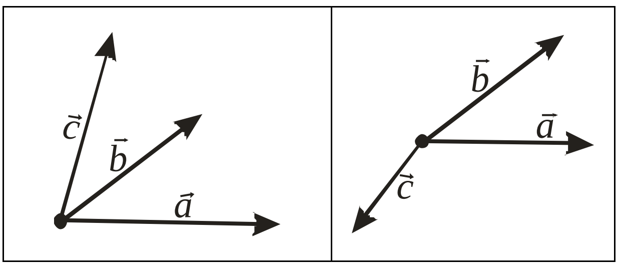
$$|\vec{c}|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2.$$

Во последното равенство се користи нормалноста на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, од каде што следува дека $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=0$. ▲

2.7. Векторски производ на два вектори

За тројката некомпланарни вектори со заеднички почеток $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ велиме дека има десна ориентација (или векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуваат десен триедар) ако десната рака ја поставиме така што коренот на дланката е заедничката почетна точка на трите вектори, при што палецот ја претставува насоката на векторот $\vec{a}$, показалецот насоката на векторот $\vec{b}$, а средниот прст ја претставува насоката на векторот $\vec{c}$ (сл. 2.16 лево). На сличен начин се дефинира лев триедар (сл. 2.16 десно).



Слика 2.16

Векторски производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е вектор $\vec{c}$ кој:

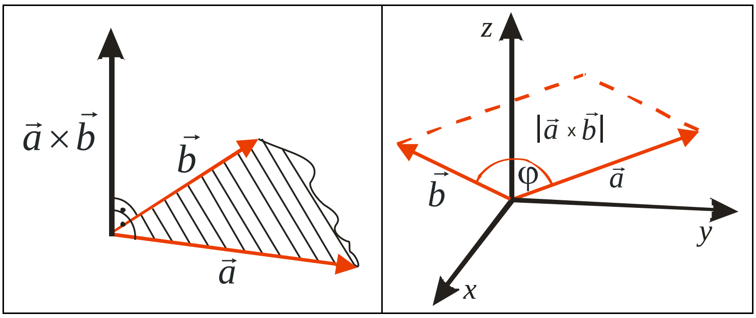
1) има интензитет $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, каде што φ е аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2) е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) е насочен така што тројката вектори $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ има десна ориентација.

За векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ја користиме ознаката $\vec{a}\times\vec{b}$.

Од тоа што за плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи:

$$P = ah_a = ab\sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}\times\vec{b}|,$$

следува дека интензитетот на векторскиот производ на два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ геометриски претставува плоштина на паралелограмот конструиран над векторите.



Слика 2.17

За плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се добива $P=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни ако и само ако $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Навистина, нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ненулти вектори и φ е аголот меѓу нив. Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$, па $\sin\varphi=0$. Тогаш

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0,$$

од каде што следува дека $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Обратно, нека $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Тогаш $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=0$, па $\sin\varphi=0$, од каде следува дека $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$, т.е. векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. ■

Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се вектори и $\lambda\in\mathbb{R}$ е скалар, тогаш важи:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$, за векторскиот производ не важи комутативниот закон,

2) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$,
$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$, за векторскиот производ важи дистрибутивниот закон во однос на собирањето вектори,

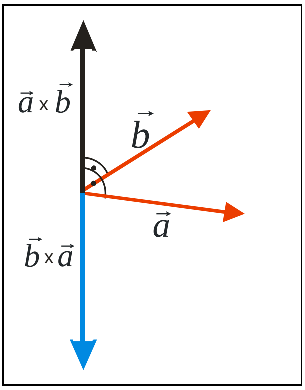
3) $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$,

4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$,

5) $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$,

Ќе ги покажеме особините 1, 3, 4 и 5.

1) Од дефиницијата на векторски производ следува дека векторите $\overrightarrow{c_1}=\vec{a}\times\vec{b}$ и $\overrightarrow{c_2}=\vec{b}\times\vec{a}$ имаат ист интензитет и правец, а тројките вектори $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}_1)$ и $(\vec{b},\vec{a},\vec{c}_2)$ имаат десна ориентација (сл. 2.18).
Според тоа, $\overrightarrow{c_1}=-\overrightarrow{c_2}$.



Слика 2.18

3) $|\vec{a}\times\vec{0}|=|\vec{0}\times\vec{a}|=0$, од каде што следува дека $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$.

4) Од особината два вектори се колинеарни ако и само ако нивниот векторски производ е нулти вектор, и од тоа што секој вектор $\vec{a}$ е колинеарен сам на себе, следува дека $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

5) Нека φ е аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. За $\lambda=0$ равенствата се очигледни. Ќе ги разгледаме посебно случаите кога $\lambda>0$ и $\lambda<0$.

Ако $\lambda>0$, тогаш аголот меѓу векторите $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ е исто така φ, па

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=|\lambda\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi\cdot\overrightarrow{n_0},$$

каде што $\overrightarrow{n_0}$ е единичен вектор нормален на векторите $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ и насочен така што тројката вектори $(\lambda\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{n_0})$ има десна ориентација. Од тоа што векторите $\lambda\vec{a}$ и $\vec{a}$ имаат ист правец и насока, следува дека единичниот вектор $\overrightarrow{n_0}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и е насочен така што тројката вектори $(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{n_0})$ има десна ориентација. Според тоа,

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=|\lambda\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi\cdot\overrightarrow{n_0}=\lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi\cdot\overrightarrow{n_0}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

На ист начин се добива равенството $\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

Доказот е сличен и за $\lambda<0$ при што се користи $\left|\lambda\right|=-\lambda$ и фактот дека тројката вектори $(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{n_0})$ има лева ориентација. Од особина 1 и претходно докажаното следува

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\lambda\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=-\left(\lambda\vec{b}\times\vec{a}\right)=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right),$$

со што го покажавме равенството $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$. ■

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нормални еден на друг, тогаш $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, па $\sin\varphi=1$. Во тој случај за интензитетот на нивниот векторски производ се добива $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

За векторскиот производ меѓу ортовите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се добива

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=-(\vec{j}\times\vec{i})=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=-(\vec{k}\times\vec{j})=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=-(\vec{i}\times\vec{k})=\vec{j}.$$

Ќе ја покажеме следнава врска меѓу векторски и скаларен производ на два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

За произволни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи равенството

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\right)^2.$$

Навистина, ако φ е аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогаш

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\varphi,\text{ и}$$

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\varphi.$$

Оттука,

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\varphi+\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\varphi=\left(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\right)^2. \quad ■$$

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ со своите координати: $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$. Тогаш, за нивниот векторски производ добиваме:

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = \\ &= a_1b_1(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1b_3(\vec{i}\times\vec{k})+a_2b_1(\vec{j}\times\vec{i})+a_2b_2(\vec{j}\times\vec{j})+ \\ &\quad + a_2b_3(\vec{j}\times\vec{k})+a_3b_1(\vec{k}\times\vec{i})+a_3b_2(\vec{k}\times\vec{j})+a_3b_3(\vec{k}\times\vec{k}) = \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Значи,

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(a_2b_3-a_3b_2,\, a_3b_1-a_1b_3,\, a_1b_2-a_2b_1\right).} \qquad (2.2)$$

Пример. Да се определи единичен вектор кој што е нормален на векторите $\vec{a}=(3,2,4)$ и $\vec{b}=(0,3,-1)$.

Решение. Векторот $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-14\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постојат два единични вектори нормални на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c}_0=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{1}{\sqrt{286}}\left(-14,3,9\right) \text{ и } -\vec{c}_0=-\frac{1}{\sqrt{286}}\left(-14,3,9\right). \qquad \blacktriangle$$

2.8. Мешан производ на три вектори

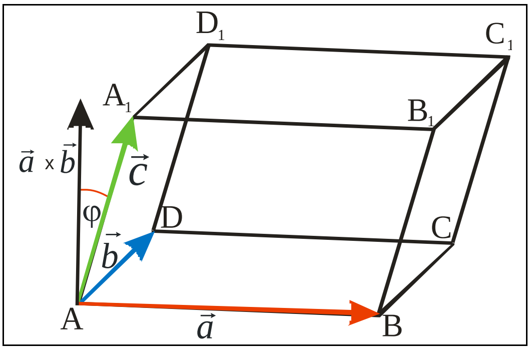
Мешан производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е скаларниот производ на векторот $\vec{a}\times\vec{b}$ со векторот $\vec{c}$, а се обележува со $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$. Значи,

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Видовме дека $B=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ е плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Од сл. 2.19 може да се види дека висината на паралелопипедот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е

$$H=\left|\mathrm{pr}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|=|\vec{c}\,|\left|\cos\varphi\right|,$$

каде што φ е аголот меѓу векторите $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Слика 2.19

Волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е $V=B\cdot H$, па следува дека

$$V=B\cdot H=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos\varphi\right|=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|.$$

Забележуваме дека ако тројката вектори $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ има десна ориентација (сл. 2.19), тогаш аголот φ меѓу векторите $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ е остар, па $\cos\varphi>0$ и $|\cos\varphi|=\cos\varphi$. Според тоа,

$$V=B\cdot H=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\varphi=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right).$$

Ако пак, тројката вектори $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ има лева ориентација, тогаш аголот φ меѓу векторите $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ е тап, па $\cos\varphi<0$ и $|\cos\varphi|=-\cos\varphi$. Според тоа,

$$V=B\cdot H=-\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\varphi=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right).$$

Тројките вектори $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ и $(\vec{b},\vec{c},\vec{a})$ имаат иста ориентација, а од сл. 2.19 јасно е дека волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е еднаков на волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$. Според тоа, следува дека

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}.$$

Од комутативноста на скаларниот производ следува

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right),$$

па заклучуваме дека важи

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Волуменот на четиристраната пирамида $ABCDA_1$, односно волуменот на тристраната пирамида $ABDA_1$ конструирани над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е

$$V=\frac{BH}{3}=\frac{1}{3}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|,\text{ односно } V=\frac{BH}{6}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|.$$

Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се вектори и $\lambda \in \mathbb{R}$ е скалар, тогаш важи:

1) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right) =$

$$= -\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right) = -\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right) = -\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right),$$

2) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right)$,

3) $\lambda\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}\right)$,

4) Ако два од трите вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се колинеарни, тогаш $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$.

Користејќи ги особините на скаларен и векторски производ на два вектори и особината $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ добиваме:

1) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right)$,

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right),$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = -\vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) = -\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right),$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = -\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = -\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right),$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c} = -\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right).$$

2) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times (\vec{c} + \vec{d})\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}\right) =$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right).$$

3) $\lambda\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \lambda\left(\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right) = \left(\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right) \cdot \vec{c} = \left(\lambda\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$,

$$\lambda\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \lambda\left(\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right) = \left(\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \times \lambda\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c}\right),$$

$$\lambda\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\lambda\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\lambda\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}\right).$$

4) Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни. Тогаш постои ненулти скалар $\alpha\in\mathbb{R}$ таков што $\vec{a}=\alpha\vec{b}$, па

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\alpha\vec{b}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdot\vec{c}=0. \qquad \blacksquare$$

Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни ако и само ако

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$$

Навистина, нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни. Тогаш тие се линеарно зависни, па постојат скалари $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, такви што

$$\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}.$$

За мешаниот производ на трите вектори добиваме:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\alpha\vec{b}+\beta\vec{c},\vec{b},\vec{c}\right)=\alpha\left(\vec{b},\vec{b},\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{c},\vec{b},\vec{c}\right)=0.$$

Обратно, нека $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$. Од равенството

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cos\measuredangle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=$$

$$=\left|\vec{a}\right|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\measuredangle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)\sin\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right),$$

следува дека мешаниот производ може да биде нула во еден од следниве случаи:

1. Ако барем еден од трите вектори е нултиот вектор, тогаш трите вектори се компланарни.

2. Ако $\sin\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$, т.е. $\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$ или $\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\pi$, тогаш векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, па следува дека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни.

3. Ако $\cos\measuredangle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=0$, тогаш $\measuredangle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, т.е. векторот $\vec{a}\times\vec{b}$ е нормален на векторот $\vec{c}$. Векторот $\vec{a}\times\vec{b}$ е нормален

и на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, па заклучуваме дека векторот $\vec{c}$ е компланарен со векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ■

Нека се дадени векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ со своите координати:

$$\vec{a}=\left(a_1, a_2, a_3\right),\ \vec{b}=\left(b_1, b_2, b_3\right) \text{ и } \vec{c}=\left(c_1, c_2, c_3\right).$$

Користејќи ги равенствата (2.1) и (2.2), за мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ добиваме:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)&=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(a_2b_3-a_3b_2,\, a_3b_1-a_1b_3,\, a_1b_2-a_2b_1\right)\cdot\left(c_1,c_2,c_3\right)=\\ &=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=\\ &=c_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Значи,

$$\boxed{\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.} \qquad (2.3)$$

Пример. За која вредност на реалниот параметар m, векторите $\vec{a}=\left(\ln(m-2),-2,6\right)$, $\vec{b}=\left(m,-2,5\right)$ и $\vec{c}=\left(0,-1,3\right)$ се компланарни?

Решение. Од условот дадените вектори да бидат компланарни следува $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)=0$, од каде што се добива $\begin{vmatrix}\ln(m-2) & -2 & 6\\ m & -2 & 5\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix}=0$.

Определувајќи ја детерминантата заклучуваме дека $m=3$. ▲

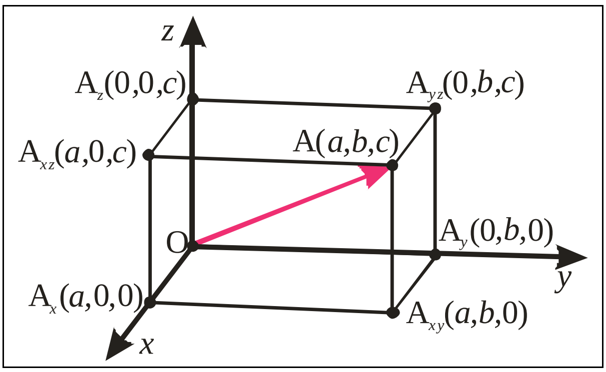
Забелешка. Покрај мешаниот производ, може да се дефинира уште еден производ на три вектори. **Двоен векторски производ** на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е векторскиот производ на векторот $\vec{a}$ и векторот $\vec{b}\times\vec{c}$, т.е. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

3. Аналитичка геометрија во простор

3.1. Правоаголни координати на точка

Положбата на една точка A во однос на даден Декартов правоаголен координатен систем во простор може да се одреди со векторот $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ кој се нарекува **вектор на положбата** на точката A или **радиус-вектор** на точката A. Координатите a, b и c на векторот $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,b,c)$ се **Декартови правоаголни координати** на точката A и означуваме $\mathrm{A}(a,b,c)$. Притоа, a се вика **апсциса** на точката A, b е **ордината**, а c се вика **апликата** на точката A.

За да ја претставиме точката $\mathrm{A}(a,b,c)$ во Декартов правоаголен координатен систем, низ точките $\mathrm{A}_x(a,0,0)$, $\mathrm{A}_y(0,b,0)$ и $\mathrm{A}_z(0,0,c)$ повлекуваме рамнини паралелни со координатните рамнини $y\mathrm{O}z$, $x\mathrm{O}z$ и $x\mathrm{O}y$ соодветно. Делови од овие рамнини со координатните рамнини образуваат правоаголен паралелопипед $\mathrm{OA}_x\mathrm{A}_{xy}\mathrm{A}_y\mathrm{A}_z\mathrm{A}_{xz}\mathrm{AA}_{yz}$. Бараната точка A е темето на паралелопипедот кое лежи на просторната дијагонала на паралелопипедот повлечена од координатниот почеток O.



Слика 3.1

Во кој октант се наоѓа точката $\mathrm{A}(a,b,c)$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ зависи од знаците на нејзините координати.

Знак на апсциса	Знак на ордината	Знак на апликата	Октант
+	+	+	I
−	+	+	II
−	−	+	III
+	−	+	IV
+	+	−	V
−	+	−	VI
−	−	−	VII
+	−	−	VIII

Пример. Точките $\mathrm{M}_1(1,2,3)$, $\mathrm{M}_2(-1,2,3)$, $\mathrm{M}_3(-1,-2,3)$, $\mathrm{M}_4(1,-2,3)$, $\mathrm{M}_5(1,2,-3)$, $\mathrm{M}_6(-1,2,-3)$, $\mathrm{M}_7(-1,-2,-3)$ и $\mathrm{M}_8(1,-2,-3)$ лежат во првиот, вториот, третиот, четвртиот, петтиот, шестиот, седмиот и осмиот октант соодветно. ▲

Во случај кога една од координатите на точката A е нула, тогаш точката лежи во некоја од координатните рамнини. Специјално, ако точката A има апсциса $a=0$, тогаш таа лежи во $y\mathrm{O}z$ рамнината. Ако пак, точката A има ордината $b=0$, тогаш таа лежи во $x\mathrm{O}z$ рамнината, а ако има апликата $c=0$, тогаш таа лежи во $x\mathrm{O}y$ рамнината.

Во случај кога две од координатите на точката A се нула, тогаш точката лежи на некоја од координатните оски. Така, ако $a=b=0$ тогаш точката лежи на z-оската, ако $a=c=0$ таа лежи на y-оската, а ако $b=c=0$, точката лежи на x-оската.

Ако трите координати на точката A се нула, тогаш таа се совпаѓа со координатниот почеток O. Ако точката A не лежи на ниедна од координатните рамнини или оски, тогаш таа се наоѓа во некој од осумте октанти.

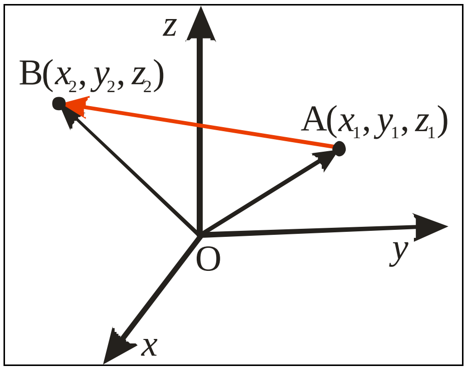
3.2. Растојание меѓу две точки

Делење отсечка во даден однос

Нека се дадени точките $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ во просторот. Јасно е дека

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}},$$

каде што $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ се радиус-вектори на точките A и B, соодветно. Тогаш, за координатите на векторот $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ добиваме:



Слика 3.2

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right).$$

За растојанието меѓу точките A и B, кое ќе го означиме со $d\left(\mathrm{A}, \mathrm{B}\right)$, добиваме:

$$\begin{aligned} d\left(\mathrm{A}, \mathrm{B}\right)&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right)\right|= \\ &=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}. \end{aligned}$$

Пример 1. Да се најде растојанието меѓу точките $\mathrm{A}(1, -1, 3)$ и $\mathrm{B}(3, 5, -1)$.

Решение. $d\left(\mathrm{A}, \mathrm{B}\right)=\sqrt{\left(3-1\right)^2+\left(5+1\right)^2+\left(-1-3\right)^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}.$ ▲

Нека се дадени точките $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$. Ако точката $\mathrm{S}(x, y, z)$ ја дели отсечката AB во однос λ ($\lambda \neq -1$ и $\lambda \neq 0$), т.е. $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{SB}}$, тогаш:

$$\mathrm{S}\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

Навистина, нека радиус-векторите на точките $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ и $\mathrm{S}(x, y, z)$ се

$$\vec{r_1}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_1, y_1, z_1),\ \vec{r_2}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x_2, y_2, z_2) \text{ и } \vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(x, y, z),$$

соодветно. Од релацијата $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{SB}}$ имаме $\vec{r}-\vec{r_1}=\lambda(\vec{r_2}-\vec{r})$, па за векторот $\vec{r}$ добиваме:

$$\vec{r}=\frac{\vec{r_1}+\lambda\vec{r_2}}{1+\lambda}.$$

Од последната векторска равенка се добиваат координатите *x*, *y* и *z* на точката S.

Да забележиме дека во случај кога $\lambda>0$, векторите $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{SB}}$ имаат иста насока, па точката S се наоѓа меѓу точките A и B. Ако пак, $\lambda<0$ и $\lambda\neq-1$, тогаш векторите $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{SB}}$ имаат спротивна насока, па точката S се наоѓа надвор од отсечката AB.

Специјално, ако $\lambda=1$, т.е. ако точката S е средина на отсечката AB, тогаш:

$$\mathrm{S}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Пример 2. Да се определат координатите на точката S која е средина на отсечката AB од пример 1.

Решение. За координатите на точката S добиваме:

$$\mathrm{S}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right), \text{ односно } \mathrm{S}(2, 2, 1). \qquad \blacktriangle$$

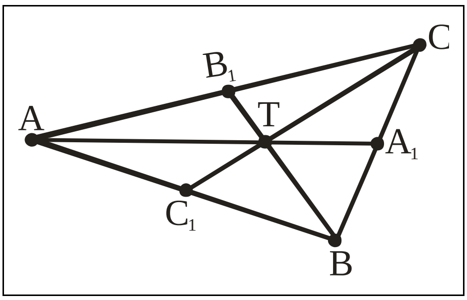
Пример 3. Нека е дадена точката $\mathrm{M}_1(2, 6, 7)$. Да се определат координатите на точката M_2 ако се знае дека точката $\mathrm{M}(1, 5, 4)$ ја дели отсечката $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ во однос 3:2.

Решение. Нека $\mathrm{M}_2(x,y,z)$. Од условот на задачата следува $\lambda=\dfrac{3}{2}$, па добиваме:

$$1=\frac{2+\frac{3}{2}x}{1+\frac{3}{2}},\ 5=\frac{6+\frac{3}{2}y}{1+\frac{3}{2}},\ 4=\frac{7+\frac{3}{2}z}{1+\frac{3}{2}},$$

од каде $x=\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{13}{3}$, $z=2$. Значи $\mathrm{M}_2\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{13}{3},2\right)$. ▲

Пример 4. Да се определат координатите на тежиштето $\mathrm{T}(x_{\mathrm{T}},y_{\mathrm{T}},z_{\mathrm{T}})$ на триаголникот со темиња $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2,z_2)$ и $\mathrm{C}(x_3,y_3,z_3)$.



Слика 3.3

Тежиштето T е пресечната точка на тежишните линии $\overline{\mathrm{AA}_1}$, $\overline{\mathrm{BB}_1}$ и $\overline{\mathrm{CC}_1}$ на триаголникот ABC. Точките A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, AC и AB соодветно, па

$$\mathrm{A}_1\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2},\frac{z_2+z_3}{2}\right),\ \mathrm{B}_1\left(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2},\frac{z_1+z_3}{2}\right) \text{ и }$$

$$\mathrm{C}_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

Од особината дека тежиштето $\mathrm{T}(x_{\mathrm{T}},y_{\mathrm{T}},z_{\mathrm{T}})$ ја дели секоја тежишна линија во однос 2:1 следува $\overline{\mathrm{AT}}:\overline{\mathrm{TA}_1}=2:1$. Според тоа, $\lambda=2$, па

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{x_1 + 2\frac{x_2 + x_3}{2}}{1+2},\ y_{\mathrm{T}} = \frac{y_1 + 2\frac{y_2 + y_3}{2}}{1+2},\ z_{\mathrm{T}} = \frac{z_1 + 2\frac{z_2 + z_3}{2}}{1+2}, \text{ т.е.}$$

$$\mathrm{T}\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right).$$

3.3. Рамнина

3.3.1. Видови равенки на рамнина

За да се определи една рамнина доволно е да се одбере една точка од рамнината и правец нормален на сите отсечки кои лежат во рамнината. Ненултиот вектор кој го определува овој правец се нарекува **нормален вектор на рамнината**. Бидејќи е важен само правецот на нормалниот вектор, а не и неговата насока, секој ненулти вектор кој е колинеарен на нормалниот вектор на рамнината може да биде исто така нејзин нормален вектор.

Рамнините обично ги означуваме со Σ, π, ...

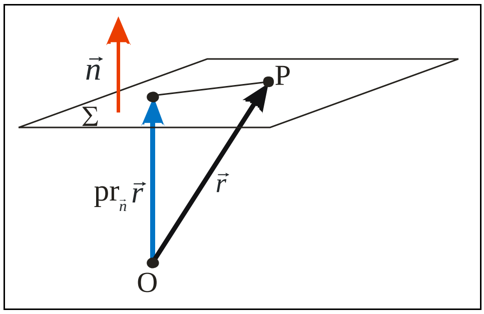
а) Општ облик равенка на рамнина

Нека $\vec{n} = (A, B, C)$ е даден ненулти вектор (барем една од неговите координати е различна од 0). Потребно е да го определиме векторот $\vec{r} = (x, y, z)$ така што неговиот скаларен производ со векторот $\vec{n}$ да биде еднаков на даден број $-D$, т.е. да важи $\vec{r} \cdot \vec{n} = -D$.

Ќе покажеме дека векторот $\vec{r}$ не е еднозначно определен. Навистина, од условот $|\vec{r} \cdot \vec{n}| = |\vec{n}| \cdot \left|\mathrm{pr}_{\vec{n}}\vec{r}\right| = |-D|$ следува $\left|\mathrm{pr}_{\vec{n}}\vec{r}\right| = \frac{|D|}{|\vec{n}|}$. Заклучуваме дека секој вектор $\vec{r}$ чија крајна точка лежи во рамнината Σ која е нормална на векторот $\vec{n}$ и е на растојание $\dfrac{|D|}{|\vec{n}|}$ од координатниот почеток, го задоволува бараниот услов.

Значи, $\vec{r}=(x,y,z)$ е вектор на положбата на произволна точка $\mathrm{P}(x,y,z)$ од рамнината Σ, од каде што заклучуваме дека

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=-D \qquad (3.1)$$



Слика 3.4

е равенка на рамнината Σ која се нарекува **општ векторски облик равенка на рамнина**.

Равенката (3.1) можеме да ја запишеме и во скаларен облик

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3.2)$$

кој се вика **општ скаларен облик равенка на рамнина**.

Ќе разгледаме некои специјални случаи на равенката (3.2) во зависност од $A,\ B,\ C$ и D:

1) Ако $D=0$, тогаш растојанието на рамнината до координатниот почеток е $\dfrac{|D|}{|\vec{n}|}=0$, па рамнината $Ax+By+Cz=0$ минува низ координатниот почеток.

2) Ако $C=0$, тогаш скаларниот производ на векторот $\vec{n}=(A,B,0)$ и векторот $\vec{k}=(0,0,1)$ е 0. Значи векторот $\vec{n}=(A,B,0)$ е нормален на векторот $\vec{k}=(0,0,1)$, т.е. на z-оската, од каде следува дека рамнината $Ax+By+D=0$ е паралелна со z-оската, т.е. е нормална на $x\mathrm{O}y$ рамнината.

Слично, ако $A = 0$, тогаш рамнината $By + Cz + D = 0$ е паралелна со x-оската, односно е нормална на $y\text{O}z$ рамнината, а ако $B = 0$, тогаш рамнината $Ax + Cz + D = 0$ е паралелна со y-оската, односно е нормална на $x\text{O}z$ рамнината.

3) Ако $C = D = 0$, тогаш од случаите 1) и 2) следува дека рамнината $Ax + By = 0$ минува низ координатниот почеток и е паралелна со z -оската. Значи, тоа е рамнина која ја содржи z-оската.

   Слично, ако $B = D = 0$, тогаш рамнината $Ax + Cz = 0$ ја содржи y -оската, а ако $A = D = 0$, тогаш рамнината $By + Cz = 0$ ја содржи x -оската.

4) Ако $B = C = 0$, тогаш од случајот 2) следува дека рамнината $Ax + D = 0$ е паралелна со y -оската и z -оската. Значи рамнината е нормална на x -оската, т.е. е паралелна со yOz рамнината.

   Слично, ако $A = C = 0$, тогаш рамнината $By + D = 0$ е паралелна со $x\text{O}z$ рамнината, а ако $A = B = 0$, тогаш рамнината $Cz + D = 0$ е паралелна со $x\text{O}y$ рамнината.

5) Ако $B = C = D = 0$, тогаш се добива равенката $x = 0$ која е равенка на $y\text{O}z$ рамнината. Слично, ако $A = C = D = 0$, тогаш се добива равенката $y = 0$ која е равенка на $x\text{O}z$ рамнината, а ако $A = B = D = 0$, тогаш се добива равенката $z = 0$ која е равенка на $x\text{O}y$ рамнината.

б) Равенка на рамнина која минува низ дадена точка и е нормална на даден вектор

Нека $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ е точка од рамнината Σ и $\vec{n} = (A, B, C)$ е нејзиниот нормален вектор. Нека $\mathrm{P}(x, y, z)$ е произволна точка која лежи во рамнината Σ.

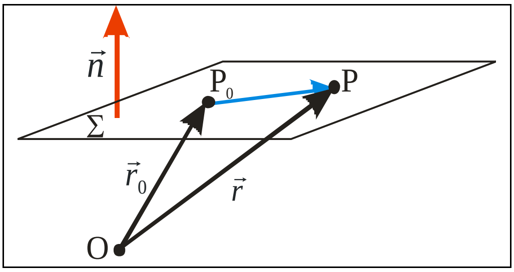
Векторите $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ се радиус-вектори на точките $\mathrm{P}(x, y, z)$ и $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, соодветно.

Од тоа што векторот $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ е нормален на векторот $\vec{n}$, следува $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = 0$, т.е.

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \tag{3.3}$$

Равенката (3.3) претставува векторска равенка на рамнината со нормален вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ која ја содржи точката $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ со радиус-вектор

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$



Слика 3.5

Оваа равенка можеме да ја запишеме во скаларен облик

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Така, рамнината со нормален вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ која ја содржи точката $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ има скаларна равенка:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.4}$$

в) Нормален облик равенка на рамнина

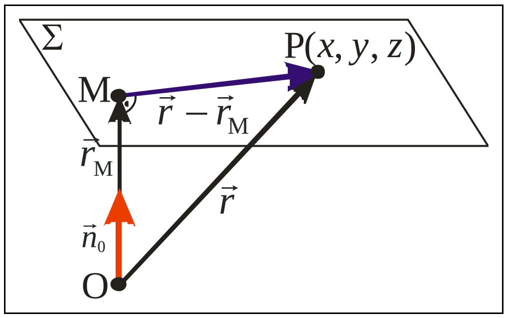
Нека $p>0$ е нормалното растојание од рамнината Σ до координатниот почеток и $\vec{n}_0=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ е единичниот нормален вектор на рамнината со почеток во точката $\mathrm{O}(0,0,0)$ (α, β и γ се аглите кои векторот $\vec{n}_0$ ги зафаќа со позитивниот дел од x-оската, y-оската и z-оската, соодветно).

Со $\vec{r}=(x, y, z)$ го означуваме векторот на положба на произволна точка $\mathrm{P}(x, y, z)$ од рамнината. Нека на рамнината Σ избереме точка M таква што нејзиниот вектор на положба е $\vec{r}_{\mathrm{M}}=p\vec{n}_0=(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma)$ (векторот $\vec{r}_{\mathrm{M}}$ е колинеарен со векторот $\vec{n}_0$).

Значи рамнината Σ минува низ точката M и е нормална на векторот $\vec{r}_{\mathrm{M}}$, па нејзината равенка според (3.3) ќе биде

$$\vec{r}_{\mathrm{M}}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_{\mathrm{M}})=0,$$

т.е. $p\vec{n}_0\cdot(\vec{r}-p\vec{n}_0)=0$.



Слика 3.6

Оттука го добиваме векторскиот облик равенка на рамнината Σ:

$$\vec{r}\cdot\vec{n}_0-p=0. \qquad (3.5)$$

Равенката (3.5) се вика **нормален векторски** или **Хесеов векторски облик равенка на рамнина.** Оваа равенка можеме да ја запишеме во скаларен облик

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \qquad (3.6)$$

кој е познат како **нормален скаларен** или **Хесеов скаларен облик равенка на рамнина**.

Нека е дадена рамнина Σ со равенка во општ облик:

$$\Sigma \equiv Ax + By + Cz + D = 0\,. \tag{3.7}$$

За да ја трансформираме нејзината равенка од општ во нормален облик, векторот $\vec{n} = (A, B, C)$ го заменуваме со единичен вектор

$$\frac{\vec{n}}{\pm|\vec{n}|} = \left(\frac{A}{\pm|\vec{n}|}, \frac{B}{\pm|\vec{n}|}, \frac{C}{\pm|\vec{n}|}\right) =$$

$$= \left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right),$$

при што равенката на рамнината се трансформира во облик

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0\,. \tag{3.8}$$

Равенките (3.6) и (3.8) ќе бидат еквивалентни ако важат равенствата:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad -p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

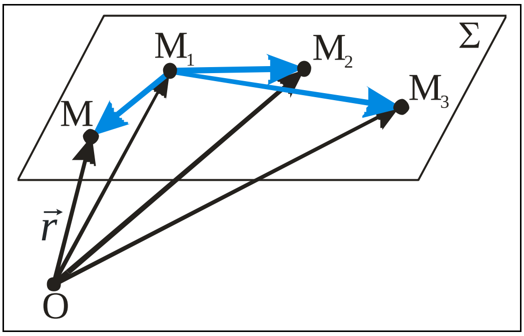
Бидејќи $p > 0$, за да важи последното равенство потребно е пред коренот $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ да се земе спротивен знак од знакот на D. Тогаш равенката (3.8) претставува нормален облик на равенката на рамнината чиј општ облик е (3.7).

г) Равенка на рамнина низ три точки

Ако $\mathrm{M}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{M}_2(x_2, y_2, z_2)$ и $\mathrm{M}_3(x_3, y_3, z_3)$ се три неколинеарни точки, тогаш низ нив минува единствена рамнина Σ. Нека $\mathrm{M}(x, y, z)$ е произволна точка од таа рамнина. Векторите на положба на точките M_1, M_2, M_3 и M се:

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),\ \vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3) \text{ и } \vec{r} = (x, y, z),$$

соодветно.



Слика 3.7

Векторите $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ лежат во рамнината Σ, т.е. се компланарни вектори, па нивниот мешан производ е еднаков на нула, односно важи:

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}}, \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}, \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3}\right) = 0,$$

т.е.

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0, \tag{3.9}$$

што претставува **векторски облик равенка на рамнина низ три точки** со радиус-вектори $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, и $\vec{r}_3$.

Бидејḱи

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),\quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

и $\vec{r}_3-\vec{r}_1=\left(x_3-x_1,\, y_3-y_1,\, z_3-z_1\right)$, **скаларниот облик равенка на рамнина низ три точки** $\mathrm{M}_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\mathrm{M}_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ и $\mathrm{M}_3\left(x_3, y_3, z_3\right)$ е

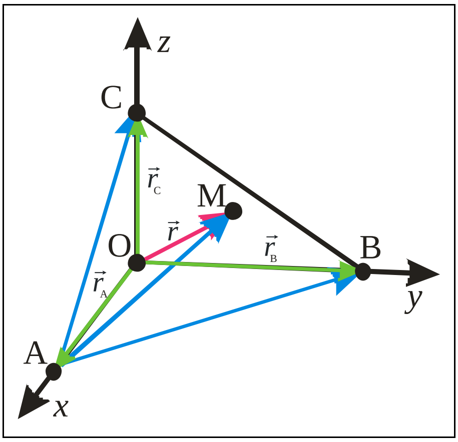
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.10)$$

Забелешка. Равенката на рамнината Σ која минува низ три точки $\mathrm{M}_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\mathrm{M}_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ и $\mathrm{M}_3\left(x_3, y_3, z_3\right)$ може да се определи и како равенка на рамнина со нормален вектор $\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}\times\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3}$ која ја содржи точката $\mathrm{M}_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ користејќи ја равенката (3.4).

д) Сегментен облик равенка на рамнина

Нека Σ е рамнина која не минува низ координатниот почеток и не е паралелна со ниедна од координатните рамнини.

Претпоставуваме дека рамнината Σ ги сече x-оската, y-оската и z-оската во точките $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(0,b,0)$ и $\mathrm{C}(0,0,c)$, соодветно, каде што $a\neq 0$, $b\neq 0$ и $c\neq 0$.



Слика 3.8

Нека $\mathrm{M}(x, y, z)$ е произволна точка од рамнината Σ со вектор на положба $\vec{r}=(x, y, z)$, а $\vec{r}_{\mathrm{A}}=(a, 0, 0)$, $\vec{r}_{\mathrm{B}}=(0, b, 0)$ и

$\vec{r}_C = (0, 0, c)$ се векторите на положба на точките A, B и C соодветно.

Од векторскиот облик равенка на рамнина низ три точки (3.9) ја добиваме равенката на рамнината Σ:

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0,$$

односно

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_A, \vec{r}_B - \vec{r}_A, \vec{r}_C - \vec{r}_A\right) = 0.$$

Нејзиниот скаларен облик е

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Пресметувајќи ја детерминантата се добива

$$(x-a)bc + abz + acy = 0.$$

Ако последнава равенка се подели со $abc \neq 0$, таа се трансформира во облик

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

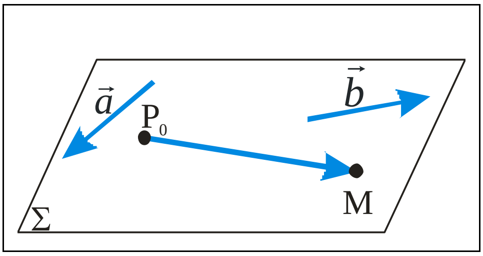
кој е познат како **сегментен облик равенка на рамнина**.

Нека рамнината $\Sigma \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ не минува низ координатниот почеток (т.е. $D \neq 0$) и не е паралелна со ниедна од координатните рамнини (т.е. $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$). Делејќи ја нејзината равенка со $-D$, го добиваме сегментниот облик равенка на рамнина

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

ѓ) Параметарски облик равенка на рамнина

Нека $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ се ненулти неколинеарни вектори, а $P_0(x_0,y_0,z_0)$ е точка од рамнината Σ која е паралелна на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Слика 3.9

Векторите на положба на точката $P_0(x_0,y_0,z_0)$ и произволна точка $M(x,y,z)$ од рамнината Σ ги означуваме со $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ и $\vec{r}=(x,y,z)$, соодветно.

Тогаш векторите $\overrightarrow{P_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се компланарни, па според особина 2^0 од поглавје 2.4. следува дека овие вектори се линеарно зависни. Значи векторот $\overrightarrow{P_0M}$ може да се претстави како линеарна комбинација од векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. постојат скалари α и β такви што $\overrightarrow{P_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Ја добиваме равенката

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

која претставува **параметарска векторска равенка на рамнината** Σ. Скаларите α и β се нарекуваат параметри. Ако оваа равенка ја запишеме во скаларен облик, ги добиваме следниве **параметарски равенки на рамнината** Σ:

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha a_1+\beta b_1 \\ y=y_0+\alpha a_2+\beta b_2 \\ z=z_0+\alpha a_3+\beta b_3 \end{cases}.$$

Пример 1. Општиот облик равенка на рамнина $2x-y-2z+5=0$ да се запише во:
а) нормален облик, б) сегментен облик, в) параметарски облик.

Решение. а) Ако равенката $2x-y-2z+5=0$ ја поделиме со $-\sqrt{A^2+B^2+C^2}=-\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=-3$, го добиваме нормалниот облик $-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{5}{3}=0$.

б) Ако равенката $2x-y-2z=-5$ ја поделиме со -5 го добиваме сегментниот облик $\frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{5}+\frac{z}{\frac{5}{2}}=1$.

в) Од равенката на рамнината определуваме три произволни неколинеарни точки. На пример, од сегментниот облик ги добиваме следниве неколинеарни точки:

$$\mathrm{A}\left(-\frac{5}{2},0,0\right),\ \mathrm{B}(0,5,0) \text{ и } \mathrm{C}\left(0,0,\frac{5}{2}\right).$$

Тогаш $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\frac{5}{2},5,0\right)$ и $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}\right)$ се неколинеарни вектори кои лежат во дадената рамнина. Параметарските равен-ки на рамнината се:

$$\begin{cases} x=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\alpha+\frac{5}{2}\beta \\ y=0+5\alpha+\beta\cdot 0=5\alpha \\ z=0+\alpha\cdot 0+\frac{5}{2}\beta=\frac{5}{2}\beta \end{cases},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

▲

3.3.2. Заемен однос на точка и рамнина

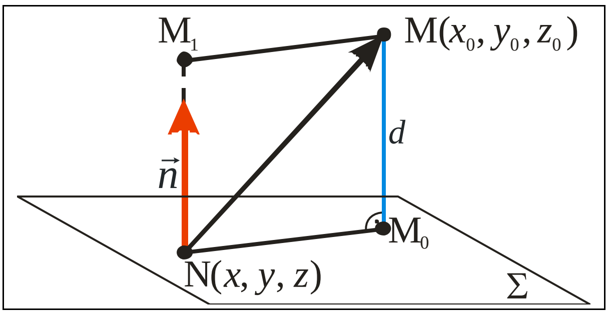
Нека е дадена рамнина $\Sigma \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$. Можни се два случаи:

1) Точката $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ лежи во рамнината Σ (пишуваме $\mathrm{M} \in \Sigma$) ако и само ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на рамнината, т.е. важи $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

2) Точката $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ не лежи во рамнината Σ (пишуваме $\mathrm{M} \notin \Sigma$) ако и само ако $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

Ако точката $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ не лежи во рамнината $\Sigma \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, ќе покажеме дека растојанието d од точката M до рамнината Σ може да се пресмета според формулата:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



Слика 3.10

Навистина, нека $\mathrm{N}(x, y, z)$ е произволна точка од рамнината Σ. Го конструираме векторот $\overrightarrow{\mathrm{NM}} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$, па

$$d=\left|\mathrm{pr}_{\vec{n}}\overrightarrow{\mathrm{NM}}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{NM}}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|A\left(x_0-x\right)+B\left(y_0-y\right)+C\left(z_0-z\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-\left(Ax+By+Cz\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

каде што $\vec{n}=(A,B,C)$ е нормален вектор на рамнината Σ. Но точката $\mathrm{N}(x,\,y,\,z)$ лежи во рамнината Σ, па нејзините координати ја задоволуваат равенката на рамнината, т.е. важи $Ax+By+Cz=-D$. Оттука добиваме:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 2. Да се пресмета растојанието од точката $\mathrm{M}(1,2,3)$ до рамнината $2x+y-2z-4=0$.

Решение. Координатите на точката $\mathrm{M}(1,2,3)$ не ја задоволуваат равенката на рамнината, па заклучуваме дека точката не лежи во рамнината. Според горната формула, за бараното растојание добиваме:

$$d=\frac{\left|2\cdot1+2-2\cdot3-4\right|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2.$$ ▲

Пример 3. Дадени се точките $\mathrm{M}_1(2,2,3),\ \mathrm{M}_2(-1,2,-2)$ и $\mathrm{M}_3(3,1,1)$. Да се напише равенка на рамнина која:

а) минува низ точката M_1, а на координатните оски отсекува отсечоци $a,\ b$ и c за кои важи $a:b:c=1:2:3$,

б) минува низ точките $\mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2$ и M_3,

в) е нормална на векторот OM_2 и е на растојание 4 единици од координатниот почеток.

Решение. а) Од условот $a:b:c=1:2:3$ следува дека постои $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ така што $a=k$, $b=2k$ и $c=3k$. Сегментниот облик равенка на бараната рамнина е

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{2k}+\frac{z}{3k}=1.$$

Од условот точката $\mathrm{M}_1(2,2,3)$ да лежи во рамнината, ја добиваме равенката $\frac{2}{k}+\frac{2}{2k}+\frac{3}{3k}=1$ чие решение е $k=4$, па равенката на бараната рамнина е:

$$6x+3y+2z=24.$$

б) Од равенката на рамнина низ три точки (3.10.) добиваме:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-3 \\ -1-2 & 2-2 & -2-3 \\ 3-2 & 1-2 & 1-3 \end{vmatrix}=0,$$

од каде се добива бараната равенка:

$$-5x-11y+3z+23=0.$$

в) Од нормалниот векторски облик равенка на рамнина (3.5.) имаме $\vec{r}\cdot\vec{n}_0-p=0$, каде што $p=4$ е растојанието на рамнината до координатниот почеток, а $\vec{r}$ е радиус-вектор на произволна точка $\mathrm{P}(x,y,z)$ од рамнината. Векторот

$$\vec{n}_0=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}\right|}=\frac{1}{3}\left(-1,2,-2\right)$$

е единичен нормален вектор на рамнината.
Бараната равенка на рамнината е:

$$\left(x,y,z\right)\cdot\frac{1}{3}\left(-1,2,-2\right)-4=0$$

а по нејзино средување се добива равенката:

$$x-2y+2z+12=0.$$ ▲

3.3.3. Заемен однос на рамнини

а) Заемен однос на две рамнини

Нека се дадени рамнините

$$\Sigma_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } \Sigma_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Нормалните вектори на рамнините Σ_1 и Σ_2 се $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, соодветно.

1) Нека векторот $\vec{n}_1$ е колинеарен со векторот $\vec{n}_2$. Можни се следниве случаи:

1.1. Рамнините Σ_1 и Σ_2 се совпаѓаат (пишуваме $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$) ако и само ако векторот $\vec{n}_1$ е колинеарен со векторот $\vec{n}_2$ и рамнините имаат барем една заедничка точка.
Од колинеарноста на векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ следува дека $\vec{n}_1 = \alpha\vec{n}_2$ за некој реален број $\alpha \neq 0$, т.е. важат равенствата

$$A_1 = \alpha A_2,\ B_1 = \alpha B_2,\ C_1 = \alpha C_2.$$

Нека заедничка точка на рамнините е точката $\mathrm{M}_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогаш

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \text{ и } A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0.$$

Од првата равенка добиваме $\alpha(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0) + D_1 = 0$ од каде $\alpha(-D_2) + D_1 = 0$, т.е.

$$D_1 = \alpha D_2.$$

Според ова, заклучуваме дека рамнините Σ_1 и Σ_2 се совпаѓаат ако и само ако

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

1.2. Рамнините Σ_1 и Σ_2 се паралелни (пишуваме $\Sigma_1 \| \Sigma_2$) ако и само ако векторот $\vec{n}_1$ е колинеарен со векторот $\vec{n}_2$ и рамнините немаат заеднички точки.

Според дискусијата во случајот 1.1. следува дека рамнините Σ_1 и Σ_2 се паралелни ако и само ако важи:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

2) Нека векторот $\vec{n}_1$ не е колинеарен со векторот $\vec{n}_2$. Тогаш рамнините Σ_1 и Σ_2 имаат бесконечно многу заеднички точки и се сечат по права.

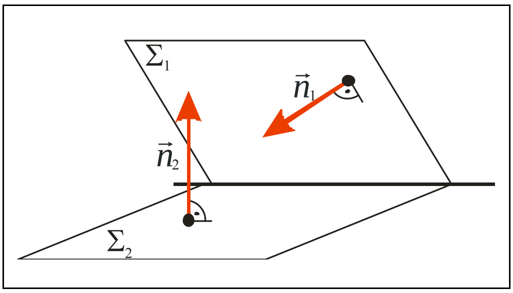
Значи, рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат по права ако и само ако барем едно од следниве равенства $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ не важи.

Агол меѓу две рамнини

Во случај кога рамнините Σ_1 и Σ_2 се сечат, може да се определи аголот меѓу нив.

Агол меѓу две рамнини Σ_1 и Σ_2 е аголот φ што го зафаќат нивните нормални вектори $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$.

Користејќи ја дефиницијата на скаларен производ добиваме:



Слика 3.11

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Рамнините Σ_1 и Σ_2 се нормални една на друга ако и само ако векторот $\vec{n}_1$ е нормален на векторот $\vec{n}_2$ (т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$).

Значи, рамнините Σ_1 и Σ_2 се нормални една на друга ако и само ако

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0, \text{ т.е. важи } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 .$$

Пример 4. Да се напише равенка на рамнина нормална на рамнините $\Sigma_1 \equiv 2x - y + z + 1 = 0$ и $\Sigma_2 \equiv x + y - 2z - 2 = 0$ која минува низ точката $\mathrm{M}(1,2,3)$.

Решение. Од условот бараната рамнина да е нормална на рамнините Σ_1 и Σ_2 добиваме дека нејзиниот нормален вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ треба да биде нормален на векторите $\vec{n}_1 = (2,-1,1)$ и $\vec{n}_2 = (1,1,-2)$. Тогаш $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$.

Значи $\vec{n} = (1,5,3)$. Според (3.4) равенката на бараната рамнина е

$$1(x-1) + 5(y-2) + 3(z-3) = 0, \text{ т.е.}$$

$$x + 5y + 3z - 20 = 0. \qquad \blacktriangle$$

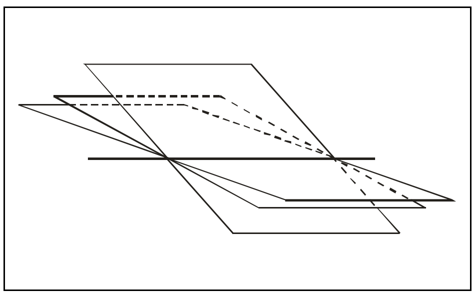
Сноп рамнини

Нека се дадени две рамнини

$\Sigma_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и

$\Sigma_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

кои се сечат.



Слика 3.12

Множеството од сите рамнини кои минуваат низ пресечната права на двете рамнини се нарекува **сноп рамнини** или **прамен рамнини.**

Равенката на снопот рамнини е

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0, \quad (3.11)$$

каде што α и β се произволни реални параметри. За различни вредности на параметрите α и β се добиваат различни рамнини кои припаѓаат на снопот рамнини. Рамнината Σ_1 се добива за $\beta=0$, а рамнината Σ_2 се добива за $\alpha=0$.

Ако равенката (3.11) ја поделиме со $\alpha\neq 0$ и ставиме $\lambda=\dfrac{\beta}{\alpha}$ ја добиваме равенката:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0,$$

каде што λ е реален параметар. За различни вредности на параметарот λ се добиваат различни рамнини од снопот рамнини. За $\lambda=0$ се добива рамнината Σ_1, но рамнината Σ_2 не може да се добие за ниедна вредност на параметарот λ.

Пример 5. Да се покаже дека рамнините $\Sigma_1\equiv 2x+y-3z+2=0$ и $\Sigma_2\equiv 25x+5y-48z+31=0$ се сечат. Потоа да се определи рамнина во која лежи пресечната права на дадените рамнини и која отсекува еднакви отсечоци на x-оската и y-оската.

Решение. Нормалните вектори на дадените рамнини се $\vec{n}_1=(2,1,-3)$ и $\vec{n}_2=(25,5,-48)$. Бидејќи $\dfrac{2}{25}=\dfrac{1}{5}\neq\dfrac{3}{48}$ заклучуваме дека дадените рамнини се сечат. Тогаш тие образуваат сноп рамнини чија равенка е

$$2x+y-3z+2+\lambda(25x+5y-48z+31)=0,$$

каде што λ е произволен реален параметар. Ако последната равенка ја запишеме во сегментен облик добиваме:

$$\frac{x}{\frac{-2-31\lambda}{2+25\lambda}}+\frac{y}{\frac{-2-31\lambda}{1+5\lambda}}+\frac{z}{\frac{-2-31\lambda}{-3-48\lambda}}=1.$$

Од условот рамнината да отсекува еднакви отсечоци на x-оската и y-оската, ја добиваме равенката:

$$\frac{-2-31\lambda}{2+25\lambda}=\frac{-2-31\lambda}{1+5\lambda},$$

чие решение е $\lambda=-\frac{1}{20}$. Ако оваа вредност на λ се замени во равенката на снопот рамнини се добива равенката на бараната рамнина $5x+5y-4z+3=0$. ▲

б) Заемен однос на три рамнини

Нека се дадени три рамнини

$$\Sigma_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\Sigma_2 \equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$\Sigma_3 \equiv A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.$$

Нивните равенки образуваат систем од три линеарни равенки со три непознати. Согласно поглавјето 1.4.2. следува дека можни се следниве случаи:

1) Ако детерминантата на системот е различна од нула, тогаш системот има единствено решение, односно трите рамнини се сечат во една точка. Множеството рамнини кои минуваат низ заедничката точка на рамнините Σ_1, Σ_2 и Σ_3 се нарекува **ѕвезда рамнини** и нејзината равенка е:

$$\alpha\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+\beta\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)+ \\ +\gamma\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)=0, \tag{3.12}$$

каде што α, β и γ се произволни реални параметри.

За различни вредности на параметрите α, β и γ се добиваат различни рамнини од ѕвезда рамнините. Рамнината Σ_1 се добива за $\beta=\gamma=0$, рамнината Σ_2 за $\alpha=\gamma=0$, а рамнината Σ_3 за $\alpha=\beta=0$.

Ако равенката (3.12) ја поделиме со $\alpha \neq 0$ и ставиме $\lambda=\dfrac{\beta}{\alpha}$ и $\mu=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ ја добиваме равенката:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)+ \\ +\mu\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)=0,$$

каде што λ и μ се реални параметри. За различни вредности на параметрите λ и μ се добиваат различни рамнини од ѕвезда рамнините. За $\lambda=\mu=0$ се добива рамнината Σ_1, но за ниедна вредност на параметрите λ и μ не може да се добијат рамнините Σ_2 и Σ_3.

2) Ако детерминантата на системот е еднаква на нула и барем една од детерминантите на непознатите е различна од нула, тогаш системот нема решение, односно трите рамнини немаат заеднички точки. Иако трите рамнини немаат заедничка точка, сепак две по две од рамнините може да имаат заеднички точки.

3) Ако детерминантата на системот и детерминантите на непознатите се еднакви на нула, тогаш системот може или да има бесконечно многу решенија, или пак да нема решение. Ако системот има бесконечно многу решенија тогаш трите рамнини се сечат по права или пак се совпаѓаат.

Пример 6. Да се покаже дека рамнините $\Sigma_1 \equiv x+y+z-1=0$, $\Sigma_2 \equiv x-y+z-2=0$ и $\Sigma_3 \equiv x-y-z-3=0$ се сечат во една точка.

Потоа низ нивната пресечна точка да се определи рамнина која е паралелна на рамнината $\Sigma_4 \equiv x+2y+3z+4=0$.

Решение. За да покажеме дека рамнините се сечат во една точка, ќе покажеме дека системот од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y+z-2=0 \\ x-y-z-3=0 \end{cases},$$

има единствено решение. Детерминантата на системот е

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=4\neq 0,$$

па следува дека системот има единствено решение, односно трите рамнини се сечат во една точка и образуваат ѕвезда рамнини. Нејзината равенка е:

$$x+y+z-1+\lambda\left(x-y+z-2\right)+\mu\left(x-y-z-3\right)=0, \text{ т.е.}$$

$$(1+\lambda+\mu)x+(1-\lambda-\mu)y+(1+\lambda-\mu)z-1-2\lambda-3\mu=0,$$

каде што λ и μ се реални параметри. Нормален вектор на бараната рамнина е $\vec{n}=\left(1+\lambda+\mu, 1-\lambda-\mu, 1+\lambda-\mu\right)$.

Од условот бараната рамнина да биде паралелна на рамнината $\Sigma_4 \equiv x+2y+3z+4=0$ следува дека векторот $\vec{n}$ треба да биде колинеарен на векторот $\vec{n}_4=\left(1,2,3\right)$, т.е. треба да важи

$$\frac{1+\lambda+\mu}{1}=\frac{1-\lambda-\mu}{2}=\frac{1+\lambda-\mu}{3}.$$

Со решавање на системот:

$$\begin{cases} \dfrac{1+\lambda+\mu}{1} = \dfrac{1-\lambda-\mu}{2} \\ \dfrac{1-\lambda-\mu}{2} = \dfrac{1+\lambda-\mu}{3} \end{cases}$$

се добива $\lambda = \dfrac{1}{3}$ и $\mu = -\dfrac{2}{3}$. Ако добиените вредности за λ и μ се заменат во равенката на ѕвезда рамнини се добива равенката на бараната рамнина:

$$2x + 4y + 6z + 1 = 0 .$$

Забележуваме дека бараната рамнина може да се определи и без користење на ѕвезда рамнини. За таа цел треба да се определи пресечната точка на рамнините, па равенката на бараната рамнина се определува преку равенката (3.4), т.е. како равенка на рамнина низ добиената пресечна точка и со нормален вектор $\vec{n} = \vec{n}_4 = (1,2,3)$. ▲

3.4. Права

За означување на правите ќе ги користиме малите букви од латинската азбука p, q, r, ….

3.4.1. Видови равенки на права

а) Општ облик равенки на права

Нека се дадени две рамнини во просторот

$$\Sigma_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\Sigma_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

кои се сечат. Тогаш нивните нормални вектори $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ не се колинеарни. Заедничките точки на овие две рамнини определуваат права.

Равенките на рамнините кои се сечат по една права се нарекуваат **општ облик равенки на права**:

$$p \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

б) Равенка на права која минува низ дадена точка и е паралелна на даден вектор

Една права p во просторот е еднозначно определена ако е позната една нејзина точка $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ и ненулти вектор $\vec{p} = (l, m, n)$ кој е паралелен со неа. Векторот $\vec{p} = (l, m, n)$ го нарекуваме **вектор на правецот на правата**.

Нека $\vec{r}=(x, y, z)$ е вектор на положба на произволна точка $N(x,y,z)$ од правата, а $\vec{r}_0=(x_0, y_0, z_0)$ е вектор на положба на точката $M(x_0, y_0, z_0)$.

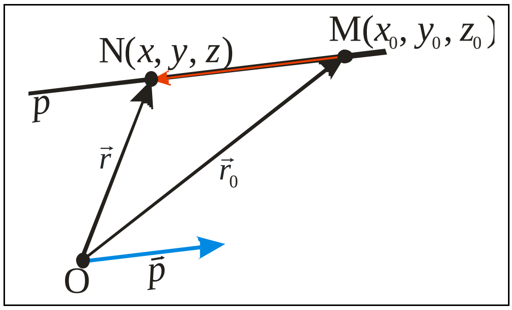
Векторите $\vec{p}$ и $\overrightarrow{MN}$ се колинеарни, од каде следува дека постои скалар t, така што $\overrightarrow{MN}=t\vec{p}$.

Бидејќи

$$\overrightarrow{MN}=\vec{r}-\vec{r}_0,$$

добиваме:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{p}.$$



Слика 3.13

Оваа равенка е векторски облик равенка на права која минува низ дадена точка и е паралелна на даден вектор и се нарекува **параметарска векторска равенка на права**. Скаларот t се нарекува параметар.

На оваа равенка и одговараат следниве скаларни равенки кои се нарекуваат **параметарски равенки на права**:

$$\begin{cases} x=x_0+tl \\ y=y_0+tm. \\ z=z_0+tn \end{cases}$$

Решавајќи ги овие равенки по t добиваме:

$$\frac{x-x_0}{l}=t,\quad \frac{y-y_0}{m}=t,\quad \frac{z-z_0}{n}=t.$$

Изедначувајќи ги левите страни од равенките, ги добиваме **каноничните равенки на права**:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Ако правата е зададена со нејзините канонични равенки $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, тогаш таа може да се претстави во општ облик на повеќе начини комбинирајќи ги претходните равенства, како на пример,

$$\begin{cases}\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{z-z_0}{n}\end{cases}, \text{ или } \begin{cases}\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\\ \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}\end{cases}, \text{ и.т.н.}$$

Обратно, нека правата е зададена со нејзините општи равенки:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$

За да ги определиме каноничните равенки на правата, треба да го определиме векторот на правец на правата и една точка од неа. Векторот на правец на правата $\vec{p}$ е нормален на векторите $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, па според тоа

$$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right).$$

За да најдеме точка од правата, за една од променливите избираме произволна конкретна вредност, на пример $z=z_0$. Вредностите $x=x_0$ и $y=y_0$ ги добиваме решавајќи го системот равенки $\begin{cases}A_1x+B_1y=-C_1z_0-D_1\\ A_2x+B_2y=-C_2z_0-D_2\end{cases}$. На тој начин се добива точка $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ од правата *p*, па нејзините канонични равенки се:

$$p \equiv \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Забелешка. Каноничните равенки на правата може да се добијат од општите равенки на правата и со определување на две произволни точки од правата, а потоа со користење на равенката (3.13).

Пример 1. Да се напише равенка на x-оската.

Решение. За вектор на правецот на x-оската го избираме векторот $\vec{i} = (1,0,0)$, а една точка од x-оската е координатниот почеток $\mathrm{O}(0,0,0)$. Каноничните равенки на x-оската се

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Нејзините параметарски равенки се

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

x-оската е пресечна права на $x\mathrm{O}z$ и $x\mathrm{O}y$ рамнината, па нејзините општи равенки се $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. ▲

Пример 2. Општите равенки на правата $p \equiv \begin{cases} 2x+3y+5z-3=0 \\ x+\ \ y+2z-1=0 \end{cases}$ да се запишат во каноничен и параметарски облик.

Решение. Векторот на правец на правата p е

$$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\text{, т.е. }\vec{p}=(1,1,-1).$$

Ако во општите равенки на правата ставиме $z=0$ го добиваме системот

$$\begin{cases}2x+3y-3=0\\ \ \ x+\ \ y-1=0\end{cases},$$

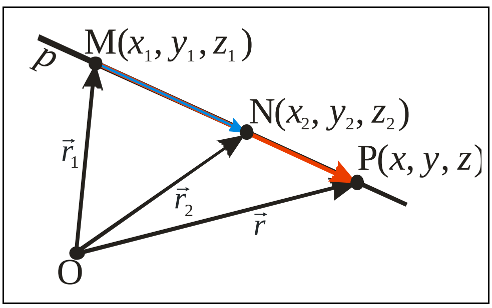
чие решение е $x=0$, $y=1$, со што ја добиваме точката $\mathrm{P}(0,1,0)$ која лежи на дадената права p. Каноничните равенки на правата се

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}\text{, т.е. } x=y-1=-z,$$

а нејзините параметарски равенки се $\begin{cases}x=t\\ y=1+t\\ z=-t\end{cases}.$ ▲

в) Равенка на права низ две точки

Низ две точки $\mathrm{M}(x_1,y_1,z_1)$ и $\mathrm{N}(x_2,y_2,z_2)$ во просторот минува единствена права. Нека $\mathrm{P}(x,y,z)$ е произволна точка од правата.



Слика 3.14

Векторите на положба на точките $\mathrm{M}(x_1,y_1,z_1)$, $\mathrm{N}(x_2,y_2,z_2)$ и $\mathrm{P}(x,y,z)$ се $\vec{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$ и $\vec{r}=(x,y,z)$, соодветно.

Векторите $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ се колинеарни, т.е. постои скалар t така што $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = t \cdot \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. Бидејќи $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \vec{r} - \vec{r}_1$ и $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ добиваме:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Оттука

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

што претставува **векторски облик равенка на права низ две точки** со радиус-вектори $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. На оваа равенка и одговараат скаларните параметарски равенки:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}.$$

Елиминирајќи го параметарот t од горните равенки ги добиваме **каноничните равенки на права низ две точки** $\mathrm{M}(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathrm{N}(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3.13}$$

Пример 3. Да се напишат каноничните равенки на права која минува низ точките $\mathrm{M}(2,3,-1)$ и $\mathrm{N}(5,1,2)$.

Решение. Според равенката (3.13), каноничните равенки на бараната права се

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}.$$ ▲

3.4.2. Заемен однос на точка и права

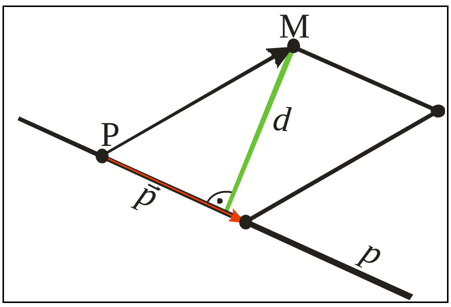
Нека се дадени права $p \equiv \frac{x - x_P}{l} = \frac{y - y_P}{m} = \frac{z - z_P}{n}$ и точка $M(x_M, y_M, z_M)$ во просторот. Можни се два случаи:

1) Точката $M(x_M, y_M, z_M)$ лежи на правата p (пишуваме $M \in p$) ако и само ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, т.е. важи

$$\frac{x_M - x_P}{l} = \frac{y_M - y_P}{m} = \frac{z_M - z_P}{n}. \tag{3.14}$$

2) Точката $M(x_M, y_M, z_M)$ не лежи на правата p (пишуваме $M \notin p$) ако и само не важи барем едно од равенствата во (3.14).

Во случај кога точката $M(x_M, y_M, z_M)$ не лежи на правата p, го определуваме растојанието d од точката M до правата p.



Слика 3.15

Правата ја запишуваме во параметарски векторски облик $\vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}$, каде што $\vec{r}_P = (x_P, y_P, z_P)$ е радиус-вектор на точката $P(x_P, y_P, z_P)$ која лежи на правата, а $\vec{p} = (l, m, n)$ е вектор на правецот на правата.

Тогаш бараното растојание d е висината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{p}$ и $\overrightarrow{PM} = \vec{r}_M - \vec{r}_P$, каде што $\vec{r}_M = (x_M, y_M, z_M)$ е вектор на положбата на точката M.

Плоштината на овој паралелограм е $P=\left|\vec{p}\times\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|=\left|\vec{p}\times\left(\vec{r}_{\mathrm{M}}-\vec{r}_{\mathrm{P}}\right)\right|$. Од друга страна $P=\left|\vec{p}\right|\cdot d$, па од овде добиваме

$$d=\frac{\left|\vec{p}\times\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|}{\left|\vec{p}\right|}=\frac{\left|\vec{p}\times\left(\vec{r}_{\mathrm{M}}-\vec{r}_{\mathrm{P}}\right)\right|}{\left|\vec{p}\right|}.$$

Пример 4. Да се пресмета растојанието од точката $\mathrm{M}(2,1,3)$ до правата $p\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

Решение. Точката M не лежи на правата p бидејќи нејзините координати не ја задоволуваат равенката на правата. Од равенката на правата p го определуваме векторот $\vec{p}=\left(2,1,1\right)$ и точката $\mathrm{P}(1,0,0)$. Тогаш $\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(1,1,3\right)$, па

$$\vec{p}\times\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=2\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}\,.$$

Од тоа што $\left|\vec{p}\times\overrightarrow{\mathrm{PM}}\right|=\sqrt{30}$ и $|\,\vec{p}\,|=\sqrt{6}$, за бараното растојание d добиваме:

$$d=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}\,.$$

▲

3.4.3. Заемен однос на права и рамнина

Нека е дадена рамнината $\Sigma \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ и правата $p \equiv \dfrac{x - x_P}{l} = \dfrac{y - y_P}{m} = \dfrac{z - z_P}{n}$. Нормалниот вектор на рамнината Σ е $\vec{n} = (A, B, C)$, а $\vec{p} = (l, m, n)$ е вектор на правецот на правата p.

За да го испитаме заемниот однос на правата и рамнината, равенката на правата ја претставуваме во параметарски облик:

$$p \equiv \begin{cases} x = x_P + tl \\ y = y_P + tm \\ z = z_P + tn \end{cases}.$$

Ако параметарските равенки на правата се заменат во равенката на рамнината, се добива следнава линеарна равенка со непозната t:

$$A(x_P + tl) + B(y_P + tm) + C(z_P + tn) + D = 0, \text{ т.е.}$$

$$Ax_P + By_P + Cz_P + D + (Al + Bm + Cn)t = 0.$$

За решението на последнава равенка можни се следниве случаи:

1) Ако $Al + Bm + Cn \neq 0$, тогаш равенката има единствено решение, па правата и рамнината имаат една заедничка точка $\mathrm{M}(x_P + tl, y_P + tm, z_P + tn)$, каде што

$$t = -\frac{Ax_P + By_P + Cz_P + D}{Al + Bm + Cn}.$$

Велиме дека правата p ја прободува рамнината Σ.

2) Ако $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_P + By_P + Cz_P + D \neq 0$, тогаш равенката нема решенија, па правата и рамнината немаат заеднички

точки, т.е. правата p и рамнината Σ се паралелни (пишуваме $p \parallel \Sigma$).

3) Ако $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_P + By_P + Cz_P + D = 0$, тогаш равенката има бесконечно многу решенија, па правата и рамнината имаат бесконечно многу заеднички точки, т.е. правата p лежи во рамнината Σ (пишуваме $p \in \Sigma$).

Забелешка. Ако равенките на правата p се дадени во општ облик

$$p \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

тогаш заемната положба на правата p и рамнината $\Sigma \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ може да се испита на претходно опишаниот начин, запишувајќи ја равенката на правата во параметарски облик. Исто така, заемната положба на правата и рамнината може да се испита и со решавање на системот равенки:

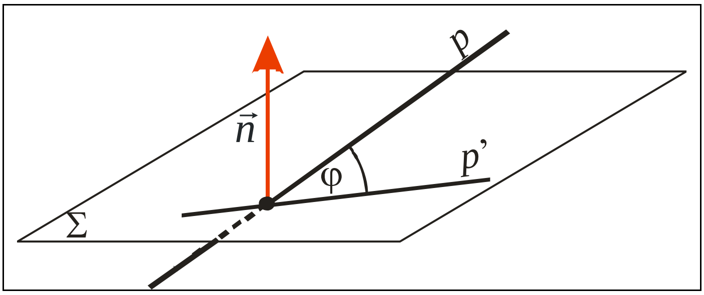
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$

Агол меѓу права и рамнина

Во случај кога правата $p \equiv \dfrac{x - x_P}{l} = \dfrac{y - y_P}{m} = \dfrac{z - z_P}{n}$ ја прободува рамнината $\Sigma \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, може да се пресмета аголот меѓу нив.

Агол меѓу права p и рамнина Σ е аголот φ што го зафаќа правата со својата ортогонална проекција p' врз рамнината Σ (сл. 3.16). Очигледно е дека важи $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \measuredangle(\vec{n}, \vec{p})$, па

$$\sin\varphi = \cos\measuredangle(\vec{n}, \vec{p}) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{p}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$



Слика 3.16

Ако $\varphi = 0$, тогаш правата p и рамнината Σ се паралелни или правата p лежи во рамнината Σ. Значи, ако векторот $\vec{n}$ е нормален на векторот $\vec{p}$, т.е. важи $\vec{n}\cdot\vec{p}=0$, тогаш правата p и рамнината Σ се паралелни или правата p лежи во рамнината Σ.

Скаларниот облик на равенката $\vec{n}\cdot\vec{p}=0$ е $Al+Bm+Cn=0$. Ова е еден од условите за правата и рамнината да се паралелни (види случај 2 од поглавје 3.4.3), а исто така и еден од условите за правата да лежи во рамнината (види случај 3 од 3.4.3).

Правата p е нормална на рамнината Σ ако и само ако векторот $\vec{p}$ е колинеарен со векторот $\vec{n}$ (т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Значи, правата p е нормална на рамнината Σ ако и само ако

$$\exists\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0,\ \vec{n}=\alpha\vec{p}, \text{ т.е. важи } \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Пример 5. Да се определи заемната положба на:

а) правата $p \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ и рамнината $\Sigma \equiv x+y+3z-5=0$, б) правата $p \equiv \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ и рамнината

$\Sigma \equiv 4x-3y+7z-7=0$,

в) правата $p \equiv \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-1}{2}$ и рамнината $\Sigma \equiv 2x+y-z-4=0$.

Во случај кога правата ја прободува рамнината, да се најде пресечната точка и да се определи аголот меѓу правата и рамнината.

Решение. а) Ако параметарските равенки на правата

$$p \equiv \begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$$

се заменат во равенката на рамнината, се добива линеарната равенка $2t+1+t-3-3t-5=0$ која нема решение, па заклучуваме дека правата p и рамнината Σ немаат заеднички точки, т.е. се паралелни.

б) Векторот на правец на правата p е

$$\vec{p}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=5\vec{i}+9\vec{j}+\vec{k}\text{, т.е. } \vec{p}=(5,9,1).$$

Ако во општите равенки на правата ставиме $x=0$, го добиваме системот

$$\begin{cases} -3y+2z-5=0 \\ -y-z-1=0 \end{cases}$$

чие решение е $y=-\dfrac{7}{5}$, $z=\dfrac{2}{5}$, со што ја добиваме точката $\mathrm{P}\left(0,-\dfrac{7}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ која лежи на дадената права p. Ако параметарските равенки на правата

$$p\equiv\begin{cases}x=5t\\ y=-7/5+9t\\ z=2/5+t\end{cases}$$

се заменат во равенката на рамнината, се добива линеарна равенка која има бесконечно многу решенија, па заклучуваме дека правата p и рамнината Σ имаат бесконечно многу заеднички точки, т.е. правата p лежи во рамнината Σ.

в) Ако параметарските равенки на правата

$$p\equiv\begin{cases}x=t\\ y=-1-3t\\ z=1+2t\end{cases}$$

се заменат во равенката на рамнината, се добива линеарна равенка која има едно решение $t=-2$, па заклучуваме дека правата p и рамнината Σ имаат една заедничка точка, т.е. правата p ја прободува рамнината Σ.

Ако добиената вредност за t се замени во параметарските равенки на правата се добива пресечната точка $\mathrm{A}(-2,5,-3)$. За аголот φ меѓу правата и рамнината се добива:

$$\sin\varphi=\frac{\vec{n}\cdot\vec{p}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|}=\frac{\{2,1,-1\}\cdot\{1,-3,2\}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=-\frac{3}{2\sqrt{21}}.$$ ▲

3.4.4. Заемен однос на две прави

Нека се дадени правите

$$p \equiv \frac{x-x_{\mathrm{P}}}{l_p} = \frac{y-y_{\mathrm{P}}}{m_p} = \frac{z-z_{\mathrm{P}}}{n_p} \text{ и } q \equiv \frac{x-x_{\mathrm{Q}}}{l_q} = \frac{y-y_{\mathrm{Q}}}{m_q} = \frac{z-z_{\mathrm{Q}}}{n_q}.$$

Вектори на правец на правите p и q се $\vec{p} = \left(l_p, m_p, n_p\right)$ и $\vec{q} = \left(l_q, m_q, n_q\right)$, соодветно. $\mathrm{P}\left(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}}\right)$ е точка од правата p, а $\mathrm{Q}\left(x_{\mathrm{Q}}, y_{\mathrm{Q}}, z_{\mathrm{Q}}\right)$ е точка од правата q. Можни се следниве случаи:

1) Правите p и q лежат во иста рамнина.

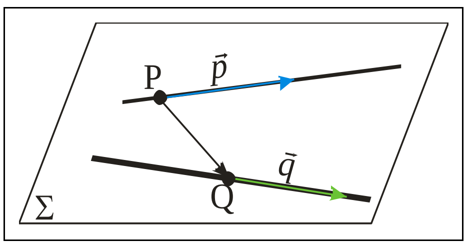
Во овој случај векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ лежат во иста рамнина Σ, па нивниот мешан производ е еднаков на нула. Според тоа, условот правите p и q да лежат во иста рамнина е:

$$\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right) = 0,$$

или во скаларен облик:

$$\begin{vmatrix} l_p & m_p & n_p \\ l_q & m_q & n_q \\ x_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{P}} & y_{\mathrm{Q}}-y_{\mathrm{P}} & z_{\mathrm{Q}}-z_{\mathrm{P}} \end{vmatrix} = 0.$$

Равенката на рамнината Σ во која лежат правите p и q може да се најде како равенка на рамнина низ точката $\mathrm{P}\left(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}}, z_{\mathrm{P}}\right)$ или точката $\mathrm{Q}\left(x_{\mathrm{Q}}, y_{\mathrm{Q}}, z_{\mathrm{Q}}\right)$ и нормален вектор $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$.



Слика 3.17

Ако двете прави лежат во иста рамнина, можно е тие да имаат една заедничка точка (да се сечат), да немаат заедничка точка (да се паралелни) или да имаат бесконечно многу заеднички точки (да се совпаѓаат).

1.1. Правите p и q се сечат во точка А ако лежат во иста рамнина, т.е. важи $\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right) = 0$ и ако нивните вектори на правец $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни, т.е. барем едно од равенствата $\dfrac{l_p}{l_q} = \dfrac{m_p}{m_q} = \dfrac{n_p}{n_q}$ не важи.

Координатите на пресечната точка А се определуваат на следниов начин: Правите се запишуваат во параметарски облик, при што параметарот во параметарските равенки на правата p е t_1, а во параметарските равенки на правата q е t_2. Со изедначување на соодветните равенки за x, y и z се добива линеарен систем од три равенки со две непознати t_1 и t_2. Бидејќи правите се сечат, овој систем има единствено решение, па со замена на добиената вредност за параметарот t_1 во параметарските равенки на правата p, или со замена на на добиената вредност за параметарот t_2 во параметарските равенки на правата q, се добиваат координатите на пресечната точка А.

1.2. Ако правите p и q лежат во иста рамнина, т.е. важи $\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right) = 0$ и нивните вектори на правец $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се колинеарни, т.е. важи $\dfrac{l_p}{l_q} = \dfrac{m_p}{m_q} = \dfrac{n_p}{n_q}$, тогаш правите p и q или се паралелни ($p \| q$), или се совпаѓаат ($p \equiv q$).

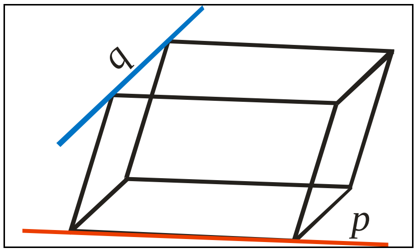
Ако важи $\frac{l_p}{l_q}=\frac{m_p}{m_q}=\frac{n_p}{n_q}$, тогаш јасно е дека $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)=0$.

Заклучуваме дека ако важи $\frac{l_p}{l_q}=\frac{m_p}{m_q}=\frac{n_p}{n_q}$ и правите имаат барем една заедничка точка, тогаш тие се совпаѓаат. Во спротивно, правите се паралелни.

2) Правите p и q не лежат во иста рамнина.

Во овој случај велиме дека правите се разминувачки.

Значи, $\left(\vec{p},\vec{q},\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)\neq 0$ е услов правите p и q да се разминувачки.



Слика 3.18

Агол меѓу две прави

Во случај кога правите

$$p\equiv\frac{x-x_{\mathrm{P}}}{l_p}=\frac{y-y_{\mathrm{P}}}{m_p}=\frac{z-z_{\mathrm{P}}}{n_p}\ \text{ и }\ q\equiv\frac{x-x_{\mathrm{Q}}}{l_q}=\frac{y-y_{\mathrm{Q}}}{m_q}=\frac{z-z_{\mathrm{Q}}}{n_q}$$

се сечат, може да се пресмета аголот меѓу нив.

Агол меѓу две прави p и q е аголот φ меѓу векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$, па

$$\cos\varphi=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{l_pl_q+m_pm_q+n_pn_q}{\sqrt{l_p^2+m_p^2+n_p^2}\cdot\sqrt{l_q^2+m_q^2+n_q^2}}.$$

Две прави што се сечат образуваат два различни агли: φ и $\pi-\varphi$.

Специјално, ако $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ тогаш правите p и q се нормални. Јасно е дека правите p и q се нормални ако лежат во иста рамнина (т.е. важи $\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right) = 0$) и нивните вектори на правец се заемно нормални (т.е. важи $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$). Скаларниот облик на равенството $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ е

$$l_p l_q + m_p m_q + n_p n_q = 0 .$$

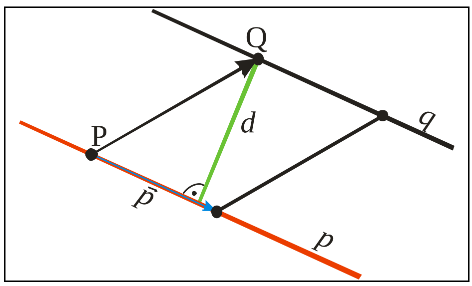
Растојание меѓу две прави

Нека се дадени правите

$$p \equiv \frac{x - x_{\mathrm{P}}}{l_p} = \frac{y - y_{\mathrm{P}}}{m_p} = \frac{z - z_{\mathrm{P}}}{n_p} \text{ и } q \equiv \frac{x - x_{\mathrm{Q}}}{l_q} = \frac{y - y_{\mathrm{Q}}}{m_q} = \frac{z - z_{\mathrm{Q}}}{n_q} .$$

Ако правите се сечат или се совпаѓаат, јасно е дека растојанието меѓу нив е еднакво на нула.

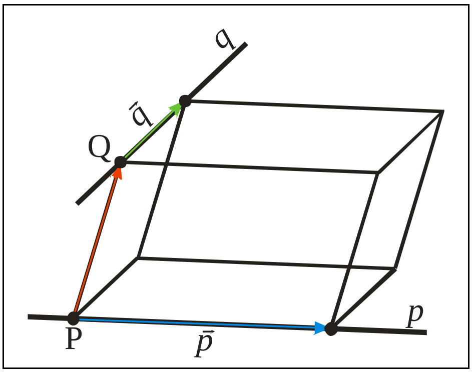
Ако правите p и q се паралелни, тогаш растојанието d меѓу нив се добива како растојание од точката P (која лежи на првата p) до правата q, или како растојание од точката Q (која лежи на првата q) до правата p, т.е.



Слика 3.19

$$d = \frac{\left|\vec{p} \times \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|}{|\vec{p}|} \text{ или } d = \frac{\left|\vec{q} \times \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|}{|\vec{q}|} .$$

Нека правите p и q се разминувачки. Најкраткото растојание d меѓу нив е еднакво на растојанието меѓу две паралелни рамнини, така што во едната рамнина лежи правата p, а во втората рамнина лежи правата q.



Слика 3.20

Конструираме паралелопипед над векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$. Од својствата на мешаниот производ знаеме дека волуменот на паралелопипедот е

$$V = \left|\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}\right)\right|.$$

Од друга страна, $V = B \cdot d$, каде што d е висината на паралелопипедот, т.е. растојанието меѓу двете паралелни рамнини, а B е плоштината на неговата основа. Од својствата на векторски производ имаме $B = \left|\vec{p} \times \vec{q}\right|$. Според тоа, растојанието меѓу двете разминувачки прави p и q е

$$d = \frac{\left|\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}\right)\right|}{\left|\vec{p} \times \vec{q}\right|}.$$

Пример 6. Да се определи заемната положба на дадените прави, а потоа да се пресмета растојанието меѓу нив:

а) $p \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$, $q \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$,

б) $p \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$, $q \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$,

в) $p \equiv \dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{1}$, $q \equiv \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z-2}{2}$.

Во случај кога правите се сечат, да се најде пресечната точка и да се определи аголот меѓу нив.

Решение. а) $\mathrm{P}(1,2,1)$ и $\mathrm{Q}(2,3,4)$ се точки од правите p и q соодветно, а $\vec{p}=(1,-1,3)$ и $\vec{q}=(1,2,3)$ се нивните вектори на правец, па следува $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\vec{p},\vec{q})=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$. Бидејќи векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не се колинеарни, заклучуваме дека правите се сечат, па растојанието меѓу нив е еднакво на нула.

За да ја добиеме пресечната точка на правите, нивните равенки ги доведуваме во параметарски облик:

$$p\equiv\begin{cases}x=t_1+1\\ y=-t_1+2\\ z=3t_1+1\end{cases} \text{ и } q\equiv\begin{cases}x=t_2+2\\ y=2t_2+3,\\ z=3t_2+4\end{cases}$$

од каде го добиваме системот равенки $\begin{cases}t_1+1=t_2+2\\ -t_1+2=2t_2+3.\\ 3t_1+1=3t_2+4\end{cases}$

Решението на системот е $t_1=\frac{1}{3}$ и $t_2=-\frac{2}{3}$, па пресечната точка на правите е $\mathrm{A}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right)$.

За аголот меѓу правите се добива:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{(1,-1,3)\cdot(1,2,3)}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}}=\frac{8}{\sqrt{154}}.$$

б) Од тоа што $\vec{p}=\vec{q}=(1,1,2)$ следува дека правите се паралелни или се совпаѓаат. Од параметарските равенки на правите

$$p \equiv \begin{cases} x = t_1 \\ y = t_1 + 1 \\ z = 2t_1 \end{cases} \text{ и } q \equiv \begin{cases} x = t_2 + 1 \\ y = t_2 \\ z = 2t_2 + 1 \end{cases},$$

го добиваме системот равенки $\begin{cases} t_1 = t_2 + 1 \\ t_1 + 1 = t_2 \\ 2t_1 = 2t_2 + 1 \end{cases}$ кој нема решение, па заклучуваме дека правите немаат заеднички точки, т.е. се паралелни.

За растојанието меѓу правите имаме $d = \dfrac{\left|\vec{p} \times \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|}{|\vec{p}\,|}$, каде што $\mathrm{P}(0,1,0)$ и $\mathrm{Q}(1,0,1)$ се точки од правите p и q соодветно. За векторскиот производ се добива $\vec{p} \times \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (3,1,-2)$, па

$$d = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}}\,.$$

в) $\mathrm{P}(9,2,0)$ и $\mathrm{Q}(0,-7,2)$ се точки од правите p и q соодветно, а $\vec{p} = (4,-3,1)$ и $\vec{q} = (-2,9,2)$ се нивните вектори на правец, па следува

$$(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \vec{p}, \vec{q}) = \begin{vmatrix} -9 & -9 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 285 \neq 0,$$

од каде заклучуваме дека правите се разминувачки.

Растојанието меѓу нив е $d = \dfrac{\left|\left(\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)\right|}{\left|\vec{p} \times \vec{q}\right|} = \dfrac{285}{35} = \dfrac{57}{7}\,.$ ▲

ЛИТЕРАТУРА

Anton H., Ross C., *Elementary Linear Algebra: Application Version*, 8th edition, John Wiley & Sons, 2000.

James G., Burley D., Dyke P., Searl J., Clements D., Wright J., *Modern Engineering Matemematics*, 3th edition, Prentice Hall, 2000.

Larson R., Hostetler R., Edwards B., *Calculus with Analytic Geometry*, 8th edition, Brooks Cole, 2005.

Miličić P.M., Ušćumlić M.P., *Elementi više matematike 1*, VIII izdanje, Građevinska knjiga, 2006.

Mitrinović D.S., Mihailović D., *Linearna algebra. Analitička geometrija. Polinomi*, II izdanje, Građevinska knjiga, 1962.

Улчар Ј., *Аналитичка геометрија со векторска алгебра*, II издание, Друштво на математичарите на град Скопје, Р.Е. "Нумерус" - Скопје, 1995.

Целакоски Н., *Задачи по линеарна алгебра*, Универзитет "Кирил и Методиј", 1978.

Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н., *Предавања по виша математика*, трето издание, Универзитет "Кирил и Методиј", 1981.

Шапкарев А.И., Кржовски П., *Линеарна алгебра со аналитичка геометрија во простор*, Универзитет "Кирил и Методиј", 1988.